Springer-Lehrbuch Masterclass

Finite Elemente

Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie

Bearbeitet von
Dietrich Braess

1. Auflage 2013. Taschenbuch. xvi, 369 S. Paperback
ISBN 978 3 642 34796 2
Format (B x L): 16,8 x 24 cm
Gewicht: 648 g

Weitere Fachgebiete > Mathematik > Numerik und Wissenschaftliches Rechnen

Vorwort

Für die fünfte Auflage wurde das Lehrbuch über Finite Elemente kräftig überarbeitet. Neben vielen kleinen Änderungen zur Abrundung der Theorie und zur Verdeutlichung von Querverbindungen finden sich größere Änderungen vor allem in zwei Bereichen.

Die größten Änderungen hat es im Kapitel über Finite Elemente in der Strukturmechanik gegeben. Eine Berechnung von Platten erfolgt üblicherweise über zweidimensionale Modelle. Diese Dimensionsreduktion wird nun – auf 50 Jahre alten Überlegungen aufbauend – auf eine solide Basis gestellt. Von dort aus versteht man dann auch Korrekturfaktoren, die bei Ingenieur-Anwendungen vielfach verwandt werden. Auch hier zeigt sich wieder: obwohl seitens der Ingenieure aus guten Gründen meist nichtkonforme Elemente implementiert werden, erscheint die Analyse mittels Sattelpunktmethoden universeller und damit zufriededenstellender.

Das Kapitel über nichtkonforme Elemente und Sattelpunktmethoden bildete von Anfang an einen Schwerpunkt dieses Buches. Bei letzteren denkt man zunächst an Variationsprobleme mit (expliziten) Nebenbedingungen wie beim Stokes-Problem, aber heute ist ebenso bedeutsam, dass man über äquivalente gemischte Methoden manche Finite-Element-Methoden versteht, bei denen die Motivation der Anwender einem Mathematiker nicht sofort einleuchtet.

In diese Kapitel gehören auch a posteriori Fehlerschätzer. Sie werden im Prinzip zügig abgehandelt, aber die charakteristischen Unterschiede zu den a priori Fehlerabschätzungen werden wir deutlicher als sonst üblich herausstellen. Dazu dient ein Vergleichssatz mit einer a priori Aussage, die mittels Techniken für a posteriori Aussagen hergeleitet wird. Dies unterstreicht außerdem die wachsende Beliebtheit des sogenannten Zwei-Energien-Prinzips. In der dritten Auflage dieses Buches war es noch rein formal ohne Beispiel genannt und ist jetzt mit zwei nicht-elementaren Beispielen vertreten.

Die Aufgaben am Ende der Abschnitte sind von unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad. Aufgaben mit einer witzigen Komponente mögen dem Leser zeigen, wie sich Aussagen bei unterschiedlichen Gesichtspunkten verändern können. Lösungen zu den schwierigen Aufgaben findet der Leser im Internet (http://hompage.rub.de/Dietrich.Braess). Dort sollen auch wieder Hinweise auf ausgewählte aktuelle Literatur und eine Liste störender Druckfehler bereitgestellt werden.

Natürlich sind in dieser Auflage all die kleinen Fehler beseitigt worden, die dem Autor von zahlreichen Lesern mitgeteilt wurden. Allen, die dazu beigetragen haben, möchte ich an dieser Stelle herzlich danken. Mein Dank gilt auch dem Springer-Verlag, der das Buch mit den Änderungen neu auflegt.

Bochum, im August 2012 *Dietrich Braess*

Vorwort zur ersten Auflage

Bei der numerischen Behandlung von elliptischen und parabolischen Differentialgleichungen wird heute sehr viel die Methode der Finiten Elemente eingesetzt. Die Methode erlaubt wegen ihrer Flexibilität auch die Behandlung schwieriger Probleme, weil sie — anders als Differenzenverfahren oder Rechnungen mit Finiten Volumen — auf die Variationsformulierung der Differentialgleichung zugeschnitten ist. Die Entwicklung von Finiten Elementen verlief lange bei Mathematikern und Ingenieuren parallel, ohne daß dies zunächst wahrgenommen wurde. Ende der 60er und Anfang der 70er Jahre erfolgte die Entwicklung des Begriffsapparats mit einer Standardisierung, die es dann ermöglichte, den Stoff auch den Studenten vorzustellen. Aus einer Reihe von Vorlesungen ist dieses Buch auch hervorgegangen.

Im Gegensatz zu der Situation bei gewöhnlichen Differentialgleichungen gibt es bei elliptischen partiellen Differentialgleichungen nicht immer klassische Lösungen und oft nur sogenannte schwache Lösungen. Das hat nicht nur Auswirkungen auf die Theorie, sondern auch auf die numerische Behandlung. Zwar existieren klassische Lösungen unter Regularitätsvoraussetzungen, wegen der mit numerischen Rechnungen verbundenen Approximation können wir uns jedoch nicht auf einen Rahmen festlegen, in dem nur klassische Lösungen vorkommen.

