Kritische Grundlegung der Mathematik

Eine phänomenologisch-logische Analyse

Bearbeitet von
Hermann Schmitz

1. Auflage 2013. Buch. 160 S. Hardcover
ISBN 978 3 495 48561 3
Format (B x L): 13,9 x 21,4 cm
Gewicht: 229 g

Weitere Fachgebiete > Philosophie, Wissenschaftstheorie, Informationswissenschaft > Wissenschaftstheorie > Philosophie der Mathematik

Hermann Schmitz

Kritische Grundlegung der Mathematik

VERLAG KARL ALBER

Der pythagoreische Gedanke ist die These: Alles ist Zahl, d. h. zahlgemäß aufgebaut aus lauter Einzelnem. Er durchzieht die europäische Geschichte und führt die Naturwissenschaft und Technik zu der Unterstellung, die Welt sei ein riesiges Netz aus einzelnen Knoten, bestimmt dazu, vom Menschen so weit als möglich nach seinem Belieben umgeknüpft zu werden. Die Mathematik ist die Avantgarde des pythagoreischen Gedankens. Sie setzt darauf, dass alles Mannigfaltige numerisch ist. Es gibt aber auch zwiespältiges und chaotisches Mannigfaltiges. Die Mathematik und, ihr vorleuchtend, die Logik stoßen darauf in Gestalt der Antinomien, vor denen sie hilflos, wenn auch kunstvoll, den Kopf einziehen. Diese Blamage wird zur Errungenschaft, wenn man einsieht, dass es sich um die Begegnung mit einem Mannigfaltigen anderen Typs handelt. Der von zu engem Mannigfaltigkeitsverständnis verschuldete Widerspruch erweist sich dann als Zwiespalt. Eine die Aussagenlogik erweiternde Logik der iterierten Unentschiedenheit gestattet der Mathematik die Befreundung mit den Antinomien.

Der Autor:

Hermann Schmitz, geb. 1928 in Leipzig, promoviert 1955, habilitiert für Philosophie 1958; 1971 bis 1993 ordentlicher Professor für Philosophie an der Universität Kiel. Begründer der Neuen Phänomenologie. Autor zahlreicher Bücher und Aufsätze. Zuletzt im Verlag Karl Alber erschienen sind: »Der Weg der europäischen Philosophie. Eine Gewissenserforschung« (2007), »Logische Untersuchungen« (2008), »Kurze Einführung in die Neue Phänomenologie« (2009), »Jenseits des Naturalismus« (2010), »Bewusstsein« (2010) und »Das Reich der Normen« (2012). 2011 gab Hans Werhahn den Gesprächsband »Neue Phänomenologie. Hermann Schmitz im Gespräch« heraus.

Hermann Schmitz

Kritische Grundlegung der Mathematik

Eine phänomenologisch-logische Analyse

Verlag Karl Alber Freiburg / München

Originalausgabe

www.verlag-alber.de

Satz: SatzWeise, Föhren
Herstellung: AZ Druck und Datentechnik, Kempten

Gedruckt auf alterungsbeständigem Papier (säurefrei)
Printed on acid-free paper
Printed in Germany

ISBN 978-3-495-48561-3

Inhalt

Vorrede

Als der Verlag Karl Alber 2010 sein hundertjähriges Gründungsjubiläum feiern wollte, schickte er seinen Autoren zur Veröffentlichung in einer Festschrift einen Fragebogen, in dem eine Frage lautete: »Welches ist für Sie die wichtigste philosophische Frage für das 21. Jahrhundert?« Ich habe so geantwortet: »Wie kann die Willkür des Konstruierens in Besinnung auf das Unwillkürliche umgelenkt werden? Abstrakter formuliert: Welche Mannigfaltigkeitstypen gibt es außer dem Typ des numerischen, zahlfähigen Mannigfaltigen?« Diese Fragestellung gibt das Motiv für dieses Buch an. Sein Grundgedanke ist, die Mathematik als die Avantgarde des Versuchs zu verstehen, alles Mannigfaltige als numerisch, aus lauter Einzelnem bestehend, aufzufassen. Dabei stößt sie nach großartigen Erfolgen der Ausfaltung dieses pythagoreischen Gedankens an Grenzen, die sich ihr als Widersprüche darstellen, während es sich in der Tat um die Begegnung mit einem anderen, zwiespältigen Typ von Mannigfaltigkeit handelt, der, wenn man seine Andersartigkeit zur Kenntnis nimmt, auch widerspruchsfrei gedeutet werden kann. Meine Botschaft an die Mathematik hat daher eine skeptische und eine ermutigende Komponente. Skeptisch weise ich auf die Brüchigkeit wichtiger mathematischer Methoden hin, die auf Voraussetzungen beruhen, für die fälschlich Allgemeingültigkeit in Anspruch genommen wird, während sie nur legitim sind, wo das Mannigfaltige lediglich seine numerische Seite zeigt. Diese Kritik ist nicht nur theoretisch, sondern hat auch lebenspraktische Bedeutung, weil die Mathematik einem gefährlichen Panmathematismus Vorschub leistet, der alles in Netze von Beziehungen zwischen berechenbaren Faktoren aufzulösen trachtet, in eine allumfassende Digitalisierung. Diese Tendenz tritt in den Dienst eines Bemächtigungsstrebens, mit dem die Menschen ihrer eigenen Schöpferkraft, die auf das Schöpfen aus der binnendiffusen Bedeutsamkeit von Situationen angewiesen ist, im Wege stehen. Deswegen ist es wichtig, der Hybris der Numeralisierung entgegenzutreten. Auf der anderen Seite ist das kühne Abenteuer *Mathematik* eine der großartigsten und erfolgreichsten Unternehmungen der Menschheit, dem auch seine Niederlagen, wohlverstanden, zum Erfolg werden können. Mögen auch problematische Methoden beim Überziehen ihrer Tragweite zu Antinomien führen, so lässt sich doch dieser Schock als Errungenschaft, an den Grenzen des numerischen Mannigfaltigen einem exotischen Objekt anderen Typs zu begegnen, verstehen und der Mathematik aneignen. Dann braucht sich die Mathematik auch nicht mehr, nach einem berühmten Ausspruch von Hilbert, den ich im vorletzten Kapitel zitiere, aus dem Paradies, in das uns Cantor versetzt hat, vertreiben zu lassen. Die Mathematik ist nicht ein Tribunal zur Entscheidung über Wahrheit und Irrtum in letzter Instanz, sondern eine Erkundungsreise auf hoher See mit teilweise gefährlichen Instrumenten, die reiche Erträge bringen und die Kraft haben, Niederlagen in Errungenschaften umzuwandeln.

