Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II

Didaktik der Arithmetik

für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung

Bearbeitet von
Friedhelm Padberg, Christiane Benz

4. Aufl. 2011. Taschenbuch. x, 374 S. Paperback
ISBN 978 3 8274 1996 5
Format (B x L): 15,5 x 23,5 cm

Didaktik der Arithmetik

Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II

Herausgegeben von
Prof. Dr. Friedhelm Padberg
Universität Bielefeld

Bisher erschienene Bände (Auswahl):

Didaktik der Mathematik

P. Bardy: Mathematisch begabte Grundschulkinder – Diagnostik und Förderung (P)
M. Franke: Didaktik der Geometrie (P)
M. Franke/S. Ruwisch: Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule (P)
K. Hasemann: Anfangsunterricht Mathematik (P)
K. Heckmann/F. Padberg: Unterrichtsentwürfe Mathematik Primarstufe (P)
G. Krauthausen/P. Scherer: Einführung in die Mathematikdidaktik (P)
G. Krummheuer/M. Fetzer: Der Alltag im Mathematikunterricht (P)
F. Padberg: Didaktik der Arithmetik (P)
P. Scherer/E. Moser Opitz: Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe (P)

G. Hinrichs: Modellierung im Mathematikunterricht (P/S)

R. Danckwerts/D. Vogel: Analysis verständlich unterrichten (S)
G. Greefrath: Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe (S)
F. Padberg: Didaktik der Bruchrechnung (S)
H.-J. Vollrath/H.-G. Weigand: Algebra in der Sekundarstufe (S)
H.-J. Vollrath: Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe (S)
H.-G. Weigand/T. Weth: Computer im Mathematikunterricht (S)
H.-G. Weigand et al.: Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I (S)

Mathematik

F. Padberg: Einführung in die Mathematik I – Arithmetik (P)
F. Padberg: Zahlentheorie und Arithmetik (P)

K. Appell/J. Appell: Mengen – Zahlen – Zahlbereiche (P/S)
A. Filler: Elementare Lineare Algebra (P/S)
S. Krauter: Erlebnis Elementargeometrie (P/S)
H. Kütting/M. Sauer: Elementare Stochastik (P/S)
T. Leuders: Erlebnis Arithmetik (P/S)
F. Padberg: Elementare Zahlentheorie (P/S)
F. Padberg/R. Danckwerts/M. Stein: Zahlbereiche (P/S)

A. Büchter/H.-W. Henn: Elementare Analysis (S)
G. Wittmann: Elementare Funktionen und ihre Anwendungen (S)

P: Schwerpunkt Primarstufe
S: Schwerpunkt Sekundarstufe

Weitere Bände in Vorbereitung

Friedhelm Padberg Christiane Benz

Didaktik der Arithmetik

für Lehrerausbildung
und Lehrerfortbildung

4. erweiterte, stark überarbeitete Auflage

Spektrum
AKADEMISCHER VERLAG

Autoren

Prof. Dr. Friedhelm Padberg
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christiane Benz
Institut für Mathematik und Informatik
Pädagogische Hochschule Karlsruhe

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media
springer.de

4. Auflage 2011

Spektrum Akademischer Verlag ist ein Imprint von Springer

11 12 13 14 15 5 4 3 2 1

Planung und Lektorat: Dr. Andreas Rüdinger, Bianca Alton
Satz: Autorensatz mit technischer Unterstützung durch le-tex publishing services GmbH, Leipzig
Umschlaggestaltung: SpieszDesign, Neu-Ulm

ISBN 978-3-8274-1996-5

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Im Umfeld der nationalen Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich [39] hat es von *2004 an* in Deutschland *starke Veränderungen* bei den Bildungs- und Lehrplänen der einzelnen Bundesländer gegeben. Diese Veränderungen haben parallel dazu zu *stark überarbeiteten* Neuauflagen der Schulbuchreihen für Mathematik in der Grundschule bzw. auch zu Neuerscheinungen geführt.

Im Kontext dieser Veränderungen ist die 2007 durchgeführte und Ende 2008 publizierte *TIMSS-Grundschul-Untersuchung* über mathematische und naturwissenschaftliche *Kompetenzen* und *Einstellungen* von Grundschulkindern der *vierten* Jahrgangsstufe im *internationalen Vergleich* von besonderem Interesse (vgl. Bos u. a. [45]). Die Schulleistungsstudie TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) führt die International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) schon seit 1995 in den Jahrgangsstufen 4 und 8 durch. Deutschland beteiligte sich 2007 *erstmalig* an der entsprechenden *Grundschul*untersuchung.

Diese *TIMSS-Grundschul-Untersuchung* liefert insgesamt ein *sehr erfreuliches* Bild des Mathematikunterrichts an Deutschlands Grundschulen (vgl. Bos u. a. [45]):

- Im internationalen Vergleich aller 36 Teilnehmerstaaten liegt Deutschland im *oberen Drittel* der Rangreihe (a. a. O., S. 60).
- Bei einer Fokussierung auf die 14 teilnehmenden EU- bzw. 15 teilnehmenden OECD-Staaten gilt sogar: Nur *drei Staaten* jeweils, nämlich England, Lettland, Niederlande bzw. England, Japan, Niederlande, liegen statistisch signifikant *vor* Deutschland (vgl. a. a. O., S. 60 f).
- Ein *sehr großer* Teil der Grundschulkinder in Deutschland (70 %) hat eine *hohe positive Einstellung*, weitere 16 % haben eine mittlere positive Einstellung zur Mathematik (a. a. O., S. 70). Erfreulich ist auch folgende Einschätzung: „Nahezu unabhängig von der erreichten Kompetenzstufe gelingt es der deutschen Grundschule offenbar, eine besonders positive Einstellung gegenüber der Mathematik zu vermitteln“ (a. a. O., S. 11).
- Auch das *mathematische Selbstkonzept* der deutschen Grundschulkinder erweist sich als *ausgesprochen positiv*. So haben 70 % der Kinder ein *hohes*, 21 % ein *mittleres* und *nur 10 %* ein niedriges mathematisches Selbstkonzept. Die deutschen Grundschulkinder liegen hiermit sehr deutlich *über* dem internationalen Durchschnitt (a. a. O., S. 80). Dies ist erfreulich, da „ein positiver Zusammenhang zwischen dem mathematischen Fähigkeitsselbstkonzept und den Leistungen der Schülerinnen und Schüler“ besteht (a. a. O., S. 12).

