Springer-Lehrbuch

Theoretische Elektrotechnik

Eine Einführung

von
Karl Küpfmüller, Wolfgang Mathis, Albrecht Reibiger

Neuausgabe

Thematische Gliederung:

Theoretische Physik, Mathematische Physik

Springer 2008

Verlag C.H. Beck im Internet:
www.beck.de
ISBN 978 3 540 78589 7

ngsverfahren für die or-Poissongleichung

Ableitung der Vektor-Poissongleichung

ssen aus Abschnitt 18, dass sich das H-Feld unter Berücksichtigung nwirkungsprinzips und des Helmholtzschen Satzes hinsichtlich seines nzfreien Anteils in folgender Weise ergibt

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}. \tag{21.1}$$

eziehung wird nach Abschnitt 19.3 auch differentielle Form des Durchsgesetzes genannt, das man aus (21.1) mit Hilfe des Stokesschen Satzes ntegrale Form bringen kann

$$\oint_{C_A} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = I. \tag{21.2}$$

el: Für ein H-Feld mit geraden parallelen Feldlinien, wie es z. B. ant in den Eisenblechen einer Drosselspule vorliegt, sei

$$H_x = H,\ H_y = 0,\ H_z = 0. \tag{21.3}$$

chse hat also die Richtung des H-Feldes. Ferner sei die H-Feldlinienn allen Ebenen parallel zur x, z-Ebene konstant, $H = \|\mathbf{H}\|$ also nur bhängig. Dann gilt definitionsgemäß

$$\operatorname{rot}_x\mathbf{H} = 0,\ \operatorname{rot}_y\mathbf{H} = 0,\ \operatorname{rot}_z\mathbf{H} = -\frac{\partial H}{\partial y}. \tag{21.4}$$

$$J_z = -\frac{\partial H}{\partial y}. \tag{21.5}$$

das Magnetfeld homogen, dann wäre also die Stromdichte Null. Nimmt lussdichte mit der y-Richtung ab, so fließt Strom in der z-Richtung, t sie zu, in der entgegengesetzten Richtung. Ein konstante Stromdichte t einer linearen Zunahme der Flussdichte verbunden.

a das B-Feld nach Abschnitt 18.23 quellenfrei ist, so gilt unter der Vortzung, dass $\mu =$*konst.* ist,

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \tag{21.6}$$

erkung: In ferromagnetischen Stoffen kann $\operatorname{div} \mathbf{H}$ wegen des feldstärkengigen μ von Null verschieden sein.

uf Grund der Gl. (21.6) kann man nun den Ansatz machen

$$\mathbf{H} =: \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}, \tag{21.7}$$

$\mathbf{A}$ ein Vektorfeld darstellt, das durch diese Beziehung definiert ist[1]. ihrt man dies in Gl. (21.1) ein, so folgt

$$\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}, \tag{21.8}$$

mit einer Rechenregel für den Operator rot rot (siehe A.1)

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \triangle \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu \mathbf{J}. \tag{21.9}$$

Gl. (21.7) ist nur die Rotation des Vektorfeldes $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ festgelegt, so dass seine Divergenz noch verfügt werden kann. Man spricht in diesem Zuenhang von der Eichung des Vektorfeldes $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Im Rahmen der Theorie tationären Magnetfeldes verwendet man üblicherweise die sogenannte omb-Eichung

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{21.10}$$

t folgt aus Gl. (21.9)

$$\triangle \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}, \tag{21.11}$$

Gleichung, die der Laplaceschen PDgl. (6.9) der Elektrostatik ähnlich ie wird auch als Vektor-Poissongleichung bezeichnet, auf die bereits in nitt 18 kurz eingegangen wurde. Auf einige Lösungsmethoden dieser en Differentialgleichung wird in den folgenden Abschnitten eingegan-

Coulomb-Eichung $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ ist natürlich konsistent mit der im stati-
Magnetfeld gültigen Beziehung $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$. Das folgt nach Möller ([192],
daraus, dass man bei der Divergenzbildung des Vektorpotenzials $\mathbf{A}$ das
ystem festhalten und den Aufpunkt verändern muss. Wenn aber der
tionsbereich das Stromsystem völlig einschließt, kann man auch den
kt festhalten und das Stromsystem verschieben. Mathematisch kann
eses Resultat durch eine partielle Integration erhalten. Mit der Lösung
tor-Poissongleichung (21.21) aus dem folgenden Abschnitt ergibt sich
ı

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div} \left(\frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} \, d\tilde{V} \right), \tag{21.12}$$

ler Divergenzoperator auf Funktionen von $\mathbf{r}$ wirkt. Das wird zusam-
t einer partiellen Integration ausgenutzt, um das folgende Ergebnis zu
ı

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\operatorname{div} \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} \, d\tilde{V}, \tag{21.13}$$

ler Divergenzoperator nunmehr auf Funktionen von $\tilde{\mathbf{r}}$ wirkt. Da die
tion über ein beliebiges Volumen durchzuführen ist, ergibt sich die
chte Äquivalenz der Beziehungen $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ und $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$. Eine de-
e Ableitung dieses Ergebnisses findet man bei Lehner [153]. Dort findet
ch den Hinweis, dass dieses Ergebnis nicht bedeutet, dass man immer
lomb-Eichung zu wählen hat, sondern dass die bei der Ableitung der
Poissongleichung gewählte Eichbedingung auch wieder reproduzierbar