Ich bin kein Mathematiker. Ich habe mich der Mathematik von der mathematischen Logik her genähert, einer Disziplin, die der Philosophie mit der Mathematik gemeinsam ist. Insofern knüpft dieses Buch an mein 2008 im selben Verlag erschienenes Buch *Logische Untersuchungen* an. Dieser Zusammenhang ermutigt mich, an dieser Stelle auf einen Fehler in diesem Buch, der durch einen kleinen einschränkenden Zusatz leicht geheilt werden könnte, wenigstens hinzuweisen. Er betrifft die Definition des analytischen Urteils auf S. 99. Mein Leitgedanke ist dort, als analytisch solche Urteile anzusehen, deren Negat einen Widerspruch zur logischen Folge hat, allerdings nur zusammen mit den Prämissen, die logische Folgen des analytischen Urteils sind. Dies ist so einzuschränken, dass nur die asymmetrischen Folgen in Betracht kommen, d. h. diejenigen, deren logische Folge nicht das Urteil selbst ist; sonst würden alle Urteile analytisch. Ein Satz, der diese Einschränkung macht, müsste auf Seite 99 in Zeile 8 eingefügt werden, und demgemäß müsste in Zeile 17 sowie auf Seite 101 in den Zeilen 11 und 15 das Wort »asymmetrischen« eingesetzt werden; in Zeile 12 dieser Seite wäre das Eingeklammerte zu tilgen. Aus anderen Gründen wäre es nützlich, auf Seite 101 am Schluss den Satz anzufügen: »Mit einem Urteil sind alle seine logischen Folgen analytisch bzw. für N.N. analytisch.« Ich hoffe, dass es gelingen wird, in einer zweiten Auflage des Buches diese Änderungen drucken zu lassen.

Die Unterscheidung zwischen Ausdrücken und ihren Benennungen habe ich nicht immer mit pedantischer Akribie gehandhabt, sondern einen Ausdruck auch als Namen für sich oder als Schema für einzusetzende Benennungen (ohne Quine'sche Haken) verwendet, wo keinerlei Missverständnis zu fürchten war.

Herrn Dr. Henning Hintze, der als Mathematiker den Text gegengelesen hat, danke ich für wertvolle Ratschläge, darunter die Anregung zu der folgenden Übersicht als Einleitung, ebenso Frau Marina Bergmann, die schon seit Jahren und auch diesmal meine Buchmanuskripte gewissenhaft und zügig in die Sprache des Computers übertragen hat.

Hermann Schmitz

Übersicht als Einleitung

Dieses Buch schlägt die Brücke von der philosophischen Phänomenologie zu der von mir entwickelten Gestalt der Neuen Phänomenologie[1] über die Logik zur Mathematik und spricht daher verschiedene Interessentengruppen an, darunter Fachleute, deren Interesse nicht in erster Linie der Philosophie gilt. Um ihnen den Zugang zu erleichtern, stelle ich in dieser Übersicht die für Logik und Mathematik einschlägigen Ergebnisse zusammen, indem ich sie kapitelweise knapp erwähne.

Kapitel 1 *Zahl*: Der Zahlbegriff wird erst informativ, wenn er nicht wie bei Frege extensional, sondern intensional definiert wird: Zahl (Anzahl) einer Menge M ist die Eignung einer Menge dazu, umkehrbar eindeutig auf M abgebildet zu werden. Die erforderlichen mengentheoretischen Grundbegriffe werden definiert, darunter die Begriffe des Umfangs, der Menge, der 1 und des Einzelnen. Anschließend werden vier Sätze erwiesen, aus denen sich einerseits ergibt, dass eine von 0 ausgehende Folge minimaler Schritte der Vermehrung jede endliche Menge ausschöpft und dabei das Induktionsgesetz gilt, während sich andererseits zwei Charakteristiken des Einzelnen herausstellen: Einzeln ist, was Element irgend einer endlichen Menge ist; einzeln ist, was die Anzahl einer endlichen Menge um 1 vermehrt.