Nach diesen positiven Befunden könnten wir uns jetzt eigentlich erleichtert zurücklehnen mit dem angenehmen Gefühlt, dass *weitere Veränderungen* des Mathematikunterrichts der Grundschule *nicht* mehr notwendig sind. Dies trifft allerdings *keineswegs* zu, wie die beiden folgenden *weiteren* Ergebnisse der TIMSS-Untersuchung belegen:

- Besorgniserregend ist, dass 4 % unserer Grundschulkinder auf der *untersten* Kompetenzstufe völlig mangelhafte mathematische Leistungen erbringen und dass sich *gut ein Fünftel* auf den *beiden untersten* Kompetenzstufen (a. a. O., S. 72) befinden und damit massive Probleme in den weiterführenden Schulen bekommen könnten (*„Risikokinder“*). Dass man diese Risikogruppe *deutlich kleiner* halten kann, belegt der internationale Vergleich: Wir liegen hier in der Rangreihe nur auf Platz 10 von 24 untersuchten Staaten und in Japan ist diese Risikogruppe beispielsweise nur halb oder in Singapur gar nur rund ein Drittel so groß wie in Deutschland (a. a. O., S. 73).
- Auf der *höchsten* Kompetenzstufe befinden sich dagegen in Deutschland gerade einmal 6 % der Schüler. Im internationalen Vergleich ergibt sich, dass unsere *Leistungsspitze* damit (deutlich) zu *klein* ist. Wir stehen hier in der Rangreihe sogar erst auf Platz 15 von auch hier 24 untersuchten Staaten. So liegt der Anteil der Leistungsspitze in Singapur fast 7-mal oder in Japan fast 4-mal so hoch wie in Deutschland (a. a. O., S. 73).

Die durch die aktuelle TIMSS-Grundschul-Untersuchung belegte *sehr positive Einstellung* zum Mathematikunterricht sowie das *hohe mathematische Selbstkonzept* sind gute Voraussetzungen, um die dringend notwendige *weitere Förderung* im *unteren* Leistungsbereich sowie die genau so dringend notwendige *Verbreiterung* der *Leistungsspitze* durch *Förderung und Forderung* umzusetzen. Die vorliegende, gründlich überarbeitete *Didaktik der Arithmetik* gibt hierzu, aber insbesondere auch zur Förderung und Forderung des *breiten, mittleren* Leistungsbereichs vielfältige Anregungen und hilft auf diese Art, den Arithmetikunterricht so zu gestalten, dass er den eingangs erwähnten, substanziellen Veränderungen Rechnung trägt.

Dieser Band wendet sich an Studierende für das Lehramt der Primarstufe mit Mathematik als Haupt- oder Nebenfach, an Lehramtsanwärterinnen und Lehramtsanwärter mit dem Fach Mathematik sowie an alle Lehrkräfte, die nach neuen Ideen für ihren täglichen Unterricht suchen.

Der vorliegende Band weist folgende *Charakteristika* auf:

Dieser Band

- ist stark *praxisorientiert*. Dies zeigt u. a. die direkte Bezugnahme auf eine große Zahl neuester Unterrichtswerke für die Grundschule – beispielsweise in Form von rund 130 farbigen Abbildungen aus Grundschulwerken;

- geht gründlich auf relevante Arbeiten zu den *Vorkenntnissen* und *informellen Lösungsstrategien* ein;
- gibt vielseitige Anregungen zur Grundlegung *tragfähiger Zahl- und Operationsvorstellungen*;
- erschließt die Einsicht in vielseitige *Rechenstrategien* insbesondere beim mündlichen und halbschriftlichen Rechnen und stärkt so *flexibles Rechnen*;
- analysiert gründlich und differenziert Stärken, aber auch Problembereiche des *halbschriftlichen Rechnens* und zieht hieraus Konsequenzen für den Unterricht;
- erschließt *vielfältige Zugangswege* zum schriftlichen Rechnen und untersucht gründlich seinen *Stellenwert* im Computerzeitalter. Aus dieser Analyse werden Konsequenzen für *erforderliche Veränderungen* gezogen – beispielsweise bei der schriftlichen Subtraktion und der Division;
- analysiert gründlich *Lernschwierigkeiten und Fehlerstrategien* beim mündlichen, halbschriftlichen und schriftlichen Rechnen. Er stellt erprobte *diagnostische Tests* bereit und gibt vielfältige Hinweise zum *konstruktiven* Umgang mit Fehlern und Schwierigkeiten sowie zur Förderarbeit;
- thematisiert den aktuellen Stellenwert von *Taschenrechnern und Computern* im Mathematikunterricht der Grundschule;
- gibt vielfältige Anregungen zum *flexiblen Rechnen*. So können die Kinder begründete Entscheidungen treffen, *ob* bei gegebenen Aufgaben eine Strategie des mündlichen Rechnens (welche?, warum?), des halbschriftlichen Rechnens (welche?, warum?), das schriftliche Rechnen (warum?) oder der Taschenrechner (warum?) *sinnvollerweise* eingesetzt werden;
- gibt viele konkrete Hinweise zum *entdeckenden Lernen, beziehungsreichen Üben* und zum *Problemlösen*;
- gibt vielfältige Anregungen zum *überschlagenden* und *kontrollierenden Rechnen*;
- berücksichtigt in vielen Bereichen gründlich *schulnahe*, meist empirische *Forschungsarbeiten* aus dem deutsch- und englischsprachigen Raum. So wird eine fundierte Grundlage für *begründete* Entscheidungen im Arithmetikunterricht zur Verfügung gestellt;
- ermöglicht eine weitergehende Erarbeitung und *selbstständige Vertiefung* vieler hier angesprochener Themen. Dies geschieht durch vielfältige, gezielte Hinweise auf deutsch- und englischsprachige Literatur an den entsprechenden Textstellen sowie durch ein umfangreiches Literaturverzeichnis, das von älteren, aber bewährten Arbeiten bis zu den neuesten Publikationen reicht.