Das vektorielle Kirchhoff-Integral

Kirchhoff-Integral für Stromdichteverteilungen

erigen Abschnitt 21.1 haben wir eine partielle Differentialgleichung für
torfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ abgeleitet, aus dem man bei bekannter Materialgleichung
s B- und das H-Feld ableiten kann. Die Größe kann somit wie im elek-
schen Feld als Zustandsgröße angesehen werden, wobei die Beziehung
als Beobachtungsgleichung für dieses physikalische Feld $\mathbf{H}$ aufgefasst
kann.
vurde auch erwähnt, dass die Bestimmungsgleichung (21.11) vom Typ
ektor-Poissongleichung ist. Ein Unterschied gegenüber der Poissonglei-
n der Elektrostatik scheint lediglich darin zu bestehen, dass $\mathbf{A}$ und

r im Sonderfall der x, y, z-Koordinaten komponentenweise angewendet
en kann. Somit zerfällt die Gl. (21.11) in xyz-Koordinaten in drei nicht
pelte Poissongleichungen für die Komponenten des Vektorpotenzials

$$\triangle A_x = -\mu J_x, \tag{21.14}$$

$$\triangle A_y = -\mu J_y, \tag{21.15}$$

$$\triangle A_z = -\mu J_z. \tag{21.16}$$

günstige Situation ergibt sich jedoch nur dann, wenn keine Randbe-
ngen im Endlichen vorliegen. Sind Randbedingungen im Endlichen vor-
en, so erhält man Bedingungsgleichungen, die zu Kopplungen zwischen
Komponenten führen. Wird nämlich das physikalisch relevante B-Feld
auf einem Rand im Endlichen vorgegeben, so wird dort rot$\mathbf{A}(\mathbf{r})$ vorge-
eben, woraus sich nach Definition des Rotationsoperators offensichtlich
lungen der Ableitungen des Vektorpotenzials $\mathbf{A}$ ergeben.
Vie im Anhang B.2 gezeigt wird, verkompliziert sich die Situation, wenn
ein Problem in allgemeineren Koordinatensystemen betrachtet. Bei der
ndung des Laplaceoperators auf das Vektorpotenzial treten dann weitere
e auf, die zu einer expliziten Kopplung der Poissongleichungen für die
ponenten führen. Beispielsweise koppeln die radiale Komponente und die
elkomponente in Zylinderkoordinaten, während alle drei Komponenten
ugelkoordinaten gekoppelt sind. Die Verwendung des Vektorpotenzials
raktischen Rechnungen ist dann eher fraglich.
uf Grund der Analogie zu den Verhältnissen im elektrischen Feld können
ir die Komponenten von $\mathbf{A}$ sofort die Lösungen anschreiben, wenn wir
$z-$Koordinaten arbeiten und keine Randbedingungen im Endlichen vor-
. Ist im elektrischen Feld die Ladungsdichte an jeder Stelle des Raumes
nt, so gilt für das Potential (vgl. Gl.(11.28))

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_V \frac{\varrho(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r}-\tilde{\mathbf{r}}\|}\, d\tilde{V}, \tag{21.17}$$

$d\tilde{V}$ das Volumenelement ist, $\|\mathbf{r}-\tilde{\mathbf{r}}\|$ den Abstand des Aufpunktes von
n Volumenelement bezeichnet und das Integral über den ganzen gelade-
Raum zu erstrecken ist. An die Stelle von ϱ/ε in der skalaren Poisson-
ung der Elektrostatik tritt in der Theorie des stationären Magnetfeldes
Gl. (21.11) $\mu\mathbf{J}$. Entsprechend gilt daher

$$A_x(\mathbf{r}) = = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{J_x(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r}-\tilde{\mathbf{r}}\|}\, d\tilde{V}, \tag{21.18}$$

$$A_y(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{J_y(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r}-\tilde{\mathbf{r}}\|}\, d\tilde{V}$$

ich die Integrationen auf den von der elektrischen Stromdichte $\mathbf{J}$ erfüll-
umbereich V bezieht. Diese drei Gleichungen kann man wieder zu einer
n Vektorgleichung zusammenfassen

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} \, d\tilde{V}. \tag{21.21}$$

fe der Rechenregeln der Vektoranalysis lässt sich zeigen, dass dieser
auch die Bedingung (21.10) erfüllt. Wenn die elektrische Strömung in
Punkt des Raumes gegeben ist, kann also mit der Formel (21.21) das
potenzial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ berechnet werden.

Vektorpotenzial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ kann auch zur Berechnung des magnetischen
Φ herangezogen werden. Nach Abschnitt 19.1 ist der durch eine be-
Fläche A gehende magnetische Fluss gleich dem Flächenintegral des
s über diese Fläche

$$\Phi = \iint\limits_A \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{A}}. \tag{21.22}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \tag{21.23}$$

mit

$$\Phi = \iint\limits_A \operatorname{rot} \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{A}} \tag{21.24}$$

t Hilfe des Stokesschen Satzes schließlich

$$\Phi = \oint_{\mathcal{C}_A} \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{s}}. \tag{21.25}$$

hält demnach den magnetischen Fluss Φ, der durch eine beliebig beran-
äche hindurchgeht, indem man das Linienintegral des Vektorpotenzials
s der Randlinie $\mathcal{C}_A$ der Fläche A bildet.

Kirchhoff-Integral für Stromfäden

Kirchhoffsche Formel für das Vektorpotenzial (21.21) auf linienförmige
nwenden zu können, muss man zunächst das Vektorpotenzial auf einer
inie eines linienförmigen Leiters bestimmen. Es hat dort praktisch den
n Wert, wenn man sich den ganzen Strom in einem durch die Achse
ahtes gebildeten Stromfaden konzentriert denkt, vorausgesetzt, dass

das Volumenelement dV in das vektorielle Linienelement $d\mathbf{s}$ und das rielle Flächenelement $d\mathbf{A}$ formal faktorisiert wird; $\mathbf{n}_A$ ist die Flächenale von $d\mathbf{A}$. Ersetzt man $d\tilde{V}$ in Gl.(21.21) durch $d\tilde{\mathbf{A}} \cdot d\tilde{\mathbf{s}}$, vertauscht Intensvariable $\tilde{\mathbf{r}}$ und Aufpunkt $\mathbf{r}$, bezeichnet den Aufpunkt nunmehr mit $\mathbf{r}_1$ ntegriert über die Querschnittsfläche des Drahtes, wobei sich der Strom I aht ergibt, dann erhält man folgende Näherung für das Vektorpotenzial

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_1) = \frac{I\mu}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_{Strom}} \frac{d\mathbf{s}}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}\|}. \tag{21.27}$$

