Klassische Theoretische Physik

Eine Einführung

Bearbeitet von
Josef Honerkamp, Hartmann Römer

1. Auflage 2012. Taschenbuch. 600 S. Paperback
ISBN 978 3 642 23261 9
Format (B x L): 15,5 x 23,5 cm
Gewicht: 758 g

2. Die Newtonsche Mechanik

Die Aufgabe der Mechanik ist es, die Bewegung materieller Körper quantitativ zu beschreiben und zu berechnen. Die Lösung dieser Aufgabe erfolgt in zwei Schritten:

Zuerst wird der begriffliche und formale Rahmen zur quantitativen Beschreibung der Lage- und Formänderung der Körper festgelegt (*Kinematik*) und dann ein Schema bereitgestellt, nach dem sich die Bewegungen (wenigstens im Prinzip) berechnen und vorhersagen lassen (*Dynamik*).

Wir wollen uns zunächst mit der *Punktmechanik* befassen. Hierbei werden Situationen behandelt, in denen Ausdehnung und Formänderungen der bewegten Körper keine wesentliche Rolle spielen. Dies ist besonders dann der Fall, wenn die Abmessungen der Körper klein sind im Vergleich zu ihren gegenseitigen Abständen und zu den Wegen, die sie zurücklegen. Man denkt sich dann die Körper durch ausdehnungslose *Massenpunkte* repräsentiert. Ob eine solche Idealisierung möglich und zweckmäßig ist, hängt von den physikalischen Umständen und von der Fragestellung ab. So läßt sich beispielsweise in der Himmelsmechanik die Erde sehr gut als Massenpunkt behandeln, während Geographie und Geophysik natürlich für eine punktförmige Erde gänzlich ohne Inhalt wären.

Die Mechanik ausgedehnter Körper wird uns später beschäftigen, wenn wir Theorien des starren Körpers und der verformbaren Kontinua darstellen. Es wird sich zeigen, daß in gewisser Weise ausgedehnte Systeme auf Systeme mit vielen Massenpunkten formal zurückführbar sind.

2.1 Zeit und Raum in der Klassischen Mechanik

Zur quantitativen Beschreibung der Bewegung von Massenpunkten benötigen wir mathematische Modelle für *Raum* und *Zeit*.

Die Zeit wird als Menge aller „Zeitpunkte" durch die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen beschrieben. Die Menge $\mathbb{R}$ ist eine geordnete Menge; dem entspricht die Ordnung der Zeitpunkte nach Vorher und Nachher, Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft. In der klassischen Mechanik denkt man sich die Zeit als universell: Jedem „Punktereignis", also jedem Ereignis von vernachlässigbar kurzer Zeitdauer, läßt sich eindeutig ein Zeitpunkt in $\mathbb{R}$ zuordnen, und die Zeitpunkte verschiedener Punktereignisse lassen sich ohne Einschränkung miteinander vergleichen.

Physikalisch meßbar gemacht und realisiert wird die Zeitskala (wenigstens im Prinzip) durch ein System gleichmäßig laufender Normaluhren, die miteinander synchronisiert sind. Die Synchronisation von Uhren ist im Rahmen der Klassischen Mechanik unproblematisch. Sie kann etwa durch Transport einer Eichuhr und deren Vergleich mit anderen Uhren geschehen. Eine Problematisierung und Abänderung dieses so einleuchtenden und in der unseren Sinnen direkt zugänglichen Welt so wohl bewährten Konzeptes der Zeit wird erst in der Relativitätstheorie (siehe Kap. 15) nötig.

Wir benötigen auch ein mathematisches Modell des Raumes, in dem sich Massenpunkte bewegen. Die „Punkte" des Raumes bilden die Gesamtheit der möglichen Lagen eines Massenpunktes. Es liegt für uns nahe – und eine Fülle von Erfahrungen hat zu dieser Wahl geführt – die mathematische Struktur des reellen dreidimensionalen *affinen Raumes*[1] E^3 als Modell für den physikalischen Raum in der klassischen Mechanik zu benutzen. Diese Struktur ist aus der Mathematik bekannt (siehe z.B. [2.1, 2]).

Man geht dabei von zwei verschiedenen Mengen von Grundobjekten aus. Zunächst ist eine Menge A gegeben, deren Elemente Punkte heißen und für die möglichen Lagen der Punktteilchen stehen sollen. Neben diesen Punkten betrachten wir einen reellen dreidimensionalen *Vektorraum*[2] V^3 mit den Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$.

[1] *Affiner Raum* affinis, (lat.) angrenzend, verwandt. Affine Transformationen („Verwandtschaftstransformationen") sind diejenigen Transformationen, die sich durch Verschiebungen, Drehungen und Verzerrungen erzeugen lassen. Sie bilden eine Gruppe und sind identisch mit der Menge aller umkehrbar-eindeutigen, linear-inhomogenen Transformationen der Koordinaten. Der affine Raum ist dadurch gekennzeichnet, daß seine Struktur unter der Gruppe der affinen Transformationen erhalten bleibt.

J. Honerkamp, H. Römer, *Klassische Theoretische Physik*, Springer-Lehrbuch,
DOI 10.1007/978-3-642-23262-6_2,

Dabei gelte:

a) Jedem geordneten Punktepaar (P, Q) ist ein Vektor $\boldsymbol{x}$ aus V^3 zugeordnet, den man mit $\overrightarrow{PQ}$ bezeichnet.
b) Umgekehrt gibt es zu jedem Punkt P und zu jedem Vektor $\boldsymbol{x}$ aus V^3 einen eindeutig bestimmten Punkt Q, so daß $\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{x}$ ist. „Von P aus läßt sich jeder Vektor $\boldsymbol{x}$ abtragen".
c) Für je drei Punkte P, Q, R gilt

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} \quad . \tag{2.1.1}$$

Eine Punktmenge mit einer solchen Struktur heißt ein reeller dreidimensionaler affiner Raum.

Man zeigt leicht:

$$\overrightarrow{PP} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP} \, . \tag{2.1.2}$$

Die Wahl von E^3 spiegelt unter anderem folgende Tatsachen wider.

- Der Raum ist *homogen*, d.h. es ist kein Raumpunkt vor den anderen ausgezeichnet. (Ein Vektorraum V^3 besitzt hingegen ein ausgezeichnetes Element, nämlich den Nullvektor.)
- Der Raum ist *isotrop*[3], d.h. es ist keine Richtung ausgezeichnet.
- Begriffe wie „Gerade", „Strecke" und „Ebene" besitzen einen wohldefinierten Sinn, es gelten für sie die Gesetze der Elementargeometrie.

Wird ein fester Punkt O als Ursprung oder Bezugspunkt ausgezeichnet, so ist jeder Punkt P im affinen Raum durch den Vektor $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}$ bestimmt. Der Vektor $\boldsymbol{r}$ heißt auch *Ortsvektor* von P bezüglich des Bezugspunktes O.

Wählt man noch eine Basis $(\boldsymbol{e}_i)$, $(i = 1, 2, 3)$ des Vektorraumes V^3, so kann man den Ortsvektor $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP}$ darstellen als

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{3} x_i \boldsymbol{e}_i \tag{2.1.3}$$

Der Punkt P ist so also auch charakterisierbar durch das Drei-Tupel von Zahlen (x_1, x_2, x_3). Die x_i heißen *Koordinaten* bezüglich des *affinen Koordinatensystems*, das durch Angabe von Bezugspunkt und Basisvektoren: $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ definiert ist. Wenn man sich dagegen noch nicht auf eine Basis festlegen will, wohl aber schon einen Bezugspunkt gewählt hat, spricht man von einem *Bezugssystem*.

Dem Begriff eines Koordinatensystems entspricht eine Vorrichtung, mit der im Prinzip die quantitative Bestimmung der Lage eines Massenpunktes wirklich durchgeführt werden kann:

Im Punkte O, dem Standort des Beobachters, wird ein starres Achsengerüst mit angebrachten Einheitsmaßstäben auf den Achsen aufgestellt, das dem System $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ von Basisvektoren entspricht. Die Koordinaten eines Punktes werden durch Parallelprojektion auf die Achsen bestimmt. In vielen Fällen werden $O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ zeitunabhängig sein, oft ist es auch nötig oder zweckmäßig, zeitlich veränderliche Bezugs- bzw. Koordinatensysteme heranzuziehen.

Wichtig ist es, zu erkennen, daß die Koordinaten von der Basis abhängen. Seien zwei verschiedene affine Koordinatensysteme gegeben durch

$$(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \quad \text{und} \quad (O', \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$$

und sei

$$\boldsymbol{e}_i = \sum_{k=1}^{3} \boldsymbol{e}'_k D_{ki} \tag{2.1.4}$$

die Entwicklung der Basisvektoren $\boldsymbol{e}_i$ nach der Basis $(\boldsymbol{e}'_k)$ $(k = 1, 2, 3)$. Seien die Koordinaten eines Punktes P bezeichnet mit (x_1, x_2, x_3) bzw. (x'_1, x'_2, x'_3), so daß also

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{3} x_i \boldsymbol{e}_i \quad \text{bzw.} \quad \overrightarrow{O'P} = \sum_{i=1}^{3} x'_i \boldsymbol{e}'_i$$

gilt. Dann ist auch, wenn man $\overrightarrow{O'O}$ als $\sum_{k=1}^{3} c_k \boldsymbol{e}'_k$ darstellt,

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} = \sum_{k=1}^{3} c_k \boldsymbol{e}'_k + \sum_{k,i=1}^{3} \boldsymbol{e}'_k D_{ki} x_i \quad . \tag{2.1.5}$$

Also erhält man für die Koordinaten bezüglich der verschiedenen Koordinatensysteme die Beziehung

$$x'_k = c_k + \sum_{i=1}^{3} D_{ki} x_i \quad . \tag{2.1.6}$$

---

[2] *Vektor*. (lat.) Neubildung von vehere: (etwas) fahren, also etwa „Transportator". Gedacht ist wohl an einen Translationsvektor oder Geschwindigkeitsvektor. Entscheidend ist die Vorstellung der Gerichtetheit. Im Gegensatz dazu ist ein Skalar (von lat. scala: Leiter) eine ungerichtete Zahlgröße.

In Analogie dazu ist der Begriff „Tensor" (von lat. tendere: spannen) gebildet (vergl. Anhang C). Durch ein Tensorfeld wird nämlich der Spannungszustand eines kontinuierlichen Mediums beschrieben.

[3] *isotrop*. (von Griechisch „gleichwendig"): Gleichwertigkeit aller Richtungen.

Eine Basis (e_1, e_2, e_3) von V^3 definiert eine *Orientierung* des Raumes E^3. Die Basis

$$e'_i = \sum_{k=1}^{3} e_k D_{ki}$$

heißt genau dann gleich orientiert, wenn $\det(D_{ki}) > 0$ ist, und entgegengesetzt orientiert, wenn $\det(D_{ki}) < 0$ ist. Wir denken uns stets eine feste Orientierung eingeführt, die wir positive Orientierung nennen wollen (Abb. 2.1.1).

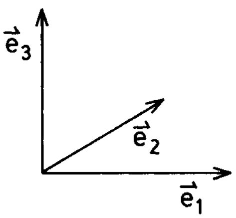

Abb. 2.1.1. Ein Orthonormalsystem, das wir positiv orientiert oder rechtshändig nennen wollen. Der Basisvektor e_2 zeigt nach hinten

Um Längen- und Winkelmessungen zu ermöglichen, führt man im Vektorraum V^3 ein *Skalarprodukt*

$(x, y) \mapsto x \cdot y \in \mathbb{R}$ ein, so daß für $x, y, z \in V^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$

gilt:

$$x \cdot y = y \cdot x \ , \tag{2.1.7}$$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \ , \tag{2.1.8}$$

$$x \cdot (\alpha y) = \alpha x \cdot y \ , \tag{2.1.9}$$

$$x \cdot x \geq 0; \quad x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0} \ . \tag{2.1.10}$$

E^3 wird dann auch „*Euklidischer*[4] *affiner Raum*" genannt.

Hiermit sind dann im E^3 definiert:

a) *Abstände* zwischen Punkten P und Q durch

$$\overline{PQ} := |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}} \ .$$

Es gilt die *Dreiecksungleichung*

$$\overline{PQ} \leq \overline{PR} + \overline{RQ} \ . \tag{2.1.11}$$

[4] *Euklid* (um 300 v. Chr.). Der in seinen „Elementa" unternommene axiomatische Aufbau der Geometrie, der erst von Hilbert vervollständigt wurde, war zwei Jahrtausende lang Vorbild für die exakte Mathematik.

b) *Winkel* zwischen Vektoren durch

$$\cos \sphericalangle (x, y) := \frac{x \cdot y}{|x| \cdot |y|} \ ,$$

c) positiv orientierte *Orthonormalbasen* e_1, e_2, e_3 als positiv orientierte Basen von V^3 mit $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$,

d) ein *vektorielles Produkt* $(x, y) \mapsto x \times y \in V^3$ durch folgende Eigenschaften

$$x \times y = -y \times x \tag{2.1.12}$$

$$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z) \tag{2.1.13}$$

$$x \times (\alpha y) = \alpha x \times y \tag{2.1.14}$$

$$e_1 \times e_2 = e_3 \tag{2.1.15}$$

$$e_2 \times e_3 = e_1 \tag{2.1.16}$$

$$e_3 \times e_1 = e_2 \tag{2.1.17}$$

für eine positiv orientierte Orthonormalbasis.

