

Vahlens Kurzlehrbücher

## Finanzmathematik

Grundlagen und Anwendungsmöglichkeiten in der Investitions- und Bankwirtschaft

von

Prof. Dr. Konrad Wimmer, Eugen Caprano

7., vollständig überarbeitete Auflage

Finanzmathematik – Wimmer / Caprano

schnell und portofrei erhältlich bei [beck-shop.de](http://beck-shop.de) DIE FACHBUCHHANDLUNG

Thematische Gliederung:

Mathematik und Statistik

Verlag Franz Vahlen München 2013

Verlag Franz Vahlen im Internet:

[www.vahlen.de](http://www.vahlen.de)

ISBN 978 3 8006 4560 2

### Kapitalwertmethode

Der Kalkulationszinssatz  $i$  weist in der klassischen Ausgestaltung der Kapitalwertmethode für alle Laufzeiten den gleichen Wert auf (sogenannte flache Zinsstrukturkurve).

Die Kapitalwertmethode vergleicht die Anschaffungsauszahlungen eines Investitionsobjekt mit den abgezinsten Einzahlungsüberschüssen  $e_t$ . Die Differenz wird als Nettokapitalwert (NKW), die abgezinsten Einzahlungsüberschüsse werden als Bruttokapitalwert (BKW) bezeichnet. Es gilt:

$$BKW = \sum_{t=1}^n e_t / (1+i)^t = \sum_{t=1}^n e_t \cdot v^t \quad (63)$$

$$NKW = -A_0 + \sum_{t=1}^n e_t / (1+i)^t = -A_0 + \sum_{t=1}^n e_t \cdot v^t \quad (64)$$

#### Beispiel 4:

Für die Investitionsobjekt I, II und III von oben erhält man:

$$NKW(I) = -500 + 400 / 1,06 + 100 / 1,06^2 + 100 / 1,06^3 = 50,32;$$

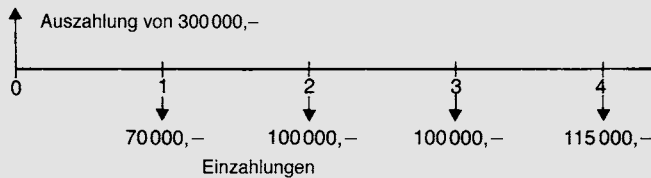
$$NKW(II) = 43,69; \quad NKW(III) = 52,09. \quad \text{Rangfolge: III-I-II.}$$

#### Aufgabe 2:

Bei einer Sachanlageinvestition von 300 000,- € mit einer Nutzungsdauer von 4 Jahren werden folgende Einzahlungsüberschüsse prognostiziert:

- 1. Jahr: 70 000,- €,
- 2. Jahr: 100 000,- €,
- 3. Jahr: 100 000,- €,
- 4. Jahr: 115 000,- €.

Wie groß ist der Kapitalwert der Investition, wenn mit 9 % Verzinsung kalkuliert wird?



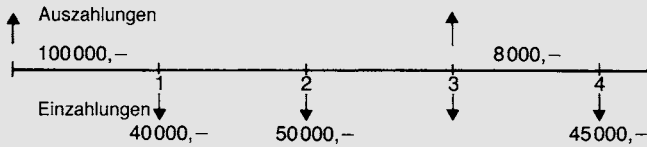
Lösung:

$$NKW (9\%) = -300\,000 + 70\,000 \cdot v(9\%) + 100\,000 \cdot v^2(9\%) + 100\,000 \cdot v^3(9\%) + 115\,000 \cdot v^4(9\%) = 7\,075,35.$$

Die Investition ist also nach der Kapitalwertmethode als vorteilhaft zu bezeichnen, weil der NKW größer als null ist. Unterstellt man im Beispiel einen Kalkulationszinssatz von 10 % statt der gegebenen 9 %, so errechnet sich ein  $NKW = -41,05$ , also bereits ein negativer Nettokapitalwert.

