Europäische Hochschulschriften

Philosophie

Franz Schörkhuber

Wittgenstein und die Geometrische Auffassung des Beweises

PL ACADEMIC RESEARCH

II. Der logizistische Standpunkt

Es soll hier die generelle Argumentationsstruktur für die These des Logizismus, wie er von Bertrand Russell (1872–1970) vertreten wurde, dargestellt werden. Um die ursprünglichen Motive der logischen Grundlegung der Mathematik besser herausstellen zu können, wird auch auf seinen Vorgänger, Gottlob Frege (1848–1925), einzugehen sein. An dieser Stelle ist allerdings keine erschöpfende Diskussion ihrer Standpunkte zu erwarten. Der Fokus liegt vielmehr auf jenen logizistischen Grundannahmen, die Wittgenstein in den für die vorliegende Arbeit herangezogenen Manuskripten (MS 122 & 117-II) problematisiert. Während sich nämlich die gängigen Haupteinwände gegen den Logizismus in der Regel auf Probleme mit seiner formallogischen Stringenz beziehen (motiviert u. a. durch Gödels Unvollständigkeitssatz), setzt die Kritik Wittgensteins bereits wesentlich früher an, oder auch: sie ist grundsätzlicher. Er stellt den Wert des reduktionistischen Programms selbst in Frage, und kümmert sich weniger um technische Details, die sich bei der formalen Durchführung ergeben. (Die Betonung liegt hier auf *formal*; die Frage nach der tatsächlichen Durchführbarkeit des logizistischen Anspruchs im Sinne des „Rechnens mittels Logik“, wird sich sehr wohl als zentraler Teil der Kritik erweisen.)

Aus diesem Grund wird es weder notwendig sein explizit auf die von Russell zur Vermeidung der logischen Antinomien entworfene Typentheorie einzugehen noch auf die sich daran anschließenden Probleme mit dem Unendlichkeits- und dem Reduzibilitätsaxiom. Damit ist nicht gesagt, dass Wittgenstein selbst sich nicht sehr eingehend mit dem vorgeblichen Problem eines sich innerhalb eines Axiomensystems ergebenden Widerspruchs und auch mit Russells diesbezüglichen Lösungsversuchen auseinandergesetzt hätte.[2] In der vorliegen-

2 Siehe hierzu insbesondere seine Besprechung des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes in BGM I, Anhang III; aber auch seine expliziten Kritiken an der Typentheorie und dem Unendlichkeitsaxiom in LPA 5. ff. Auch in dem hier im Fokus stehenden Manuskript 117 (Basis für den zweiten Teil von BGM III) gelangt Wittgenstein zu Fragen hinsichtlich der Konsistenz von Beweiskalkülen und problematisiert die von Mathematikern und Grundlagentheoretikern oft erhobene Forderung nach entsprechenden Beweisen. (Eine Forderung die seines Erachtens auf der irreführenden Vorstellung fußt, wonach die Konstruierbarkeit eines Widerspruchs den ganzen Kalkül zunichtemacht.) Obwohl ich überzeugt bin, dass ein enger Zusammenhang zu der hier behandelten Kritik an Russell und Whitehead ausgemacht werden könnte, werde ich mich nicht in dieses Problemfeld begeben, sondern die Darstellung der Wittgensteinschen Gedankenbewegung schon vorher abschließen.

den Arbeit sollen diese Fragen aus Gründen des Umfangs bewusst zurückgehalten werden. Wer mit der Materie vertraut ist, wird allerdings erkennen, dass die problematisierte Undeutlichkeit Russells bezüglich des Verhältnisses von Begriff und Gegenstand gerade in der mittels des Reduzibilitätsaxioms vollzogenen Egalisierung der zuvor durch die Typentheorie aufgestellten Restriktionen, wie auch am Schillern des von ihm entworfenen Klassenbegriffs, zum Ausdruck kommt.[3]