Trotz des Umfanges dieses Bandes können längst nicht alle für den Arithmetikunterricht interessanten oder relevanten Fragestellungen thematisiert werden. Dies gilt *beispielsweise* für arithmetische Kompetenzen in außermathematischen Kontexten (vgl. jedoch in dieser Reihe Franke/Ruwisch [85]) oder die Geschichte der Arithmetik. Auch wäre beispielsweise eine *breitere* Thematisierung des Übens oder von Differenzierungs- und Fördermaßnahmen gerade für lernschwache Kinder oder unter dem Blickwinkel jahrgangsübergreifender Klassen wünschenswert.

Diese völlig überarbeitete Neuauflage wurde erstmalig von zwei Autoren verfasst. Hierbei wurde der Abschnitt *Der Zwanzigerraum* von *Christiane Benz*, der übrige Band von *Friedhelm Padberg* erarbeitet.

Für die gründliche Durchsicht des Manuskriptes und vielfältige konstruktive Hinweise bedanken wir uns herzlich bei unseren Kolleginnen Kirsten Heckmann (Braunschweig), Elisabeth Rathgeb-Schnierer (Weingarten) und Silke Ruwisch (Lüneburg), für sorgfältiges Korrekturlesen bei unserem Kollegen Herbert Kütting (Münster) sowie für die professionelle Erstellung des Manuskriptes bei Frau Anita Kollwitz. Unser Dank gilt ebenfalls den Herausgeberinnen und Herausgebern sowie den Verlagen der im Anhang genannten Schulbuchreihen für die unkomplizierte Erteilung der Druckerlaubnis für die ausgewählten Schulbuchbeispiele.

Karlsruhe/Bielefeld, Januar 2011 Christiane Benz Friedhelm Padberg

I Die ersten Zahlen

Was verstehen Kinder unter Zahlen? Wie entwickelt sich dieser *Zahlbegriff* bis zum Beginn der Schulzeit? Spielt das *Zählen* hierbei eine zentrale Rolle, oder ist es in diesem Zusammenhang nur von völlig untergeordneter Bedeutung? Wie entwickeln sich verschiedene *Kompetenzniveaus* beim Zählen von ihren ersten Anfängen an? Welche *Kenntnisse über Zahlen* besitzen Kinder eigentlich am Ende des Kindergartens bzw. zu Beginn der Grundschule? Wie stark sind hier die *Unterschiede* zwischen verschiedenen Kindern zu Beginn des ersten Schuljahres? Wie lässt sich das aspektreiche, aber durchaus sehr unterschiedliche *Vorwissen* der Schulanfänger im Verlauf des ersten Schuljahres sichern und vertiefen? Wie können die Kinder ein *Wissensnetz* über die ersten Zahlen aufbauen, in dem die verschiedenen Aspekte der Zahlen gut miteinander vernetzt sind?

Auf diese und *viele weitere* Fragen zum Arithmetikunterricht des ersten Schuljahres geben wir in diesem Kapitel umfassende Antworten.

1 Entwicklung des Zahlbegriffs – zwei sehr unterschiedliche Ansätze

Zwei sehr unterschiedliche Ansätze zur Entwicklung des Zahlbegriffs haben in den letzten Jahrzehnten in der Mathematikdidaktik eine entscheidende Rolle gespielt. Der eine Ansatz geht auf *Piaget* und seine Schule zurück. Aufgrund seiner umfangreichen entwicklungspsychologischen Untersuchungen ist Piaget davon überzeugt, dass die natürliche kognitive Entwicklung von Kindern in *Stufen* verläuft, wobei spätere Stufen die früheren Stufen ersetzen. Daher müssen Kinder erst eine bestimmte kognitive Stufe erreichen, bevor bestimmte Lernprozesse stattfinden können. Für die Entwicklung des Zahlbegriffs bedeutet dies konkret: Nach Piaget ist die vorhergehende Einsicht in die *Invarianz* von Mengen (d. h. die Einsicht, dass die Anzahl der Elemente einer Menge gleichbleibt, wenn sich ihre räumliche Anordnung verändert, wenn die Elemente also beispielsweise auseinandergezogen oder zusammengeschoben werden), die Fähigkeit zum Umgang mit *Eins-zu-Eins-Zuordnungen*, die Fähigkeit zur *Klassifikation* (d. h. die Fähigkeit, verschiedene Objekte aufgrund gegebener Merkmale zusammenzufassen) sowie die Fähigkeit zur *Seriation* (d. h. die

Fähigkeit zur Bildung von Reihenfolgen von Objekten aufgrund bestimmter Merkmale) unabdingbare *Voraussetzung* für die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kind. Dagegen haben nach Piaget *Zählübungen keinen* Einfluss auf die Zahlbegriffsentwicklung. Für genauere Details zur Invarianz, Eins-zu-Eins-Zuordnung, Klassifikation und Seriation verweisen wir hier auf Hasemann ([141], S. 11 ff).

Piagets Arbeiten sowie eine dazu passende, mathematische Hintergrundtheorie (vgl. I.3.3) haben den Anfangsunterricht im westlichen Teil Deutschlands gerade auch bezüglich der Entwicklung des Zahlbegriffs in den 1970er Jahren *sehr stark* beeinflusst. Piagets Untersuchungen hatten in erster Linie das Ziel, Stadien der „natürlichen" Entwicklung bei Kindern zu beschreiben. An der hierbei benutzten Untersuchungskonzeption lässt sich zwar durchaus Kritik üben (für eine knappe Zusammenfassung einiger Kritikpunkte vgl. Gasteiger [97], S. 31 ff, Padberg [264], S. 33 – 36). Allerdings kann man Piaget *nicht* verantwortlich machen für die hieraus für den mathematischen Anfangsunterricht gezogenen Schlussfolgerungen, beispielsweise hier Invarianz, Klassifikation, Seriation oder Eins-zu-Eins-Zuordnung mit – den Versuchsaufgaben nachempfundenen – Aufgabenformaten isoliert einzuüben. Bei Piaget nämlich lassen sich kaum Aussagen finden, „ob kardinale oder auch ordinale Vorübungen, eventuell sogar losgelöst von der Zahl an sich, die Zahlbegriffsentwicklung unterstützen. [. . .] Dennoch rankte sich darum über lange Zeit die Diskussion und genau diese Gedanken fanden Einzug in den mathematischen Anfangsunterricht" (Gasteiger [97], S. 34). Allerdings räumt Piaget dem *Zählen* „auf den ersten Blick keine Bedeutung ein, da er darin lediglich einen verbalen Akt sieht, der 'erst dann eine wirkliche numerische Bedeutung erlangt, wenn die Operationen im praktischen Bereich logisch konstituiert worden sind' (Piaget/Szeminska [278], S. 100). Seine Konsequenz, sich infolgedessen zunächst nicht mit dem verbalen Zählen zu befassen, ist aus heutiger Sicht nicht mehr zu halten, denn über die Bedeutung des Zählens für die Entwicklung des Zahlbegriffs und grundlegender mathematischer Fähigkeiten herrscht weitgehend Einigkeit" (Gasteiger [97], S. 37).