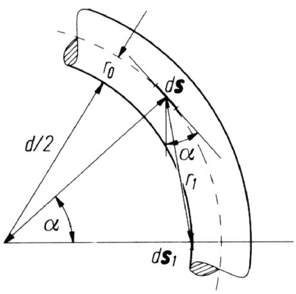


Abbildung 21.1. Zur Berechnung des magnetischen Flusses

m danach in irgendeinem Punkt $\mathbf{r}_1$ des Raumes das Vektorpotenzial) zu berechnen, hat man sich die Kurve des Stromfadens in die Längennte $d\mathbf{s}$ zerlegt zu denken. Jedes Längenelement liefert einen Beitrag zum rpotenzial in dem betrachteten Punkt, dessen Richtung übereinstimmt er des Längenelementes, und dessen Betrag proportional der Länge des entes dividiert durch den Abstand $r_1 := \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}\|$ des betrachteten Punkn dem Längenelementes ist.

n dieser Stelle soll noch einmal darauf hingewiesen werden, dass diese physikalisch motivierte Betrachtung im Hinblick auf eine praktische Beung des Linienintegrals wenig hilfreich ist. Vielmehr muss die Kurve, die tromfaden beschreibt, parametrisiert werden und damit das Linieninten ein einfaches Integral umgewandelt werden. Einzelheiten dazu findet n Abschnitt bei Merziger und Wirth [188].

ir einen Punkt einer der kreisförmigen Mantellinien des Leiters, z. B. neren, deren Radius $d/2 - r_0$ beträgt, Abb. 21.1, ergibt sich also das rpotenzial, wenn man den Abstand $r_1 = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}\|$ zwischen diesem Punkt Iantellinie $\mathbf{r}_1$ und dem Längenelement $d\mathbf{s}$ der Leiterachse in Gl. (21.27)

Mantellinie des linienförmigen Leiters verkettet ist, indem man das Produkt des Vektorpotenzials mit einem Längenelement $d\mathbf{s}_1$ der Man- bildet und die einzelnen Beiträge über die ganze Mantellinie summiert ntegriert). Es ergibt sich für $\mu = \mu_0$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_{Mantel}} \left(\oint_{\mathcal{C}_{Strom}} \frac{d\mathbf{s}}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}\|} \right) d\mathbf{s}_1 \tag{21.28}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_{Mantel}} \oint_{\mathcal{C}_{Strom}} \frac{d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{s}_1}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}\|}. \tag{21.29}$$

el: Für kreisförmige Linienleiter kann die Formel (21.29) weiter spezia- erden. Gemäß der Definition des skalaren Produktes gilt die Beziehung

$$d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{s}_1 = ds\, ds_1 \cos\alpha, \tag{21.30}$$

α der Winkel ist, den die beiden Längenelemente miteinander bilden, 1.1. Führt man dies in Gl. (21.29) ein, so folgt

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_{Mantel}} \oint_{\mathcal{C}_{Strom}} \frac{ds ds_1 \cos\alpha}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\|}. \tag{21.31}$$

stand zwischen den beiden Längenelementen und das Längenelement n man gemäß Abb. 21.1 auf folgende Weise ausdrücken

$$r_1 = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}\| = \sqrt{\frac{1}{4}d^2 + \left(\frac{1}{2}d - r_0\right)^2 - d\left(\frac{1}{2}d - r_0\right)\cos\alpha}; \tag{21.32}$$

$$ds_1 = \left(\frac{1}{2}d - r_0\right) d\alpha. \tag{21.33}$$

gration über ds kann vorab ausgeführt werden. Sie ergibt $d\,\pi$. Damit man eine in α parametrisierte Form des Liniendoppelintegrals

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2}d\left(\frac{1}{2}d - r_0\right)\cos\alpha d\alpha}{\sqrt{\frac{1}{4}d^2 + \left(\frac{1}{2}d - r_0\right)^2 - d\left(\frac{1}{2}d - r_0\right)\cos\alpha}}. \tag{21.34}$$

Integral lässt sich durch die sogenannten elliptischen Integrale[2] dar- Unter der Voraussetzung, dass der Drahtradius sehr klein ist gegen den des Kreises, kann man einen einfachen Näherungsausdruck ableiten. wird nämlich aus Gl. (21.34) angenähert

ın $2r_0^2/d^2$ eine gegen 1 sehr kleine Größe sein soll, so ergeben sich er-
che Werte des Integranden nur in der Umgebung von $\cos\alpha = 1$, also für
) und $\alpha = 2\pi$; der Verlauf des Integranden in Abhängigkeit von α ist in
21.2 aufgezeichnet.

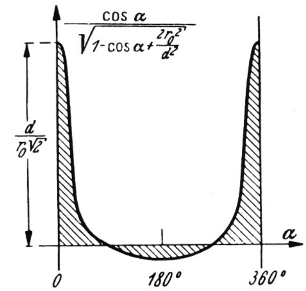


Abbildung 21.2. Angenäherte Berechnung des Integrals 21.35

an erhält daher einen Näherungswert des Integrals, wenn man die Nähe-
formel

$$\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \tag{21.36}$$

zt und von 0 bis $\pi/4$ integriert, also in einem Bereich, in dem diese Nähe-
formel noch brauchbar ist; das ganze Integral hat dann den doppelten
Es gilt also

$$\Phi \approx \frac{\mu_0 I}{2} d \int_0^{\pi/4} \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\right) d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 4\frac{r_0^2}{d^2}}}. \tag{21.37}$$

laraus folgt angenähert

$$\Phi \approx \frac{\mu_0 I d}{2} \ln \frac{d}{2r_0}. \tag{21.38}$$

Ergebnis soll mit Hilfe folgender Zahlenwerte illustriert werden: Es sei
$0cm$, $r_0 = 1mm$, $I = 2A$. Befindet sich die Drahtschleife in Luft, so wird
Gl. (21.38)

$$\frac{1,257}{2} \cdot 10-6 \cdot 2 \cdot 20 \ln 100 \frac{Vs}{Am} Acm = 1,16 \cdot 10-6Vs = 1,16\mu Wb. \tag{21.39}$$

ppelt man den Durchmesser d, so wird $\Phi \approx 2,66\mu Wb$. Der magnetische

Das Biot-Savart-Integral

ich war das Gesetz von Biot, Savart und Amperè der Ausgangspunkt quantitative Behandlung des Magnetfeldes von stromführenden Leitern ogenannte *Elektromagnetismus* – und dessen Kraftwirkung Anfang des rhunderts. Einzelheiten der Entstehungsgeschichte der Theorie, die in chend kurzer Zeit ausgebaut wurde, findet man u. a. bei H. Ebert n dieser Stelle soll nur überblicksartig auf einige historische Aspekte ngen werden.

