

# Große Sätze und schöne Beweise der Mathematik

Identität des Schönen, Allgemeinen, Anwendbaren

von  
Josef Naas, Wolfgang Tutschke

3., korr. u. erw. Aufl.

[Große Sätze und schöne Beweise der Mathematik – Naas / Tutschke](#)

schnell und portofrei erhältlich bei [beck-shop.de](#) DIE FACHBUCHHANDLUNG

Thematische Gliederung:

[Populäre Darstellungen der Mathematik](#)

Harri Deutsch 2009

Verlag C.H. Beck im Internet:

[www.beck.de](http://www.beck.de)

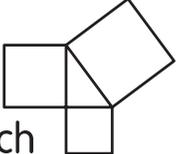
ISBN 978 3 8171 1822 9

Josef Naas  
Wolfgang Tutschke

# Große Sätze und schöne Beweise der Mathematik

Identität des Schönen, Allgemeinen, Anwendbaren

Verlag  
Harri  
Deutsch



Dr. Josef Naas (†) war Professor für Mathematik an der Akademie der Wissenschaften in Berlin.

Dr. Wolfgang Tutschke ist emeritierter Professor für Mathematik an der Technischen Universität Graz.

Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH  
Gräbstraße 47  
60486 Frankfurt am Main  
verlag@harri-deutsch.de  
www.harri-deutsch.de

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

**ISBN 978-3-8171-1822-9**

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches – oder von Teilen daraus – sind vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet werden.

Zuwendungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autor und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler keine Haftung.

3., korrigierte und erweiterte Auflage 2009

©Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, Frankfurt am Main, 2009

Druck: betz-druck GmbH, Darmstadt <[www.betz-druck.de](http://www.betz-druck.de)>

Printed in Germany

## Vorwort zur 3., korrigierten und erweiterten Auflage

Seit der ersten Auflage der *Großen Sätze und schönen Beweise der Mathematik* sind mehr als zwanzig Jahre vergangen, eine Zeitspanne, in der sich auch in der Mathematik vielerlei neue Entwicklungen ergeben haben. Insbesondere die Nutzung elektronischer Hilfsmittel hat auch die Mathematik zu einem noch bedeutsameren Wirtschaftsfaktor werden lassen. Diese Entwicklung hat neben anderen Auswirkungen auch dafür erforderliche Spezialisierungen in der Mathematik noch verstärkt. Damit ist das im Vorwort der ersten Auflage erwähnte Anliegen auch heute noch unverändert aktuell: Um die Wirksamkeit einer Grundlagenwissenschaft wie der Mathematik zu erhöhen, soll versucht werden, prinzipielle mathematische Denkweisen einem größeren Leserkreis aus allen Wissensbereichen zugänglich zu machen.

Das Buch wendet sich daher insbesondere auch an Leser (wie Naturwissenschaftler und Ingenieure), die spezielle mathematische Methoden in ihrem Beruf anwenden, und die darüber hinaus erfahren wollen, was die Mathematik sonst noch so zu bieten hat. Wer ein volles Mathematik-Studium absolviert, lernt natürlich ein relativ breites Spektrum mathematischer Denkweisen kennen, wenngleich die jetzige Aufspaltung des Diplom-Studiums in ein Bachelor- und ein Master-Studium die Tendenz einer frühzeitigen Spezialisierung ebenfalls verstärkt. Und so ist es nicht unwahrscheinlich, dass auch ein ausgebildeter Mathematiker den einen oder anderen für ihn neuen Gesichtspunkt findet.

Daher bin ich dem Verlag HARRI DEUTSCH dankbar, eine Neuauflage geplant zu haben, nachdem die bisherigen Auflagen und Nachdrucke im Akademie-Verlag Berlin und Verlag HARRI DEUTSCH vergriffen waren. Während das ursprüngliche Manuskript in der früher üblichen Weise hergestellt worden war (handschriftliches Manuskript, dann Abschrift mit Schreibmaschine und Eintragen der Formeln, händischer Drucksatz mit Fahnen- und Bogenkorrektur), hatte sich der Verlag HARRI DEUTSCH freundlicherweise zu einer Digitalisierung des Manuskriptes entschlossen. Diese digitalisierte Fassung wurde dann bei der Vorbereitung der hiermit vorliegenden dritten Auflage zur Korrektur und Erweiterung verwendet.