Daher verwundert es nicht, dass schon *seit einiger Zeit* statt des vorstehend geschilderten Ansatzes ein *ganz anderer* Ansatz zur Entwicklung des Zahlbegriffs im Anfangsunterricht – nicht nur bei uns in Deutschland – im Mittelpunkt des Interesses steht.

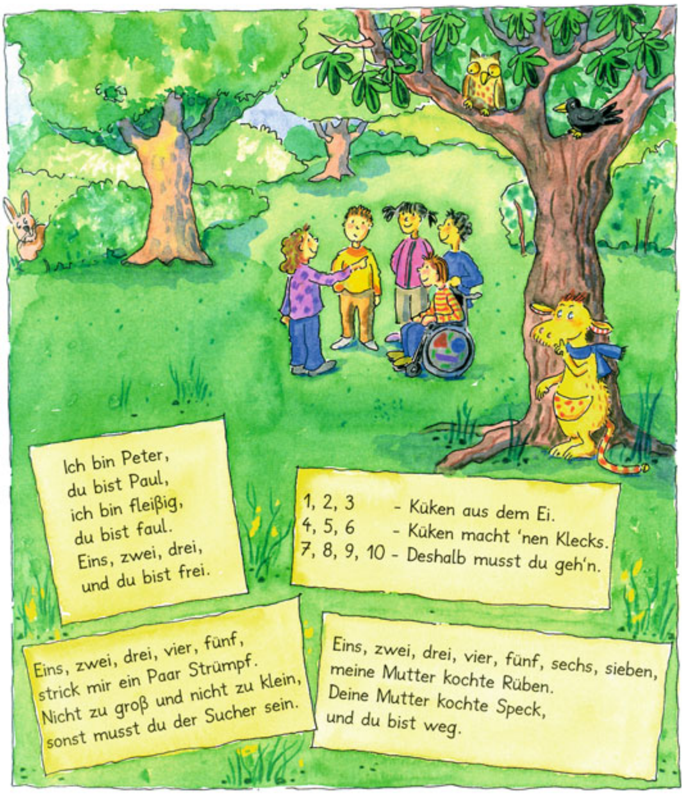
Bei diesem Ansatz geht man davon aus, dass junge Kinder „bereits (unterschiedlich weit entwickelte) Einsichten und Fertigkeiten in Bezug auf Zahlen entwickeln und dass die Integration von vielen Begriffen, Fähigkeiten und Fertigkeiten zur Ausbildung des Zahlbegriffs führt" (Clarke/Clarke/Grüßing/Peter-Koop [62], S. 262). Entsprechend bezeichnet man diesen Ansatz auch als „Skills Integration Modell". Bei diesem Ansatz spielen – völlig anders als bei Piaget –

Zählen und *simultane Zahlerfassung* eine zentrale Rolle. Wir gehen auf diesen Ansatz in den folgenden Abschnitten dieses Kapitels detailliert ein.

2 Entwicklung der Zählkompetenz

Zählen lernen Kinder auf vielfältige Art und Weise. Einer von vielen Wegen sind *Zählreime* beim alltäglichen Spielen (vgl. auch Duden Mathematik 1, S. 15):

Zählreime



Durch *Zählen* können Kinder die Anzahl von Objekten in Mengen bestimmen. Hat eine gegebene Menge nur *wenige* Objekte, so kann die Anzahl auch durch *simultane Zahlerfassung* (also einfach durch „Hinschauen") bestimmt werden. Hierbei sind Zählen und simultane Zahlerfassung zwei *verschiedene* Verfahren, wie eine größere Anzahl von Untersuchungen deutlich macht. Die simultane Zahlerfassung (in der angloamerikanischen Literatur auch *Subitizing* genannt) beruht nämlich keineswegs auf einem blitzartigen Zählen (vgl. Hasemann [141], S. 3). Zur simultanen Zahlerfassung sind daher kleine Kinder schon *überraschend* *früh* in der Lage und setzen sie bis zum Alter von etwa 3 Jahren oft bei konkreten Mengen mit bis zu vier Objekten spontan ein (vgl. Hasemann [141], S. 1). Für die Ermittlung von Anzahlen generell spielt jedoch das *Zählen* zweifelsohne die deutlich größere Rolle, da die simultane Zahlerfassung auf kleine Mengen beschränkt ist. Daher konzentrieren wir uns in diesem Abschnitt auf das Zählen (vgl. jedoch I.4.1).

2.1 Erwerb der Zahlwortreihe

Schon um das *zweite* Lebensjahr herum beginnt nach Fuson/Richards/Briards [87] und auch anderen der *Erwerb der Zahlwortreihe*. Bei den *meisten* Kindern kommt er in der *ersten* Klasse zu einem gewissen Abschluss. Beim Erwerb der Zahlwortreihe gibt es sehr große *individuelle Unterschiede*: So beherrschen schon manche *Dreijährige* längere Abschnitte als manche *Fünfjährige*. Von drei Jahren an aufwärts können die Kinder zunehmend Zahlwortfolgen bis *zehn* aufsagen (z. B. auch in Form von Abzählreimen wie in dem vorstehenden Schulbuchbeispiel) und sind im Begriff, die Zahlwortfolge bis *zwanzig* zu erwerben. Zwischen viereinhalb und sechseinhalb Jahren erkennen die Kinder allmählich die analogen *Bildungsgesetze* der Zahlwortfolge innerhalb der einzelnen Dekaden zwischen 20 und 100.