**Aufgabe 3:**

Bei einer Investition fallen 100 000,- € Anschaffungsauszahlungen an. Während der erwarteten vierjährigen Nutzungsdauer werden Einzahlungsüberschüsse von 40 000,- € am Ende des ersten Jahres, 50 000,- € am Ende des zweiten Jahres und 45 000,- € am Ende des vierten Jahres erwartet. Zum Ende des dritten Jahres wird ein „Verlust“ (negativer Einzahlungsüberschuss) von 8 000,- € prognostiziert. Beurteilen Sie bei einem vorgegebenen Kalkulationszinssatz von 9 % die Vorteilhaftigkeit der Investition nach der Kapitalwertmethode.



Lösung:

$$NKW(9\%) = -100\,000 + 40\,000 \cdot v(9\%) + 50\,000 \cdot v^2(9\%) - 8\,000 \cdot v^3(9\%) + 45\,000 \cdot v^4(9\%) = 4\,482,90.$$

**Aufgabe 4:**

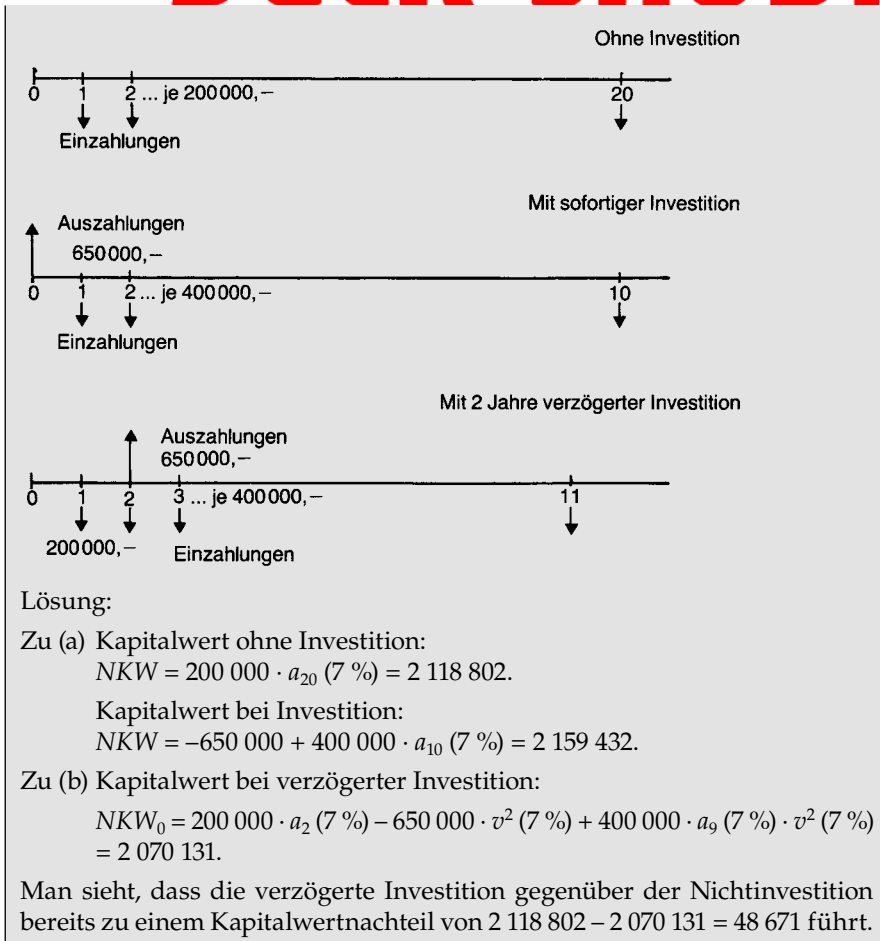
Eine zu Jahresbeginn geplante Investition von 100 000,- € lässt zum Jahresende des ersten Jahres und zum Jahresende des zweiten Jahres jeweils 55 000,- € an Einzahlungen erwarten. Wie groß ist bei einem Kalkulationszinssatz von 6 % der Nettokapitalwert der Investition?

