Vahlens Kurzlehrbücher

Arbeitsbuch zur betriebswirtschaftlichen Entscheidungslehre

von
Prof. em. Dr. Dr. h.c. Günter Bamberg, PD Dr. Franz Baur, Prof. Dr. Michael Krapp

3., überarbeitete Auflage

Thematische Gliederung:

Management, Consulting, Planung, Organisation, Steuern

Verlag Franz Vahlen München 2012

Verlag Franz Vahlen im Internet:
www.vahlen.de
ISBN 978 3 8006 4523 7

b) Geben Sie für jede Partie (a, b) aus $A \times B$ das resultierende Ausfallrisiko p an.

Bestimmen Sie die Auszahlungsmatrizen $\mathbf{U}_1$ des Harry Harmlos beziehungsweise $\mathbf{U}_2$ der Factoring-Bank sowie alle Gleichgewichtspunkte (in reinen Strategien) und interpretieren Sie diese, falls Harry Harmlos und die Bank

c) Non-Recourse Factoring,

d) Recourse Factoring

vereinbart haben.

Aufgabe 7.7

Schlagen Sie für die in Aufgabe 7.6 untersuchte Vertragsbeziehung eine Regressregelung vor, die sicherstellt, dass Harry Harmlos seine Arbeiten zufrieden stellend ausführt und zugleich die Factoring-Bank die angekauften Forderungen energisch eintreibt.

Hinweis:
Eine Lösungsmöglichkeit besteht darin, das Ausfallrisiko auf beide Parteien zu verteilen, indem der Bank ein auf z Prozent des Forderungsbetrages beschränktes Rückgriffsrecht eingeräumt wird („Partial Recourse Factoring“).

Aufgabe 7.8*

Betrachten Sie das in Aufgabe 7.1 (Seite 135) beschriebene Spiel als ein nichtkooperatives Zweipersonenspiel und bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte der gemischten Erweiterung.

Aufgabe 7.9

Selten/Nagel (1998) berichten über die Ergebnisse eines Spiels, das im Jahr 1997 mit den Lesern der Zeitschrift „Spektrum der Wissenschaft“ (und darüber hinaus in ähnlicher Form bereits mehrere Male zuvor) durchgeführt wurde. Dieses so genannte „Zahlenwahlspiel“ wurde nach folgenden Regeln gespielt: Jeder Teilnehmer soll eine beliebige reelle Zahl zwischen 0 und 100 (beide einschließlich) einsenden. Wer mit seiner Einsendung zwei Dritteln des arithmetischen Mittels aller genannten Zahlen am nächsten kommt, erhält einen Preis in Höhe von 1 000 DM (Selten/Nagel, 1998, S. 16).

Welche Zahl würden Sie wählen, wenn Sie sich streng rational im Sinne der (nichtkooperativen) Spieltheorie verhalten und zudem davon ausgehen, dass alle anderen Spieler ebenfalls rational handeln?

Aufgabe 7.10

Zwei Nachbargemeinden sind gerade dabei, ein an der gemeinsamen Grenze liegendes, teils zu Gemeinde 1, teils zu Gemeinde 2 gehörendes Areal als Gewerbegebiet zu erschließen. Jede der beiden Gemeinden kann sich dabei, ihren Teil betreffend, für eine größere Lösung oder für eine kleinere Lösung entscheiden. Dabei trifft die Gemeinde 2 ihre Entscheidung erst, nachdem die Gemeinde 1 sich entschieden und ihre Entscheidung bekannt gegeben hat. Das aus den möglichen Entscheidungskombinationen jeweils resultierende finanzielle Ergebnis (in Millionen Euro) wird – einheitlich von beiden Gemeinden – wie folgt angesetzt (die Kosten sind dabei bereits abgezogen):

