Progress in Mathematics 286

Éléments de Géométrie Rigide

Volume I. Construction et Étude Géométrique des Espaces Rigides

Bearbeitet von
Ahmed Abbes

1. Auflage 2010. Buch. xv, 496 S. Hardcover
ISBN 978 3 0348 0011 2
Format (B x L): 15,5 x 23,5 cm
Gewicht: 991 g

Weitere Fachgebiete > Mathematik > Geometrie

schnell und portofrei erhältlich bei

beck-shop.de
DIE FACHBUCHHANDLUNG

Die Online-Fachbuchhandlung beck-shop.de ist spezialisiert auf Fachbücher, insbesondere Recht, Steuern und Wirtschaft. Im Sortiment finden Sie alle Medien (Bücher, Zeitschriften, CDs, eBooks, etc.) aller Verlage. Ergänzt wird das Programm durch Services wie Neuerscheinungsdienst oder Zusammenstellungen von Büchern zu Sonderpreisen. Der Shop führt mehr als 8 Millionen Produkte.

Avant-propos

Il n'est guère possible d'aborder la lecture de ce traité sans avoir une bonne connaissance des oeuvres suivantes d'A. Grothendieck :

a) Éléments de Géométrie Algébrique [28, 29, 30, 31] ;
b) Séminaires de Géométrie Algébrique 1 et 4 [26, 1].

Le lecteur prendra garde que nos références à EGA I [28] se rapportent à la seconde édition (Springer-Verlag, 1971).

Nous suivons d'une manière générale la terminologie introduite par Grothendieck dans les traités mentionnés ci-dessus. Nous nous en écartons à de rares exceptions près, bien mentionnées dans le texte, afin de mettre l'accent sur les concepts fondamentaux pour ce traité. Ainsi, nous renforçons la définition d'anneau *adique* et les notions géométriques qui en découlent.

Suivant les conventions de ([1] VI), nous utilisons l'adjectif *cohérent* comme synonyme de quasi-compact et quasi-séparé.

Introduction

1. La géométrie rigide est devenue, au fil des ans, un outil indispensable dans un grand nombre de questions en géométrie arithmétique. Depuis ses premières fondations, posées par J. Tate en 1961, la théorie s'est développée dans des directions variées. Il est hors de notre propos de présenter ici ces diverses approches. Ce traité se concentrera donc sur celle de M. Raynaud, esquissée en 1974 dans [41], que nous exposerons dans une situation relative et d'une façon systématique. Il y a plusieurs raisons à ce choix. D'une part, plusieurs applications importantes de la géométrie rigide passent par les schémas formels et utilisent, si ce n'est explicitement, du moins implicitement, l'approche de M. Raynaud. D'autre part, de par son essence même, cette approche est particulièrement bien adaptée aux questions de nature algébrique et semble tout à fait incontournable pour les problèmes de platitude.

2. Ce traité sera constitué de deux volumes. Ce premier volume est consacré à la construction des espaces rigides et à l'étude de leurs propriétés géométriques. On trouvera plus loin un résumé détaillé de son contenu. Plusieurs aspects de la théorie de Raynaud ont été développés par Mehlmann dans sa thèse [39] et dans une série d'articles par Lütkebohmert [38], Bosch et Lütkebohmert [8, 9] et Bosch, Lütkebohmert et Raynaud [10, 11]. Mais le besoin de consolider et compléter les fondations s'est fait sentir en particulier pour développer la théorie associée de la cohomologie étale, qui fera l'objet du second volume. Le plan prévu pour ce dernier est le suivant. Nous établirons d'abord des énoncés de comparaison du type GAGA entre la topologie algébrique-étale et la topologie rigide-étale, dont le plus important est du à Gabber et Fujiwara [19]. Celui-ci nous permettra de ramener certaines propriétés du topos rigide-étale à leurs analogues algébriques. Nous démontrerons ensuite les principales propriétés de la cohomologie rigide-étale suivant le plan général de SGA 4 [1] (faisceaux constructibles, théorème de changement de base propre, théorème de changement de base lisse, dimension cohomologique, cohomologie à support compact, dualité de Poincaré...). Nous donnerons enfin quelques applications à la cohomologie étale des schémas comme le théorème d'acyclicité locale des morphismes réguliers ([1] XIX 4.1).