Während des – mehrere Jahre dauernden – Erwerbs der Zahlwortreihe kann man nach Fuson u. a. bei den meisten Kindern im jeweils „beherrschten" Bereich drei Teilabschnitte unterscheiden: eine stabile, korrekte Zahlwortfolge am Anfang (Beispiel: 1, 2, 3, 4), anschließend eine ebenfalls stabile, jedoch nicht korrekte weitere Folge von Zahlwörtern (meist durch die Auslassung einiger Zahlwörter gekennzeichnet; Beispiel: 6, 8, 9) und danach schließlich eine weitere nicht stabile Folge, die beim jeweiligen Aufsagen der Zahlwortreihe i. Allg. unterschiedlich ist.

Beim Gebrauch der Zahlwortreihe durch die Kinder fällt auf, dass sie schon sehr früh Zahlwörter gegen *Nichtzahl*wörter scharf abgrenzen können. So werden beim Aufsagen der Zahlwortreihe nach den Befunden von Fuson u. a. selbst im dritten, noch nicht stabilen Abschnitt der Zahlwortreihe praktisch ausschließlich *Zahlwörter* (und höchstens ganz vereinzelt mal *Buchstaben*, die ja auf eine sehr ähnliche Art und Weise wie die Zahlwortreihe von den Kindern gelernt werden) genannt.

2.2 Zählprinzipien und Konventionen

Ansätze, den Erwerb der Zahlwortreihe mittels *Zählprinzipien* zu beschreiben, stammen u. a. schon von Kruckenberg [206] und von Gelman/Gallistel [100]. Folgende Prinzipien lassen sich in diesem Zusammenhang ausgliedern:

1. **Das Eindeutigkeitsprinzip**
   Jedem der zu zählenden Gegenstände wird genau ein Zahlwort zugeordnet.
2. **Das Prinzip der stabilen Ordnung**
   Die Reihe der Zahlwörter hat eine feste Ordnung.
3. **Das Kardinalzahlprinzip**
   Das zuletzt genannte Zahlwort beim Zählprozess gibt die Anzahl der Elemente der abgezählten Menge an.
4. **Das Abstraktionsprinzip**
   Die Zählprinzipien 1 bis 3 können auf jede beliebige Menge angewandt werden, d. h. es kommt nicht darauf an, von welcher Art die Objekte sind, die gezählt werden.
5. **Das Prinzip der Irrelevanz der Anordnung**
   Die jeweilige Anordnung der zu zählenden Objekte ist für das Zählergebnis irrelevant.

Bereits im Alter von zweieinhalb bis drei Jahren beachten Kinder *implizit* die ersten drei Zählprinzipien. Im Alter von vier bis sechs Jahren werden sie sich allmählich der beschriebenen Zählprinzipien *bewusst*. Eine Verfestigung und zugleich auch *Verbesserung* der Zählfähigkeit jeweils innerhalb des erworbenen Zahlenraumes erfolgt durch eine *Zunahme* der Zählgeschwindigkeit sowie durch die *Überwindung* von Koordinationsfehlern zwischen der Zahlwortreihe und den zu zählenden Objekten (Nichtberücksichtigung von Objekten, mehrmaliges Benennen *eines* Objektes u. a.).

Untersuchungen von Briards/Siegler ([50], S. 614) belegen *genauer*, dass Kinder mit zunehmendem Alter mehr und mehr erkennen, dass für ein korrektes Zählen die Anwendung des *Eindeutigkeitsprinzips* erforderlich ist: Während nur 30 % der Dreijährigen konsistent Zählversuche, die *gegen* das Eindeutigkeitsprinzip verstoßen, als *falsch* zurückweisen, weisen 90 % der untersuchten Vierjährigen und *alle* untersuchten Fünfjährigen derartige Zählversuche konsistent als fehlerhaft zurück. Wie das *Kardinalzahlprinzip* schrittweise erworben wird, beschreiben Bermejo/Lago ([36], S. 248) auf der Grundlage eigener empirischer Untersuchungen bei Vier- bis Sechsjährigen in Form von sechs Stufen. Gelman und Gallistel [100] sind der Überzeugung, dass die vorstehend genannten 5 Zählprinzipien nicht gelernt werden, sondern im Wesentlichen *angeboren* sind. Heute ist man jedoch überwiegend der Überzeugung, dass diese 5 Zählprinzipien im

Verlauf eines längeren Lernprozesses von den Kindern *erworben* werden (für genauere Details vgl. Hasemann ([141], S. 7)).

Beim Zählen benutzen wir oft *nicht nur* die genannten *Zählprinzipien*. Daneben verwenden wir häufig auch *Konventionen* (wie z. B. das Zählen konkreter Objekte von links nach rechts, den Beginn des Zählens am äußersten Ende und nicht etwa in der Mitte, das Zählen in *der* Abfolge, wie die Objekte nebeneinander liegen), die für die richtige Ergebnisfindung u. U. hilfreich, aber *keineswegs notwendig* sind. Nach Untersuchungen von Briards/Siegler ([50], S. 616) wächst bei Kindern schon während der Vorschulzeit die Einsicht, dass die obigen Konventionen – im Unterschied zu den Zählprinzipien, insbesondere zu dem Eindeutigkeitsprinzip – für die richtige Ergebnisfindung *nicht* ausschlaggebend sind. So akzeptieren Fünfjährige – im Gegensatz zu Dreijährigen – jede richtige, jedoch von den obigen Konventionen abweichende Zählweise signifikant häufiger als richtig als Zählversuche, die gegen das Eindeutigkeitsprinzip verstoßen.

2.3 Niveaus beim Einsatz der Zahlwortreihe

Wenn die Kinder über einen im Laufe der Jahre *ständig wachsenden* Abschnitt der Zahlwortreihe korrekt verfügen, wird der Einsatz dieser Reihe im Laufe der Zeit zunehmend *differenzierter*. Nach Fuson u. a. [87] lassen sich hierbei idealtypisch *5 Niveaus* unterscheiden.

Niveau 1 (string level)
Die Zahlwortreihe kann nur als Ganzes *unstrukturiert* eingesetzt werden. Die Reihe hat für das Kind also faktisch die Form einszweidreivierfünfsechs ... *Einzelne* Zahlwörter können *nur* durch das Aufsagen der *ganzen* bekannten Reihe angegeben werden. Die Zahlwortreihe kann nur mit *großen* Einschränkungen erfolgreich zum *Zählen* eingesetzt werden, da das *Eindeutigkeitsprinzip* bei diesem Kenntnisstand noch nicht sicher beherrscht wird.