Mit Ausnahme von Kapitel 13 wurden alle bisherigen Beweisanordnungen beibehalten. Allerdings wird der Beweis des Satzes von CAUCHY-KOWALEWSKAJA jetzt anstelle durch sukzessive Approximationen durch das elegantere Kontraktions-Prinzip durchgeführt. In die vorliegende Neuauflage wurde daher (am Ende von Kapitel 9) auch ein Beweis des Kontraktions-Prinzips aufgenommen. In Kapitel 14 wird das WEYLSche Lemma nicht nur auf die bisherige Weise (über die Mittelwerteigenschaft) bewiesen, sondern es wird ein weiterer Beweis hinzugefügt, der auf der Approximation von stetigen Funktionen durch zweimal stetig differenzierbare beruht. Weitere Ergänzungen

betreffen beispielsweise einen Ausblick auf den Fixpunktsatz von LERAY-SCHAUDER sowie einen Überblick über das Lösen (nichtlinearer) impliziter Gleichungen. Teilweise sollen diese Ergänzungen auch an Methoden heranführen, die von der gegenwärtigen Forschung benutzt werden. Natürlich betrifft das in erster Linie Themen, die zu meinen Forschungs-Interessen gehören.

Beim Aufbau des Buches wurde versucht, die einzelnen Kapitel mehr oder weniger unabhängig voneinander zu gestalten. Rück- und Querverweise, wie sie in einem systematischen Lehrbuch unumgänglich sind, wurden weitestgehend vermieden. Im Gegenteil, um eine größtmögliche Selbständigkeit der Kapitel zu erreichen, wurden grundlegende Konstruktionen (wie das CANTORSche Diagonalverfahren in den Kapiteln 3, 5 und 11) sogar mehrfach erläutert. Andererseits gibt es aber auch Fälle, wo die Aussage eines Kapitels in einem anderen Kapitel gebraucht wird. Das ist beispielsweise beim Beweis des SCHAUDERSchen Fixpunktsatzes der Fall (Kapitel 11), da dieser auf den BROUWERSchen Fixpunktsatz (Kapitel 10) zurückgeführt werden kann.

Im Gegensatz zu den früheren Ausgaben werden alle Literaturzitate jetzt am Ende des Buches gesammelt. Natürlich ist es bei der großen Breite der behandelten Themen auch nicht annähernd möglich, einen vollständigen Überblick über relevante Literatur zu geben. In erster Linie werden benutzte Quellen dokumentiert (soweit es sich nicht um Kenntnisse handelt, die zum Standard-Wissen eines ausgebildeten Mathematikers gehören). Davon abgesehen, sollen Anregungen zu weiterführenden Literaturstudien gegeben werden.

Mein Dank an den Verlag HARRI DEUTSCH geht insbesondere auch an dessen für elektronische Medien zuständigen Abteilungsleiter, Herrn KLAUS HORN. Bei der Vorbereitung dieser Neuauflage konnte ich mich stets auf seine angenehme und konstruktive Zusammenarbeit verlassen, die weit über das rein Verlegerische hinausging: Seine Sachkenntnisse als Physiker haben zu mancher Verbesserung des Textes geführt. Auch das Satzbüro Tanovski & Partners möchte ich dankend erwähnen. Die digitale Fassung wurde sorgfältig erstellt, und sogar der eine oder andere Schreibfehler der Vorlage erkannt und korrigiert.

So bleibt mir nur zu wünschen, dass die vorliegende Neuauflage einen Beitrag zur Pflege mathematischer Denkweisen leistet.

Graz, im Januar 2009  
WOLFGANG TUTSCHKE

## Vorwort

In allen Wissenschaften ist die Tendenz einer zunehmenden Spezialisierung zu beobachten; so auch in der Mathematik. Diese zunehmende Spezialisierung, die mit immer breiter gefächerten Anwendungen verbunden ist, führt zu der Gefahr, dass die Mathematik in der Praxis nicht mehr als einheitliche Wissenschaft in Erscheinung tritt. Solche Tendenzen hat es auch in früheren Entwicklungsphasen der Mathematik gegeben; sie wurden stets von Versuchen begleitet, einer Zersplitterung entgegenzuwirken und die Einheit der Mathematik zur Geltung zu bringen. Beispiele dafür sind die »Elemente« von EUKLID oder die Algebraisierung der Geometrie durch DESCARTES. Der Nutzen, den eine solche auf die Herstellung der Einheit der Mathematik gerichtete Tätigkeit hat, ist ganz offensichtlich, vor allem schon auf Grund unserer historischen Erfahrungen.