3. Dans la théorie de Raynaud, les espaces rigides sont les "fibres génériques" des schémas formels. Avant de préciser cette notion, il nous faut fixer ses limites, c'est à dire les conditions de finitude requises sur les schémas formels. Initialement, la théorie présentait à ce niveau une dichotomie : on pouvait considérer soit des schémas formels de présentation finie sur un anneau de valuation complet de hauteur 1, soit des schémas formels noethériens. Si le premier cas permet de retrouver la théorie originelle de Tate, le second introduit de nouveaux espaces rigides et donne à cette approche l'un de ses points forts. Nous unifions ces deux cas en introduisant une nouvelle classe d'anneaux topologiques que nous qualifions d'*idylliques*. La première propriété importante de ces anneaux, à la base de beaucoup d'autres, est la propriété d'*Artin-Rees* (1.8.25). Nous la déduisons dans le cas non noethérien d'un résultat de Raynaud-Gruson (1.9.18). La seconde propriété importante est due à Gabber et n'était pas connue en général dans [8, 9, 39] : si A est un anneau idyllique et B est une A-algèbre de type fini, le séparé complété de B pour la topologie déduite de celle de A est B-plat (1.12.17). On dit qu'un schéma formel affine est *globalement idyllique* s'il est de la forme $\mathrm{Spf}(A)$, où A est un anneau idyllique, et qu'un schéma formel est *idyllique* s'il est adique[1] et si tout point admet un voisinage ouvert formel affine globalement idyllique. Nous étendons à ces objets certains résultats de Grothendieck initialement établis pour les schémas formels noethériens [28, 30], entre autres ceux qui portent sur les faisceaux cohérents (2.7.2 et 2.8.5) et leurs cohomologies (théorème de finitude (2.11.5), comparaison de la théorie "algébrique" à la théorie "formelle" (2.12.2)...).

4. Pour définir la "fibre générique" d'un schéma formel idyllique, nous avons besoin de sortir du cadre des schémas formels (et même des espaces annelés). Le sens que nous donnons à cette notion est celui des catégories quotients. Il est naturel d'inverser dans la catégorie des schémas formels idylliques les *éclatements admissibles*, c'est à dire de centre un idéal ouvert de type fini (appelés aussi éclatements permis dans la préface). Raynaud [41] a montré que cette opération suffit pour retrouver la théorie de Tate au-dessus d'un anneau de valuation complet de hauteur 1. Nous l'utiliserons donc comme définition générale. Mais avant d'introduire la bonne catégorie quotient, nous étudions certains objets et propriétés *rigides* relatifs aux schémas formels idylliques, c'est à dire des objets et propriétés stables par éclatements admissibles. Nous donnons ici deux exemples :

(i) On appelle *ordre* 1-*valuatif* un anneau idyllique, local, intègre, de dimension 1 et dont la topologie n'est pas discrète. Un *point rigide* (resp. un *point rigide fermé*) d'un schéma formel idyllique est un sous-schéma (resp. un sous-schéma fermé) affine dont l'anneau est un ordre 1-valuatif. L'ensemble des points rigides d'un schéma formel idyllique $\mathfrak{X}$ est noté $\langle\mathfrak{X}\rangle$. Si A est un anneau idyllique et J est un idéal de définition de A, alors l'ensemble des points rigides fermés de $\mathrm{Spf}(A)$ est en bijection avec l'ensemble des points fermés de $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$ (3.3.2). Tout morphisme localement de type fini de schémas formels idylliques $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ induit une application que l'on note encore

[1] On prendra garde que notre notion de schéma formel adique est plus forte que celle de [28].