Lösung:  $NKW(6\%) = 55\,000 \cdot [v(6\%) + v^2(6\%)] - 100\,000 = 837.$

**Aufgabe 5:**

Der Abbau von Granitvorkommen durch ein Granitwerk ergibt Periodenüberschüsse von jährlich 200 000,- €. Die Vorkommen reichen bei unveränderter Förderkapazität noch 20 Jahre. Durch Rationalisierungsinvestitionen in Höhe von 650 000,- € kann der Unternehmer ab sofort die Förderungsintensität verdoppeln, wodurch die Granitvorkommen in der halben Zeit ausgebeutet werden. Die Rationalisierungsinvestition muss mit 7 % fremdfinanziert werden.

- Wie hoch ist der Nettokapitalwert der Investition? Wie hoch ist der Nettokapitalwert, wenn nicht investiert wird?
- Zeigen Sie mithilfe der Kapitalwertmethode, dass die um zwei Jahre verzögerte Rationalisierungsinvestition gemessen an den Ergebnissen an a) nachteilig ist.



### Hinweis zur Interpretation des Bruttokapitalwerts

Der Bruttokapitalwert BKW wird auch als Grenzpreis einer Investition bezeichnet. Diesen Preis wird ein Erwerber maximal zu zahlen bereit sein und diesen Preis wird ein Verkäufer mindestens fordern. In der Unternehmensbewertung gibt der BKW auf Basis des Cashflows des Gesamtunternehmens prinzipiell den Unternehmenswert an, der auch als **Ertragswert** bezeichnet wird.

### Investitionsentscheidung:

- Investitionsobjekt A ist vorteilhaft, wenn  $BKW(A) > A_0$  oder  $NKW(A) > 0$ , wobei 0 die Unterlassungsalternative repräsentiert.
- Investitionsobjekt A wird dem Investitionsobjekt B vorgezogen, wenn  $NKW(A) > NKW(B)$ .

Anmerkung: Als Unterlassungsalternative wird der Verzicht auf Durchführung der Investition und die Anlage auf dem Geld- und Kapitalmarkt bezeichnet. Letztere hat definitionsgemäß immer einen NKW von null.

## Beispiel 5:

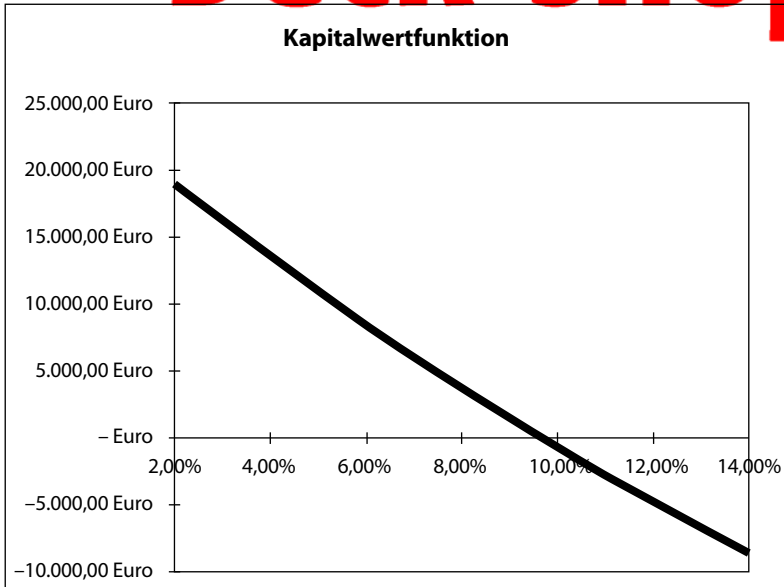
Ein Investor möchte die beiden Investitionen C und D miteinander vergleichen.

C	Kalkulationszinsatz	6,00 %						
	$t$	0	1	2	3	4	5	
	$A(o); e(t)$	-100 000	30 000	40 000	30 000	15 000	10 000	
	Abzinsungsfaktoren	1	0,943396	0,889996	0,839619	0,792094	0,747258	
	Barwerte	-100 000	28 301,89	35 599,86	25 188,58	11 881,40	7 472,58	Summe Barwerte <b>8 444,31</b>
D	$t$	0	1	2	3	4	5	
	$A(o); e(t)$	-60 000	25 000	25 000	20 000			Barwert <b>2 627,20</b>
C-D	$t$	0	1	2	3	4	5	
	$A(o); e(t)$	-40 000	5 000	15 000	10 000	15 000	10 000	Barwert <b>5 817,11</b>

Die NKW von C und D betragen 8 444,31 und 2 627,20; die NKW-Differenz von 5 817,11 erhält man auch, wenn man den Cashflow von D von C abzieht und den NKW der sogenannten Differenzinvestition C-D bildet.