ndsätzlich waren magnetische Erscheinungen schon seit den Grieekannt, aber dabei handelte es sich um magnetische Wirkungen soge- Magneteisensteine. Erste Beobachtungen über die Kraftwirkung von hrenden Leitern gehen auf Romagnosi im Jahre 1802 zurück. Systee Experimente über elektromagnetische Erscheinungen anhand eines urchflossenen Drahtes und einer Magnetnadel (vgl. Abschnitt 22.3.4) dann erstmals von Ørsted durchgeführt. Seine Ergebnisse teilte er am 1820 mit. Ørsteds Entdeckung teilte Arago am 4. September 1820 französischen Kollegen mit; der Versuch wurde dort am 11. September monstriert. Wenige Tage später, nämlich am 25. September 1820 zeigte e die gegenseitige Beeinflussung zweier stromführender Drähte. Weitere ochen später – 30. Oktober 1820 – präsentierten Biot und Savart erstitative Aussagen über die „magnetische Kraft" auf einen Draht. Die te Illustration der magnetischen Kraftwirkung mit Eisenspänen wurgens erstmals von Seebeck im Jahre 1821 angegeben. Mit Hilfe eines ngungsvariometers" zeigten sie, dass folgende Proportionalitäten gelten

$$\|\mathbf{B}\| \sim \frac{1}{\|\mathbf{r}\|}, \quad \|\mathbf{B}\| \sim I, \tag{21.40}$$

wir uns der modernen Bezeichnungsweise $\|\mathbf{B}\|$ für die Kraftwirkung en.

aus ergibt sich dann insgesamt (C: Konstante)

$$\|\mathbf{B}\| = C\frac{I}{\|\mathbf{r}\|}. \tag{21.41}$$

gemeinere Form wurde 1823 von Amperè angegeben. Dieses Ergebnis mals höchst ungewöhnlich und erregte die Gemüter, denn die Kraftg fiel nicht wie beim Gravitationsgesetz und der elektrostatischen Couaft mit $1/\|\mathbf{r}\|^2$ ab sondern mit $1/\|\mathbf{r}\|$. Laplace zeigte schließlich, dass es ferentielle Form der Biot-Savartschen Gesetzmäßigkeit für die magne-Kraftwirkung gibt, die wieder im Einklang mit dem $1/\|\mathbf{r}\|^2$-Abfall der gewissen Sinne die Vorgehensweise von Laplace rechtfertigt. Im folgenehen wir auf die Ableitung des Biot-Savart-Integrals auf der Grundlage ektorpotenzials ein, das in dieser Form eigentlich von Laplace stammt.

Abschnitt 21.2.2 haben wir gezeigt, dass das B-Feld eines Linienleiters nem modifizierten Kirchhoffintegral für das Vektorpotenzials $\mathbf{A}$ ermittelt en kann. Oft braucht man jedoch das Vektorpotenzial selbst nicht zu hnen. Wir leiten im folgenden aus dem Vektorpotenzial eine Formel zur hnung des H-Feldes ab, die es gestattet, eine entsprechende Formel für -Feld anzugeben.

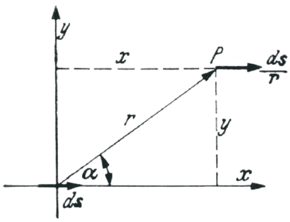
as H-Feld ist nach Gl. (21.7) und (21.21)

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}\left(\iiint_V \frac{\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r}-\tilde{\mathbf{r}}\|}\,d\tilde{V}\right). \tag{21.42}$$

Gleichung wenden wir nun auf einen „Stromfaden" an, also auf einen durchflossenen Leiter von sehr geringem Querschnitt, oder auf einen Strömungslinien begrenzten Ausschnitt aus einem drahtförmigen Leiter chen Querschnittes. Mit der Näherungsbeziehung in Gl. (21.27) ergibt

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi}\mathrm{rot}\left(\oint_{\mathcal{C}_A} \frac{d\tilde{\mathbf{s}}}{\|\mathbf{r}-\tilde{\mathbf{r}}\|}\right) = \frac{I}{4\pi}\oint_{\mathcal{C}_A}\mathrm{rot}\left(\frac{d\tilde{\mathbf{s}}}{\|\mathbf{r}-\tilde{\mathbf{r}}\|}\right), \tag{21.43}$$

ei der Operator rot auf Funktionen von $\mathbf{r}$ wirkt. Verwenden wir die Be-



bbildung 21.3. Zur Ableitung der Formel von Biot-Savart und Amperé

ng (z. B. Wunsch, Schulz [295], S. 328)

$$rot(U(r)\,\mathbf{a}) = \frac{dU}{dr}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\times\mathbf{a}\right) \tag{21.44}$$

$:= \|\mathbf{r}\|$, dann erhält man für den Integranden von (21.43)

$$\mathrm{rot}_x\left(\frac{d\tilde{\mathbf{s}}}{r}\right) = 0, \tag{21.46}$$

$$\mathrm{rot}_y\left(\frac{d\tilde{\mathbf{s}}}{r}\right) = 0, \tag{21.47}$$

$$\mathrm{rot}_z\left(\frac{d\tilde{\mathbf{s}}}{r}\right) = \frac{\sin\alpha ds}{r^2}, \tag{21.48}$$

$:= \|\mathbf{r}-\tilde{\mathbf{r}}\|$ ist, unter $\mathbf{r}-\tilde{\mathbf{r}}$ ein Vektor verstanden wird, der durch stand zwischen dem Nullpunkt und dem Punkt P gegeben ist und m Punkt P hinzeigt und α nach Abb. 21.3 der eingeschlossene Winkel chse ist. Für das H-Feld ergibt sich damit schließlich die Laplacesche