Man zeigt leicht, daß diese Definition unabhängig davon ist, von welcher positiv orientierten Orthonormalbasis man ausgeht.

i) Die vektoriellen Produkte der Basisvektoren e_i kann man auch in der Form

$$e_i \times e_j = \sum_k \varepsilon_{ijk} e_k$$

schreiben.

Das Symbol ε_{ijk} ist hierbei wie folgt definiert:

$\varepsilon_{ijk} = 0$, wenn irgend zwei Indizes gleich sind
$\varepsilon_{ijk} = 1$, wenn i, j, k eine gerade Permutation von $1, 2, 3$
$\varepsilon_{ijk} = -1$, wenn i, j, k eine ungerade Permutation von $1, 2, 3$ ist.

Es gelten folgende Identitäten:

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{irs} = \delta_{jr} \delta_{ks} - \delta_{js} \delta_{kr} \ , \tag{2.1.18}$$

$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b) \ , \tag{2.1.19}$$

$$a \cdot (b \times c) = \det(a, b, c) \ . \tag{2.1.20}$$

ii) Wir betrachten diejenigen affinen Transformationen, welche die Abstände zwischen je zwei Punkten unverändert lassen. In der Mathematik heißen diese auch *Bewegungen*.

$$P \mapsto P', \quad Q \mapsto Q', \quad \text{so daß } \overline{PQ} = \overline{P'Q'} \ .$$

Für die Ortsvektoren bedeutet das mit $De_i := \sum_k e_k D_{ki}$:

$$x \mapsto Dx + a = x' ,$$
$$y \mapsto Dy + a = y' , \quad \text{und}$$
$$(y-x)\cdot(y-x) = D(y-x)\cdot D(y-x) , \quad \text{oder}$$
$$y\cdot y - 2x\cdot y + x\cdot x = Dy\,Dy - 2Dx\cdot Dy + Dx\cdot Dx ,$$

und daher

$$x\cdot y = Dx\cdot Dy \quad \text{für alle} \quad x, y \in V^3 .$$

Insbesondere für $x = e_i$, $y = e_j$ mit $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$:

$$De_i \cdot De_j = \delta_{ij} = \sum_{k=1}^{3} D_{ki} D_{kj} .$$

Bezüglich einer Orthonormalbasis wird also die Matrix D_{ij} einer Bewegung eine sogenannte *orthogonale Matrix* sein müssen, die der Bedingung

$$\sum_{k=1}^{3} D_{ki} D_{kj} = \delta_{ij}$$

genügt.

In Matrizenschreibweise bedeutet dies

$$D^{\mathrm{T}} D = 1, \quad \text{wobei} \quad (D^{\mathrm{T}})_{ik} = D_{ki}$$

die transponierte Matrix zu D ist und $(1)_{ik} = \delta_{ik}$ die Einheitsmatrix, also die Matrix der identischen Abbildung bezeichnet.

Um Schreibarbeit zu sparen und an Übersichtlichkeit der Formeln zu gewinnen, unterdrücken wir bei der Summation über Vektorindizes gelegentlich das Summenzeichen, schreiben also

$$x_i e_i \quad \text{statt} \quad \sum_{i=1}^{3} x_i e_i , \quad x_i y_i \quad \text{statt} \quad \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

oder

$$e_i \times e_j = \varepsilon_{ijk} e_k \quad \text{statt} \quad e_i \times e_j = \sum_k \varepsilon_{ijk} e_k .$$

Wir schließen uns damit der *Einsteinschen*[5] *Summenkonvention* an: über doppelt auftretende Vektorindizes ist stets zu summieren. Die Stellung der Indizes (x^i oder x_i) ist belanglos, solange nur Orthonormalbasen benutzt werden.

Nach Vorgabe eines affinen Koordinatensystems (O, e_1, e_2, e_3) kann so zu jeder Zeit die Lage eines jeden Massenpunktes durch Angabe des Ortsvektors $r(t) = x_i(t) e_i$ charakterisiert werden. Wir wollen im folgenden immer, wenn nichts anderes erwähnt wird, ein kartesisches Koordinatensystem wählen, so daß also $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ ist.

Nun beschreibt mit fortschreitender Zeit der Ort des Massenpunktes $r(t)$ eine sogenannte *Bahnkurve* im E^3, also eine Abbildung $\mathbb{R} \to E^3$. Wählt man zu jeder Zeit das gleiche Koordinatensystem, so ist die Zeitentwicklung vollständig durch die Funktion $x_i(t)$ gegeben.

Wir fordern nun, daß die $x_i(t)$ mindestens zweimal nach der Zeit differenzierbar sind. Dann nennt man

$$\dot{r}(t) = \frac{d}{dt} r(t) = v(t) \quad \text{die } \textit{Geschwindigkeit(-skurve)},$$

$$\ddot{r}(t) = \frac{d}{dt} v(t) = a(t) \quad \text{die } \textit{Beschleunigung(-skurve)}$$

des Massenpunktes. Die mathematische Bildung des Differentialquotienten entspricht dabei genau dem physikalischen Verfahren zur Messung von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Zu bemerken ist, daß, im Gegensatz zum Ortsvektor, Geschwindigkeitsvektor und Beschleunigungsvektor nicht von der Wahl des Ursprungs (Bezugspunktes) abhängen.

Als erstes Beispiel sei die Bahnkurve eines *geradlinig-gleichförmig* sich bewegendes Massenpunktes betrachtet. Sie ist gegeben durch die Abbildung

$$r(t) = r_0 + v_0 t \tag{2.1.21}$$

mit konstanten Vektoren r_0, v_0. Hier gilt dann

$$v(t) = v_0 \ , \quad a(t) = 0 . \tag{2.1.22}$$

Der Graph der Bahnkurve wird durch eine Gerade dargestellt. Die Geschwindigkeit des Massenpunktes ist konstant sowohl dem Betrage wie der Richtung nach.

2.2 Die Newtonschen Gesetze

Im 17. Jahrhundert kam eine neue Sicht über die Bewegung materieller Körper zur Klärung und zum Durchbruch. Einen vorläufigen Endpunkt dieser Entwicklung, zu der die hervorragendsten Gelehrten jener

---

[5] *Einstein, Albert* (∗1879 Ulm, †1955 Princeton). Seine Leistungen sind allgemein bekannt:
1905: Spezielle Relativitätstheorie, Theorie der Brownschen Bewegung, Photoeffekt (Lichtquanten)
1915: Allgemeine Relativitätstheorie

Zeit beigetragen haben, setzte *I. Newton*[6]. In seinem 1687 veröffentlichten Werk „Principia" sind seine drei Epoche machenden Gesetze formuliert, die den Anfang des wissenschaftlichen Zeitalters bedeuten. Die entscheidende Erkenntnis Newtons war, daß nicht die geradlinig-gleichförmige Bewegung, sondern nur die Abweichung der Bewegung von dieser geradlinig-gleichförmigen Art einer Erklärung bedarf. Eine solche Abweichung, verursacht durch Einflüsse aus der Umgebung, führt er auf *Kräfte* zurück, die materielle Körper aufeinander ausüben. Die Form dieser Kräfte, z.B. ihre Abhängigkeit vom Abstand der materiellen Körper, ist zu postulieren.

So sagt das *erste* Newtonsche Gesetz, daß ein Körper in Ruhe oder im Zustand der geradlinig-gleichförmigen Bewegung genau dann bleibt, wenn er unbeeinflußt ist, wenn also keine Kräfte auf ihn wirken. In diesem Gesetz wird quasi postuliert: Es gibt ein „Nullelement" in der Menge der Kräfte, der Einflüsse auf einen materiellen Körper. Liegt dieses in einer physikalischen Situation vor, so liegt auch die „Nullklasse" der Bewegung vor. Diese ist Ruhe oder auch – und das ist das Neue – geradlinig-gleichförmige Bewegung, also $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. Das erste Newtonsche Gesetz ist auch als *Trägheitsprinzip* bekannt und geht auf *Galilei*[8] zurück.

Jede vom Nullelement verschiedene Kraft, jeder nicht vernachlässigbare Einfluß führt also zu einer nicht verschwindenden Beschleunigung und so zu einer Änderung der Bewegung.

Das erste Newtonsche Gesetz erhält erst einen wohlbestimmten Sinn, wenn man angibt, in welchen Bezugssystemen es gelten soll. Es kann offensichtlich nicht in allen Bezugssystemen gültig sein. Gilt es nämlich in einem System S, so kann es nicht in einem relativ beschleunigten System S' gelten, denn in diesem erfährt der Massenpunkt eine Beschleunigung, obwohl keine Kraft auf ihn wirkt.

Man nennt Koordinatensysteme, in denen das erste Newtonsche Gesetz gilt, auch *Inertialsysteme*[7]. Es ist keineswegs von vornherein klar, daß ein solches Inertialsystem überhaupt existiert. Durch eine zeitabhängige Koordinatentransformation läßt sich zwar erreichen, daß eine gegebene Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$ in eine geradlinig-gleichförmige übergeht, aber verlangt wird ja viel mehr, nämlich daß *alle* Bahnkurven kräftefreier Massenpunkte geradlinig-gleichförmig sind. Es zeigt sich jedoch: Ein Koordinatensystem, das sich relativ zum Fixsternhimmel ohne Rotation geradlinig gleichförmig bewegt, ist in sehr guter Näherung ein Inertialsystem; ein Koordinatensystem mit dem Bezugspunkt auf der Erdoberfläche ist sicher in weniger guter Näherung ein Inertialsystem, da sich der Bezugspunkt wegen der Rotation der Erde in beschleunigter Bewegung zur Sonne befindet. Wir werden die Abweichungen dieses Bezugssystems von einem Inertialsystem noch genauer studieren. Wenn ein System S ein Inertialsystem ist, so ist auch z.B. jedes relativ zu S geradlinig-gleichförmig ohne Rotation bewegte System S' ein ebenso gutes Inertialsystem. Der Ursprung O' von S' bewegt sich dann im System S geradlinig-gleichförmig, während die Achsenrichtungen von S und S' zu allen Zeiten übereinstimmen.

Wenn in S die Bahnkurve eines Massenpunktes durch $\boldsymbol{r}(t)$ gegeben ist, so hat sie wegen der Absolutheit der Zeit in der klassischen Mechanik im System S' die Form

$$\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{r}(t)+\boldsymbol{v}_0 t+\boldsymbol{r}_0$$

mit konstanten Vektoren $\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{v}_0$. Dabei ist $\boldsymbol{v}_0$ die Relativgeschwindigkeit von S und S'. Die Transformation der Bahnkurve von S nach S' heißt *Galilei-Transformation*[8]. In der Mechanik gilt das *Relativitäts-*

---

[6] *Newton, Isaac* (∗1643 Woolsthorpe, †1727 Kensington). Von vielen als der größte aller Physiker angesehen. Begründer der Mechanik und Himmelsmechanik, bahnbrechende Arbeiten auch über Optik.

1686: „Philosophiae naturalis principia mathematica", deren Grundgedanken er schon in den Jahren 1665–1667 bei einem Aufenthalt in seinem Heimatort Woolsthorpe entwickelt hatte, wohin er wegen der Pest geflohen war. Zur Ableitung der Keplerschen Gesetze aus dem Gravitationsgesetz Entwicklung der Infinitesimalrechnung. (Sie wurde unabhängig auch von Leibniz entdeckt, was später zu heftigen Prioritätsstreitigkeiten führte.)

1704: „Opticks". Newton war seit 1669 Professor in Cambridge, ab 1696 staatlicher Münzaufseher und seit 1703 Präsident der Royal Society.

[7] *Inertialsystem* (von lat. inertia: Trägheit). Ein Bezugssystem, in dem der Trägheitssatz gilt.