$f: \langle \mathfrak{X} \rangle \to \langle \mathfrak{Y} \rangle$. Nous montrons que si $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est un éclatement admissible, alors l'application $f: \langle \mathfrak{X} \rangle \to \langle \mathfrak{Y} \rangle$ est bijective (3.3.8).

(ii) Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. On appelle *clôture rigide* de $\mathscr{F}$, et l'on note $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ (cf. [31] 5.9), le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) = \varinjlim_{n} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F}).$$

Cette définition ne dépend pas de l'idéal de définition $\mathscr{J}$. Si $f: \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ est un morphisme adique de schémas formels idylliques, on a un morphisme canonique fonctoriel

$$\beta_f(\mathscr{F}): \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \to f_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f^*\mathscr{F})).$$

Nous montrons que si $f: \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ est un éclatement admissible de présentation finie et $\mathscr{F}$ est cohérent, alors $\beta_f(\mathscr{F})$ est un isomorphisme (3.5.5). C'est une version formelle du théorème d'*acyclicité de Tate* (cf. 3.5.7 et 4.7.9).

5. On désigne par $\mathbf{S}$ la catégorie dont les objets sont les schémas formels idylliques quasi-compacts et les morphismes sont les morphismes localement de présentation finie, et par $\mathbf{B}$ l'ensemble des éclatements admissibles de $\mathbf{S}$. On définit la catégorie des *espaces rigides cohérents*, baptisée catégorie de Raynaud et notée $\mathbf{R}$, comme la catégorie localisée de $\mathbf{S}$ par rapport à $\mathbf{B}$. On note $\mathbf{S} \to \mathbf{R}$, $\mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ le foncteur de localisation. Nous illustrons cette construction par des exemples classiques de disques et couronnes fermés relatifs (cf. 4.1.9 et 4.3.11). On appelle *point rigide* de $\mathbf{R}$ l'image canonique du spectre formel d'un ordre 1-valuatif. Cette notion correspond aux points de la théorie de Tate. Certaines propriétés des morphismes de $\mathbf{S}$ passent au quotient. Ainsi, on dit qu'un morphisme de $\mathbf{R}$ est une immersion (resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée, resp. fini, resp. propre) s'il admet un modèle formel vérifiant la propriété analogue dans $\mathbf{S}$.

6. La nouveauté par rapport à [8, 9] consiste à développer l'aspect topologique des espaces rigides cohérents. Pour ce faire, nous généralisons la notion de *recouvrement admissible* de Tate : une famille $(X_i \to X)_{i \in I}$ d'immersions ouvertes de $\mathbf{R}$ est un recouvrement admissible si elle admet une sous famille *finie* couvrante pour les points rigides, c'est à dire, s'il existe une partie finie J de I telle que tout point rigide P au-dessus de X majore un point rigide P_j au-dessus de l'un des X_j, $j \in J$ (*i.e.*, $\mathrm{Hom}_X(P_j, P) \neq \emptyset$). La topologie de $\mathbf{R}$ engendrée par les recouvrements admissibles est appelée topologie admissible. Elle donne naissance au *gros topos admissible*, noté $\widetilde{\mathbf{R}}$, que nous utiliserons pour définir les espaces rigides quasi-séparés (mais pas nécessairement quasi-compacts). Il est commode d'associer à tout espace rigide cohérent X la sous-catégorie $\mathbf{Ad}_{/X}$ de $\mathbf{R}_{/X}$ formée des immersions ouvertes $U \to X$. Nous la munirons de la topologie induite par la topologie admissible de $\mathbf{R}$, appelée encore topologie admissible de X. Le topos

X_{ad} des faisceaux d'ensembles sur $\mathbf{Ad}_{/X}$ est le *topos admissible* de X. Tout morphisme $f\colon X \to Y$ de $\mathbf{R}$ induit par changement de base un morphisme de topos admissibles que l'on note encore $f\colon X_{\mathrm{ad}} \to Y_{\mathrm{ad}}$.