## Kapitalwertfunktion

Wie eben ausgeführt, hängen der BKW und der NKW eines Investitionsobjekt von der Höhe des Kalkulationszinssatzes ab: je höher der Kalkulationszinssatz ist, desto niedriger ist der BKW bzw. der NKW. Dieser Zusammenhang sei anhand des Investitionsobjekts D demonstriert. Berechnet man für alternative Kalkulationszinssätze die entsprechenden Nettokapitalwerte, so erhält man die Nettokapitalwertfunktion. Die Nullstelle liegt bei 9,68 %. Dieser Zinssatz, bei dem der NKW den Wert null annimmt, wird als **interner Zinssatz (IZF)** bezeichnet.



Man beachte, dass die Kapitalwertfunktion eine Krümmung aufweist, d. h. Veränderungen von z. B.  $\pm 2\%$  beim Kalkulationszinssatz wirken sich nicht im selben Ausmaß auf den NKW aus (keine symmetrische Veränderung):

- $i = 0,04 \rightarrow \text{NKW} = 13\,539,63$
- $i = 0,06 \rightarrow \text{NKW} = 8\,444,31$
- $i = 0,08 \rightarrow \text{NKW} = 3\,718,58$
- Abweichung NKW  $(0,06 - 0,04) = 5\,095,32$ ; Abweichung NKW  $(0,08 - 0,06) = 4\,725,73$ .

### Interpretation der Kapitalwertmethode

Die Interpretation hängt vor allem davon ab, welche Finanzierungsform (Eigen- oder Fremdfinanzierung) bei der Objektfinanzierung unterstellt wird.

Bei Eigenfinanzierung verfügt der Investor offensichtlich über das zur Realisierung der Investitionsobjekte notwendige Kapital. Seine Alternative besteht folglich darin, das vorhandene Kapital am GKM anzulegen. Auf unvollkommenen GKM wäre damit der Habenzinssatz  $i_A$  für die Diskontierung heranzuziehen.

Der BKW gibt deshalb den Betrag an, der am GKM zum Kalkulationszinssatz angelegt werden müsste, damit daraus exakt die gleichen Einzahlungsüberschüsse  $e_t$  fließen, wie bei Durchführung des Investitionsobjekts. Damit gibt der **BKW** an, welchen Wert das Investitionsobjekt hat (= Grenzpreis von Verkäufer und Käufer). Dieser kann auch als Marktwert des eigenfinanzierten Investitionsobjekts verstanden werden. Sofern  $\text{BKW} > A_0$ , ist das Investitionsobjekt vorteilhaft, da der Investor tatsächlich nur  $A_0$  zahlt, obwohl das Investitionsobjekt einen Betrag in Höhe von BKW wert ist bzw. er alternativ BKW aufwenden müsste. Der Investor beurteilt also den Mehr-/minderertrag gegenüber seiner

Alternativanlage (Beurteilung anhand der benchmark Kalkulationszinssatz) bzw. er realisiert die Differenz  $BKW - A_0$  indem er das Investitionsobjekt durchführt: er zahlt  $A_0$ , kann aber das Investitionsobjekt zum Marktpreis (=  $BKW$ ) veräußern. Konsequenterweise gibt der **NKW** (=  $BKW - A_0$ ) den Reichtumszuwachs des Investors bei Realisierung des Investitionsobjekts an.

Bei **Fremdfinanzierung** muss sich der Investor das zur Realisierung des Investitionsobjekt notwendige Kapital erst noch am GKM beschaffen. Auf unvollkommenen GKM wäre damit der Sollzinssatz  $i_V$  für die Diskontierung heranzuziehen.