[8] *Galilei, Galileo* (∗ 1564 Pisa, † 1642 Arcetri bei Florenz). Seine bekanntesten Leistungen sind die Entdeckungen der Gesetze des freien Falls, von denen er durch Extrapolation zu immer kleinerer Beschleunigung zum Trägheitsgesetz gelangte, der Bau eines astronomischen Fernrohrs und die mit diesem gemachten astronomischen Entdeckungen: Jupitermond, Phasen der Venus, Auflösung der Milchstraße in einzelne Sterne. Veröffentlichung dieser Ergebnisse 1610: „Siderius Nuncius". 1616: Ermahnung durch das Heilige Officium wegen Eintretens für das Kopernikanische System. 1632: „Dialogo", Dialog über die beiden Hauptsysteme der Welt. Darauf Prozeß und Verurteilung zum Widerruf. 1638: Discorsi, sein physikalisches Hauptwerk.

prinzip: Alle Inertialsysteme sind physikalisch gleichwertig, es ist also nicht möglich, durch mechanische Messungen ein bestimmtes Inertialsystem auszuzeichnen. In formaler Sprache bedeutet dies, daß die Gesetze der klassischen Mechanik invariant unter Galilei-Transformationen sein müssen. Das Relativitätsprinzip gilt übrigens nicht nur in der Mechanik, sondern erfahrungsgemäß allgemein in der Physik. Allerdings hält, wie schon erwähnt, die Annahme der Absolutheit der Zeit einer ganz genauen Prüfung nicht mehr stand. Der Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen ist genau genommen nicht durch eine Galilei-Transformation, sondern durch eine sogenannte *Lorentz-Transformation*[9] zu beschreiben (siehe Kap. 15). Es ist jedoch für Geschwindigkeiten, die klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sind, die Galilei-Transformation eine ganz hervorragende Näherung.

Ist so im ersten Newtonschen Gesetz ausgesprochen, was es bedeutet, wenn keine Kraft auf ein Teilchen wirkt, so wird im *zweiten* Newtonschen Gesetz erklärt, wie die zu postulierenden Kräfte die Beschleunigung des materiellen Körpers beeinflussen. Die Aussage ist: Wenn man mit $\boldsymbol{K}(t)$ die Kraft zur Zeit t bezeichnet, dann gilt

$$m\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{K}(t) \quad , \tag{2.2.1}$$

d.h. die Beschleunigung ist zu jeder Zeit der postulierten Kraft proportional. Der Proportionalitätsfaktor m ist eine Eigenschaft des beeinflußten materiellen Körpers. Man nennt m auch die *träge Masse* des Körpers.

Wenn man weiß, daß die Kräfte, die auf verschiedene Körper wirken, dem Betrage nach gleich sind, so können über die Beschleunigungen der Körper auch deren Massen bestimmt werden. Wir werden in Kürze das dritte Newtonsche Gesetz besprechen, das die Existenz einer solchen Situation sicherstellt.

Aus $|m_1\boldsymbol{a}_1|=|m_2\boldsymbol{a}_2|$ folgt dann nämlich

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{|\boldsymbol{a}_2|}{|\boldsymbol{a}_1|} \tag{2.2.2}$$

Durch Festlegung einer Normmasse läßt sich dann die Masse eines jeden materiellen Körpers als Vielfaches dieser Normmasse bestimmen. Das wirklich Bemerkenswerte an Newtons zweitem Gesetz ist die Tatsache, daß sich der gesamte Einfluß der Umwelt auf einen Massenpunkt in einer einzigen vektoriellen Funktion $\boldsymbol{K}(t)$ ausdrücken läßt und daß für die Reaktion auf die Kraft nur die Masse m maßgeblich ist.

Man stellt weiterhin auf der Basis dieses Gesetzes experimentell fest:

a) Die Masse eines Körpers ist stets positiv und eine *extensive Größe*[10], d.h. ein Körper, der aus zwei Körpern der Massen m_1 und m_2 zusammengesetzt ist, hat die Masse m_1+m_2. (Die Geschwindigkeit ist z.B. keine extensive Größe, auch nicht die Temperatur.)
b) Kräfte addieren sich wirklich wie Vektoren (Kräfteparallelogramm): Wenn auf einen Massenpunkt zwei unabhängige Einflüsse einwirken, von dem einer der Kraft $\boldsymbol{K}_1$, der andere der Kraft $\boldsymbol{K}_2$ entspricht, so ist der resultierende Gesamteinfluß durch die Vektorsumme $\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2$ gegeben.

Hat man im zweiten Newtonschen Gesetz nun festgelegt, wie die Kräfte die Bewegung verändern, so bedeutet das, daß man die Bewegung, d.h. die Lage des Massenpunktes $\boldsymbol{r}(t)$ zu jeder Zeit t aus der Gleichung

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=\boldsymbol{K}(t) \tag{2.2.3}$$

berechnen kann, wenn man

a) die Kraftkurve $\boldsymbol{K}(t)$
b) die Anfangswerte $\boldsymbol{r}(0)$ und $\dot{\boldsymbol{r}}(0)=\boldsymbol{v}(0)$ von Ort und Geschwindigkeit zu irgendeiner Anfangszeit $t=t_0$, etwa $t=0$ kennt.

Im allgemeinen ist aber die Kraftkurve $\boldsymbol{K}(t)$ nicht direkt bekannt: Die Kraft $\boldsymbol{K}(t)$, die ein Massenpunkt zur Zeit t erfährt, kann im Prinzip von seiner gesamten Vorgeschichte abhängen. In der Praxis gelten oft einfache Kraftgesetze. Die Kraft auf einen Massenpunkt zur Zeit t ist schon durch wenige Größen, wie Lage und Geschwindigkeit des Massenpunktes zur Zeit t, bestimmt:

$$\boldsymbol{K}(t)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t),\dot{\boldsymbol{r}}(t),t) \quad . \tag{2.2.4}$$

In diesem Falle lautet das zweite Newtonsche Gesetz:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t),\dot{\boldsymbol{r}}(t),t) \quad . \tag{2.2.5}$$

Diese Gleichung heißt *Bewegungsgleichung* des Massenpunktes. Da in ihr der gewöhnliche Differential-

[9] *Lorentz, Hendrik Antoon* (∗ 1853 Arnhem, † 1928 Haarlem). Besonders hervorgetreten durch seine „Elektronentheorie", eine elektrodynamische Theorie der Materie mit Anwendung auf die Elektrodynamik bewegter Körper. Arbeiten auch zur Thermodynamik und kinetischen Gastheorie. Seit 1918 Planung des Projektes zur Trockenlegung der Zuider-See.

[10] *Extensiv* (lat.) von extensio: Ausdehnung.

quotient von $\boldsymbol{r}(t)$ in zweiter Ordnung auftritt, ist sie eine „gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung". Die Lösung einer solchen Gleichung ist im allgemeinen eindeutig bestimmt, wenn die Anfangswerte von $\boldsymbol{r}(t)$ und deren erster Ableitung vorgegeben werden. Die Lösungen der Bewegungsgleichung bilden somit eine sechsparametrige Schar von Bahnkurven, diese sechs Parameter sind die Koordinaten von den Anfangswerten $\boldsymbol{r}(t_0)$ und $\boldsymbol{v}(t_0)$ zu irgendeinem Zeitpunkt t_0.

Die Tatsache, daß man für die Berechnung einer bestimmten Bewegung $\boldsymbol{r}(t)$ *und* $\boldsymbol{v}(t)$ für $t=t_0$ vorzugeben hat, entspricht auch der physikalischen Erfahrung. Die Wurfbahn eines Balles hängt davon ab, von wo und mit welcher Anfangsgeschwindigkeit der Ball geworfen wird.

Besonders häufig und wichtig ist der Fall, daß die Kraft auf einen Massenpunkt nur von der momentanen Lage abhängt. Dann gilt:

$$\boldsymbol{K}(t)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \quad . \tag{2.2.6}$$

In diesem Fall heißt die Funktion $\boldsymbol{F}$: $E^3 \to V^3$, die jedem Raumpunkt die Kraft zuordnet, die ein Massenpunkt dort erfährt, ein *Kraftfeld.*

Das Kraftfeld $\boldsymbol{F}$ ist nicht mit der Kraft(kurve) $\boldsymbol{K}$ zu verwechseln. Man erhält die Kraftkurve $\boldsymbol{K}(t)$, indem man die Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$ in die Kraftfeldfunktion $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ einsetzt oder, in mathematischer Sprache durch Hintereinanderschaltung der Abbildungen $\boldsymbol{K}: \boldsymbol{r} \mapsto \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r})$ und $\boldsymbol{r}: t \mapsto \boldsymbol{r}(t)$. Später werden wir den Unterschied in der Bezeichnung von Kräften und Kraftfeldern fallenlassen.

Das Aufstellen von Bewegungsgleichungen und deren Behandlung, d.h. das Aufsuchen der Lösungen und ihre physikalische Interpretation ist ein wesentliches Ziel in der Klassischen Mechanik.

Das zweite Newtonsche Gesetz kann natürlich aber auch in umgekehrter Weise benutzt werden. Mißt man eine Bahnkurve und kennt man nicht die verursachende Kraft, so kann man diese über das Gesetz bestimmen. Newton selbst hat auf diese Weise, wie wir noch sehen werden, das Gravitationsgesetz erschlossen. Das Entscheidende aber ist, daß dann ein und dasselbe Kraftgesetz für die verschiedensten Phänomene verantwortlich ist. Die Gravitationskraft erklärt die Bewegung des Planeten wie das Fallen eines Apfels auf die Erde. Die Universalität der Kraftgesetze gibt dem zweiten Newtonschen Gesetz erst seine Bedeutung.

Wir kommen nun zum *dritten Newtonschen Gesetz*, das eine Aussage über die gegenseitige Kraftwirkung zwischen den Körpern macht.

Übt ein Körper auf einen zweiten Körper eine Kraft $\boldsymbol{K}_{21}(t)$ aus, so übt der zweite auf den ersten eine Kraft $\boldsymbol{K}_{12}(t)$ aus, die denselben Betrag aber entgegengesetzte Richtung hat.

Allgemeiner gilt für ein System von N Körpern, wenn $\boldsymbol{K}_{ik}$ die Kraft ist, die der k-te Körper auf den i-ten Körper ausübt:

$$\boldsymbol{K}_{ik} = -\boldsymbol{K}_{ki} \quad . \tag{2.2.7}$$

Man formuliert das Gesetz auch kurz mit dem Satz: *„actio gleich reactio"*.

2.3 Einige wichtige Kraftgesetze

Es zeigt sich, daß sehr viele in der Natur auftretende Kräfte auf eine relativ kleine Anzahl verschiedener Kraftgesetze zurückführbar sind. Wir betrachten hier wieder Kräfte $\boldsymbol{K}(t)$, die nur von $\boldsymbol{r}(t)$, $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ und t abhängen können. Also

$$\boldsymbol{K}(t)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t), \dot{\boldsymbol{r}}(t), t) \quad .$$

Wir wollen im folgenden einige bedeutende Kraftgesetze dieser Art vorstellen und beginnen mit Kraftgesetzen der Form

$$\boldsymbol{K}(t)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t), t) \quad ,$$

also mit Kräften, zu denen ein – eventuell zeitabhängiges – Kraftfeld existiert.

i) Im einfachsten Fall hängt die Kraft $\boldsymbol{K}(t)$, die auf den Massenpunkt wirkt, weder von seiner Lage noch von der Zeit ab:

$$\boldsymbol{K}(t)=\boldsymbol{K}_0=\text{const} \quad . \tag{2.3.1}$$

In diesem Fall nennt man das Kraftfeld *homogen* und *zeitunabhängig*. In sehr kleinen Raum-Zeitbereichen ist es oft möglich, Kraftfelder in guter Näherung als homogen anzusehen. So ist beispielsweise das Schwerefeld der Erde an der Erdoberfläche für räumliche Bereiche von der Ausdehnung ~ 10 km und für sehr große Zeiten sicher nahezu homogen.

Die allgemeinste Lösung der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=\boldsymbol{K}_0 \tag{2.3.2}$$

läßt sich durch zweimalige Integration sofort angeben:

$$\boldsymbol{r}(t)=\frac{1}{2m}\boldsymbol{K}_0 t^2+\boldsymbol{v}_0 t+\boldsymbol{r}_0 \ . \tag{2.3.3}$$

Hierbei sind $\boldsymbol{v}_0$ und $\boldsymbol{r}_0$ die Anfangswerte der Bahnkurve, und die Lösung $\boldsymbol{r}(t)$ der Bewegungsgleichung ist durch $\boldsymbol{r}_0$ und $\boldsymbol{v}_0$ eindeutig bestimmt. Auch für homogene, aber zeitabhängige Kraftfelder findet man die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{f}(t) \tag{2.3.4}$$

mühelos:

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{v}_0 t+\frac{1}{m}\int_0^t dt'\int_0^{t'} dt''\boldsymbol{f}(t'') \ . \tag{2.3.5}$$

ii) Von großer Bedeutung und schon weniger trivial ist der Fall, daß das Kraftfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)$ linear von $\boldsymbol{r}$ abhängt. Als Prototyp betrachten wir das lineare zeitunabhängige Kraftfeld

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=-D\boldsymbol{r} \tag{2.3.6}$$

mit einer Konstanten D. Man spricht in diesem Falle auch von einem *harmonischen* Kraftgesetz. Es gilt u.a. für die rücktreibende Kraft bei einer aus der Ruhelage ausgelenkten Feder oder bei einem Pendel, wenn die Auslenkung jeweils klein genug ist. Die zugehörige lineare Bewegungsgleichung, also

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}(t)+D\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{0} \tag{2.3.7}$$

ist eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Ein solcher Typ von Differentialgleichungen ergibt sich, wie wir noch in Kap. 6 genauer sehen werden, allgemein für ein mechanisches System, bei dem die Bahnkurve sich nicht weit von einer „Gleichgewichtslage“ des Systems entfernt. Die Lösung dieser Gleichungen kann man mit elementaren Methoden in geschlossener Form angeben. Hierin liegt die große praktische Bedeutung linearer Kraftgesetze.