Niveau 2 (unbreakable chain level)
Die einzelnen Zahlwörter können klar *unterschieden* werden. Statt der Form einszweidreivierfünfsechs ... hat die Zahlwortreihe für das Kind jetzt die übliche Form eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, ... Jedoch muss die Reihe immer noch von *eins* an aufgesagt werden, ein *Weiterzählen* etwa von fünf aus ist *noch nicht* möglich. Wegen der mittlerweile erfolgten, deutlichen Unterscheidung der einzelnen Zahlwörter kann die Zahlwortreihe jetzt auch wirksam beim Zählen eingesetzt werden. Daher können allmählich auch Anzahlen ausgezählt (*Kardinalzahlaspekt*), Antworten auf Fragen wie „An welcher Stelle?“ (*Ordinalzahlaspekt*) oder „Wie viele Einheiten?“ (*Maßzahlaspekt*) gegeben und auch erste einfache *Additions*- (und vielleicht auch *Subtraktionsaufgaben)* gelöst werden. Durch das Aufsagen der Zahlwortreihe können auch Aussagen über die *Kleiner*-

bzw. *Größer*relation zwischen zwei Zahlen gewonnen werden (z. B. in der Form, dass 5 vor 7 kommt).

Niveau 3 (breakable chain level)
Die Zahlwortreihe kann jetzt auch schon von *größeren* Zahlen aus – und nicht mehr nur ausschließlich von eins als Startpunkt aus – eingesetzt werden. Dadurch gewinnen die Kinder Aussagen über die Größer- bzw. Kleinerbeziehung zweier Zahlen sehr viel *rascher* als im Niveau 2. Ferner kann jetzt neben dem Weiter- und insbesondere auch Rückwärtszählen von einer natürlichen Zahl n aus *auch* von einer Zahl n bis zu einer *größeren* oder *kleineren* Zahl m *vorwärts* bzw. insbesondere auch *rückwärts* gezählt werden. Außerdem können die Kinder jetzt auch Aussagen über einige oder alle Zahlen *zwischen* zwei gegebenen Zahlen machen und auch einfache *Additions*- und *Subtraktions*aufgaben *effektiver* zählend lösen.

Niveau 4 (numerable chain level)
Auf diesem Niveau *zählen* die Kinder erstmalig auch die *Zahlwörter*. Die Zahlwortreihe wird also nicht mehr *nur* eingesetzt, um Objekte zu zählen, sondern auch zur Bestimmung der Anzahl von Zahlwörtern. So können die Kinder von einer gegebenen Zahl a aus um eine vorgegebene Anzahl n von Zahlen *weiter*zählen, und sie können auch bestimmen, um *wie viel* man von einer gegebenen Zahl a bis zu einer größeren Zahl b weiterzählen muss. Etwas später – etwa um das siebte Lebensjahr – erwerben die Kinder *zusätzlich* die entsprechenden Fertigkeiten im *Rückwärtszählen*: Sie können also zum einen von einer gegebenen Zahl b aus um n Zahlen *zurückzählen*, und zum anderen bestimmen, um *wie viel* man von einer gegebenen Zahl b bis zu einer kleineren Zahl a zurückzählen muss. Diese *neuen* Kompetenzen verbessern weiter die Fähigkeit zum Lösen einfacher Additions- und Subtraktionsaufgaben.

Niveau 5 (bidirectional chain level)
Dieses *höchste* Niveau ist dadurch gekennzeichnet, dass die Kinder schnell vorwärts und rückwärts zählen können, und zwar von *jeder bekannten* Zahl aus. Ferner können sie *leicht* und *flexibel* die Zählrichtungen verändern, ohne dass – wie noch häufiger im Niveau 4 – Fehler oder Verwechslungen mit der vorher benutzten Zählrichtung vorkommen.

Bezüglich der fünf idealtypisch herauspräparierten Niveaus gibt es noch viele offene Fragen, so beispielsweise: Ist es möglich, dass ein und dasselbe Kind bei den ersten (etwa zehn) Zahlen der Zahlwortreihe schon das *höchste* Niveau erreicht hat, während es sich zugleich weiter hinten in der ihm schon bekannten Zahlwortreihe noch auf einem *niedrigeren* Niveau befindet? Oder: Muss vor der Entwicklung des nächsten Niveaus das vorhergehende immer vollständig erreicht sein?

2.4 Phasen der prozeduralen Sicherheit

Während Fuson u. a. untersuchen, wie und wozu das Zählen auf verschiedenen (individuellen) Altersstufen eingesetzt wird, beschäftigt sich Hasemann ([141], S. 8 f) mehr mit der Frage, wie das Zählen im Laufe der Zeit bis zum Schulbeginn zunehmend sicherer beherrscht wird. Er unterscheidet hierbei fünf Phasen:

„**Phase 1 (verbales Zählen)**:
Die Zahlenwortreihe ist noch nicht strukturiert, sie wird wie ein Gedicht aufgesagt und kann noch nicht zum Zählen eingesetzt werden. Die einzelnen Zahlwörter werden teilweise noch nicht unterschieden und haben keine kardinale Bedeutung. [Diese Phase 1 entspricht weithin dem Niveau 1 von Fuson u. a.; Einfügung: F. P.]

Phase 2 (asynchrones Zählen):
Im Alter von etwa dreieinhalb bis vier Jahren benutzen die Kinder die Zahlwörter zum Zählen in der richtigen Reihenfolge, jedoch wird oft noch ein Objekt übersehen oder das gleiche Objekt zweimal gezählt. Wenn die Kinder zählen und gleichzeitig auf (genau) ein Objekt zeigen können, spricht man vom synchronen Zählen. [Überschneidungen mit dem Niveau 2 von Fuson u. a. sind vorhanden; F. P.]

Phase 3 (Ordnen der Objekte während des Zählens):
Wenn ungeordnete Objekte gezählt werden sollen, fangen die Kinder mit etwa viereinhalb Jahren an, die Objekte während des Zählens zu ordnen, zum Beispiel, indem sie die gezählten zur Seite schieben.

Phase 4 (resultatives Zählen):
Im Alter von etwa fünf Jahren wissen die Kinder, dass sie beim Zählen mit der Eins anfangen müssen, dass jedes Objekt nur einmal gezählt wird und dass die letztgenannte Zahl die Anzahl der Objekte angibt. Wichtig ist in dieser Phase, dass den Kindern die eindeutige Entsprechung zwischen den zu zählenden Objekten und den Zahlwörtern klar wird.