Jetzt drückt der  $BKW$  den Betrag aus, der am GKM aufgenommen werden könnte, wenn der Kreditbetrag durch die Einzahlungsüberschüsse  $e_t$  des Investitionsobjekt getilgt und verzinst würde. Sofern  $BKW > A_0$ , ist das Investitionsobjekt vorteilhaft, da der Investor tatsächlich nur  $A_0$  zahlt, obwohl das Investitionsobjekt die Kreditaufnahme in Höhe von des  $BKW$  ermöglicht. Nimmt also der Investor den  $BKW$  auf und realisiert er das Investitionsobjekt, indem er  $A_0$  zahlt, so verbleibt ihm in  $t_0$  ein entnehmbarer Betrag in Höhe von  $BKW - A_0$ .

### Anlageprämisse der Kapitalwertmethode

Zur Verdeutlichung der Prämissen der Kapitalwertmethode seien die Investitionsobjekte E und F betrachtet:

$t_0$	$t_1$	$t_2$	
- 300 000	0	+ 356 400	<i>E</i>
- 200 000	0	+ 242 000	<i>F</i>

Man errechnet die Nettokapitalwerte für einen angenommenen Kalkulationszinssatz von 6 % mit 17 194,73 (=  $-300\,000 + 356\,400 / 1,06^2$ ) und 15 379,15 (=  $-200\,000 + 242\,000 / 1,06^2$ ).

*E* wird *F* vorgezogen, weil *E* einen um 1 815,59 € höheren Nettokapitalwert aufweist. Diese Interpretation beruht insbesondere auf zwei Sachverhalten. Der verwendete Kalkulationszinssatz, mit dem die Zahlungen abgezinst werden, entspricht der besten Investitionsalternative, die dem Investor zur Verfügung stehen würde, wenn er *E* bzw. *F* nicht durchführen würde. Es handelt sich dabei annahmegemäß um die Geld- und Kapitalmarktrendite, die bei Durchführung des Investitionsobjekts verdrängt wird. Je höher der Kalkulationszinssatz, desto größer sind die Opportunitätskosten aus der Verdrängung der Alternative und desto niedriger ist unter sonst gleichen Umständen der Nettokapitalwert. Ein positiver Nettokapitalwert drückt somit die absolute Vorteilhaftigkeit eines Investitionsobjekt aus. Im Beispiel wären somit sowohl *E* als auch *F* vorteilhafte Objekte. *E* wird *F* vorgezogen, weil *E* beim Vergleich mit dem einheitlichen Beurteilungsmaßstab Kalkulationszinssatz besser als *F* abschneidet. Dies liegt an der **Anlageprämisse der Kapitalwertmethode**.

Auch die Kapitalwertmethode muss zur Herstellung vollständiger Alternativen auf **Ergänzungsinvestitionen** zurückgreifen. Dabei wird eine Anlage zum am Markt existierenden Kalkulationszinssatz unterstellt.

Der vollständige Alternativenvergleich ergibt unter diesen Voraussetzungen wegen der Verzinsung der Ergänzungsinvestition  $F'$  mit 6 % folgendes Bild:

$t_0$	$t_1$	$t_2$	
- 300 000	0	+356 400	E
- 300 000	0	+354 360	$F + F'$

Der Endwert von  $F + F'$  errechnet sich mit  $242\,000 + 100\,000 \cdot 1,06^2 = 354\,360$ . Die Endwertdifferenz von 2 040 entspricht gerade der oben angeführten Nettokapitalwertdifferenz von 1 815,59 € ( $= 2\,040 / 1,06^2$ ):

Der Vergleich der Nettokapitalwerte und der Endwerte führt somit zum gleichen Ergebnis.

Der Alternativenvergleich E mit F kann auch mithilfe des Kriteriums der sogenannten Differenzinvestition gelöst werden.

Die **Differenzinvestition** erhält man, indem die Zahlungsreihe der zunächst weniger kapitalintensiven Investition von der Investition mit dem zunächst höheren Kapitaleinsatz abgezogen wird:

$t_0$	$t_1$	$t_2$	
- 100 000	0	+ 114 400	Differenzinvestition

Da sich die beiden Kreditalternativen offensichtlich genau um die Differenzinvestition unterscheiden, kann sich der Alternativenvergleich auf deren Analyse beschränken. Es reicht damit aus, zu prüfen, ob sich das Eingehen der durch die Differenzinvestition ausgedrückten Kapitalbindung im Vergleich zur besten jederzeit durchführbaren Investitionsalternative (Kalkulationszinssatz) rentiert. Diskontiert man die Differenzinvestition mit der bei alternativer Anlage am Geld- und Kapitalmarkt erzielbaren Rendite, so erhält man wiederum  $(-100\,000 + 114\,400 / 1,06) = 1\,815,59$ . Die zusätzliche Kapitalbindung rentiert sich also.