Kommt noch ein homogenes Kraftfeld hinzu, so ergibt sich eine Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}(t)+D\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{f}(t) \ , \tag{2.3.8}$$

die ebenfalls geschlossen lösbar ist. Gleichungen von diesem Typ erschließen den neuen bedeutsamen Phänomenbereich der erzwungenen Schwingungen und Resonanzerscheinungen (Kap. 6).

iii) Gravitationskräfte sind von Newton als einheitliches Phänomen erkannt und formal beschrieben worden. Er war es, der erkannte, daß alle Körper allein schon wegen ihrer Massen Kräfte aufeinander ausüben. Seine für uns einfache Theorie beschreibt die Gravitationswechselwirkungen mit solcher Genauigkeit, daß erst sehr viel später ganz geringfügige Abweichungen von ihren Vorhersagen sichergestellt und erst in diesem Jahrhundert durch die allgemeine Relativitätstheorie Einsteins erklärt werden konnten.

Eine erste allgemeine Eigenschaft der Kraft $\boldsymbol{K}_{\mathrm{m}}(t)$, die von anderen Massen auf ein Punktteilchen der (trägen) Masse m ausgeübt wird, ist, daß sie proportional zur trägen Masse m ist:

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{m}}(t)=m\boldsymbol{G}(t) \ . \tag{2.3.9}$$

Dies ist eine sehr bemerkenswerte Eigenschaft der Gravitationskräfte, denn es wäre zunächst zu erwarten gewesen, daß die Schwerkräfte, die auf ein Punktteilchen wirken, von einer neuen Eigenschaft dieses Teilchens abhingen, die man „schwere Masse“ nennen könnte. Der soeben beschriebene, sehr tief liegende und experimentell genauestens bestätigte Sachverhalt wird allgemein als das Prinzip der Gleichheit von schwerer und träger Masse bezeichnet. Die allgemeine Relativitätstheorie nimmt ihn zum Ausgangspunkt, während er in der Newtonschen Gravitationstheorie ohne Erklärung zur Kenntnis genommen wird.

In der Bewegungsgleichung des Punktteilchens

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=m\boldsymbol{G}(t) \tag{2.3.10}$$

hebt sich somit die Masse m heraus.

Wenn nun, etwa wegen der Kleinheit von m, eine Rückwirkung auf die viel größeren Massen, welche die Kraft $\boldsymbol{K}_{\mathrm{m}}(t)$ hervorrufen, vernachlässigt werden kann, dann sind die möglichen Bahnkurven unabhängig von m. Man nennt die von den viel größeren Massen hervorgerufene, auf das Punktteilchen der relativ kleinen Masse m wirkende Kraft auch eine *äußere Gravitationskraft*, wobei das Wort „äußere“ andeutet, daß man eben die Kraft, die das Punktteilchen auf die anderen, größeren Massen ausübt, vernachlässigen will. Unter dem Einfluß einer äußeren Gravitationskraft ist die Bewegung eines Massenpunktes also unabhängig von seiner Masse.

Für die Schwerkraft an der Erdoberfläche, d.h. für die Anziehungskraft der Erde auf Objekte auf der Erde, die als äußere Gravitationskraft über nicht zu große Raumgebiete homogen ist, gilt dann

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=m\boldsymbol{g} \quad . \tag{2.3.11}$$

Man erhält näherungsweise für $|\boldsymbol{g}|$ den Wert $g=9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, mit einer Schwankung von 0,5 % über die Erdoberfläche.

Das Herausfallen der Masse aus dieser Gleichung bedeutet, daß alle Massen gleich schnell auf die Erde fallen.

Nach diesen allgemeineren Aussagen über die Gravitationskraft soll nun der Ausdruck für $\boldsymbol{G}(t)$ präzisiert werden.

Nach der Newtonschen Theorie gibt es zu Gravitationskräften immer ein Kraftfeld, und alle Gravitationskräfte lassen sich auf ein einziges einfaches Kraftgesetz zurückführen, das die Gravitationskraft zwischen zwei Massen bestimmt:

Zwei Massenpunkte, die sich an den Orten P_1 bzw. P_2 befinden, ziehen sich gegenseitig an. Die Kraft, die dabei von dem Massenpunkt der Masse M_2 am Orte P_2 auf den Massenpunkt der Masse M_1 am Orte P_1 ausgeübt wird, ist (Abb. 2.3.1)

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{K}_{12}=\gamma\,\frac{M_1M_2}{r^3}\,\boldsymbol{r} \ , \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{r}=\overrightarrow{P_1P_2} \ , \\ &\gamma=6{,}67\times10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}} \ .\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Dabei ist γ eine fundamentale Naturkonstante, auch Gravitationskonstante genannt. Die Gleichheit von schwerer und träger Masse ist in dieser Form des Kraftgesetzes enthalten. Offensichtlich gilt bei diesem Gesetz:

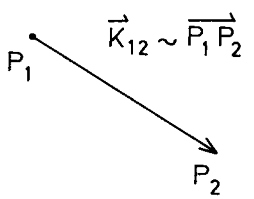

Abb. 2.3.1. Die Richtung der Kraft $\boldsymbol{K}_{12}$, die vom Massenpunkt am Orte P_2 auf einen Massenpunkt am Orte P_1 ausgeübt wird. Die Kraft ist anziehend

a) $|\boldsymbol{K}_{12}|\sim 1/r^2$,

b) $\boldsymbol{K}_{12}\,\|\,\overrightarrow{P_1P_2}$,

c) $\boldsymbol{K}_{12}=-\boldsymbol{K}_{21}$ (actio = reactio).

Newton wurde auf folgende Weise auf dieses Gesetz geführt. Er kannte das dritte Keplersche Gesetz, nämlich, daß die Kuben der Bahnradien den Quadraten der Umlaufzeiten proportional sind:

$$r^3/T^2=\text{const.}$$

Bei einer Kreisbahn gilt für die Frequenz $\omega=2\pi/T$, und daher

$$r^3\omega^2=\text{const} \quad \text{oder} \quad r\omega^2=\text{const}\cdot 1/r^2 \ .$$

Bei einer Kreisbahn ist, wenn die $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$-Ebene die Ebene des Kreises ist:

$$\boldsymbol{r}(t)=r\boldsymbol{e}_1\cos\omega t+r\boldsymbol{e}_2\sin\omega t \ , \quad \text{und so}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\omega^2\boldsymbol{r}, \quad \text{also} \quad |\boldsymbol{a}|=\omega^2 r \ .$$

Ein Punkt auf der Kreisbahn erfährt also ständig eine Beschleunigung in Richtung des Zentrums. Diese Beschleunigung muß durch die Massenanziehung bewirkt werden. Also ist, da experimentell $\omega^2\cdot r=\text{const}\cdot r^{-2}$ gilt, diese Anziehung proportional zu $1/r^2$.

Natürlich ist diese Argumentation von Newton nur eine intuitive Erschließung der Abhängigkeit der Kraft vom Abstand der Massen. Das sieht man schon daran, daß dieses Argument Kreisbahnen für die Planeten voraussetzt. Daß das Newtonsche Anziehungsgesetz erfolgreich die Anziehung von Massen beschreibt, zeigt sich darin, daß aus diesem einen Gesetz u.a. alle drei Keplerschen Gesetze ableitbar sind und die Erdbeschleunigung g bestimmbar ist.

Im Bezugssystem eines Massenpunktes auf einer Kreisbahn, also in einem *Nichtinertialsystem* wird die Anziehungskraft gerade durch eine Zentrifugalkraft $mr\omega^2$ kompensiert, so daß in diesem System der Massenpunkt keine resultierende Kraft erfährt. Zentrifugalkräfte sind, wie die auch noch zu studierenden Coriolis-Kräfte, keine Kräfte, die von anderen Massen herrühren, sie treten immer nur in Nichtinertialsystemen auf. Im Nichtinertialsystem des Massenpunktes auf der Kreisbahn gilt also das Newtonsche Gesetz nicht, da in ihm der Massenpunkt in Ruhe bleibt, obwohl eine Gravitationskraft auf ihn einwirkt. Das kann man so interpretieren, daß der Gravitationskraft eine gleich große Kraft entgegenwirkt, eben die *Zentrifugalkraft*. Diese so konstruierte Kraft ist aber hier im Rahmen der Klassischen Mechanik eine Kraft anderer Art, eben eine *Scheinkraft*, die man zum Verschwinden bringen kann, wenn man nur ein Inertialsystem als Bezugssystem wählt. Scheinkräfte ergeben sich also durch Übergang zum Nichtinertialsystem, sie können daher nie universellen Charakter haben wie die Kräfte, die von Körpern auf andere Körper ausgeübt werden. Letztere sind aufzählbar, sie sind je nach physikalischem Problem in einem Inertialsystem wirksam und in die Bewegungsgleichung aufzunehmen. Scheinkräfte sind je nach der Abweichung von einem Inertialsystem von komplizierter Art. Eine Formulierung der Newtonschen Gesetze in einem beliebigen Nichtinertialsystem würde voraussetzen, daß man diese Scheinkräfte klassifizieren könnte und sie nach der Nichtinertialität des Bezugssystems einsetzte. Das impliziert aber, daß man ein Inertialsystem kennt und somit ist man wieder auf das Newtonsche Konzept zurückgeführt, nämlich in einem Inertialsystem die Bewegungsgleichung zu formulieren und nur Kräfte zuzulassen, die von Körpern auf andere Körper wirken.

iv) Auch *geschwindigkeitsabhängige Kraftgesetze* spielen in der Physik eine Rolle. Ein fundamentales Gesetz ist das folgende, das in Situationen gilt, in denen Teilchen eine elektrische Ladung e tragen. Befindet sich solch ein Teilchen in einem elektrischen Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ und einem magnetischen Induktionsfeld $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$, so wirkt auf das Teilchen die Kraft

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)=e\,[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)]\ . \tag{2.3.13}$$

$\boldsymbol{K}_{\mathrm{L}}$ nennt man auch die *Lorentz-Kraft*. Diese Kraft hängt also auch noch von der Geschwindigkeit des Massenpunktes ab, sie kann sogar zusätzlich explizit von der Zeit abhängen, wenn $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ dieses tun. Die Lorentz-Kraft ist also die Kraft auf ein Teilchen mit einer elektrischen Ladung e in einem elektromagnetischen Feld. Die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ sollen hier von anderen geladenen Teilchen verursacht werden.

v) Die Kraft, die zwei ruhende Ladungen q_1, q_2, die sich am Orte P_1 bzw. P_2 befinden, aufeinander ausüben, wird beschrieben durch das *Coulomb-Gesetz*[11]

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{K}_{12}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1q_2}{r^3}\,\boldsymbol{r}\quad\text{mit}\quad\boldsymbol{r}=\overrightarrow{P_1P_2}\ ,\\&4\pi\varepsilon_0=1{,}1126\times10^{-10}\,\mathrm{CV^{-1}\,m^{-1}}\ .\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

[11] *Coulomb, Charles Auguste de* (∗ 1736 Angoulême, † 1806 Paris). In den Jahren 1784–1789 entscheidende Abhandlungen über Elektrizitätslehre und Magnetismus. Die von ihm erfundene Drehwaage ermöglichte ihm die Entdeckung des Kraftgesetzes zwischen ruhenden Ladungen.

Dieses Gesetz hat die gleiche Struktur wie das Gravitationsgesetz. Betrachtet man zwei Protonen, so ziehen sich diese an auf Grund der Gravitationskraft, und sie stoßen sich ab auf Grund der Coulomb-Kraft. Die Coulomb-Kraft ist dabei $\sim 10^{36}$ mal stärker als die Gravitationskraft.