In der heutigen Mathematik zeigt sich die erfreuliche Tatsache, dass sie außerordentlich reichhaltig geworden ist, dass zu vielen alten Anwendungsgebieten immer noch neue hinzugetreten sind. Daher ist es heute sogar wichtiger denn je, die Einheit der Mathematik zu fördern. Dazu ist es erforderlich, das Wesen der Mathematik, das besondere in ihren Beweismethoden zutage tritt, sichtbar zu machen. Der Grund für eine solch große Bedeutung mathematischer Beweismethoden liegt darin, dass sie nicht nur auf speziellen Teilgebieten genutzt werden, sondern allgemeinere Verwendung finden. In diesem Sinne ist ein wichtiger Schritt zum Verständnis des Wesens der Mathematik das Kennenlernen der Beweise für ihre fundamentalen Sätze. In dem vorliegenden Buch sind 15 solcher Sätze aus tragenden Teilgebieten der heutigen Mathematik ausgewählt worden. Dazu gehören Sätze über die Lösbarkeit von Gleichungen, wie die FREDHOLMSche Alternative oder der BROUWERSche und der SCHAUDERSche Fixpunktsatz, die sich vielseitig auswirken und deren Beweise gleichzeitig prinzipielle Bedeutung haben.

Derartige übergreifende mathematische Gesichtspunkte kommen auch beim Beweis von Aussagen zum Tragen, die ganz spezielle Anwendungen betreffen; ein Beispiel hierfür ist das EINSTEINSche Additionstheorem für Geschwindigkeiten, dessen tieferer Sinn erst durch den mathematischen Gruppenbegriff erkannt werden kann. Die mathematische Praxis führt zwangsläufig aber auch zu beweistheoretischen Fragen, wie sie in den Unterschieden zwischen Wahrheit und Beweisbarkeit in der Mathematik zum Ausdruck kommen. Desgleichen treten – auch bei konkreten analytischen Untersuchungen – mengentheoretische Problemstellungen auf, wie sie sich beispielsweise in der Äquivalenz von Auswahlaxiom und ZORNschem Lemma äußern. Die moderne Entwicklung der Mathematik erforderte auch, den klassischen Differenzierbarkeitsbegriff und im Zusammenhang damit auch den Lösungsbegriff für Differentialgleichungen zu erweitern. Damit entsteht natürlich auch die Frage, wann eine verallgemeinerte Lösung

doch klassische Lösung ist. Eine Antwort hierauf gibt beispielsweise das WEYLSche Lemma, dem Kapitel 14 dieses Buches gewidmet ist.

In den 15 Kapiteln des Buches, die weitestgehend selbständigen Charakter tragen, werden zentrale mathematische Problemstellungen aus verschiedenen Zweigen der Mathematik und ihrer Anwendungen behandelt. Jeder Abschnitt ist einem fundamentalen mathematischen Sachverhalt gewidmet, wobei die Allgemeingültigkeit der gewonnenen Ergebnisse eingeschätzt wird. Außerdem enthält das Buch einen Dialog über Mathematik, der Bemerkungen über das Wesen der heutigen Mathematik und daraus resultierende Konsequenzen zum Gegenstand hat. Darin sind insbesondere auch Hinweise auf die Identität des Schönen, Allgemeinen und Anwendbaren in der Mathematik eingeschlossen.

Zu den im Buchtitel auftretenden Begriffen »groß« und »schön« sei eine kurze Bemerkung gemacht. Ihrem Ursprung und ihrer hauptsächlichen Verwendung in der Umgangssprache entsprechend haben beide zunächst einen stark subjektiven Charakter. Andererseits werden im wissenschaftlichen Sprachgebrauch beide Begriffe aber durch die Wissenschaftsentwicklung selbst objektiviert, wobei als wirklich große Sätze der Mathematik diejenigen hervortreten, die allgemein sind und sich demzufolge auch vielfach anwenden lassen. Wirklich zentrale Sätze werden durch die Wissenschaftsentwicklung auch stets so tiefgreifend durchgearbeitet, dass ihre Beweise klar und durchsichtig und damit auch im Sinne des menschlichen Strebens nach Wahrheitsfindung natürlich und schön werden. Die inner- und außermathematische Ausstrahlungskraft der hier zu behandelnden Sätze ist sehr verschiedenartig. In diesem Sinne sind die ausgewählten Sätze keinesfalls gleichermaßen groß. Hier aber noch quantitative Abstufungen innerhalb des qualitativen Begriffes »groß« vornehmen zu wollen, hieße aber doch – zumindest im Rahmen unserer Zielstellungen – zu weit zu gehen. Das gleiche trifft auf die »Schönheit« der Beweise zu.

Die vorrangige Zielstellung des Buches ist es, Wesen und Bedeutung der Mathematik für einen breiten Leserkreis erkennbar zu machen und so das weitere Eindringen der Mathematik in die Praxis zu fördern.

Dieses Buch wendet sich an alle, die an der heutigen Mathematik interessiert sind. Die heute unvermeidbare Spezialisierung führt dazu, vornehmlich mit Teilgebieten unserer Wissenschaft bekannt zu sein. Das bewirkt oft, dass ein Überblick über die Möglichkeiten, die in der Mathematik insgesamt enthalten sind, fehlt.