1 Freges Anfang

Die Idee des von Frege in der hier relevanten Form begründeten Logizismus ist, dass alle Sätze der Arithmetik in logischer Terminologie beweisbar sind und demzufolge die Arithmetik auf Logik zurückgeführt werden kann. Entgegen der Kantischen Auffassung, wonach mathematische Urteile synthetisch a priori seien (KrV B, S. 14 ff.), versucht Frege deren analytischen Charakter darzulegen. Die Analytizität einer mathematischen Wahrheit besteht seinem Verständnis nach darin, dass sie ohne Zuhilfenahme empirischer Tatsachen oder psychologischer Bedingungen zu rechtfertigen ist, zumal „auch ein scheinbar eigentümlich mathematischer Schluss wie der von n auf n + 1 auf den allgemeinen logischen Gesetzen beruht“ und es sonach „besondrer Gesetze des aggregativen Denkens nicht bedarf.“ (GLA, S. iv) A priori ist eine solche Wahrheit dann, wenn der ge-

3 Worauf ich hier anspiele, ohne aber näher darauf eingehen zu wollen, ist die an ein Chamäleon erinnernde Rolle der „Klasse“ in den Schriften Russells (v. a. nach den Principles of Mathematics. 1903), indem das Wort einmal so gebraucht wird als bezeichne es eine Ansammlung von Elementen, dann wieder so als sei es die, obgleich unabhängig vom prädizierenden Begriff subsistierende, Eigenschaft, die jene Elemente zum gemeinsamen Merkmal haben. (Die Klasse einmal als Vielheit, einmal als Gesamtheit gedacht.) – Ich bin also der Ansicht, dass der Russellsche Begriff der Klasse einen Unterschied verwischt, der in Freges Trennung von Begriff und Begriffsumfang (siehe GGA I, § 3, § 9, § 20) in voller Schärfe zum Ausdruck kommt. Und während Frege im fünften Grundgesetz (GGA I, S. 35) die Allgemeinheit einer Gleichheit von Begriffen und die Gleichheit ihrer Wertverläufe explizit miteinander identifiziert – und insoweit auch die Möglichkeit offenlässt, den vermeintlichen Brückenschlag vom Begriff zum Gegenstand zu beeinspruchen – vollzieht er sich bei Russell in einem stillschweigenden Wechsel der Gebrauchsweise des Begriffs der Klasse, – die von einer extensionalen Vielheit zur intensionalen Einheit wird, sobald er den Schritt zu Klassen zweiter Ordnung macht, die aus solchen erster Ordnung bestehen.

führte Nachweis allein auf logischen Grundsätzen beruht, „die selber eines Beweises weder fähig noch bedürftig sind." (GLA, S. 4)

Frege meint den Begriff der Anzahl, auf dem gemäß einer gängigen Ansicht die Arithmetik beruht, mittels rein logischer Begriffe definieren zu können. Gelingt es letzteres zu zeigen, gilt das als Wahrscheinlichkeitsbeleg dafür, „dass die arithmetischen Gesetze analytische Urteile und folglich a priori sind."

> Demnach würde die Arithmetik nur eine weiter ausgebildete Logik, jeder arithmetische Satz ein logisches Gesetz, jedoch ein abgeleitetes sein. Die Anwendungen der Arithmetik zur Naturerklärung wären logische Bearbeitungen von beobachteten Thatsachen; Rechnen wäre Schlussfolgern. (GLA, S. 99)[4]

Nachdem er in den *Grundlagen der Arithmetik* (1884) den Begriff der Anzahl durch logische Terme definiert und damit die logizistische These plausibel gemacht hatte, lieferte Frege in seinen *Grundgesetzen der Arithmetik* (1893, 1903) mittels einer bereits in der *Begriffsschrift* (1879) entwickelten Formelsprache scheinbar auch den formalen Nachweis für diese These, indem er die wichtigsten mathematischen Sätze über die natürlichen Zahlen mittels entsprechender Einsetzungs- und Umformungsregeln aus fünf logischen Grundgesetzen ableitete. Allerdings wies ihn Bertrand Russell kurz vor Erscheinen des zweiten Bandes der *Grundgesetze* in einem Brief vom 16. 06. 1902 (WB, S. 211 f.) darauf hin, dass das von Frege selbst bereits als nicht vollkommen sattelfest gekennzeichnete Grundgesetz V (GGA I, § 20, S. 35) zu einem Widerspruch führt. Nachdem er einen zunächst unternommenen, dem zweiten Band der *Grundgesetze* angefügten Versuch zur Ausschließung der logischen Antinomien als fehlgeleitet erkennen musste, betrachtete Frege sein Lebensprojekt, die Mathematik mit einem festen und einheitlichen Fundament auszustatten, als gescheitert.[5]

---

4 Auf den hier vorausgesetzten Zusammenhang, der zwischen der Rückführung der Arithmetik auf Logik und ihrer Anwendung auf die Tatsachen der täglichen Erfahrung besteht, wird im nächsten Kapitel einzugehen sein.