Daß sich elektrische Kräfte in der Alltagswelt so wenig bemerkbar machen, liegt daran, daß es sowohl positive als auch negative Ladungen gibt. Gerade wegen der Stärke der elektromagnetischen Kräfte werden sich positive und negative Ladungen nach Möglichkeit kompensieren. Massen sind andererseits immer positiv, und Gravitationskräfte können nicht wie elektrische Kräfte abgeschirmt werden. Dies ist der Grund dafür, daß sie trotz ihrer relativen Schwäche leichter zu beobachten sind.

vi) Zum Schluß sei noch ein weiteres geschwindigkeitsabhängiges Kraftgesetz angegeben. Auch durch Reibung kann eine Bewegung beeinflußt werden. Man stellt experimentell fest, daß diese *Reibungskraft* für kleine Geschwindigkeiten proportional der Geschwindigkeit und der Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist:

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{R}}=-\kappa\dot{\boldsymbol{r}}\ ,\quad \kappa>0\ . \tag{2.3.15}$$

Für den freien Fall mit Berücksichtigung der Reibung wäre so

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=m\boldsymbol{g}-\kappa\dot{\boldsymbol{r}} \tag{2.3.16}$$

die Bewegungsgleichung, die es zu lösen gilt.

2.4 Der Energiesatz für einen Massenpunkt in einem Kraftfeld

2.4.1 Wegintegrale

Wir wollen einen Massenpunkt der Masse m betrachten, der unter dem Einfluß eines zeitunabhängigen Kraftfeldes steht. Es sei also

$$\boldsymbol{K}(t)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\ .$$

Dann lautet die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\ . \tag{2.4.1}$$

Multipliziert man nun diese Gleichung skalar mit $\dot{\boldsymbol{r}}$:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r})\cdot\dot{\boldsymbol{r}} \tag{2.4.2}$$

und integriert man beide Seiten über t von t_1 nach t_2, so erhält man für die linke Seite

$$m\int_{t_1}^{t_2} dt\,\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{1}{2}\,m\int_{t_1}^{t_2} dt\,\frac{d}{dt}\,(\dot{\boldsymbol{r}}^2)=\frac{1}{2}\,m\dot{\boldsymbol{r}}^2\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$=T(t_2)-T(t_1)\quad \text{mit}$$

$$T=\frac{1}{2}\,m\dot{\boldsymbol{r}}^2 \ . \tag{2.4.3}$$

Für die rechte Seite erhält man das Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\,dt \ . \tag{2.4.4}$$

Dabei ist $\boldsymbol{r}(t)$ in $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}(t))$ eine Lösung der Bewegungsgleichung. Sei $\boldsymbol{r}(t_1)=\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}(t_2)=\boldsymbol{r}_2$ und sei C das Stück der Bahn zwischen $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$, so schreiben wir auch

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\,dt=\int_{\boldsymbol{r}_1,C}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \ . \tag{2.4.5}$$

Der Ausdruck

$$\int_{\boldsymbol{r}_1,C}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=A_{12}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;C,\boldsymbol{F})\equiv A_{12}(C) \tag{2.4.6}$$

stellt, mathematisch betrachtet, ein *Wegintegral* dar. Wir stellen ausdrücklich fest, daß das Wegintegral nur von dem Stück der *Bahn* zwischen $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$ abhängen kann und von der Durchlaufrichtung dieses Bahnstücks, nicht aber von der Bahn*kurve* $\boldsymbol{r}(t)$ zwischen t_1 und t_2. Ersetzt man nämlich die Zeit t durch einen anderen Parameter τ mit $t=t(\tau)$, so ist

$$\int_{\tau(t_1)}^{\tau(t_2)} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t(\tau)))\cdot\frac{d\boldsymbol{r}(t(\tau))}{d\tau}\,d\tau$$

$$=\int_{\tau(t_1)}^{\tau(t_2)} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t(\tau)))\cdot\frac{d\boldsymbol{r}(t(\tau))}{dt}\,\frac{dt}{d\tau}\,d\tau$$

$$=\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\,dt \ . \tag{2.4.7}$$

Zur Charakterisierung eines Wegintegrals muß man also angeben:

a) Anfangs- und Endpunkt des Weges,
b) den Weg selbst zwischen den Punkten,
c) den Integranden, d.h. ein Vektorfeld.

Ehe wir auf die physikalische Bedeutung dieses Wegintegrals $A_{12}(C)$ eingehen, müssen wir uns über einige Eigenschaften von allgemeinen Wegintegralen über Vektorfelder informieren.

i) Allgemein nennt man ein Vektorfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)$ *konservativ*, wenn das Wegintegral

$$\int_{\boldsymbol{r}_1,C}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^{\sigma} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(\sigma'),t)\cdot\frac{d\boldsymbol{r}(\sigma')}{d\sigma'}\,d\sigma' \tag{2.4.8}$$

unabhängig vom Weg $C=\{\boldsymbol{r}(\sigma')|0\leq\sigma'\leq\sigma\}$ zwischen $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$ ist, also nur noch von $\boldsymbol{r}(0)=\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}(\sigma)=\boldsymbol{r}_2$ abhängt. Man beachte, daß t hier die Rolle eines (oder mehrerer) Parameter spielt und bei der Integration entlang des Weges festgehalten wird.

ii) Ein Vektorfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)$ ist konservativ genau dann, wenn das Wegintegral über einen jeden *geschlossenen Weg* verschwindet.

Das ist offensichtlich, denn seien C_1 und C_2 zwei Wege von $\boldsymbol{r}_1$ nach $\boldsymbol{r}_2$ (Abb. 2.4.1). Ist $\boldsymbol{F}$ konservativ, so ist

$$\int_{\boldsymbol{r}_1,C_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{\boldsymbol{r}_1,C_2}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=-\int_{\boldsymbol{r}_2,-C_2}^{\boldsymbol{r}_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \ , \tag{2.4.9}$$

also ist

$$\int_{C_1\cup -C_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=0 \ . \tag{2.4.10}$$

Ist umgekehrt jedes Wegintegral über einen geschlossenen Weg gleich Null, so betrachte man alle geschlossenen Wege, auf denen $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$ liegen. Diese beiden Punkte teilen den Weg in zwei Teile, und die obige Rechnung ergibt, in umgekehrter Reihenfolge gelesen, die Aussage, daß das Integral unabhängig vom Weg ist.

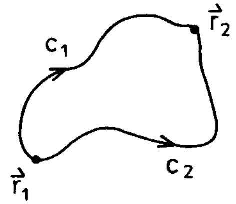

Abb. 2.4.1. Zwei Wege von $\boldsymbol{r}_1$ nach $\boldsymbol{r}_2$

iii) Ein Vektorfeld $\boldsymbol{F}$ ist konservativ genau dann, wenn es ein *skalares Feld* $U(\boldsymbol{r}, t)$ gibt mit

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U(\boldsymbol{r}, t) \equiv -\operatorname{grad} U(\boldsymbol{r}, t) \ . \tag{2.4.11}$$

Der *Gradient* ist hierbei ein Vektorfeld, definiert durch

$$\nabla U(\boldsymbol{r}, t) = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3}\right) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial U}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i \ , \tag{2.4.12}$$

wenn x_1, x_2, x_3 die Koordinaten bezüglich einer Orthonormalbasis sind. (Das Minuszeichen ist Konvention.) U ist dadurch bis auf eine Konstante bestimmt.

Beweis

a) Es gebe ein $U(\boldsymbol{r}, t)$. Wir wollen zeigen, daß

$$\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

unabhängig vom Wege ist. Sei C irgendein Weg mit

$$C = \{\boldsymbol{r}(\sigma') \mid 0 \leq \sigma' \leq \sigma\}, \boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}(\sigma) = \boldsymbol{r}_2 \ ,$$

dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{r}_1, C}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} &= -\int_0^{\sigma} \nabla U(\boldsymbol{r}(\sigma'), t) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}(\sigma')}{d\sigma'} \, d\sigma' \\ &= -\int_0^{\sigma} d\sigma' \frac{d}{d\sigma'} U(\boldsymbol{r}(\sigma'), t) \\ &= -[U(\boldsymbol{r}_2) - U(\boldsymbol{r}_1)] \ . \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

Offensichtlich ist das Ergebnis nicht vom Weg C abhängig.

b) Ist umgekehrt

$$\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

unabhängig vom Wege, so definiere man

$$U(\boldsymbol{r}) := -\int_{\boldsymbol{r}_1, C}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{2.4.14}$$

mit C beliebig und $\boldsymbol{r}_1$ beliebig, aber fest. Mit

$$C = \{\boldsymbol{r}(\sigma') \mid 0 \leq \sigma' \leq \sigma\}, \boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}(\sigma) = \boldsymbol{r} \ ,$$

ist also

$$U(\boldsymbol{r}) = U(\boldsymbol{r}(\sigma)) = -\int_0^{\sigma} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(\sigma')) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}(\sigma')}{d\sigma'} \, d\sigma' \ , \tag{2.4.15}$$

und so

$$\frac{d}{d\sigma} U(\boldsymbol{r}(\sigma)) = \frac{d\boldsymbol{r}(\sigma)}{d\sigma} \cdot \nabla U = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(\sigma)) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}(\sigma)}{d\sigma}$$

oder

$$(\boldsymbol{F} + \nabla U) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}(\sigma)}{d\sigma} = 0 \ .$$

Da aber $d\boldsymbol{r}(\sigma)/d\sigma$ beliebig ist wegen der Beliebigkeit des Weges C, so ist

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U \ .$$

Wählt man statt $\boldsymbol{r}_1$ einen anderen Punkt $\boldsymbol{r}_1'$ als Anfangswert bei dem Wegintegral, so ist

$$\hat{U} = \int_{\boldsymbol{r}_1'}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\boldsymbol{r}_1'}^{\boldsymbol{r}_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = U + c \ .$$

Andererseits ist

$$\nabla \hat{U} = \nabla(U + c) = \nabla U \ .$$

U ist durch $\boldsymbol{F}$ so nur bis auf eine Konstante bestimmt.

Man nennt U ein zu $\boldsymbol{F}$ gehörendes *Potentialfeld* oder auch *Potential*.

iv) Ist $\boldsymbol{F}$ konservativ, so gilt:

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \ , \tag{2.4.16}$$

$\nabla \times \boldsymbol{F}$ (sprich *Rotation* $\boldsymbol{F}$) ist hierbei ein Vektorfeld, das wie folgt definiert ist:

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) \tag{2.4.17}$$

oder auch

$$(\nabla \times \boldsymbol{F})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial F_k}{\partial x_j} \tag{2.4.18}$$

in einem rechtshändigen Orthonormalsystem. Wenn $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} U$, so ist

$$F_k = -\frac{\partial U}{\partial x_k} \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k} = 0$$

wegen der Symmetrie der zweiten Ableitungen und damit wirklich

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \ .$$

v) Umgekehrt gilt natürlich:
Ist $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \neq \boldsymbol{0}$, so ist auch $\boldsymbol{F}$ nicht konservativ und $\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ nicht unabhängig vom Wege.

vi) Man kann weiter zeigen: Ist

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$$

in einem einfach zusammenhängenden Gebiet des E^3, so ist dort auch (vgl. Anhang F)

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} U \ .$$

2.4.2 Arbeit und Energiesatz

Kehren wir zurück zu unseren Wegintegralen über das Kraftfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$.

Ist das Kraftfeld ein konservatives Vektorfeld, so ist also

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla} U(\boldsymbol{r}) \quad \text{und} \\ &\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = U(\boldsymbol{r}_1) - U(\boldsymbol{r}_2) \ , \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

und somit ist

$$T(t_2) + U(\boldsymbol{r}(t_2)) = T(t_1) + U(\boldsymbol{r}(t_1)) \ . \tag{2.4.20}$$

Das bedeutet, daß die Größe

$$E = \tfrac{1}{2} m\dot{\boldsymbol{r}}^2(t) + U(\boldsymbol{r}(t)) \tag{2.4.21}$$

eine zeitliche Konstante ist, wenn die Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$ Lösung der Bewegungsgleichung ist. Man nennt E die *Energie*, T die *kinetische Energie*[12], $U(\boldsymbol{r})$ die *potentielle Energie*[12] des Teilchens am Orte $\boldsymbol{r}$.

Die Energie eines Punktteilchens ist so im Rahmen der Newtonschen Mechanik im Falle eines konservativen Kraftfeldes eine erhaltene Größe; während der Bewegung dieses Punktteilchens wird weder Energie abgegeben noch aufgenommen. Den festen Wert dieser Größe kann man z.B. für $t=0$ aus den Anfangsbedingungen bestimmen: $E = \frac{1}{2} m\dot{\boldsymbol{r}}^2(0) + U(\boldsymbol{r}(0))$.

Allgemein nennt man – auch für nichtkonservative Kräfte – das Integral

$$A = \int_{\boldsymbol{r}_1, C}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

die von der Kraft am Punktteilchen längs der Bahn C zwischen $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$ *geleistete Arbeit*. Bei einer konservativen Kraft ist A gleich dem Negativen der Änderung der potentiellen Energie des Punktteilchens.