7. Soit $\mathfrak{X}$ un objet de $\mathbf{S}$. Notons $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{S}_{/\mathfrak{X}}$ formée des éclatements admissibles ; c'est une catégorie cofiltrante. Nous démontrons dans 4.5.12 que le topos $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ est canoniquement équivalent à la limite projective du topos fibré

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}} \to \mathbf{B}_{\mathfrak{X}},$$

obtenu en associant à tout objet $(\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ le topos de Zariski $\mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$ et à tout morphisme $f\colon (\mathfrak{X}'', \psi) \to (\mathfrak{X}', \varphi)$ le foncteur $f^*\colon \mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}} \to \mathfrak{X}''_{\mathrm{zar}}$ image inverse par le morphisme de topos déduit de f (cf. [1] VI 8.1.1). Ce théorème ramène l'étude du topos $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ à celle des topos bien connus $\mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$, $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$. Grâce aux résultats généraux de ([1] VI §8), nous en déduisons quelques corollaires importants :

(a) Le topos $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ a mêmes points que la voûte étoilée de $\mathfrak{X}$ (ou l'espace de Zariski-Riemann), c'est à dire, la limite projective d'espaces topologiques

$$\varprojlim_{(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathbf{B}_{\mathfrak{X}}} |\mathfrak{X}'|,$$

où $|\mathfrak{X}'|$ désigne l'espace topologique sous-jacent au schéma formel $\mathfrak{X}'$ (4.5.15). Tout point rigide de $\mathfrak{X}$ définit un point de la voûte étoilée, mais cette application est loin d'être surjective en général.

(b) La catégorie $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ est canoniquement équivalente à la catégorie des sections cartésiennes de la catégorie fibrée

$$\mathfrak{F}'_{\mathfrak{X}} \to \mathbf{B}^{\circ}_{\mathfrak{X}},$$

obtenue en associant à tout objet $(\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ le topos de Zariski $\mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$ et à tout morphisme $f\colon (\mathfrak{X}'', \psi) \to (\mathfrak{X}', \varphi)$ le foncteur $f_*\colon \mathfrak{X}''_{\mathrm{zar}} \to \mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$ image directe par le morphisme de topos déduit de f (4.5.22). La donnée d'une section de $\mathfrak{F}'_{\mathfrak{X}} \to \mathbf{B}^{\circ}_{\mathfrak{X}}$ équivaut à la donnée pour tout objet $(\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ d'un faisceau F_{φ} de $\mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$ et pour tout morphisme $f\colon (\mathfrak{X}'', \psi) \to (\mathfrak{X}', \varphi)$ d'un morphisme $\gamma_f(F)\colon F_{\varphi} \to f_*(F_{\psi})$, ces morphismes étant soumis à des relations de compatibilité. Une telle section est notée $\{(\mathfrak{X}', \varphi) \mapsto F_{\varphi}\}$. Les sections cartésiennes sont caractérisées par la propriété que les morphismes $\gamma_f(F)$ sont des isomorphismes.

(c) Nous associons fonctoriellement à tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathscr{F}$ une section $\{(\mathfrak{X}', \varphi) \mapsto \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F})\}$ de $\mathfrak{F}'_{\mathfrak{X}} \to \mathbf{B}^{\circ}_{\mathfrak{X}}$. Le théorème d'acyclicité de Tate implique que cette section est cartésienne lorsque $\mathscr{F}$ est cohérent. Elle définit donc un faisceau $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$, appelé *fibre rigide* de $\mathscr{F}$. En fait, nous définirons le faisceau $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathscr{F}$ (pas nécessairement cohérent) (cf. 4.7.4). Le faisceau $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})^{\mathrm{rig}}$ est un anneau ; on le note aussi $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$. La correspondance $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ est un foncteur de la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules dans celle des

$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-modules. Nous étudions les principales propriétés de ce foncteur sur la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents. Nous associons à tout morphisme adique $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ entre objets de $\mathbf{S}$ (en particulier, à tout morphisme de $\mathbf{S}$) un morphisme de topos annelés $\underline{f}\colon (\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}) \to (\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}})$ (cf. 4.7.20). Si f est un morphisme de $\mathbf{S}$, le morphisme de topos sous-jacent à $\underline{f}$ est le morphisme f^{rig}.