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi}\oint_{\mathcal{C}} \frac{d\tilde{\mathbf{s}}\times(\mathbf{r}-\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r}-\tilde{\mathbf{r}}\|^3}, \tag{21.49}$$

meistens nach Biot und Savart benannt wird. Man kann diese Formel echnung magnetischer Felder von stromdurchflossenen linienförmigen folgendermaßen deuten. Das H-Feld setzt sich aus Anteilen zusammen, den einzelnen Längenelementen $d\mathbf{s}$ des Leiters herrühren, und die sich summieren. Jeder Anteil ist gegeben durch

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi}\frac{d\mathbf{s}\times\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}. \tag{21.50}$$

also den Betrag

$$dH := \|d\mathbf{H}\| = \frac{I}{4\pi}\frac{ds\sin\alpha}{\|\mathbf{r}\|^2} \tag{21.51}$$

e Richtung, die senkrecht auf der durch $d\mathbf{s}$ und $\mathbf{r}$ gebildeten Ebene as H-Feld selbst ergibt sich, wenn man alle Teilvektoren, die von den n Längenelementen des elektrischen Stromkreises herrühren, geome- ddiert. Da der räumliche Verlauf des Stromes in den meisten Fällen ie Stromleiter vorgeschrieben ist, so kann man mit Hilfe der Laplace- rmel, Gl. (21.49), grundsätzlich die Aufgabe der Berechnung magne- Felder von elektrischen Stromkreisen lösen, wenn auch die zu diesem auszuführende Integration in vielen Fällen nicht zu einfachen Aus- führt.

terhin wird, wie bereits gesagt, bei der Laplaceschen Interpretation .49) von der „Summe“ auf die Summanden geschlossen, was natürlich orrekt ist. Außerdem ist zu beachten, dass die Laplacesche Formel nur er Voraussetzung gilt, dass μ im ganzen Raum konstant ist.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{V}. \tag{21.52}$$

s Integral lässt sich nur sehr selten analytisch behandeln. Daher haben
n Abschnitt 21.2.2 ein Näherungsverfahren diskutiert, bei dem „dünne“
nfäden vorausgesetzt werden. Aus dem Volumenintegral in Gl. (21.52)
dann ein Linienintegral, das man deutlich öfter in analytischer Weise be-
nen kann. In diesem Abschnitt wollen wir noch kurz auf eine andere Nähe-
eingehen, die wir schon in Zusammenhang mit der skalaren Poissonsche
hungen vorgestellt haben; es handelt sich um die Multipol-Entwicklung.
n Abschnitt 11.5 beschrieben, gehen wir dabei von einer vollständig im
chen gelegenen Stromverteilungsdichte $\mathbf{J}$ aus und entwickeln den Nenner
ntegranden des Kirchhoff-Integrals (21.52) $1/\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|$ in eine Reihe; im
neinen führt das nach Gl. (11.31) auf Legendre-Polynome. Man erhält
eine Reihe von additiven Anteilen des Vektorpotenzials

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n(\mathbf{r}), \tag{21.53}$$

die Anteile $\mathbf{A}_n$ in integraler Form vorliegen. Die ersten beiden Terme
en sich zu

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r}\|} \, d\tilde{V} + \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|^3} \, d\tilde{V}. \tag{21.54}$$

nteressanteste Anteil ist der magnetische Monopolterm in Gl. (21.54).
Verschwinden des Monopolterms folgt aus $\operatorname{div}\mathbf{J} = 0$, wobei eine etwas
ckeltere Rechnung durchgeführt werden muss; vgl. z. B. Schnackenberg
, S. 137ff).

er Dipolterm in Gl. (21.54) kann etwas umgeformt werden; man erhält
e auch Abschnitt 19.4)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}, \tag{21.55}$$

$$\mathbf{m} := \frac{1}{2} \iiint_V \tilde{\mathbf{r}} \times \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}}) \, d\tilde{V}. \tag{21.56}$$

kann natürlich die Multipol-Entwicklung auch noch mit der in Abschnitt
2 behandelten Näherung mit Stromfäden kombinieren, so dass die Dipol-
ogar die Quadrupol-Näherung analytisch ausgewertet werden kann.

llgemeinere Überlegungen zur magnetischen Multipol-Entwicklung fin-
man bei u. a. Eder [67] und Schnackenberg [242]. Verallgemeinerte

Ableitung der Vektor-Poissongleichung (21.11) verwendete Coulomb-
g also auch die Ursache dafür, dass der Monopolterm des Vektorpoten-
verschwindet.

Das skalare magnetische Potenzial

echnung des *genauen* Verlaufes des H-Feldes, aus dem dann bei kon-
Permeabilität das B-Feld berechnet werden kann, stellt ein ähnliches
n dar wie die Berechnung elektrischer Felder, und es gelten sogar au-
der stromdurchflossenen Leiter ganz ähnliche Gesetze wie dort.
h dem Durchflutungsgesetz hat das Linienintegral des H-Feldes den
ull, wenn der Integrationsweg nicht mit Strömen verkettet ist. In der
enten differentiellen Form gilt

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{0}. \tag{21.57}$$

bestimmten Voraussetzungen kann man eine Lösung dieser partiellen
tialgleichung angeben

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad}\psi. \tag{21.58}$$

integralen Form geht hervor, dass das Linienintegral des H-Feldes für
e Wege zwischen zwei Punkten a und b denselben Wert hat, wenn die
neinander übergeführt werden können, ohne dass stromdurchflossene
geschnitten werden. Das Linienintegral hängt nur von der Lage der
kte a und b im magnetischen Feld ab; man kann dies, wie im Falle des
chen Feldes mit Hilfe des skalaren Feldes ψ ausdrücken, das wir gerade
rt haben. Wir verwenden daher auf der Grundlage der Gleichung
die folgende Integraldarstellung des *magnetischen Potenzials*

$$\int_a^b \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s} = \psi_a - \psi_b. \tag{21.59}$$