- Wählen beide ihre größere Lösung, so bedeutet dies ein Ergebnis in Höhe von 4 für Gemeinde 1 und ein Ergebnis in Höhe von 1 für Gemeinde 2.
- Entscheiden sich beide für ihre kleinere Lösung, so erreicht Gemeinde 1 das Ergebnis 1 und Gemeinde 2 das Ergebnis 2.
- Wählt eine der Gemeinden ihre kleinere und die andere ihre größere Lösung, so resultiert für die Gemeinde mit der kleineren Lösung (egal welche Gemeinde dies ist) ein Ergebnis in Höhe von 3 und für die andere Gemeinde
  - ein Ergebnis in Höhe von 2, falls dies die Gemeinde 1 ist, bzw.
  - ein Ergebnis in Höhe von c, falls dies die Gemeinde 2 ist, wobei $c \in \{1; 2; 3; \dots\}$ gilt.

a) Veranschaulichen Sie die beschriebene Entscheidungssituation durch einen Spielbaum; tragen Sie an den Baumenden die resultierenden Auszahlungspaare ein.

b) Erstellen Sie die zugehörige Auszahlungsbimatrix.

c) Bestimmen Sie für jedes $c \in \{1; 2; 3; \dots\}$ alle Gleichgewichtspunkte.

d) Für welche $c \in \{1; 2; 3; \dots\}$ existiert ein Gleichgewichtspunkt in dominanten Strategien?

e) Geben Sie für $c = 1$ sowie für $c = 3$ alle teilspielperfekten Gleichgewichtspunkte an.

f) Bestimmen Sie sowohl für $c = 1$ als auch für $c = 3$ den Garantiepunkt und alle Maximin-Strategien der beiden Spieler.

Aufgabe 7.11

Für den seit geraumer Zeit sinkenden Aktienkurs der Telecom Germania wird ihr Vorstandsvorsitzender, Don Winter, verantwortlich gemacht. Er überlegt sich deshalb, ob er seinen Rücktritt erklären soll. Auch der Aufsichtsrat erwägt eine Abberufung von Don Winter. Beide Parteien sind an einer einvernehmlichen Lösung interessiert.

Entscheiden sich beide Parteien für eine Fortsetzung der Amtszeit von Don Winter, so ziehe Don Winter daraus einen Nutzen von 6, während der Nutzen des Aufsichtsrates 2 betrage. Scheidet Don Winter dagegen im gegenseitigen Einvernehmen aus, so sei sein Nutzen gleich 0 und der des Aufsichtsrates gleich 7, da er den ohnehin als überbezahlt geltenden Manager auf diese Weise elegant loswird.

Unangenehm für beide Seiten ist es, wenn es zu Meinungsverschiedenheiten kommt. Beruft der Aufsichtsrat Don Winter gegen seinen Willen ab, so muss eine Abfindung gezahlt werden, die mit einem Nutzen von -4 (für den Aufsichtsrat) bewertet wird. Don Winter wird in diesem Fall zwar finanziell entschädigt, erleidet aber durch die Abberufung einen Verlust an Ansehen, so dass sich für ihn insgesamt ein Nutzen von -2 ergibt.

Für den Fall, dass Don Winter seinen Rücktritt erklärt, obwohl ihn der Aufsichtsrat halten möchte, ist Don Winter zunächst arbeitslos (Nutzen -4), wohingegen der Aufsichtsrat sofort einen neuen Vorstandsvorsitzenden bestellen muss, was mit zusätzlichem Aufwand verbunden ist (Nutzen -1).

a) Beschreiben Sie die geschilderte Situation als ein Spiel Γ in Normalform.

b) Ermitteln Sie den Garantiepunkt von Γ.

c) Skizzieren Sie das Auszahlungsdiagramm von Γ sowie das kooperative Auszahlungsdiagramm ohne Seitenzahlungen. Beachten Sie zu diesen Begriffen die im Anschluss an die Lösung dieser Aufgabe formulierte Bemerkung zu den Aufgaben 7.11 und 7.12. Tragen Sie in die Skizze auch den in b) bestimmten Garantiepunkt ein.