(d) Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme propre de $\mathbf{S}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Pour tout $q \geq 0$, le $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module $\mathrm{R}^q f_*\mathscr{F}$ est cohérent, et on a un morphisme fonctoriel

$$\kappa^q\colon (\mathrm{R}^q f_*\mathscr{F})^{\mathrm{rig}} \to \mathrm{R}^q \underline{f}_*(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}).$$

Nous montrons que κ^0 est un isomorphisme ; si de plus, $\mathfrak{Y}$ admet localement un idéal de définition monogène, alors κ^q est un isomorphisme pour tout $q \geq 0$ (4.7.36). On notera que la condition supplémentaire pour $q \geq 1$ est suffisante pour les applications rigides puisqu'il est loisible d'éclater un idéal de définition cohérent.

8. Nous associons à tout objet X de $\mathbf{R}$ un anneau $\mathscr{O}_X$ de X_{ad} et à tout morphisme $f\colon X \to Y$ de $\mathbf{R}$ un homomorphisme $\theta_f\colon \mathscr{O}_Y \to f_*(\mathscr{O}_X)$ vérifiant des relations de compatibilité, tels que pour tout objet $\mathfrak{X}$ de $\mathbf{S}$, $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$ soit l'anneau défini dans la section précédente et pour tout morphisme $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de $\mathbf{S}$, $\theta_{f^{\mathrm{rig}}}$ soit l'homomorphisme déduit de $\underline{f}$. On note encore $f\colon (X_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_X) \to (Y_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_Y)$ le morphisme de topos annelés déduit de f et θ_f. Nous montrons les résultats suivants :

(i) Si X est un espace rigide cohérent, alors le topos $(X_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_X)$ est localement annelé (4.8.6). De plus, les fibres de $\mathscr{O}_X$ en les points rigides de X sont des anneaux locaux noethériens (4.8.10). Cette dernière propriété nous permet de définir la dimension d'un $\mathscr{O}_X$-module de type fini.

(ii) Soit $\mathfrak{X}$ un objet de $\mathbf{S}$. Pour qu'un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-module soit cohérent, il faut et il suffit qu'il soit de la forme $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ pour un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$ (4.8.18). En particulier, pour tout espace rigide cohérent X, l'anneau $\mathscr{O}_X$ est cohérent.

(iii) Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme propre d'espaces rigides cohérents, F un $\mathscr{O}_X$-module cohérent. Alors pour tout entier $q \geq 0$, $\mathrm{R}^q f_*F$ est un $\mathscr{O}_Y$-module cohérent (4.8.22).

(iv) On appelle *affinoïde* un espace rigide cohérent qui admet un modèle formel affine globalement idyllique et ayant localement un idéal de définition monogène. Nous montrons que si X est un affinoïde et F est un $\mathscr{O}_X$-module cohérent, alors F est engendré par ses sections globales et $\mathrm{H}^q(X_{\mathrm{ad}}, F) = 0$ pour tout $q \geq 1$ (4.8.26).

9. Nous présentons des versions formelles idylliques de certains résultats de platitude de Raynaud-Gruson, initialement établis dans le cadre algébrique [42]. La plupart de ces énoncés sont parus dans [9] dans le cas général[2] et dans [39] pour

[2] On prendra garde cependant que le traitement de [9] est légèrement incomplet.

les schémas formels de présentation finie au-dessus d'un anneau de valuation de hauteur 1.