Für die Lorentz-Kraft $\boldsymbol{K}_{\mathrm{L}}(t) = e[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}(t)) + \dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}(t))]$ ist $\boldsymbol{K}_{\mathrm{L}}(t) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}(t) = e\dot{\boldsymbol{r}}(t) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}(t))$. Das Magnetfeld leistet also niemals Arbeit. Wenn das Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ konservativ ist, läßt sich auch die von der Lorentz-Kraft geleistete Arbeit als Differenz der potentiellen Energien ausdrücken.

Beispiele

i) Das homogene Kraftfeld ist konservativ. Das Potential zu

$$\boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{A} \quad \text{ist} \quad U = -\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r} + \text{const} \ .$$

Das ist klar, da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r}, \frac{\partial}{\partial x_2} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r}, \frac{\partial}{\partial x_3} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r} \right) \\ &= (A_1, A_2, A_3) = \boldsymbol{A} \quad \text{ist} \ . \end{aligned} \tag{2.4.22}$$

Mit $\boldsymbol{A} = m\boldsymbol{g}$ ist so $U = -m\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r}$, und wenn man die

---

[12] *Energie* (griech.) Tatkraft, Wirksamkeit; ursprünglich philosophischer Begriff, bei Aristoteles synonym mit Entelechie, später als physikalischer Terminus: innewohnende Arbeit, Fähigkeit, Arbeit zu verrichten.

Kinetische Energie: Bewegungsenergie, von griech. kinein: bewegen. Potentielle Energie: etwa „Energie der Möglichkeit" von lat. potentia: Macht, Möglichkeit. Ein höher gelegenes Gewicht hat im Vergleich zu einem tiefer gelegenen die größere Möglichkeit, Arbeit zu verrichten.

z-Achse in $-\boldsymbol{g}$-Richtung legt, ist so

$$U = +mgz \ . \tag{2.4.23}$$

ii) Ist $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = f(r)\boldsymbol{r}/r$, $r = |\boldsymbol{r}|$, so ist

$$U(\boldsymbol{r}) = -\int_{r_0}^{r} f(r')dr' = U(r), \quad \text{d.h.}$$
$$U' = -f(r) \, , \tag{2.4.24}$$

denn so ist

$$-\boldsymbol{\nabla} U(r) = -\frac{dU}{dr} \cdot \boldsymbol{\nabla} r = f(r) \boldsymbol{\nabla} r \ . \tag{2.4.25}$$

Es ist aber $\boldsymbol{\nabla} r = \boldsymbol{r}/r$.

Insbesondere sind so Gravitationskraft und harmonische Kraft konservativ mit den Potentialfeldern

$$U(r) = -\frac{\gamma M_1 M_2}{r} \tag{2.4.26}$$

für die Gravitationskraft und

$$U(r) = \frac{D}{2} r^2 \tag{2.4.27}$$

für die harmonische Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -D\boldsymbol{r}$.

Ein Kraftfeld der Form

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = f(r)\boldsymbol{r}/r \tag{2.4.28}$$

heißt *rotationssymmetrisches Zentralkraftfeld*. Allgemein nennt man ein Kraftfeld, bei dem die Kraft stets in der Verbindungslinie mit einem Zentrum O liegt, ein *Zentralkraftfeld*. Ein allgemeines Zentralkraftfeld hat also die Gestalt

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}/r \tag{2.4.29}$$

Für rotationssymmetrische Zentralkraftfelder, die, wie wir gesehen haben, stets konservativ sind, hängt der Betrag der Kraft nur vom Abstand r vom Zentrum ab. Man überlegt sich leicht, daß nicht rotationssymmetrische Zentralkraftfelder nicht konservativ sein können, da sich in diesem Fall sofort ein geschlossener Weg angeben läßt, längs dessen das Arbeitsintegral nicht verschwindet.

iii) Ein nichtkonservatives Feld wäre

$$\boldsymbol{F} = (y, -x, 0) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{r} = (x, y, z) \ . \tag{2.4.30}$$

Es ist $(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) = (0, 0, -2)$, das Vektorfeld ist nicht rotationsfrei.

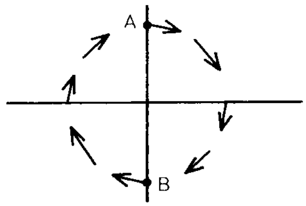

Abb. 2.4.2. Ein nicht rotationsfreies Vektorfeld

Zeichnet man an einigen Punkten den zugehörigen Vektor $\boldsymbol{F}$ ein, ergibt sich Abb. 2.4.2.

Man sieht unmittelbar, daß

$$\int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

abhängig vom Wege ist, da beim rechten Halbkreis $\boldsymbol{F}$ meistens parallel zu $d\boldsymbol{r}$, auf dem linken Halbkreis $\boldsymbol{F}$ meistens antiparallel zu $d\boldsymbol{r}$ ist.

iv) Für eindimensionale Bewegungen ist $F(x)$ immer konservativ, man kann immer ein $U(x)$ angeben, mit

$$F(x) = (-d/dx)\, U(x) \ , \tag{2.4.31}$$

nämlich die Stammfunktion von $-F(x)$. Dann gilt

$$\tfrac{1}{2} m\dot{x}^2 + U(x) = E = \text{const} \ , \quad \text{und so} \tag{2.4.32}$$

$$\dot{x} = \pm\sqrt{(2/m)\,[E - U(x(t))]} \quad \text{oder} \tag{2.4.33}$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}\, dt'}{\sqrt{(2/m)\,[E - U(x(t'))]}} = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{(2/m)\,[E - U(x')]}} = \int_{t_0}^{t} dt' = t - t_0 \ , \tag{2.4.34}$$

wobei $x_0 = x(t_0)$, $x = x(t)$ sei.

Die Bewegungsgleichung ist also sofort lösbar, indem man ausnutzt, daß E eine erhaltene Größe ist. Man erhält so als Lösung

$$x = x(t; E, x_0) \ .$$

Die beiden Parameter E, x_0, die die Lösung charakterisieren, stehen für die beiden Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$. Der Zusammenhang zwischen E und v_0 ergibt sich aus

$$v_0 = \sqrt{(2/m)\,[E - U(x_0)]} \ . \tag{2.4.35}$$

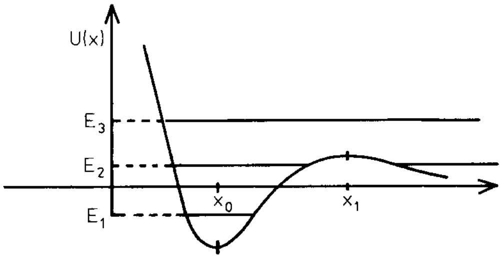

Abb. 2.4.3. Ein Beispiel einer Potentialfunktion für eine eindimensionale Bewegung mit den erlaubten Aufenthaltsbereichen für verschiedene Energien

Da die kinetische Energie T nie negativ ist, gilt $E=T+U\geq U$, die Gesamtenergie ist also nie kleiner als die potentielle Energie, und Gleichheit kann nur gelten, wenn $\dot{x}=0$. Wenn man die Funktion $U(x)$ aufträgt, so kann man die Bereiche, in denen sich bei gegebener Energie E das Teilchen aufhalten kann, sofort ablesen (Abb. 2.4.3).

Man erkennt insbesondere: Wenn x_0 ein Minimum von U ist und $E_0=U(x_0)+|\varepsilon|$ etwas größer als $U(x_0)$, so bleibt die Bahnkurve stets in der Nähe der Ruhelage x_0. Wenn andererseits x_1 ein Maximum von U ist, so wird sich bei einer kleinen Änderung der Energie $U(x_1)$ zu $E_1=U(x_1)+\varepsilon$ die Bahn weit von x_1 entfernen.

Minima des Potentials entsprechen stabilen Gleichgewichtslagen, Maxima labilen Gleichgewichtslagen. Diese Überlegung gilt sinngemäß auch für mehrdimensionale Bewegungen. Eine Gleichgewichtslage ist genau dann stabil, wenn sie zu einem Minimum des Potentials gehört.

2.5 Mehrere Punktteilchen in Wechselwirkung

Im vorigen Kapitel hatten wir nur einen Massenpunkt betrachtet, die Bewegungsgleichung für diesen studiert und die Energie als erhaltene Größe diskutiert.

Betrachten wir nun N Massenpunkte, so müssen wir analog verfahren. Die Bewegungsgleichung für den i-ten Massenpunkt lautet dann:

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i(t)=\boldsymbol{K}_i(t)\ , \qquad i=1,\ldots,N\ , \tag{2.5.1}$$

wobei m_i die Masse des i-ten Teilchens ist und $\boldsymbol{K}_i(t)$ die Kraft ist, die auf das Teilchen i wirkt.

Sei diese Kraft auf dem i-ten Massenpunkt von der Form

$$\boldsymbol{K}_i(t)=\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{r}_1(t),\ldots,\boldsymbol{r}_N(t))\ , \tag{2.5.2}$$

dann stellen die Bewegungsgleichungen

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i(t)=\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{r}_1(t),\ldots,\boldsymbol{r}_N(t))\ , \tag{2.5.3}$$

ein System von $3N$ Differentialgleichungen dar; als Anfangsbedingungen wären z. B. $\boldsymbol{r}_i(0)$ und $\dot{\boldsymbol{r}}_i(0)$ vorzugeben. Das sind $6N$ Anfangsbedingungen, durch welche eine Lösung der Bewegungsgleichung eindeutig bestimmt ist.

Multiplikation mit $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ und Summation über i von 1 bis N ergibt so, nach einer Integration von t_1 nach t_2:

$$\int\limits_{t_2}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i=\int\limits_{t_2}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{r}_1(t),\ldots,\boldsymbol{r}_N(t))\cdot\frac{d\boldsymbol{r}_i(t)}{dt}$$

oder auch

$$T(t_2)-T(t_1)=\int\limits_{t_2}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{r}_1(t),\ldots,\boldsymbol{r}_N(t))\cdot\frac{d\boldsymbol{r}_i(t)}{dt} \tag{2.5.4}$$

mit

$$T(t)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2(t)\ . \tag{2.5.5}$$

$T(t)$ nennt man die *kinetische Energie des Systems von N Punktteilchen*. Interessant wäre nun, wenn auch in diesem allgemeinen N-Teilchen-Fall die Kräfte aus einem einzigen Potential ableitbar wären.

Um diese Möglichkeit diskutieren zu können, betrachten wir den $3N$-dimensionalen Vektorraum aller $3N$ Vektorkoordinaten

$$\begin{aligned} &Z=V^3\oplus\ldots\oplus V^3\ (N\ \text{mal}) \\ &Z=\{z=(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_N)\,|\,\boldsymbol{r}_i\in V^3\}\ . \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

Die Lagen aller N Teilchen können dann also durch Punkte in Z beschrieben werden, indem man die Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_N$ zu einem Vektor $\underline{z}=(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_N)$ aus Z zusammenfaßt.

Dieser Raum $Z=V^{3N}$ der möglichen Lagen des N-Teilchensystems heißt *Konfigurationsraum* des Systems.

Auf Z definieren wir ein Skalarprodukt wie folgt: Wenn $\underline{z}=(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_N)$ und $\underline{z}'=(\boldsymbol{r}'_1,\ldots,\boldsymbol{r}'_N)$, dann ist

$$\underline{z}\cdot\underline{z}'=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}'_i \ . \tag{2.5.7}$$

Die N Bahnkurven $\boldsymbol{r}_i(t)$ $(i=1,\ldots,N)$ entsprechen dann einer Bahnkurve $t\mapsto\underline{z}(t)=(\boldsymbol{r}_1(t),\ldots,\boldsymbol{r}_N(t))\in Z$. Ebenso fassen wir die Kraftfelder $\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_N)$ zu einem Kraftfeld $\underline{\boldsymbol{F}}: V^{3N}\to V^{3N}$ zusammen:

$$\underline{\boldsymbol{F}}(\underline{z})=(\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_N),\ldots,\boldsymbol{F}_N(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_N)) \ . \tag{2.5.8}$$

Dann ist

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{r}_1(t),\ldots,\boldsymbol{r}_N(t))\cdot\frac{d\boldsymbol{r}_i(t)}{dt}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\underline{\boldsymbol{F}}(\underline{z}(t))\cdot\frac{d\underline{z}}{dt}\,dt = \int_{\underline{z}_1,C}^{\underline{z}_2}\underline{\boldsymbol{F}}\cdot d\underline{z} \ . \tag{2.5.9}$$

In Abschn. 2.4.1 hatten wir einige mathematische Bemerkungen zu Wegintegralen über Vektorfelder gemacht. Diese waren für dreidimensionale Vektorräume formuliert worden, sind aber sofort auf eine beliebige Dimension zu verallgemeinern.

Ein Kraftfeld $\underline{\boldsymbol{K}}(\underline{z})$ über den Vektorraum Z heißt konservativ, wenn das Wegintegral

$$\int_{\underline{z}_1,C}^{\underline{z}_2}\underline{\boldsymbol{F}}\cdot d\underline{z}$$

unabhängig vom Wege C in Z ist, also nur noch von $\underline{z}_1$ und $\underline{z}_2$ abhängt.