Phase 5 (abkürzendes Zählen):
Die Kinder im Alter von fünfeinhalb bis sechs Jahren erkennen oder bilden in mehr oder weniger geordneten Mengen von Objekten Strukturen, z. B. das Zahlbild der Fünf auf einem Würfel. Sie können von einer Zahl an aufwärts zählen, sie können in Zweierschritten und auch rückwärts zählen. In dieser Phase können die meisten Kinder bereits einfache Rechnungen ausführen.“

Unregelmäßigkeiten in der Struktur der Zahlwortbildung im Deutschen bereiten den Kindern Schwierigkeiten. So sind in einer gewissen Phase des

Zahlworterwerbs charakteristische Wortschöpfungen von Kindern wie zweizehn für 12 oder zweizig für 20 durchaus üblich. Diese Sprachschöpfungen sind ausgesprochen logisch. Sie besitzen nur den *einen* Nachteil, dass sie von der üblichen Konvention abweichen.

Die insgesamt vorgestellten Forschungsarbeiten zur Entwicklung der Zählkompetenz belegen deutlich, dass der Zählvorgang äußerst komplex ist und wesentlich mehr beinhaltet als ein rein mechanisches Aufsagen der Zahlwortreihe.

3 Aspektreichtum der natürlichen Zahlen

Der Erwerb der natürlichen Zahlen im Verlauf der Vorschul- und Grundschulzeit basiert *keineswegs* nur auf der Entwicklung der Zählkompetenz – wenngleich diese natürlich bedeutsam ist. Die natürlichen Zahlen werden im täglichen Leben vielmehr in äußerst verschiedenartigen Situationen benutzt und für vielfältige Zwecke eingesetzt. Daher ist die Gewinnung von tragfähigen und vielfältigen Vorstellungen von Zahlen eine zentrale Zielsetzung des Arithmetikunterrichts der Grundschule.

3.1 Vielfältige Zahlaspekte

Die natürlichen Zahlen sind sehr vielseitig einsetzbar und besitzen viele *unterschiedliche* Aspekte, wie die folgenden Beispiele verdeutlichen:

1. Maximilian hat 2 Brüder. Dort liegen 4 Bauklötze.
2. Marie belegt beim Wettlauf den dritten Platz. Heute ist der 10. Juni.
3. Paul hat beim Hundertmeterlauf die Startnummer 36. Ich lese gerade in dem Buch auf Seite 9.
4. Der Schulweg ist 2 km lang. Die Bonbons kosten 40 Cent.
5. Alexander hat in dieser Woche zweimal gefehlt. Klatsche dreimal in die Hände.
6. $8+5=5+8\ ;\ (8+7)+13=8+(7+13)$
7.
$$\begin{array}{r} 579 \\ +\ 688 \\ \hline 1267 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 834 \\ -\ 359 \\ \hline 475 \end{array}$$
8. Halle hat die Postleitzahl 33790. Ich habe die Telefonnummer 5679.

Den Beispielen **1.** bis **8.** kann man jeweils *verschiedene Zahlaspekte* entnehmen:

- In den Beispielen **1.** dienen die Zahlen zur Beschreibung von *Anzahlen*. Man fragt: „Wie viele?“ und benennt das Ergebnis mit eins, zwei, drei, ... (*Kardinalzahlaspekt)*.
- In den Beispielen **2.** kennzeichnen die Zahlen die *Reihenfolge* innerhalb einer (total geordneten) Reihe. Man fragt jeweils: „An welcher Stelle?“ oder „Der wievielte?“ und benennt das Ergebnis mit erster, zweiter, dritter usw. Die natürlichen Zahlen werden hier als *Ordnungszahlen* benutzt (*Ordinalzahlaspekt)*.
- In den Beispielen **3.** bezeichnen die Zahlen *ebenfalls* eine Reihenfolge. Man benutzt hier im Unterschied zu **2.** die natürlichen Zahlen in *der* Reihenfolge, wie sie im Zählprozess durchlaufen werden („Zählzahlen“). Man benennt die Ergebnisse mit eins, zwei, drei usw. Da durch die *Zählzahlen* genau wie bei **2.** eine *Reihenfolge* beschrieben wird, spricht man auch in diesem Zusammenhang vom *Ordinalzahlaspekt* der natürlichen Zahlen.
- In den Beispielen **4.** fragen wir „Wie lang?“ oder „Wie teuer?“. Die natürlichen Zahlen dienen hier zur Bezeichnung von *Größen*, man benutzt sie als *Maßzahlen* bezüglich einer gewählten Einheit (*Maßzahlaspekt)*. Maßzahlen spielen auch eine Rolle bei der Herstellung von *Skalen* (z. B. für Temperatur- oder Zeitangaben), so dass hier gelegentlich auch vom *Skalenaspekt* der natürlichen Zahlen gesprochen wird.
- In den Beispielen **5.** beschreiben die natürlichen Zahlen die *Vielfachheit* einer Handlung oder eines Vorgangs. Man fragt hier „Wie oft?“, benennt das Ergebnis mit einmal, zweimal usw. und bezeichnet diesen Zahlaspekt als *Operatoraspekt*.
- Die in den Beispielen **6.** formulierten Gleichheitsaussagen beruhen auf dem Kommutativ- bzw. Assoziativgesetz der Addition (vgl. III.1.5.2), also auf der Gültigkeit von *algebraischen Gesetzen*. Die natürlichen Zahlen werden hier zum Rechnen, also als *Rechenzahlen*, benutzt (*Rechenzahlaspekt*).
- Bei den Beispielen **7.** werden die natürlichen Zahlen *ebenfalls* als *Rechenzahlen* benutzt. Während bei den Beispielen **6.** jedoch bestimmte *algebraische* Gesetzmäßigkeiten der natürlichen Zahlen angesprochen werden – man spricht daher auch von dem *algebraischen Aspekt* der Rechenzahlen –, verdeutlichen die Beispiele **7.**, dass man mit den natürlichen Zahlen *ziffernweise* nach eindeutig bestimmten Folgen von Handlungsanweisungen (sog. Algorithmen) rechnen kann (daher spricht man hier vom *algorithmischen Aspekt* der Rechenzahlen).
- Die Ziffernfolgen in den Beispielen **8.** dienen dazu, Dinge zu *kennzeichnen* und zu *unterscheiden*. Man kann mit ihnen *weder* sinnvoll rechnen – so ist z. B. eine Addition von zwei Telefonnummern sinnlos – *noch* kann man sie *sinnvoll* der Größe nach ordnen. Die Ziffernfolgen dienen zur Codierung (*Codierungsaspekt*).