Nous étudions en premier lieu les modules cohérents plats sur les schémas formels idylliques. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme de $\mathbf{S}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $x \in \mathfrak{X}$, $s = f(x)$. Nous introduisons la notion de $\mathscr{S}$-dévissage de $\mathscr{F}$ en x, qui permet de raisonner par récurrence sur la dimension relative $\dim_x(\mathscr{F}/\mathscr{S})$. Quitte à remplacer $(\mathfrak{X}, x)$ et $(\mathscr{S}, s)$ par des voisinages étales élémentaires, on peut toujours construire de tels dévissages. Nous donnons un critère important pour que $\mathscr{F}$ soit $\mathscr{S}$-plat en x en termes de dévissages relatifs (5.3.6). Nous en déduisons de nombreux corollaires, entre autres le fait que l'ensemble des points x de $\mathfrak{X}$ tels que $\mathscr{F}$ soit $\mathscr{S}$-plat en x est ouvert (5.3.10).

Il y a deux façons d'introduire les modules plats sur les espaces rigides cohérents. La façon la plus directe mais la moins explicite est la définition générale de la platitude pour les topos annelés. Nous présentons aussi une autre notion plus *ad hoc*, celle des modules cohérents rig-plats sur les schémas formels idylliques. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme localement de type fini entre schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $\mathscr{P}$ un point rigide de $\mathfrak{X}$. Supposons d'abord que $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$ et $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(A)$ soient formels affines globalement idylliques, que $\mathscr{P}$ soit fermé dans $\mathfrak{X}$ et que $f(\mathscr{P})$ soit fermé dans $\mathscr{S}$. Soit K un idéal de définition de B. On a $\mathscr{F} = M^{\Delta}$, où M est un B-module cohérent, et $\mathscr{P}$ correspond à un point fermé $\mathfrak{p}$ de $\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(K)$. On dit que $\mathscr{F}$ est *rig-f-plat* en $\mathscr{P}$ si $M_{\mathfrak{p}}$ est A-plat. Cette notion se localise bien (c'est pour cela que l'on suppose $f(\mathscr{P})$ fermé dans $\mathscr{S}$). Par suite, on peut la globaliser. On dit que $\mathscr{F}$ est *rig-f-plat* s'il est rig-f-plat en tout point rigide de $\mathfrak{X}$. Nous montrons que si f est un morphisme de $\mathbf{S}$, pour que $\mathscr{F}$ soit rig-f-plat, il faut et il suffit que $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ soit f^{rig}-plat dans le sens des topos annelés (5.5.8).

Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme de $\mathbf{S}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent rig-$f$-plat. Nous montrons qu'il existe un éclatement admissible de présentation finie $\varphi\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ tel que le transformé strict de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$ soit $\mathscr{S}'$-plat (5.8.1). Comme corollaire, nous en déduisons que la platitude pour les modules cohérents sur les espaces rigides cohérents est stable par changement de base (5.8.9).

Nous étudions aussi les modules cohérents fidèlement plats sur les espaces rigides cohérents. Nous établissons des énoncés de descente fidèlement plate pour les modules cohérents sur les espaces rigides cohérents (5.11.11) et pour les morphismes d'espaces rigides cohérents (5.12.4), dus essentiellement à Gabber, Bosch et Görtz [6].

10. Nous développons les propriétés différentielles des espaces rigides cohérents. Nous introduisons d'abord les invariants normaux d'une immersion et les invariants différentiels fondamentaux d'un morphisme. Nous définissons ensuite les morphismes lisses, non ramifiés et étales par les critères infinitésimaux, et nous étudions leurs principales propriétés. Nous donnons enfin quelques critères de lissité, entre autres le *critère jacobien* (6.4.21).

11. La dernière partie de ce volume est consacrée aux espaces rigides quasi-séparés (mais pas nécessairement quasi-compacts). La notion de recouvrement admissible s'étend naturellement aux préfaisceaux sur $\mathbf{R}$. On appelle *espace rigide quasi-séparé* un faisceau du gros topos admissible $\widetilde{\mathbf{R}}$ qui admet un recouvrement admissible par des objets de $\mathbf{R}$. Nous donnons une caractérisation simple de ces espaces (7.1.12) qui permet de retrouver des exemples classiques, comme le disque unité ouvert relatif (7.1.20). Nous étudions ensuite leurs propriétés géométriques, puis leurs structures héritées des espaces rigides cohérents (site et topos admissibles, structure annelée...).