Für die Behandlung elliptischer Randwertaufgaben durch Finite Elemente liefert die Variationsrechnung einen passenden Rahmen. Es ist das Ziel von Kapitel II, hier einen möglichst einfachen Einstieg zu geben. In den Paragraphen 1–3 wird die Existenz von schwachen Lösungen in Sobolev-Räumen hergeleitet und dargestellt, wie in der Variationsrechnung die Randbedingungen erfaßt werden. Um dem Leser ein Gefühl für den Umgang mit der Theorie zu vermitteln, werden einige Eigenschaften der Sobolev-Räume hergeleitet oder wenigstens illustriert. Die Paragraphen 4–8 sind dann den eigentlichen Grundlagen der Finiten Elemente gewidmet. Den schwierigsten Teil machen die Approximationssätze in §6 aus. Deshalb wird dort vorab der Spezialfall regelmäßiger Gitter behandelt; auf diesen Fall möge sich der Leser beim ersten Lesen beschränken.

In Kapitel III kommen wir zu dem Teil der Theorie der Finiten Elemente, der tieferliegende Methoden der Funktionalanalysis benötigt. Letztere werden in §3 bereitgestellt. Der Leser lernt die berühmte Ladyshenskaja-Babuška-Brezzi-Bedingung kennen, die für die sachgemäße Behandlung von Problemen der Strömungsmechanik und der gemischten Methoden in der Strukturmechanik wichtig ist. Wenn man sich ohne diese Kenntnisse auf den *gesunden Menschenverstand* verläßt, wird man in der Strömungsmechanik leider dazu verleitet, Elemente mit instabilem Verhalten zu benutzen.

Es war unser Bestreben, möglichst wenig an Kenntnissen in der reellen Analysis und der Funktionalanalysis vorauszusetzen. Andererseits ist ein gewisses Hintergrundwissen nützlich. Darum wird in Kapitel I der Unterschied zwischen den verschiedenen Typen von partiellen Differentialgleichungen kurz erläutert. Wer zum ersten Male mit der numerischen Lösung elliptischer Differentialgleichungen konfrontiert ist, empfindet den Zugang über die Differenzenverfahren meistens als leichter. Die Grenzen sieht man erst später. Eine solche erste Begegnung ist mit Kapitel I beabsichtigt, und auf Vollständigkeit der Theorie wird so bewußt verzichtet.

Die Finite-Element-Methode führt bei feiner werdender Diskretisierung auf große Gleichungssysteme. Bei der Lösung mit direkten Verfahren steigt der Aufwand wie n^2 an. In den letzten zwei Jahrzehnten wurden nun mit der Methode der konjugierten Gradienten und mit den Mehrgitterverfahren sehr effiziente Löser entwickelt, die in den Kapiteln IV und V ausgiebig vorgestellt werden.

Ein wichtiger Anwendungsbereich für Finite Elemente ist die Strukturmechanik. Weil hier Systeme von Differentialgleichungen zu lösen sind, kommt man oft nicht mit den elementaren Methoden aus Kap. II aus und muß von der Freiheit Gebrauch machen, die einem die tieferliegenden Ergebnisse aus Kap. III ermöglichen. Es waren die verschiedensten Bausteine zusammenzubringen, um eine mathematisch tragfähige Theorie für die Behandlung der Probleme in der linearen Elastizitätstheorie mit Finiten Elementen zu erhalten.

Fast jeder Paragraph endet mit einigen Aufgaben, die nun nicht nur Übungen im strengen Sinne sind. Manche Aufgabe besteht darin, eine Formel oder ein Resultat aus einem anderen Blickwinkel zu betrachten oder liefert einen Hinweis, der im Text selber den Fluß gestört hätte. Bekanntlich kann man bei der Behandlung partieller Differentialgleichungen über manche Fallen stolpern, wenn man — sei es auch nur unbewußt — klassische Lösungen vor Augen hat. Den Blick für solche Fallen zu schärfen, ist das Ziel mancher Aufgabe.

Das Buch baut auf Vorlesungen auf, die den Studenten im 5.–8. Semester an der Ruhr-Universität in regelmäßigen Abständen angeboten werden. Die Vorlesungen behandelten die Kapitel I und II sowie Teile der Kapitel III und V, während die Methode der konjugierten Gradienten in andere Vorlesungen eingegliedert ist. Das Kapitel VI entstand aufgrund von Verbindungen, die an der Ruhr-Universität zwischen Mathematikern und Ingenieuren bestehen.

Ein solcher Text kann nur dank der Mithilfe vieler zustande kommen, und an dieser Stelle möchte ich insbesondere F.-J. Barthold, C. Blömer, H. Blum, H. Cramer, W. Hackbusch, A. Kirmse, U. Langer, P. Peisker, E. Stein, R. Verfürt, G. Wittum und B. Worat für ihre Korrekturen und Verbesserungsvorschläge danken. Frau L. Mischke, die den Text in TeX gesetzt hat, danke ich für ihre unermüdliche Arbeit und Herrn Schwarz für seine Hilfe bei der Bewältigung von TeX-Problemen. Schließlich gilt mein Dank dem Springer-Verlag für die Publikation des Buches und die stets angenehme Zusammenarbeit.

Bochum, im Herbst 2031 *Dietrich Braess*