Ebenso folgt:

Ein Kraftfeld $\underline{\boldsymbol{F}}(\underline{z})$ ist konservativ genau dann, wenn es ein Potentialfeld $U(\underline{z})$ gibt, mit

$$\underline{\boldsymbol{F}}=-\underline{\boldsymbol{\nabla}}U \quad \text{d.h.} \tag{2.5.10}$$

$$\boldsymbol{F}_i=-\boldsymbol{\nabla}_i U(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_N) \tag{2.5.11}$$

und $\boldsymbol{\nabla}_i$ ist einfach der Gradient bezüglich der Variablen $\boldsymbol{r}_i$; man schreibt oft

$$\boldsymbol{\nabla}_i=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_i} \ . \tag{2.5.12}$$

Ist das Kraftfeld K konservativ und zeitunabhängig, so gilt: Die Größe

$$E=T(t)+U(\boldsymbol{r}_1(t),\ldots,\boldsymbol{r}_N(t)) \tag{2.5.13}$$

ist zeitlich konstant, wenn die Bahnkurve $\underline{z}(t)=(\boldsymbol{r}_1(t),\ldots,\boldsymbol{r}_N(t))$ eine Lösung der Bewegungsgleichung ist. E heißt *Gesamtenergie* des Systems von N Massenpunkten.

Beispiele

i) Wir betrachten zwei Massenpunkte; jeder übe auf den anderen eine Kraft aus, deren Betrag nur von $|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|=|\boldsymbol{r}|=r$ abhänge, und deren Richtung in der Verbindungslinie liege (Abb. 2.5.1).

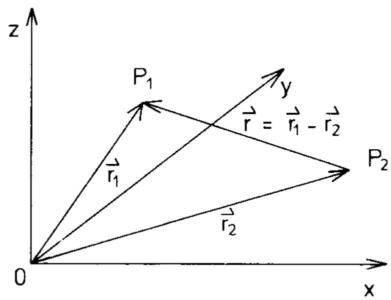

Abb. 2.5.1. Die Lage zweier Massenpunkte, deren Wechselwirkung betrachtet wird

Dann gilt, mit $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$:

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1=\boldsymbol{K}_1(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=-f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r} \ , \tag{2.5.14}$$

$$m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2=\boldsymbol{K}_2(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=\ \ f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r} \ . \tag{2.5.15}$$

Daß $\boldsymbol{K}_1$ das Negative von $\boldsymbol{K}_2$ ist, wird durch das dritte Newtonsche Gesetz gefordert.

Behauptung

$(\boldsymbol{K}_1,\boldsymbol{K}_2)$ ist ein konservatives Kraftfeld.

Sei $U(r)$ eine Stammfunktion von $f(r)$, so ist

$$\boldsymbol{K}_i=-\boldsymbol{\nabla}_i U(r)=-\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_i}U(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|) \ . \tag{2.5.16}$$

Beweis

Es ist

$$-\boldsymbol{\nabla}_i U(r)=-U'(r)\boldsymbol{\nabla}_i r=-f(r)\boldsymbol{\nabla}_i r \ . \tag{2.5.17}$$

Nun ist mit

$$r_i = (x_i, y_i, z_i) \ ,$$

$$\nabla_1 r = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial z_1}\right) r \ ,$$

$$r = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} \ ,$$

$$\nabla_1 r = \frac{(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)}{r} \ :$$

$$\nabla_1 |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| = \frac{(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)}{r} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} \ , \tag{2.5.18}$$

und analog:

$$\nabla_2 |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| = \nabla_2 r = -\frac{(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)}{r} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r} \ . \tag{2.5.19}$$

Für

$$f(r) = \gamma \frac{M_1 M_2}{r^2} \quad \text{ist} \quad U(r) = -\gamma \frac{M_1 M_2}{r} \ .$$

Wir erhalten mit diesem Potential die Bewegungsgleichungen für zwei Massenpunkte, die sich auf Grund des Newtonschen Gravitationsgesetzes anziehen. $U(r)$ ist das *Gravitationspotentialfeld.* Es ist

$$E = \tfrac{1}{2} M_1 \dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \tfrac{1}{2} M_2 \dot{\boldsymbol{r}}_2^2 + U(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|) \tag{2.5.20}$$

zeitlich konstant.

ii) Wir wollen das Aufstellen von Bewegungsgleichungen üben:

Gegeben seien drei Massenpunkte, die wie in Beispiel (i) miteinander wechselwirken; dann ist (Abb. 2.5.2)

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\boldsymbol{r}}_1 &= \boldsymbol{K}_{12}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2) + \boldsymbol{K}_{13}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3) \ , \\ m_2 \ddot{\boldsymbol{r}}_2 &= \boldsymbol{K}_{21}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2) + \boldsymbol{K}_{23}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3) \ , \\ m_3 \ddot{\boldsymbol{r}}_3 &= \boldsymbol{K}_{31}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3) + \boldsymbol{K}_{32}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3) \ . \end{aligned} \tag{2.5.21}$$

$\boldsymbol{K}_{ij}$ ist die Kraft, die von Teilchen j auf Teilchen i ausgeübt wird, sie hänge vom Vektor $\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$ ab.

Das dritte Newtonsche Gesetz fordert noch

$$\boldsymbol{K}_{ij}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) = -\boldsymbol{K}_{ji}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \ . \tag{2.5.22}$$

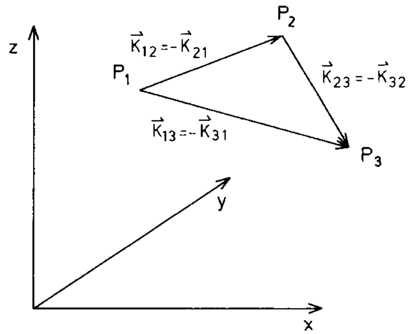

Abb. 2.5.2. Die Massenpunkte sowie die Gravitationskräfte, die diese aufeinander ausüben

Soll das 9-dimensionale Kraftfeld

$$(\boldsymbol{K}_{12} + \boldsymbol{K}_{13}, \boldsymbol{K}_{21} + \boldsymbol{K}_{23}, \boldsymbol{K}_{31} + \boldsymbol{K}_{32})$$

konservativ sein, so muß es also ein entsprechendes Potentialfeld $U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3)$ geben. Im Falle der gravitativen Anziehung ist

$$\begin{aligned} U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) &= -\gamma \frac{M_1 M_2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|} - \gamma \frac{M_2 M_3}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3|} - \gamma \frac{M_3 M_1}{|\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1|} \\ &= \sum_{i<j} U_{ij}(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|) \end{aligned} \tag{2.5.23}$$

ein solches Potentialfeld. Man kann nämlich explizit nachprüfen, daß aus diesem Potentialfeld U durch Gradientenbildung die rechten Seiten der Bewegungsgleichung entstehen, d.h. z.B.

$$\begin{aligned} -\nabla_1 U &= \boldsymbol{K}_{12}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2) + \boldsymbol{K}_{13}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3) \\ &= -\gamma \frac{M_1 M_2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^3}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2) - \gamma \frac{M_1 M_3}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3|^3}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3) \ . \end{aligned} \tag{2.5.24}$$

Anmerkung

Die Beispiele spiegeln gleichzeitig physikalisch wichtige, allgemeine Fälle wider, nämlich:

Fast immer ist $\boldsymbol{K}_i(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N)$, d.h. die Kraft auf das i-te Teilchen von folgender Gestalt:

$$\boldsymbol{K}_i(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N) = \boldsymbol{K}_i^{(a)}(\boldsymbol{r}_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \boldsymbol{K}_{ij}(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_j) \ , \tag{2.5.25}$$

d.h. auf das i-te Teilchen wirkt eine „*äußere Kraft* $\boldsymbol{K}_i^{(a)}$", die nur von der Lage des Teilchens $\boldsymbol{r}_i$ abhängt, und es wirken Kräfte K_{ij} von den anderen Teilchen auf das Teilchen i. Man nennt die Kräfte, die von den anderen Teilchen des Systems auf das Teilchen i ausgeübt werden, auch die *inneren Kräfte*.

Gilt auch noch, daß die Kräfte K_{ij} von der Gestalt

$$K_{ij} = \frac{r_i - r_j}{|r_i - r_j|} f_{ij}(|r_i - r_j|) \tag{2.5.26}$$

sind, und sind außerdem die äußeren Kräfte $K_i^{(a)}$ konservativ, so ist auch das Kraftfeld $\underline{K} = (K_1, \ldots, K_N)$ konservativ mit dem Potentialfeld

$$U(r_1, \ldots, r_N) = \sum_{j=1}^{N} V_j^{(a)}(r_j) + \sum_{\substack{l,k=1 \\ l<k}}^{N} V_{lk}(|r_l - r_k|) \ , \tag{2.5.27}$$

wobei $-V_{ik}$ Stammfunktion zu $f_{ik} = f_{ki}$ ist. Denn so ist dann

$$\begin{aligned} K_i &= -\nabla_i U \\ &= -\nabla_i V_i^{(a)}(r_i) \\ &\quad - \sum_{i<k} \frac{r_i - r_k}{|r_i - r_k|} V'_{ik}(|r_i - r_k|) \\ &\quad + \sum_{l<i} \frac{r_l - r_i}{|r_l - r_i|} V'_{li}(|r_l - r_i|) \\ &= -\nabla_i V_i^{(a)}(r_i) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} \frac{r_i - r_k}{|r_i - r_k|} V'_{ik}(|r_i - r_k|) \ , \end{aligned} \tag{2.5.28}$$

da $V_{ij} = V_{ji}$. Damit hat K_i die vorgegebene Struktur.

2.6 Der Impuls und die Impulsbilanz

Neben der Bahnkurve, der Geschwindigkeitskurve und der Energie eines Teilchens ist der *Impuls*[13] (genauer: die Impulskurve), definiert durch

$$p_i(t) := m_i \dot{r}_i(t) \ , \tag{2.6.1}$$

eine weitere, sehr nützliche Größe bei der Analyse einer Bewegung.

[13] *Impuls* (lat.) Antrieb, Schwung.

Betrachtet man N-Massenpunkte, so definiert man den Gesamtimpuls $P(t)$ durch

$$P := \sum_{i=1}^{N} p_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{r}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} m_i r_i \ . \tag{2.6.2}$$

Der Ortsvektor R des *Schwerpunktes* ist definiert durch

$$R := \sum_{i=1}^{N} m_i r_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} m_i \ . \tag{2.6.3}$$

(Der Nenner $\sum m_i$ ist gerade so gewählt, daß bei einer Verschiebung der Ortsvektoren $r_i : r_i \mapsto r_i + a$ sich der Schwerpunkt R um denselben Vektor a verschiebt: $R \mapsto R + a$).

Dann ist

$$P = M\dot{R} \tag{2.6.4}$$

mit $M := \sum_{i=1}^{N} m_i$, der Gesamtmasse des Systems.

P ist also auch der Impuls des Systems von N Massenpunkten, die man sich dabei im Schwerpunkt mit der Masse $M = \sum m_i$ zusammengefaßt denkt.

Mit Hilfe der Impulse kann man das zweite Newtonsche Gesetz auch wie folgt formulieren

$$\dot{p}_i(t) = K_i(t) \ , \tag{2.6.5}$$

d.h. die Kraft, die auf das Teilchen i wirkt, bewirkt eine Impulsänderung des Teilchens gemäß der obigen Relation. Diese Form des zweiten Newtonschen Gesetzes ist sogar allgemeiner und gilt, wie sich zeigen läßt, auch noch, wenn die Masse des Teilchens sich während der Bewegung ändert (wie etwa bei einer Rakete, die den verbrannten Treibstoff ausstößt). Faßt man alle Einzelimpulse $p_i(t)$ zu einem Impuls $\underline{p}(t) := (p_1(t), \ldots, p_N(t))$ zusammen, dann schreibt sich die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$\dot{\underline{p}}(t) = \underline{K}(t) \ . \tag{2.6.6}$$

Es ist für viele allgemeine Betrachtungen auch nützlich, die Vektoren $\underline{z} \in V^{3N}$ und $\underline{p} \in V^{3N}$ zu einem Vektor $(\underline{z}, \underline{p}) \in V^{6N}$ zusammenzufassen. Der $6N$-dimensionale Raum aller Lagen und Impulse heißt *Phasenraum* des N-Teilchensystems. Jeder Bahnkurve $t \mapsto \underline{z}(t)$ im Konfigurationsraum ist genau eine Kurve

$$t \mapsto (\underline{z}(t), \underline{p}(t))$$

im Phasenraum zugeordnet. Die Vorgabe von Anfangswerten $\underline{z}(0)$, $\underline{p}(0)$ entspricht der Angabe eines Phasenraumpunktes, durch den die Phasenraumkurve zur Zeit $t=0$ geht, und durch jeden Punkt des Phasenraumes läuft genau eine Phasenraumkurve, die zu einer Lösung der Bewegungsgleichung gehört.