12. Soient S un schéma cohérent, T un sous-schéma fermé, U l'ouvert $S - T$ de S. Supposons la paire (S, T) idyllique (*i.e.*, soit S est noethérien, soit S est localement de présentation fini au-dessus d'un anneau idyllique A et l'idéal de T dans S est l'image réciproque d'un idéal de définition de type fini de A). Notons $\mathscr{S} = S_{/T}$ le schéma formel complété de S le long de T, qui est alors un objet de $\mathbf{S}$, et posons $\Theta = \mathscr{S}^{\mathrm{rig}}$. Nous associons fonctoriellement à tout U-schéma de type fini V un préfaisceau $\mathfrak{A}(V)$ sur la catégorie $\mathbf{R}_{/\Theta}$. Nous montrons que si V est séparé de type fini sur U, alors $\mathfrak{A}(V)$ est un Θ-espace rigide quasi-séparé (7.4.11) ; on le note V^{an}. Le foncteur $V \mapsto V^{\mathrm{an}}$ ainsi défini est appelé *foncteur GAGA* relatif à (S, T). Nous l'étudions et montrons qu'il préserve certaines propriétés des morphismes (*e.g.*, être propre, fini, lisse, étale, une immersion, une immersion ouverte, une immersion fermée).

Soit V un U-schéma séparé de type fini. Le foncteur GAGA induit un morphisme de topos annelés

$$\Phi_V \colon (V^{\mathrm{an}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{V^{\mathrm{an}}}) \to (V_{\mathrm{zar}}, \mathscr{O}_V).$$

Nous montrons qu'il est plat (7.6.8). Si F est un $\mathscr{O}_V$-module, on pose $F^{\mathrm{an}} = \Phi_V^*(F)$ (l'image réciproque étant prise au sens des modules). Soient $f \colon V' \to V$ un morphisme séparé de type fini, F' un $\mathscr{O}_{V'}$-module. On a pour tout $q \geq 0$, un morphisme de changement de base (ou de comparaison)

$$\mathtt{c}^q \colon (\mathrm{R}^q f_* F')^{\mathrm{an}} \to \mathrm{R}^q f^{\mathrm{an}}_* (F'^{\mathrm{an}}).$$

Nous montrons que si f est propre et F' est cohérent, alors $\mathtt{c}^q$ est un isomorphisme pour tout $q \geq 0$ (7.6.11).

Remerciements. Voila des années que j'ai été séduit par l'approche de la géométrie rigide proposée par Michel Raynaud. Ce livre, qu'il me fait l'honneur de préfacer, en est l'illustration. Je l'ai conçu comme un témoignage de reconnaissance et d'admiration. Ce travail a germé durant ma longue collaboration avec Takeshi Saito sur la théorie de la ramification. Il n'aurait peut-être pas vu le jour sans son soutien et ses encouragements. Je suis heureux de lui exprimer ici ma reconnaissance et ma sincère amitié. L'influence de Siegfried Bosch, Ofer Gabber et Werner Lütkebohmert sur ce traité est évidente. Je leurs exprime mes vifs remerciements. Je remercie également Pierre Berthelot, Jean-François Dat, Michel Gros, Luc Illusie et Farid Mokrane pour leurs conseils et encouragements. Ce projet a bénéficié de l'hospitalité de l'Université de Tokyo durant de nombreux séjours entre 2004 et 2008 et de l'Université de Bielefeld ainsi que de l'Université de Padoue en 2006. Je remercie les auditeurs d'un cours que j'ai donné sur ce sujet à l'Université de Tokyo durant le printemps 2008 et dont les questions et remarques ont été précieuses pour mettre au point ce travail.