Aufgabe 7.12

Ein PKW soll per Leasing finanziert werden. Der Kapitalwert k_1 des Leasingnehmers (Spieler 1) hängt von der noch zu bestimmenden Leasingrate ℓ in folgender Weise ab:

$$k_1(\ell) = 1\,000 - 4\,\ell.$$

Die Hausbank des PKW-Herstellers tritt als Leasinggeberin (Spieler 2) auf. Ihr aus dem Leasingvertrag resultierender Kapitalwert k_2 hängt ebenfalls von ℓ ab, und es gilt

$$k_2(\ell) = -600 + 3\,\ell.$$

Leasingraten, die zu negativen Kapitalwerten des Leasingnehmers führen, sind für ihn nicht akzeptabel. In diesen Fällen verzichtet er auf die Anschaffung des PKW, so dass beide Spieler Kapitalwerte in Höhe von 0 erzielen. Die Leasinggeberin ist dagegen bereit, gegebenenfalls auch einen negativen Kapitalwert hinzunehmen, wenn dadurch der Absatz des PKW sichergestellt wird, das heißt, wenn $k_1 \geqq 0$ ist.

In der oben beschriebenen Situation verhandeln der Leasingnehmer und die Leasinggeberin über die Höhe der Leasingrate $\ell \geqq 0$. Interpretieren Sie die Festlegung von ℓ als ein kooperatives Zweipersonenspiel.

a) Skizzieren Sie das kooperative Auszahlungsdiagramm ohne Seitenzahlungen (siehe dazu die Bemerkung zu den Aufgaben 7.11 und 7.12).

b) Ermitteln Sie die Verhandlungslösung von Nash, wenn Seitenzahlungen nicht möglich sind. Verwenden Sie dabei $(0, 0)$ als ausgezeichneten Punkt.

   Welche Leasingrate müssten die beiden Spieler vereinbaren, um die Nash-Lösung zu realisieren?

c) Gehen Sie nun davon aus, dass Seitenzahlungen möglich sind. Ermitteln Sie für diese Situation die Verhandlungslösung von Nash. Als ausgezeichneter Punkt ist dabei wieder $(0, 0)$ zu verwenden.

   Welche Leasingrate und welche Seitenzahlung müssten vereinbart werden, um den so ermittelten Auszahlungspunkt zu erreichen?

Aufgabe 7.13

In einem 10-köpfigen Gremium wird ein von einer Gruppe K eingebrachter Antrag angenommen (Auszahlung $= 1$), wenn mindestens 75 % der Gremienmitglieder für den Antrag votieren; ansonsten wird der Antrag abgelehnt (Auszahlung $= 0$).

a) Stellen Sie die charakteristische Funktion des 10-Personenspiels auf.

b) Liegt ein Konstantsummenspiel vor?

c) Ist das Spiel wesentlich?

Aufgabe 7.14

Die sechs Studenten Anna, Bernd, Claudia, Dieter, Elisabeth und Friedrich (Spieler 1,...,6) planen nach dem Besuch eines Existenzgründerseminars, ausschließlich mit Teilnehmern aus ihrer Gruppe einen Pizzalieferdienst namens „PowerPizza" zu gründen.

Dabei ist folgende Aufgabenverteilung geplant: Von denen, die tatsächlich an „PowerPizza" beteiligt sein werden, muss (mindestens) einer die Rolle des Pizzabäckers und (mindestens) ein anderer die Rolle des Auslieferfahrers übernehmen. Je ein Bäcker und ein Fahrer bilden ein Team. Ausschlaggebend für die Höhe des Gewinns von „PowerPizza" ist die Anzahl der Teams, die gleichzeitig tätig sein können. Jedes solche Team sorgt für einen Gewinn von 10 (in 1 000 Euro).

Da neben dem Backen und dem Fahren auch noch organisatorische Aufgaben (wie Buchhaltung und Einkauf) sowie die telefonische Auftragsannahme zu erledigen sind, sieht das Konzept von „PowerPizza" die Beteiligung von mindestens fünf Personen vor.

Leider können Claudia, Dieter, Elisabeth und Friedrich nicht backen; Elisabeth und Friedrich besitzen darüber hinaus keinen Führerschein und scheiden damit auch als Fahrer aus.

a) Stellen Sie die charakteristische Funktion dieses Spiels auf.

b) Ist das Spiel wesentlich?

c) Ist der Auszahlungsvektor $(3, 3, 3, 3, 8, 0)$ eine Imputation?
Liegt er im Kern?