Feld kann also außerhalb der Stromleiter durch den Gradienten eines
Potenzials ausgedrückt werden.
Linienintegral des H-Feldes zwischen zwei Punkten bezeichnet man
uch als *magnetische Spannung*. Es kann mit dem magnetischen Span-
esser nach Rogowski (vgl. Abschnitt 19) gemessen werden. Das Li-
gral über einen in sich geschlossenen Weg ist die *magnetische Um-
nnung*, und das Durchflutungsgesetz kann daher auch in der Form aus-
hen werden: *„Die magnetische Umlaufspannung längs eines beliebigen
ist gleich der Durchflutung des Weges.“*

t man in Gl.(21.58) das B-Feld mit Hilfe der Gln. (18.23) ein, so ergibt

$$\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} \psi) = 0. \tag{21.61}$$

die Permeabilität μ eine Konstante ist, wie insbesondere in Luft, so daraus

$$\triangle \psi = 0. \tag{21.62}$$

as magnetische Potenzial außerhalb der Stromleiter gilt also die Laplace-Potenzialgleichung. Zur Berechnung solcher magnetischen Felder können die gleichen Methoden angewendet werden wie beim elektrischen Feld. m das magnetische Potenzial ψ explizit berechnen zu können, gehen wir er Biot-Savart-Laplace-Formel (21.49) aus und verwenden eine Variante tokesschen Satzes (A.22), die im Anhang A.1 angeben wird. Daraus t sich

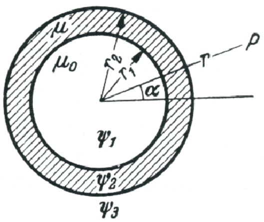
$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \frac{I}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_A} \frac{d\tilde{\mathbf{s}} \times (\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|^3} = \frac{I}{4\pi} \iint\limits_A (d\tilde{\mathbf{A}} \times \tilde{\nabla}) \times \frac{(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|^3} \\
&= -\frac{I}{4\pi} \iint\limits_A (d\tilde{\mathbf{A}} \times \nabla) \times \frac{(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|^3} \\
&= \nabla \left(\frac{I}{4\pi} \iint\limits_A \frac{(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|^3} \cdot d\tilde{\mathbf{A}} \right) - \frac{I}{4\pi} \iint\limits_A \triangle \frac{1}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} \, d\tilde{\mathbf{A}},
\end{aligned}$$

eine Operatorbeziehung verwendet wurde, die auf der bekannten Vek-rlegung $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ basiert. Da $1/(\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|)$ proportional reenfunktion des Laplaceoperators ist, entartet der Integrand des zwei-erms zu einer Deltafunktion. Dieser Term verschwindet, wenn wir die e A durch die Leiterschleife so legen, dass der Aufpunkt $\mathbf{r}$ nicht auf die-äche liegt. Der erste Term kann offensichtlich aus der skalaren Funktion

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \iint\limits_A \frac{(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|^3} \cdot d\tilde{\mathbf{A}} \tag{21.63}$$

eitet werden, die gerade dem magnetischen Potenzial in Gl. (21.58) ent-t.

piel: Als Anwendungsbeispiel werde die magnetische Schirmwirkung ei-Hohlkugel aus Eisen betrachtet. Die Hohlkugel mit den Radien r_1 und bb. 21.4, bestehe aus Material mit der konstanten Permeabilität μ und de sich in einem homogenen magnetischen Feld. Gefragt ist nach der dstärke H_i im Innern des Hohlraumes, wenn die H-Feldstärke H_a des



ung 21.4. Zur Berechnung der magnetischen Schirmwirkung einer Hohlku-

den Innenraum

$$\psi_1 = \left(c_{11} r + \frac{c_{21}}{r^2}\right) \cos\alpha, \tag{21.64}$$

Kugelwand

$$\psi_2 = \left(c_{12} r + \frac{c_{22}}{r^2}\right) \cos\alpha, \tag{21.65}$$

Außenraum

$$\psi_3 = \left(c_{13} r + \frac{c_{23}}{r^2}\right) \cos\alpha, \tag{21.66}$$

enzbedingungen sind

$$\text{für } r = r_1 : \frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha} = \frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha} \quad \text{und} \quad \mu_0 \frac{\partial\psi_1}{\partial r} = \mu \frac{\partial\psi_2}{\partial r}; \tag{21.67}$$

$$\text{für } r = r_2 : \frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha} = \frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha} \quad \text{und} \quad \mu \frac{\partial\psi_2}{\partial r} = \mu_0 \frac{\partial\psi_3}{\partial r}. \tag{21.68}$$

muss im Innenraum ψ_1 endlich bleiben, d. h. $c_{21} = 0$ sein, und das al im Außenraum muss für $r \to \infty$ in das Potenzial des homogenen übergehen, d. h. $c_{13} = H_a$. Durch Einführen der Ansätze (21.64)- in die Grenzbedingungen findet man leicht, dass diese mit bestimmten der Koeffizienten erfüllt werden können. Für die H-Feldstärke H_i im um ($= c_{11}$) ergibt sich

$$H_i = 9H_a \left(2\mu_r + 5 + \frac{5}{\mu_r} - 2\frac{(\mu_r - 1)^2}{\mu_r}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3\right)^{-1}. \tag{21.69}$$

lie relative Permeabilität des Schirmmaterials μ groß gegen 1 ist, folgt (21.69) die Näherungsformel für den „Schirmfaktor“

$d/mm =$	1	2	5	10
$H_i/H_a =$	0,40	0,20	0,090	0,053

Tabelle 21.1. Zusammenhang von Schirmfaktor und Wandstärke

sind einige Zahlenwerte angegeben für ein Abschirmgehäuse mit einem
ıs $r_1 = 5cm$ aus gewöhnlichem Eisen mit $\mu_r = 200$ und verschiedener
lstärke d. In gleicher Weise kann man untersuchen, wie eine Unterteilung
ugelwand in mehrere Schichten die Schirmwirkung verbessert. Das hier
hnete Feldstärkeverhältnis gilt nur für stationäre magnetische Felder. Bei
etischen Wechselfeldern wächst die Schirmwirkung infolge der im Eisen
ehenden Wirbelströme, die das erzeugende Feld noch weiter schwächen,
Abschnitt 29 und 34.1.