5 In den beiden Nachlasstexten Logik in der Mathematik (1914) und Neuer Versuch der Grundlegung der Arithmetik (1924/25) kann man Freges Bemühen erkennen, den Zusammenhang zwischen Logik und Arithmetik nochmals herauszustellen, obgleich er die Meinung aufgibt, wonach „die Arithmetik ein Zweig der Logik sei und daß demgemäß in der Arithmetik alles rein logisch bewiesen werden müsse." (NS, S. 298) Das letzte dieser beiden Fragmente ist, vor allem in Hinblick auf die vorliegende Arbeit, deswegen höchst interessant, weil Frege die allgemeine These, dass die Arithmetik keinen Beweisgrund aus der Erfahrung nehmen dürfe, fallen lässt, und eine, allerdings von der Sinneswahrnehmung unterschiedene, ursprüngliche Anschauung als Erkenntnisquelle mathematischer Axiome geltend macht:

Nicht so jedoch Russell, der das von ihm selbst aufgestellte Paradox schließlich als das Resultat einer missbräuchlichen, weil von einer imprädikativen Definition Gebrauch machenden Begriffsbildung auszuweisen können glaubte, die mittels entsprechender Typenrestriktionen zu vermeiden wäre. Hier wird aber weder auf die von Russell und Whitehead in den *Principia Mathematica* (1910, 1911, 1913) entwickelte Typentheorie noch auf die in weiterer Folge notwendig werdenden Axiome einzugehen sein. Denn diese zusätzlichen Theorien sind im Grunde nur Ausbesserungsversuche einer sich an manchen Stellen lückenhaft erweisenden Auffassung, deren Betrachtung keineswegs dieselbe philosophische Relevanz zukommen kann, wie der prinzipiellen Frage nach der Plausibilität eben dieser Auffassung selbst. Wobei nicht ausgeschlossen sein soll, dass im Falle von Whitehead und Russell gerade deren zweischneidiger Umgang mit diesen sich auftuenden Lücken (Typentheorie und Reduzibilitätsaxiom) ein gutes Erkennungszeichen für die prinzipielleren Schwierigkeiten ihres Standpunkts abgeben kann. An dieser Stelle ist vorerst nur wichtig, dass Russell der Frege-schen Ansicht über die Anzahl im Wesentlich zustimmt und es in der folgenden Darstellung der Russellschen Position zulässig sein wird, zuweilen auf Frege zurückzukommen. Davon abgesehen, dass er z. B. nicht wie Frege von Begriffen und unter sie fallenden Gegenständen, sondern von Klassen und den sie konstituierenden Elementen spricht, erinnern Russells Formulierungen und Definitionen häufig an die seines Vorgängers. Und selbst wenn durch das Einfließen Fregescher Termini die dargestellte Position nicht mehr ganz derjenigen von Russell entspricht, muss dies nicht unbedingt als folgenschweren Fehler gewertet werden. Denn diese Arbeit hat sich nicht zum Ziel gesetzt, den Autor Russell des philosophischen Irrtums zu überführen. Der Anspruch ist vielmehr, eine in mancherlei Hinsicht sehr naheliegende Auffassung vom mathematischen Beweis

---

> Das ist dadurch bedeutsam, weil damit Arithmetik und Geometrie, also die gesamte Mathematik einer und derselben, nämlich der geometrischen Erkenntnisquelle entfließt, die damit zum Range der eigentlichen mathematischen Erkenntnisquelle aufsteigt, wobei natürlich die logische Erkenntnisquelle immer mitbeteiligt ist. (NS, S. 299)