Aufgabe 7.15

In einem kooperativen 5-Personenspiel erhält eine Koalition genau dann 5 Euro, wenn sie aus mindestens 3 Personen besteht. Jede andere Koalition erhält 0 Euro.

a) Stellen Sie die charakteristische Funktion dieses Spiels auf.

b) Ist das Spiel wesentlich?

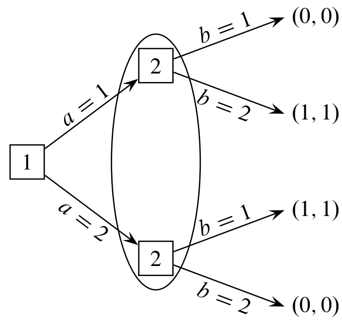
c) Geben Sie einen Auszahlungsvektor an, der keine Imputation ist.

d) Bestimmen Sie den Kern dieses Spiels.

Lösungen zu Kapitel 7

Lösung zu Aufgabe 7.1

a) Im Folgenden wird unterstellt, dass zuerst Max (Spieler 1) und dann Moritz (Spieler 2) darüber entscheidet, in welcher Runde er seinen Chip setzt. Bezeichnet man die Entscheidung von Max mit $a \in \{1; 2\}$ (wobei a angibt, in welcher Runde er seinen Chip setzt) und die Entscheidung von Moritz mit $b \in \{1; 2\}$, so erhält man den nachfolgenden Spielbaum.



Da Moritz zum Zeitpunkt seiner Entscheidung die von Max gewählte Alternative $a \in A$ nicht kennt, kann er nicht entscheiden, welche der beiden Spielsituationen $\boxed{2}$ tatsächlich eingetreten ist. Sie bilden deshalb eine Informationsmenge.

b) Mithilfe des Begriffs der Strategie, die – als vollständiger Verhaltensplan – für jede mögliche Spielsituation den vom Spieler auszuführenden Zug vorschreibt, ist es möglich, beliebige Spiele auf Spiele in Normalform zurückzuführen (vergleiche hierzu Bamberg et al., 2012b, Abschnitt 7.2). Das hier betrachtete Spiel lässt sich besonders einfach in Normalform darstellen: Da jeder Spieler über nur einen Chip verfügt, ist mit der Festlegung der Runde, in der der Chip gesetzt werden soll, das Verhalten des Spielers in der gesamten Partie eindeutig bestimmt.

Folglich ist für jeden der beiden Spieler die Strategienmenge gleich $A = B = \{1; 2\}$, wobei $i \in \{1; 2\}$ das Setzen des Chips in der i-ten Runde bedeutet. Die Auszahlungsbimatrix ist demnach:

(u_1, u_2)	$b = 1$	$b = 2$
$a = 1$	$(0, 0)$	$(1, 1)$
$a = 2$	$(1, 1)$	$(0, 0)$

Durch Angabe der Strategienmengen und der Bimatrix wird das Spiel $\Gamma = (A, B; u_1, u_2)$ in Normalform vollständig beschrieben.

Lösung zu Aufgabe 7.2

a) Da Max (Spieler 1) und Moritz (Spieler 2) in diesem Spiel identisch behandelt werden, besitzen Sie offenkundig die gleiche Auszahlungsfunktion: Gewinnt ein Spieler, so wird der Inhalt der Kasse in Höhe von 2 Euro an ihn gezahlt; im Fall eines Patts erhält er seinen Einsatz in Höhe von 1 Euro zurück; wenn er verliert, wird nichts an ihn gezahlt. Subtrahiert man davon den Einsatz des Spielers in Höhe von 1 Euro, so erhält man die gleichermaßen für Max wie Moritz gültige Auszahlungsfunktion

$$u_i = \left\{ \begin{array}{rl} 1, & \text{falls } i \text{ gewinnt} \\ 0, & \text{bei einem Patt} \\ -1, & \text{falls } i \text{ verliert} \end{array} \right\} \quad \text{mit} \quad i \in \{1; 2\}.$$