as magnetische Potenzial ist keine eindeutige Größe, da das Lininte-
es H-Feldes, also die Spannung bei einem mit Strömen verketteten Weg,
Null ist, sondern Θ. Geht man n-mal um den Stromleiter herum, so
ößert sich das Potenzial ψ um den Wert $n\Theta$. Da jedoch nur *Potenzial-*
enzen gemessen werden können und die Wirkungen nur von dem H-Feld
ngen, so spielt diese Vieldeutigkeit praktisch keine andere Rolle als die
stimmtheit des Potenzials überhaupt.
n die Stelle der Grenzbedingungen des elektrischen Feldes treten hier die
schnitt 22.3 abgeleiteten analogen Bedingungen und das Durchflutungs-
z.

enau wie beim elektrischen Feld kann in 2-dimensionalen Situationen
die Methode der konformen Abbildung (vgl. Abschnitt 11.7) benutzt wer-
Z.B. liefert die Funktion

$$f(\zeta) = c \, \ln \zeta \tag{21.71}$$

I-Feld in der Umgebung eines geraden langgestreckten (unendlich lan-
Leiters, das konzentrische kreisförmige H-Feldlinien aufweist und ebene
zialflächen, die die Leiterachse enthalten. Das Potenzial ist

$$\psi = c \, \alpha; \tag{21.72}$$

otenzialflächen sind durch α =konst. gegeben. Für den Betrag des H-
s folgt daraus

$$\|\mathbf{H}\| = H_\alpha = -\frac{d\psi}{\ldots} = -\frac{c}{\ldots}, \tag{21.73}$$

ie positive Richtung von α und $\|\mathbf{H}\|$ rechtsläufig mit der positiven
ng des Stromes I verknüpft ist.
die Potenzialgleichung eine lineare Differentialgleichung ist, so folgt,
h bei Vorhandensein mehrerer Leiter die Einzelfelder ungestört über-
Voraussetzung dafür ist lediglich, dass überall

$$\mu = \text{konst.} \tag{21.75}$$

t Hilfe dieses Satzes kann man die magnetischen Felder in der Umge-

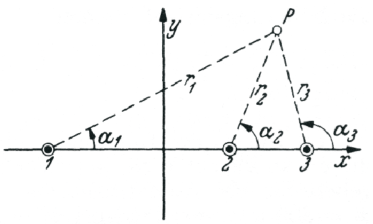


Abbildung 21.5. Berechnung des magnetischen Feldes

on *Mehrleitersystemen* berechnen. Bezeichnet $1, 2$ und 3 in Abb. 21.5
allele Leiter, die von den Strömen I_1, I_2, I_3 durchflossen werden (po-
ichtung von hinten nach vorn), so gilt für das magnetische Potenzial
deinem Punkt P

$$\psi = -\frac{1}{2\pi}(I_1\alpha_1 + I_2\alpha_2 + I_3\alpha_3). \tag{21.76}$$

leiten sich die Komponenten des H-Feldes in der x- und y-Richtung
st z.B.

$$H_x = -(\text{grad}\psi)_x = \frac{1}{2\pi}\left(I_1\frac{\partial\alpha_1}{\partial x} + I_2\frac{\partial\alpha_2}{\partial x} + I_3\frac{\partial\alpha_3}{\partial x}\right). \tag{21.77}$$

partiellen Differentiale der Winkel α bei einer Änderung von x findet
s der Beziehung

$$x = y\cot\alpha + k. \tag{21.78}$$

ergibt sich durch partielles Differenzieren

$$1 = -\frac{y}{\sin^2\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}. \tag{21.79}$$

$$H_x = -\frac{1}{2\pi}\left(I_1\frac{\sin\alpha_1}{r_1} + I_2\frac{\sin\alpha_2}{r_2} + I_3\frac{\sin\alpha_3}{r_3}\right). \tag{21.81}$$

u so folgt für die Komponente von H in der $y-$Richtung

$$H_y = \frac{1}{2\pi}\left(I_1\frac{\cos\alpha_1}{r_1} + I_2\frac{\cos\alpha_2}{r_2} + I_3\frac{\cos\alpha_3}{r_3}\right). \tag{21.82}$$

ßer Entfernung von den drei Leitern werden die Abstände und die Win-
nander gleich. Dann folgt

$$H_x = -\frac{1}{2\pi r}(I_1 + I_2 + I_3)\sin\alpha, \tag{21.83}$$

$$H_y = +\frac{1}{2\pi r}(I_1 + I_2 + I_3)\cos\alpha. \tag{21.84}$$

etrag der magnetischen Feldstärke ist in großer Entfernung

$$\|\mathbf{H}\| = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = \frac{1}{2\pi r}(I_1 + I_2 + I_3). \tag{21.85}$$

agnetische Feld ist also in großer Entfernung von einem System paralle-
iter so beschaffen, als ob nur ein Leiter vorhanden wäre, der die Summe
tröme führt.
andelt es sich um Hin- und Rückleitung eines einzigen Stromkreises, dann
setzen $I_1 = -I_2 = I$, und es wird

$$\psi = -\frac{1}{2\pi}I(\alpha_1 - \alpha_2). \tag{21.86}$$

otenziallinien sind daher Kreise, die durch die Spuren der Leiterachse
rchgehen, und deren Mittelpunkte auf der Mittelsenkrechten zur Ver-
ngslinie dieser Spuren liegen; sie entsprechen den Verschiebungslinien
ektrischen Feldes. Da die magnetischen Induktionslinien die Potenzialli-
enkrecht schneiden müssen, so sind sie durch die Appollonischen Kreise
stellt wie die Potenziallinien des elektrischen Feldes (Abb. 10.14). Die
dstärke ist auf der Verbindungslinie der Leiterspuren

$$\|\mathbf{H}\| = H_y = \frac{1}{2\pi}I\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \tag{21.87}$$

s $\alpha_1 = +1$ und $\cos\alpha_2 = -1$. Sie setzt sich zusammen aus den von den
n Leitern herrührenden Beiträgen kreisförmiger Leiter nach dem Durch-
gssatz. Bezeichnet a den Abstand zwischen den beiden Drahtachsen, so
$r_2 = a - r_1$ und

$$d\Phi = Bldr_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} Il \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{a - r_1} \right) dr_1. \qquad (21.89)$$

samte Fluss im Luftraum zwischen den beiden Leitungen ergibt sich durch Integration von $r_1 = r_0$ bis $r_1 = a - r_0$, wenn r_0 den Leiterradius net. Es wird