Diese leider sehr spärlichen Bemerkungen zeigen das unermüdliche Streben Freges nach Klarheit betreffs des allgemeinen erkenntnistheoretischen Fundaments der Mathematik. Dass er in den letzten Jahren seines Lebens sogar der von ihm zuvor oft so heftig kritisierten Idee eines synthetischen Charakters mathematischer Sätze (siehe beispielsweise seine Kant-Kritik in den Grundlagen) Raum gibt, ist dafür ein beeindruckender Beleg. In gewisser Weise nimmt er hier Gedanken vorweg, wie sie Wittgenstein ausgehend von seiner Kritik am logizistischen Begründungsunternehmen dann im Detail entwickeln wird.

als problematisch auszuweisen, sowie die Probleme zu schildern, die sich ergeben, sobald man eine solche Auffassung zu kritisieren beginnt. Und zur Darstellung dieser Position ist es hilfreich, beide Autoren heranzuziehen. Zudem ist zu bemerken, dass sich Wittgensteins Bemerkungen zwar namentlich meist nur auf Russell beziehen (er spricht etwa vom „Russellschen Beweis", von „Russells Methode" oder „Russells Kalkül"), die gewählten Termini (z. B. „Begriff" und „Gegenstand") erinnern aber häufig an Freges Theorien und Formulierungen.

2 Die Bedingung der Anwendbarkeit arithmetischer Sätze

Russells Ausgangspunkt ist die von Giuseppe Peano (*Arithmetices principia, nova methodo exposita*, 1889) begründete Axiomatik der natürlichen Zahlen, in der mit Hilfe der als bekannt vorausgesetzten Grundbegriffe „0", „Zahl" und „Nachfolger", sowie den daraus gebildeten Axiomen, das gesamte System der natürlichen Zahlen abgeleitet wird. Das Problem dieser mathematischen Theorie sieht Russell darin, dass die drei erwähnten Grundbegriffe undefiniert vorausgesetzt bleiben. Nur wenn bereits ein allgemeines, aus dem Alltag genommenes Verständnis der Terme „0", „Zahl" und „Nachfolger" gegeben sei, könnten die Sätze über die natürlichen Zahlen, und damit die gesamte reine Mathematik abgeleitet werden. Da aber die drei Begriffe für sich genommen viele Auslegungen erlauben, kann die Begründung, so Russell, nicht auf diese Weise erfolgen.

> This point, that "0" and "number" and "successor" cannot be defined by means of Peano's five axioms, but must be independently understood, is important. We want our numbers not merely to verify mathematical formulæ, but to apply in the right way to common objects. We want to have ten fingers and two eyes and one nose. A system in which "1" meant 100, and "2" meant 101, and so on, might be all right for pure mathematics, but would not suit daily life. We want "0" and "number" and "successor" to have meanings which will give us the right allowance of fingers and eyes and noses. We have already some knowledge (though not sufficiently articulate or analytic) of what we mean by "1" and "2" and so on, and our use of numbers in arithmetic must conform to this knowledge. (IMP, S. 9)

Daraus erwächst für Russell die Forderung, eine Definition der bei Peano undefiniert vorausgesetzten Grundbegriffe zu geben. Erst wenn der Sinn der Zahlbegriffe eindeutig bestimmt ist, kann die Anwendung, die wir von ihnen tagtäglich machen, gerechtfertigt werden. Um in seinem Bild zu sprechen: wenn wir die Zahl 5 auf die Finger an unserer Hand anwenden, setzt dies voraus, dass wir eine spezifische Kenntnis vom Sinn dieses Terms haben; da wir im Alltag die 5 tatsächlich in dieser Weise gebrauchen, muss es daher auch möglich sein, das dabei angewandte Wissen zu explizieren. – In dieser Argumentation geht der Anwendungsmöglichkeit von Zahlen die Kenntnis ihres Sinns logisch voraus. Das ist vor allem deshalb bemerkenswert, weil in der noch zu gebenden Definition zwar das Primat einer intensionalen Auffassung der Zahl betont wird, diese Definition aber zugleich die Anwendung der Zahl auf Gegenstände sicherstellen soll, indem die letzteren als die, zunächst noch unbestimmt gelassenen, Elemente einer Klasse gefasst werden. Das heißt, die Sinnbestimmung scheint einerseits dem tatsächlichen Rechnen vorhergehen zu müssen, kommt aber gleichzeitig nicht ohne dasjenige aus, worauf der durch sie spezifizierte Ausdruck später anzuwenden sein wird. An dieser Stelle zeigt sich sehr gut, was Wittgenstein als eine wesentliche Motivation des logizistischen Projekts identifizieren wird – nämlich, die Anwendbarkeit der Mathematik eigens rechtfertigen zu wollen – und die sich bei Frege folgendermaßen äußert:

> Und doch kann man wohl von der Arithmetik verlangen, dass sie die Anknüpfungspunkte für jede Anwendung der Zahl bieten muss, wenn auch die Anwendung selbst nicht ihre Sache ist. Auch das gewöhnliche Rechnen muss die Begründung seines Verfahrens in der Wissenschaft finden. (GLA, S. 26)

3 Das Primat der Intension

Wir wollen aber nicht vorgreifen und vorerst Russells Argumente dafür vorlegen, weshalb die intensionale, d.i. die vom Begriffsinhalt ausgehende, Definition der Zahl der durch Aufzählung erfolgenden extensionalen Definition vorzuziehen sei. Im Rahmen der in der *Introduction to Mathematical Philosophy* (1919) präsentierten Auffassung rekurriert er dabei auf Frege, der in seinen *Grundlagen* (1884) eine stichhaltige, zuweilen auch stark polemische Kritik an der von John Stuart Mill u. a. in *A System of Logic Ratiocinative and Inductive* (1843) vertretenen Theorie liefert, wonach mathematische Sätze das Bestehen einer physikalischen Tatsache behaupten. (Mill 1843, Book II, S. 252–261; Book III, S. 604–621) Freges Vorwurf ist bezeichnenderweise der, dass Mill dabei die mögliche Anwendung eines mathematischen Satzes mit diesem selbst verwechselt. So könne zwar der mathematische Satz ‚5+7=12' seine Applikation darin finden, „dass wenn man zu 5 Raumtheilen Flüssigkeit 2 Raumtheile Flüssigkeit giesst, man 7 Raumtheile Flüssigkeit erhalte." (GLA, S. 13) Diese Tatsachenbehauptung, die nur Gültigkeit hat, „wenn nicht infolge etwa einer chemischen Einwirkung eine Volumänderung eintritt", dürfe aber deswegen nicht mit dem mathematischen Satz ‚5+7=12' verwechselt werden, dem eine von aller Erfahrungswirklichkeit ganz unabhängige, und damit gleichsam ewige, Wahrheit zukommt.

Dieser Fregeschen Kritik entsprechend betont nun Russell, dass z. B. jedes Männertrio eine Instanziierung der Zahl drei sei, dass aber kein spezifisches Männertrio mit der Zahl drei gleichgesetzt werden dürfe. Die Zahl drei sei vielmehr etwas, das alle Trios dieser Welt gemeinsam haben, und wodurch sie von anderen Auswahlen (Duos, Quartetten, etc.) unterschieden sind. Russell bezeichnet solche Auswahlen als Klassen und die sie konstituierenden Gegenstände (hier beispielsweise die drei Männer Brown, Jones und Robinson) als deren Elemente. Er zeigt nun zwei Wege, eine Klasse zu definieren. Entweder zählt man ihre Elemente auf, wie im Falle des angesprochenen Trios, wo wir sagten, die gemeinte Auswahl bestünde aus Brown, Jones und Robinson. Oder aber es wird die, wie Russell es nennt, *definierende Eigenschaft* der Klasse angegeben; dies ist etwa der Fall, wenn wir von „der Menschheit" oder „den Einwohnern Londons" sprechen. (IMP, S. 12) Von diesen beiden Alternativen der Klassenbestimmung glaubt Russell nun sagen zu können, dass die zweite die logisch fundamentalere sei, weil zwar (1.) jede extensionale Definition (Aufzählung) auf eine intensionale Definition zurückgeführt werden könne, wohingegen (2.) der umgekehrte Fall nicht immer zuträfe. Betrachten wir die von Russell angeführte Begründung etwas genauer.