## Annuitätenmethode

### Darstellung

Die Annuitätenmethode kann unmittelbar aus der KWM abgeleitet werden, wenn wiederum nachschüssige Zahlungen unterstellt werden. Der mit  $w_n^i$  abgekürzte Annuitätenfaktor liefert bei Multiplikation mit dem BKW bzw. dem NKW einen uniformen Entnahmebetrag, der auch Rente genannt wird. Ann. (NKW) steht hier für Annuität auf Basis des NKW. Die Rechentechnik ist aus der Rentenrechnung bekannt.



$$\text{Ann.}(BKW) = BKW \cdot w_i^n \quad (65)$$

$$\text{Ann.}(NKW) = NKW \cdot w_i^n \quad (66)$$

### Investitionsentscheidung:

- Investitionsobjekt A ist vorteilhaft, wenn  $\text{Ann.}(NKW A) > 0$ , wobei 0 die Unterlassungsalternative repräsentiert
- Investitionsobjekt A wird dem Investitionsobjekt B vorgezogen, wenn  $\text{Ann.}(NKW A) > \text{Ann.}(NKW B)$ ; zu beachten ist, dass ein aussagefähiger Vergleich, der zum gleichen Ergebnis wie die Kapitalwertmethode führen muss, den **gleichen Entnahmezeitraum** voraussetzt.

Beispiel Investitionsobjekt C (6 %):

$$\text{Ann.}(BKW) = 108\,444,31 \cdot 0,237396 = 25\,744,29;$$

$$\text{Ann.}(NKW) = 8\,444,31 \cdot 0,237396 = 2\,004,65.$$

Ein Sonderfall der Annuitätenmethode liegt bei der **unendlichen Rente vor** (zur Herleitung vgl. Kapitel 4.6):

$$BKW = \text{Rente} / \text{Kalkulationszinsfuß} \quad (67)$$

Annuitäten verrenten Barwerte und definieren die vom Investor prinzipiell entnehmbaren Zahlungen. Was aus dem Zahlungsstrom des Investitionsobjekt entnehmbar ist, hängt erstens von der Länge des Verrentungszeitraumes und zweitens von der Höhe des zu erhaltenden Ausgangskapitals ab.

Da die möglichen Entnahmen des Investors drittens davon abhängen, ob eigen-, fremd- oder mischfinanzierte Investitionsobjekte vorliegen, sind in diesem Zusammenhang die Prämissen der Annuitätenmethode zu untersuchen:

### Prämissen bei Fremdfinanzierung:

**1. Schritt:** die Annuität auf Basis des NKW wird berechnet. Die Annuität auf Basis des BKW zu berechnen, kommt nicht in Betracht, da dies eine zusätzliche Verschuldung des Unternehmens bedeuten würde.

#### Beispiel 6 (Investitionsobjekt C):

$t =$	0	1	2	3	4	5
$A(0)$	- 100 000					
$e_t$		30 000	40 000	30 000	15 000	10 000
ZR	- 100 000	30 000	40 000	30 000	15 000	10 000
BW (t)	- 100 000	28 301,89	35 599,86	25 188,58	11 881,40	7 472,58
Ann. (NKW)		2 004,65	2 004,65	2 004,65	2 004,65	2 004,65

**2. Schritt:** die Fremdfinanzierung ist explizit im Zahlungsstrom zu berücksichtigen. Hier wird zunächst vollständige Fremdfinanzierung ( $F_0 = \text{Darlehensbetrag}$ ) angenommen. Die Tabelle zeigt, dass z. B. der Überschuss nach dem ersten Jahr für vier Jahre zu 6 % am GKM angelegt wird, sodass nach vier