In den vorangegangenen *Beispielen* sind insgesamt folgende *Zahlaspekte* angesprochen worden:

- Kardinalzahlaspekt
- Ordinalzahlaspekt
  - Ordnungszahl
  - Zählzahl
- Maßzahlaspekt
- Operatoraspekt
- Rechenzahlaspekt
  - algorithmischer Aspekt
  - algebraischer Aspekt
- Codierungsaspekt

Wir erwähnen den Codierungsaspekt an dieser Stelle, da er *üblicherweise* als ein Zahlaspekt aufgeführt und von Kindern naiv auch so aufgefasst wird. Bei den zur Codierung benutzten Ziffernfolgen handelt es sich allerdings offenkundig *nicht* um „Zahlen" – erst recht nicht um „natürliche Zahlen" –, da ihnen wesentliche Zahleigenschaften (Rechnen, Ordnen) *nicht* zukommen. Daher ist auch diese übliche Zuordnung des Codierungsaspektes zu den Zahlaspekten *fragwürdig.*

Vorstehende Zahlaspekte darf man *nicht* isoliert sehen, wie obige idealtypische Auflistung vielleicht vermuten lassen könnte. Sie hängen *eng* miteinander zusammen. Das *Zählen* stellt eine *Verbindung* zwischen den verschiedenen Aspekten her. So kann man die *Anzahl* der Elemente einer gegebenen Menge durch Auszählen gewinnen: Die *zuletzt genannte* Zahl beim Zählen gibt die Anzahl *(Kardinalzahlaspekt)* an. Die Reihenfolge bzw. den Rangplatz innerhalb einer Reihe *(Ordinalzahlaspekt)* erhält man durch das Abzählen. Ebenso kann man vielfach die *Maßzahl* einer Größe durch das Auszählen der Anzahl der erforderlichen *Größeneinheiten* gewinnen. Die *Vielfachheit* einer Handlung oder eines Vorgangs (*Operatoraspekt)* bestimmt man ebenfalls durch das Auszählen. Das Zählen hilft auch, die Ergebnisse beim *Rechnen* mit natürlichen Zahlen zu gewinnen, nämlich beispielsweise das *Weiterzählen* bei der Addition und das *Weiter- oder Rückwärtszählen* bei der Subtraktion. Das Zählen stellt also eine *Verbindung* zwischen den verschiedenen Zahlaspekten her. Allerdings werden durch das Zählen nur *einige Nuancen* der jeweiligen Zahlaspekte erfasst.

Die verschiedenen Zahlaspekte erfahren die Kinder *konkret* in speziellen Situationen. Auf diese Art lernen sie *allmählich* die verschiedenen Zahlbedeutungen zunächst getrennt kennen. Erst im Verlauf der Grundschulzeit erkennen die Kinder die *Beziehungen* zwischen den *verschiedenen* Zahlaspekten zunehmend gründlicher. So gelangen sie allmählich zu einem *umfassenden* Zahlbegriff, der die verschiedenen Aspekte *integriert*. Wie sich im Einzelnen allerdings die Konstruktion und die Verzahnung der verschiedenen Zahlaspekte bei der Zahlbegriffsentwicklung bei Kindern vollzieht, dazu gibt es immer noch wesentlich mehr *offene* Fragen als konkrete Ergebnisse (vgl. auch Schmidt [344]).

3.2 Mathematische Fundierungen

Für die *mathematische* Fundierung der natürlichen Zahlen wählt man von ihren vielfältigen Aspekten jeweils gezielt nur *einen* Aspekt aus. Legt man den *Ordinalzahlaspekt* – genauer: die Funktion der natürlichen Zahlen als *Zählzahlen* – zugrunde, so kann man die natürlichen Zahlen durch die nach dem italienischen Mathematiker Peano benannten Peano-Axiome charakterisieren (für genauere Details vgl. Padberg ([265], S. 231 – 237) oder Padberg/Danckwerts/Stein ([263], S. 24 – 44)), legt man den *Kardinalzahlaspekt* zugrunde, so führt dies zu einer Fundierung der natürlichen Zahlen, die man durch die Stichworte: Begriff der Menge, Gleichmächtigkeit von Mengen, Kardinalzahlen als Klassen gleichmächtiger Mengen sowie Einführung der Rechenoperationen mittels Mengenoperationen skizzenhaft charakterisieren kann (für genauere Details vgl. Padberg ([265], S. 173 – 224)).

3.3 Probleme einseitiger Fundierung

Die mathematische Fundierung der natürlichen Zahlen auf der Basis des *Kardinalzahlaspekts* hat die Mathematikkurse der Grundschule zu Zeiten der sogenannten *Neuen Mathematik* (Stichwort: „Mengenlehre“) in den 1970er und z. T. auch noch 1980er Jahren sehr stark und einseitig beeinflusst (für eine Skizze dieses Weges im Unterricht der Grundschule vgl. Padberg ([264], S. 22 – 29)). Ein großes Problem bei diesen Kursen war allerdings, dass man in ihnen – in enger Anlehnung an die mathematische Hintergrundtheorie – faktisch zunächst den *Zahlbegriff* und erst danach den *Umgang mit den Zahlen* in den Mittelpunkt des Unterrichts gestellt hat *statt* umgekehrt zunächst Erfahrungen im Umgang mit Zahlen sammeln zu lassen und sich erst wesentlich später Gedanken über eine so schwierige Frage wie: „Was ist eigentlich eine natürliche Zahl?“ zu machen, so wie es im weiteren Verlauf der Schulzeit etwa bei der Behandlung der Bruchzahlen selbstverständlich üblich ist. So geriet der arithmetische Anfangsunterricht „zu einem Kurs *über* Zahlen statt zu einem Unterricht, in dem *mit* Zahlen operiert wird“ (Schipper [329], S. 205). Neben der mathematischen Begründung dieses Ansatzes wurden auch entwicklungspsychologische Forschungsarbeiten der Genfer Schule um Piaget zur Begründung herangezogen, wie schon in I.1 skizziert.