(1.) Zuvor definierten wir das Männertrio, indem wir dessen Teilnehmer aufzählten. Man kann aber die aus Brown, Jones und Robinson zusammengesetzte Klasse auch auf andere Weise bestimmen, nämlich durch die Angabe der Eigenschaft, entweder Brown oder Jones oder Robinson zu sein. Diese Eigenschaft („… ist entweder Brown oder Jones oder Robinson") kommt nun genau den drei Elementen der zuvor durch Aufzählung definierten Klasse zu und kann deswegen als eindeutige Definition dieser Klasse dienen. Russell versucht damit zu zeigen, dass jede Aussage über Gegenstände ersetzt werden kann durch eine Aussage über die unbestimmt gelassenen Elemente jener Klasse, unter die sie fallen. Anstatt von Brown und Jones und Robinson zu reden, können wir von jenen Variablenwerten (x_1, x_2, x_3) sprechen, die den Begriff „*x* ist Brown oder Jones oder Robinson" sättigen.

(2.) Der zweite Grund, den Russell für seine These vom Primat der intensionalen Definition nennt, besteht in der Tatsache, dass wir häufig mit Bestimmtheit von Klassen reden, ohne doch ihre Elemente anführen zu können. Mit den Ausdrücken „Menschheit" oder „Einwohner Londons" verbindet wir in der Regel einen Sinn, obschon kaum jemand all die Einwohner Londons, geschweige denn der Welt aufzuzählen vermöchte. Russell nimmt dies als Beleg dafür, dass wir ein Wissen von Klassen haben können, ohne deren Elemente genauer zu kennen, d. h., ohne in der Lage zu sein, die Klasse durch Aufzählung der einzelnen Glieder zu definieren. Erwartungsgemäß geht er schließlich noch ein Stück weiter und führt die unendliche Anzahl der natürlichen Zahlen als Beleg für seine These ins Feld: denn wie sonst sollte der sterbliche Mensch ein Wissen von unendlichen, und daher realiter nicht abzählbaren, Mengen erlangen können, wenn nicht durch Definitionen, die vom Begriff ausgehen! – Worin dies Wissen genau besteht, das unterschlägt Russell ebenso, wie Frege keine klare Charakteristik des Sinns gibt; von dem man sagen könnte, dass er zur Erfüllung derselben Absicht dient, wie sie Russell bei der Sicherstellung des Primats der intensionalen Definition von Klassen verfolgt. Es geht darum, die Identität eines Begriffs zu gewährleisten noch bevor der Schritt zu den tatsächlich unter ihn fallenden Gegenständen gemacht wird.[6]

4 Anzahlengleichheit basierend auf eindeutiger Zuordnung

Die Zahl wird bei Russell nun dadurch erhalten, dass all jene Klassen, die die gleiche Anzahl an Elementen aufweisen, in einer gemeinsamen Klasse höherer Ordnung untergebracht werden. Auf diese Weise sei es möglich, alle Paare (als Klassen zweier Elemente) in der einen, alle Trios (als Klassen dreier Elemente) in der nächsthöheren Klasse, usf., zusammenzufassen. Man kommt so zu verschiedenen Klassen, die ihrerseits Klassen mit je gleich vielen Elementen enthalten, ohne dass doch die Anzahl dieser letztgenannten Klassen selbst wieder bestimmt sein müsse; ja Russell hält es sogar für sehr wahrscheinlich, dass beispielsweise die Zahl aller Trios unendlich sei. (Wobei der Grund für sein Dafürhalten mit dem Willen zum Unendlichkeitsaxiom zusammenhängt.) Die zu beantwortende Frage ist dann, wie zu entscheiden sei, dass zwei gegebene Klassen einer solchen höherer Ordnung als deren Elemente angehören.

6 In Abgrenzung zu Frege und Russell entwickelte Frank P. Ramsey (Mathematical Logic, 1925) eine Theorie, der eine strikt extensionale Auffassung des Begriffes zugrundeliegt. Wie sich im nächsten Hauptkapitel zeigen wird, schlägt sich Wittgenstein weder auf die eine oder die andere Seite, sondern erkennt beiden Betrachtungsweisen ihre (allerdings beschränkte) Gültigkeit zu.