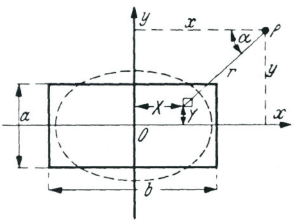
$$\Phi = \frac{\mu_0}{2\pi} Il \int_{r_0}^{a-r_0} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{a - r_1} \right) dr_1 = \frac{\mu_0}{\pi} Il \ln \frac{a - r_0}{r_0}. \qquad (21.90)$$

n Prinzip der ungestörten Überlagerung der Einzelfelder kann man ferbrauch machen zur Berechnung des magnetischen Feldes bei *stabförmitern beliebigen Querschnitts*. Man zerlegt den Querschnitt in Flächene dA; dann wird bei einer Stromdichte J die Stromstärke in einem Querschnitt JdA. Die Komponenten des H-Feldfeldes in einem Punkt dann nach den Gl. (21.81) und (21.82)

$$H_x = -\frac{1}{2\pi} J \iint \frac{\sin\alpha}{r} dA, \qquad (21.91)$$

$$H_y = \frac{1}{2\pi} J \iint \frac{\cos\alpha}{r} dA, \qquad (21.92)$$

lie Integrale über den ganzen Leiterquerschnitt zu bilden sind.



ildung 21.6. Berechnung des magnetischen Feldes eines Rechteckstabes

el: Für die in Abb. 21.6 gezeichnete Schiene mit rechteckigem Querstellt man das Flächenelement durch ein kleines Rechteck dar. Die naten des Rechtecks seien $x = X, \quad y = Y$, die Seiten ΔX und ΔY. vird

$$r = \sqrt{(y - Y)^2 + (x - X)^2}, \qquad (21.93)$$

$$\sin\alpha = \frac{y - Y}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{x - Y}{r}, \qquad (21.94)$$

usführung der Integration liefert

$$H_x = \frac{I}{2\pi ab}\left(\frac{1}{2}x_{+b/2}\ln\frac{y_{+a/2}^2 + x_{+b/2}^2}{y_{-a/2}^2 + x_{+b/2}^2}\right. \tag{21.96}$$

$$-\frac{1}{2}x_{-b/2}\ln\frac{y_{+a/2}^2 + x_{-b/2}^2}{y_{-a/2}^2 + x_{-b/2}^2} \tag{21.97}$$

$$+y_{+a/2}\left(\arctan\frac{x_{+b/2}}{y_{+a/2}} - \arctan\frac{x_{-b/2}}{y_{+a/2}}\right) \tag{21.98}$$

$$\left.-y_{-a/2}\left(\arctan\frac{x_{+b/2}}{y_{-a/2}} - \arctan\frac{x_{-b/2}}{y_{-a/2}}\right)\right). \tag{21.99}$$

$_{+b/2} := x+b/2$, $x_{-b/2} := x-b/2$, $y_{+a/2} := y+y/2$ und $y_{-a/2} := y-a/2$.
usdruck für H_y ergibt sich hieraus, wenn überall x und y sowie a und b
nander vertauscht werden. Die Feldlinien bilden ellipsenähnliche Kurven,
Abb. 21.6 gestrichelt angedeutet.

ie Beziehungen (21.91) und (21.92) gelten auch für das Feld innerhalb
eiters, wenn der Leiter die gleiche Permeabilität besitzt wie die Um-
ng. Genau so wie außerhalb des Leiters addieren sich auch im Innern
dem Punkt des Leiterquerschnitts die Wirkungen der Ströme aus den
en Querschnittsteilen. Dagegen gilt im Innern der Leiter nicht die Lapla-
e Potenzialgleichung, bei deren Ableitung vorausgesetzt wurde, dass der
chtete Raumteil stromlos ist. Beim geraden Leiter mit Kreisquerschnitt

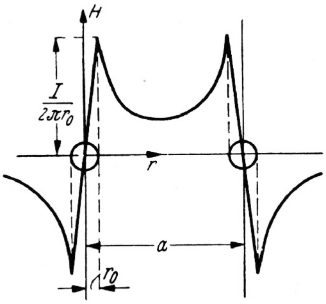


Abbildung 21.7. H-Feld bei einer Doppelleitung

wegen der Symmetrie die magnetische Feldstärke im Innern des Leiters
o wie außerhalb für Punkte gleichen Abstandes von der Achse konstan-

$$I_r = \frac{r^2}{r_0^2} I, \tag{21.100}$$

$_0$ wieder den Leiterradius und I den Gesamtstrom bezeichnen. Daher
ch dem Durchflutungsgesetz

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \|\mathbf{H}\| \oint_{\mathcal{C}} ds = \|\mathbf{H}\| 2r\pi = \frac{r^2}{r_0^2} I, \tag{21.101}$$

$$\|\mathbf{H}\| = \frac{r}{2\pi r_0^2} I. \tag{21.102}$$

Verbindungsebene der beiden Drahtachsen ergibt sich damit ein Ver-
magnetischen Feldstärke, wie ihn Abb. 21.7 zeigt.

Feld im Leiterinnern genügt nicht der Laplaceschen Potenzialglei-
Diese lautet im vorliegenden zylindrischen Fall aufgrund der Rota-
nmetrie (vgl. Anhang B.1)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \tag{21.103}$$

Gl. (21.102) ergibt sich das Potenzial ($H := \|\mathbf{H}\|$)

$$\psi = -\int H r d\alpha = -\frac{1}{2\pi} \frac{r^2}{r_0^2} \alpha I + k. \tag{21.104}$$

folgt

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{\pi} \frac{r^2}{r_0^2} \alpha I; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = -\frac{1}{\pi} \frac{\alpha I}{r_0^2}. \tag{21.105}$$

sdruck auf der linken Seite von Gl. (21.103) wird daher $-(2/\pi)(\alpha I/r_0^2)$,
von Null verschieden.