Gewinnt Max, so verliert Moritz, und umgekehrt. In diesen beiden Fällen erhält einer der beiden die Auszahlung $+1$ und der andere die Auszahlung -1, so dass die Auszahlungssumme gleich null ist. Gleiches gilt auch für die drei denkbaren Pattsituationen, in denen die beiden jeweils genau die gleiche Alternative wählen: Dann erhalten beide die Auszahlung null, und somit ist auch die Auszahlungssumme gleich null. Es liegt also ein Nullsummenspiel $\Gamma = (A, B; u)$ vor, wobei $A = B = \{\text{Stein; Schere; Papier}\}$ und u die Auszahlungsfunktion von Max ist. Die zugehörige Spielmatrix $\mathbf{U}$ ist demnach:

	Moritz wählt		
	Stein	Schere	Papier
Max wählt Stein	0	1	−1
Max wählt Schere	−1	0	1
Max wählt Papier	1	−1	0

b) Ja. Die Begründung ergibt sich aus den Überlegungen zu Teil a).

c) Max bewertet seine Aktionen ($\widehat{=}$ Zeilen von $\mathbf{U}$) mit den jeweiligen Mindestauszahlungen und bestimmt demnach alle Zeilenminima von $\mathbf{U}$. Diese sind alle gleich -1; somit sind *alle* Strategien von Max Maximin-Strategien.

Moritz dagegen bewertet seine Aktionen ($\widehat{=}$ Spalten von $\mathbf{U}$) mit den jeweiligen Maximalverlusten, bestimmt also die Spaltenmaxima von $\mathbf{U}$. Da diese ebenfalls alle gleich (nämlich gleich $+1$) sind, ist auch jede Strategie von Moritz eine Maximin-Strategie.

d) Wie in Teil c) erläutert, kann sich Max mithilfe seiner Maximin-Strategien den unteren Spielwert $u_* = -1$ sichern und Moritz sich gegen über den oberen Spielwert $u^* = 1$ hinausgehende Verluste absichern. Wegen $u_* < u^*$ ist das Spiel nicht determiniert.

e) Nein. Gleichgewichtspunkte existieren in Zweipersonennullsummenspielen nur, wie die Spiele determiniert sind. Wie eben in Teil d) gesehen, ist „Stein – Schere – Papier“ aber nicht determiniert.

Lösung zu Aufgabe 7.3*

a) Ja. Die gemischte Erweiterung eines endlichen Zweipersonennullsummenspiels ist stets determiniert (Bamberg et al., 2012b, Abschnitt 7.3.4).

b) Da die Spielmatrix nicht reduzierbar ist und beide Spieler mehr als zwei Strategien besitzen, werden die gemischten Maximin-Strategien mithilfe der linearen Programmierung bestimmt. Auf Grund der identischen Behandlung der beiden Spieler ist offenkundig, dass ihre gemischten Maximin-Strategien übereinstimmen. Es genügt deshalb die Bestimmung der primalen Lösung, das heißt die Ermittlung der gemischten Maximin-Strategie von Moritz.

Man beachte, dass laut Bamberg et al. (2012b), Abschnitt 7.3.5, Punkt c), das dort vorgeschlagene lineare Programm für eine Spielmatrix mit einem positiven unteren Spielwert u_* geeignet ist. Wir addieren deshalb zu jedem Element von $\mathbf{U}$ aus der Lösung zu Aufgabe 7.2 a) den Betrag 2 Euro und erhalten

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mit $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$, $\mathbf{i} = (1, 1, 1)^T$ und $\mathbf{o} = (0, 0, 0)^T$ lautet dann das für Moritz zu lösende (primale) Programm:

$$\mathbf{y}^T\mathbf{i} \to \max \quad \text{unter Beachtung von} \quad \tilde{\mathbf{U}}\mathbf{y} \leqq \mathbf{i} \quad \text{und} \quad \mathbf{y} \geqq \mathbf{o}.$$

Es handelt sich hierbei um ein Standardmaximierungsproblem, das ohne weitere Schwierigkeiten, wie unten dargestellt, nach dem Simplexverfahren (mit den Schlupfvariablen v_1, v_2, v_3) gelöst werden kann.

Der Zielfunktionszeile des Endtableaus kann der Maximalwert $\frac{1}{2}$ entnommen werden. Dividiert man durch diesen die Komponenten des Lö-