Hierfür nun sollte die Lektüre des Buches nützlich sein und das Verständnis für Wesen und Anwendbarkeit der Mathematik vertiefen.

An vielen Schulen existieren derzeit Schülerarbeitsgemeinschaften, die unter der Anleitung erfahrener Mathematiklehrer die Begeisterung junger Talente für unser Fachgebiet wecken; dafür werden Materialien benötigt, die sich an prinzipiellen Entwicklungstendenzen der Mathematik orientieren; das vorliegende Buch enthält geeignete Beiträge dieser Art.

In den verschiedensten Berufsgruppen sind Kenntnisse klassischer mathematischer Methoden vorhanden, die beispielsweise in Studienrichtungen an Hoch- und Fachschulen mit Mathematik als Nebenfach unterrichtet werden. Da diese Methoden in der neueren Mathematik vielfach verbessert worden sind, ist es zweckmäßig, für die Verbreitung solcher Neuentwicklungen tätig zu sein. Deshalb behandelt das Buch auch klassische Fragestellungen mit modernen mathematischen Methoden, verdeutlicht deren Vorzüge, gibt dem Leser mancherlei Anregung für die mathematische Weiterbildung, um so geeignete Wege für eine breitere Nutzung mathematischer Methoden in der Praxis zu erschließen.

Einer der Autoren hat in Gestalt des Mathematischen Wörterbuches vor mehr als zwei Jahrzehnten ein umfangreiches Werk veröffentlicht, das eine Antwort auf die Frage gab, was Mathematik sei. Das jetzt vorliegende Buch strebt eine Antwort darauf an, wie Mathematik wird, wie sie neue Gestalt annimmt. Die vielen Auflagen des Mathematischen Wörterbuches sind ein deutlicher Hinweis auf seinen Nutzen. Die Autoren des vorliegenden Buches sind überzeugt davon, dass auch von ihm eine entsprechende Wirkung erwartet werden kann, weil das Interesse für die ständige Neugestaltung der Mathematik aktuell ist und bleibt.

Schließlich noch eine Bemerkung zum Lesen des Buches. Die einzelnen Kapitel sind in einer Weise voneinander unabhängig, dass sie in beliebiger Reihenfolge gelesen werden können. In manchen Kapiteln finden sich zwar gelegentliche Hinweise auf andere Kapitel. Diese sollen den interessierten Leser aber im allgemeinen nur auf Querverbindungen aufmerksam machen; sie sind für das Verständnis des jeweiligen Kapitels nicht erforderlich. Manche Definitionen und Schlussweisen werden sogar in mehreren Kapiteln wiederholt, falls sie für das Verständnis des jeweiligen Kapitels wesentlich sind. Der Aufbau der einzelnen Kapitel erfolgt im allgemeinen so, dass sie ohne Benutzung weitergehender Literatur verständlich sind.

Für Hinweise auf die Gestaltung einzelner Kapitel sprechen wir folgenden Fachkollegen, deren Ratschläge besonders hilfreich waren, unseren Dank aus: Herrn Dr. sc. G. DAUTCOURT vom Zentralinstitut für Astrophysik der Akademie der Wissenschaften der DDR für Hinweise zu Kapitel 4, Herrn Prof. G. F. MANDŽAVIDZE vom I. N. VEKUA-Institut für angewandte Mathematik der Universität Tbilissi zu Kapitel 9 und 10, Herrn Dr. sc. H. HERRE vom KARL-WEIERSTRASS-Institut für Mathematik der Akademie der Wissenschaften der DDR zu Kapitel 15.<sup>1</sup> Vorschläge hinsichtlich der Gestaltung des Gesamtmanuskriptes verdanken die Autoren Herrn Prof. P. H. MÜLLER von der Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden sowie Herrn Prof. S. PRÖSSDORF vom bereits oben erwähnten KARL-WEIERSTRASS-Institut für Mathematik. Den Mitarbeitern des Akademie-Verlages wird für

---

<sup>1</sup> Im vorliegenden Nachdruck wurde nur eine Beweislücke in Kapitel 7 beseitigt, auf die uns dankenswerterweise Herr Dr. A. POMP vom KARL-WEIERSTRASS-Institut für Mathematik der Akademie der Wissenschaften der DDR aufmerksam gemacht hat.

eine vielseitige, konstruktive Zusammenarbeit gedankt, insbesondere Fräulein Dipl.-  
Math. G. REIHER und Herrn Dr. R. HÖPPNER.

Berlin und Halle, im Juni 1985

JOSEF NAAS und WOLFGANG TUTSCHKE