Gelten nun die Bewegungsgleichungen in der Form

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i = \boldsymbol{K}_i^{(a)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \boldsymbol{K}_{ij} \qquad \text{mit} \tag{2.6.7}$$

$$\boldsymbol{K}_{ij} = -\boldsymbol{K}_{ji} \ , \qquad \text{so folgt}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\boldsymbol{p}}_i = \dot{\boldsymbol{P}} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{K}_i^{(a)} \ . \tag{2.6.8}$$

Die Änderung des Gesamtimpulses ist also gleich der Summe der äußeren Kräfte. Ist diese Summe gleich Null, so ist also

$$\dot{\boldsymbol{P}} = M\ddot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{0} \ .$$

Der Gesamtimpuls ist somit eine erhaltene Größe, wenn die Summe aller äußeren Kräfte verschwindet. Der Schwerpunkt bewegt sich dann geradlinig-gleichförmig.

Das gilt natürlich erst recht, wenn die äußeren Kräfte einzeln verschwinden, wenn also

$$\boldsymbol{K}_i^{(a)} = \boldsymbol{0}$$

ist für $i=1,\ldots,N$. Man nennt solch ein System auch *abgeschlossen*.

Sehen wir von der inneren Bewegung der einzelnen Massenpunkte ab, so bewegt sich das Gesamtsystem wie ein freies Teilchen. Greifen äußere Kräfte an, so ist die Beschleunigung des Schwerpunktes durch die Gesamtmasse $M = \Sigma\, m_i$ und die gesamte äußere Kraft

$$\boldsymbol{K}^{(a)} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{K}_i^{(a)} \tag{2.6.9}$$

bestimmt. Man kann diese Tatsachen als Ausdruck der Additivität der Masse auffassen.

Beispiele

In dem Zwei-Körper-Problem

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 &= -f(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)\,\frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|} \ , \\ m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 &= f(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)\,\frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|} \end{aligned} \tag{2.6.10}$$

fehlen äußere Kräfte (abgeschlossenes System). Addition der Gleichungen führt zu

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = M\ddot{\boldsymbol{R}} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2) = \dot{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{0} \ . \tag{2.6.11}$$

Die Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt liefert die Lösung

$$\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{V}_0 t \ . \tag{2.6.12}$$

Der Gesamtimpuls $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{V}_0$ ist konstant.

Damit sind drei Differentialgleichungen von den sechs Bewegungsgleichungen schon gelöst. Für die Betrachtung der restlichen drei Gleichungen liegt es nahe, diese so umzuformen, daß man eine Differentialgleichung für $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ erhält:

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{r}}_1 &= -\frac{1}{m_1} f(r)\,\frac{\boldsymbol{r}}{r} \ , \\ \ddot{\boldsymbol{r}}_2 &= \frac{1}{m_2} f(r)\,\frac{\boldsymbol{r}}{r} \ , \end{aligned} \tag{2.6.13}$$

und so

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{\boldsymbol{r}}_1 - \ddot{\boldsymbol{r}}_2 &= \left(-\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right) f(r)\,\frac{\boldsymbol{r}}{r} \\ &= -\frac{1}{\mu} f(r)\,\frac{\boldsymbol{r}}{r} \end{aligned} \tag{2.6.14}$$

mit

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \text{oder} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \ . \tag{2.6.15}$$

Man nennt μ auch die *reduzierte Masse* des Zweiteilchensystems. Ist $m_1 \approx m_2$, so ist $\mu \approx m_1/2$, ist $m_1 \ll m_2$, so ist

$$\mu = \frac{m_1}{(1+m_1/m_2)} \approx m_1 \ .$$

So ist beispielsweise die reduzierte Masse des Systems Erde-Sonne annähernd gleich der Erdmasse.

Man nennt die Gleichung

$$\mu\ddot{\boldsymbol{r}} = -f(r)\,\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{2.6.16}$$

auch die Bewegungsgleichung für die *Relativbewegung*. Die einfache Schwerpunktbewegung ist abgespalten und wir haben nur noch die kompliziertere Gleichung für den Relativvektor $\boldsymbol{r}$ zu studieren. Diese Gleichung ähnelt einer physikalischen Situation, in der das Kraftzentrum sich unbeweglich im Ursprung befindet und ein Teilchen mit der Masse μ sich unter dem Einfluß einer Kraft bewegt.

Die Energie

$$E = \tfrac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2^2 + U(r) \tag{2.6.17}$$

läßt sich auch zerlegen in den Energieanteil der Schwerpunktbewegung und in den Anteil der Relativbewegung

$$E = E_s + E_{rel} \quad \text{mit}$$

$$E_s = \tfrac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2 \ , \qquad E_{rel} = \tfrac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2 + U(r) \ . \tag{2.6.18}$$

Beweis

Es gilt:

$$\tfrac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2 = \tfrac{1}{2}M\,\frac{1}{M^2}\,(m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2)^2$$

$$\tfrac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2 = \frac{1}{2}\,\frac{m_1m_2}{M}\,(\dot{\boldsymbol{r}}_1 - \dot{\boldsymbol{r}}_2)^2$$

Addition beider Gleichungen ergibt

$$\dot{\boldsymbol{r}}_1^2\left(\frac{m_1^2}{2M} + \frac{m_1m_2}{2M}\right) + \dot{\boldsymbol{r}}_2^2\left(\frac{m_2^2}{2M} + \frac{m_1m_2}{2M}\right) + \dot{\boldsymbol{r}}_1\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_2\left(\frac{m_1m_2}{M} - \frac{m_1m_2}{M}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2^2 \ .$$

Diese Zerlegung in zwei Summanden ist also eine Identität, sie entspricht dem Vorgehen, statt der Koordinaten $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ die Koordinaten $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{r}$ zu betrachten. Wichtig ist aber, daß in dem Falle, in dem $\dot{\boldsymbol{R}} = \text{const}$ ist, beide Anteile E_s und E_{rel} getrennt erhalten bleiben.

Ganz allgemein läßt sich für ein abgeschlossenes System durch Addition aller Bewegungsgleichungen und Einführung des Gesamtimpulses $\boldsymbol{P}$ die Betrachtung von Schwerpunkt- und Relativbewegung gesondert durchführen. Führt man die Vektoren vom Schwerpunkt $\boldsymbol{R}$ zu den Orten $\boldsymbol{r}_i$ der Teilchen ein durch

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{x}_i \ , \quad \text{so ist} \tag{2.6.19}$$

$$\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0} \ ,$$

und stets

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{\boldsymbol{R}} + \dot{\boldsymbol{x}}_i)^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{x}}_i^2 \ , \quad \text{d.h.} \tag{2.6.20}$$

$$E = T + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} V_{ij}(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|)$$

$$= E_s + E_{rel} \quad \text{mit} \tag{2.6.21}$$

$$E_s = \tfrac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2 \ , \tag{2.6.22}$$

$$E_{rel} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\boldsymbol{x}}_i^2 + \sum_{i<j} V_{ij}(|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|) \ , \tag{2.6.23}$$

und die Bewegungsgleichungen lauten nun:

$$M\ddot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{0} \ , \tag{2.6.24}$$

$$m_i\ddot{\boldsymbol{x}}_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \boldsymbol{K}_{ij}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j) \ , \quad (i = 1, \ldots, N) \ . \tag{2.6.25}$$

Addiert man die N Bewegungsgleichungen für die Relativkoordinaten, so erhält man wegen

$$\sum_i m_i\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0} \quad \text{und} \quad \sum_{i,j=1}^{N} \boldsymbol{K}_{ij} = \boldsymbol{0} \ :$$

$$\sum_i m_i\ddot{\boldsymbol{x}}_i = \sum_{i,j=1}^{N} \boldsymbol{K}_{ij} = \boldsymbol{0} \ . \tag{2.6.26}$$

Die Gleichungen sind also linear abhängig, und eine von ihnen, etwa diejenige für den Vektor $\boldsymbol{x}_N$ ist eine Folge der übrigen. Durch Abspaltung der Schwerpunktbewegung wird also ein abgeschlossenes N-Teilchensystem effektiv auf ein System mit $(N-1)$ Teilchen zurückgeführt.

Anmerkungen

i) Bei einem 2-Körper-Problem erhält man so z. B.

$$m_1\ddot{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{K}_1(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) \ .$$

Es ist aber $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{x}_1 = (m_2/M)\boldsymbol{r}$, und so ergibt sich wieder $\mu\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{K}_1(\boldsymbol{r})$, wie im Beispiel.

ii) Liegen äußere Kräfte vor, so ist eine gesonderte Betrachtung der Schwerpunktbewegung in der Regel nicht möglich. Denn es ist ja im allgemeinen

$$V_i^{(a)}(\boldsymbol{r}_i) = V_i^{(a)}(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{x}_i) \neq V_i^{(a)}(\boldsymbol{R}) + W_i(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) \ , \qquad (2.6.27)$$

d. h. für die potentielle Energie gibt es – im Gegensatz zur kinetischen Energie – im allgemeinen keine Aufspaltung in Schwerpunkt- und Relativanteil, die jeweils nur Schwerpunkt- und Relativkoordinaten enthalten. In manchen Fällen sind aber die äußeren Kräfte so schwach von den Orten der Teilchen abhängig, daß

$$\boldsymbol{K}_i^{(a)}(\boldsymbol{r}_i) \approx \boldsymbol{K}_i^{(a)}(\boldsymbol{R}) \qquad (2.6.28)$$

gilt. Dies kann näherungsweise angenommen werden, wenn sich die äußere Kraft in Raumbereichen von der Größenordnung der Relativabstände der Punktteilchen nur wenig ändert. Dann gilt für den Schwerpunktvektor:

$$M\ddot{\boldsymbol{R}} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{K}_i^{(a)}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{K}^{(a)}(\boldsymbol{R}) \ . \qquad (2.6.29)$$

Wir sehen, daß sich ein kleines System von Massenpunkten, solange man sich nicht für seine innere Bewegung interessiert, zu einem einzigen Massenpunkt idealisieren läßt. Das Konzept des Massenpunktes erfährt so eine nachträgliche Bestätigung.

Äußere Gravitationskräfte sind ein besonders interessanter Fall wegen ihrer Proportionalität zur Masse. Dann ist nämlich

$$\boldsymbol{K}_i^{(a)}(\boldsymbol{r}_i) = m_i\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_i) = m_i\boldsymbol{G}(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{x}_i) \approx m_i\boldsymbol{G}(\boldsymbol{R}) \qquad (2.6.30)$$

für schwach veränderliche Felder oder wenig ausgedehnte Systeme von Massenpunkten. Somit lautet die genäherte Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt:

$$M\ddot{\boldsymbol{R}} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{K}_i^{(a)} = \sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{G}(\boldsymbol{R}) = M\boldsymbol{G}(\boldsymbol{R}) \ ,$$

und für die Relativ-Vektoren erhält man:

$$m_i\ddot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{K}_i(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) \ . \qquad (2.6.31)$$

Die Schwerpunktbewegung eines wenig ausgedehnten Systems im äußeren Schwerefeld ist unabhängig von der Gesamtmasse.

Für inhomogene äußere Felder ist die Abspaltung der Schwerpunktbewegung nicht exakt möglich. Die Güte der Näherung, in der das äußere Gravitationsfeld als homogen angesehen werden kann, läßt sich durch Taylorentwicklung der äußeren Kräfte nach x_i abschätzen:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{K}_i^{(a)}(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{x}_i) &= \sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{G}(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{x}_i)\\ &= M\boldsymbol{G}(\boldsymbol{R}) + \sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{x}_i\cdot\nabla\boldsymbol{G}(\boldsymbol{R})\\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\boldsymbol{x}_i\cdot\nabla)^2\boldsymbol{G}(\boldsymbol{R}) + \ldots \ .\end{aligned} \qquad (2.6.32)$$

Wegen

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$$

fällt der zweite Term fort. Abweichungen von der Homogenität des äußeren Schwerefeldes, die für ausgedehnte Körper zu sogenannten *Gezeitenkräften* führen, machen sich also erst in zweiter Ordnung in der Ausdehnung bemerkbar. Für andere als Schwerkraftfelder sind hingegen auch Effekte erster Ordnung in der Inhomogenität des äußeren Feldes zu erwarten.

iii) Bei einem *Stoßprozeß* prallen Teilchen aufeinander und tauschen Impulse untereinander aus. Wenn der Gesamtimpuls vor dem Stoß durch

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{v}_i \qquad (2.6.33)$$

und nach dem Stoß durch

$$\boldsymbol{P}' = \sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{v}_i' \qquad (2.6.34)$$

gegeben ist, so verlangt das Gesetz von der Erhaltung