Kapitel 2 *Einzelheit*: Nur durch Gattungen sind einzelne Gegenstände (als deren Fälle) und Mengen (als deren Umfänge) möglich; weil eine Gattung beides zusammen bestimmt, sind Mengen (allgemeiner: Umfänge) die einzigen Ganzen, deren Inhalt ohne zusätzliche Einteilung bestimmt ist. Gattung ist alles, wovon etwas ein Fall sein kann. Die Begriffe des Falls, und damit der Gattung, werden mit Hilfe des Be-

[1] Zur Orientierung empfehle ich: Hermann Schmitz, Kurze Einführung in die Neue Phänomenologie, 3. Auflage Freiburg i. Br. 2012

griffs der logischen Folge definiert. Auf dem Weg zu diesem Gewinn fallen folgende Ergebnisse an: Fallsein setzt Identität voraus, darüber siehe nächstes Kapitel. Zum Einzelnen wird Identisches als Fall solcher Gattungen, die Attribute, d.h. für seine Identität (diese und keine andere Sache zu sein) von Belang, sind. Solche Attribute kommen im Bereich der objektiven Tatsachen, nicht aber dem Betroffenen im Bereich der für ihn subjektiven Tatsachen seines affektiven Betroffenseins notwendig (bei Strafe eines Widerspruchs) zu. Das gilt aber nicht für alle Bestimmungen einer Sache. Existenz und Existenz-Inductiva sind keine Attribute. Ein Existenz-Inductivum ist eine Bestimmung von etwas, aus der logisch folgt, dass etwas existiert (oder existiert hat, oder existieren wird), z.B. Wahrheit von Existenzsätzen, Vergangenheit, Gegenwart, Zukunft. Auch Existenz ist ein Existenz-Inductivum. Sie hat nichts mit dem sogenannten Existenzquantor zu tun, der nicht Existenz betrifft, sondern (als partikulärer Quantor) eine Mindestzahl (mindestens 1) einer Menge von Objekten einer gewissen Art. Existenz kommt (gegen Frege, Russell usw.) der existierenden Sache zu, aber nicht als Attribut. Zu jeder Sache mit einem Existenz-Inductivum als Bestimmung kann es eine mit ihr identische Sache ohne diese Bestimmung geben, Beispiel: das Vergangene. Von der Existenz ist zu unterscheiden die gleichfalls vorsprachliche Tatsächlichkeit. Es gibt mehrere Tatsächlichkeiten trotz Inhaltsgleichheit der in der Tatsächlichkeit unterschiedenen subjektiven oder objektiven Tatsachen. Mit den Tatsachen sind auch die übrigen (untatsächlichen) Sachverhalte, die Programme und die Probleme von der Sprache unabhängig, nicht aber ihre Vereinzelung. Nach der Definition von Fall und Gattung wird ausgeführt: Die Abneigung der Nominalisten gegen Gattungen sowie deren transzendente Inthronisierung durch sogenannte Platonisten beruhen auf einem falschen Ansatz des Konkreten. Konkret und primär dem Denken vorgegeben sind nicht irgend welche Einzelwesen, sondern Situationen mit binnendiffuser, d.h. nicht in Einzelnes durchgegliederter, Bedeutsamkeit aus Sachverhalten, Programmen und Problemen. Situationen brauchen nicht einzeln zu sein.

Kapitel 3 *Identität*: Der relativen Identität von etwas mit etwas hängt ein sie vereitelnder regressus in infinitum an, wenn ihr nicht eine absolute Identität, selbst und von etwas verschieden zu sein, zu Grunde gelegt wird. Die übliche Bestimmung der relativen Identität als Übereinstimmung in allen Bestimmungen (Leibniz-Prinzip) ist wegen der

Existenz-Inductiva falsch und bei Beschränkung auf Attribute gehaltlos. Vielmehr besteht relative Identität darin, dass eine absolut identische Sache Fall mehrerer Gattungen ist. Die beiden Zusatzaxiome der Prädikatenlogik mit Identität sind falsch: Das Leibniz-Prinzip scheitert an den Existenz-Inductiva; das Axiom, dass jeder Gegenstand mit sich identisch ist, ist falsch, weil es vieles gibt, das mit gar nichts identisch ist, siehe unten Kapitel 6. Zwei in der Logik bekannte Versuche, sprachliche Formen durch Sprechen über Identität zu ersetzen, werden widerlegt: die Elimination der Kennzeichnungen durch Russell und Quine, wobei Kennzeichnungen nur durch verdeckte Kennzeichnungen (Anaphern) abgelöst werden, und die logizistisch-nominalistische Elimination der Mengen und Zahlen, die (wegen der Möglichkeit von Paralleluniversen) vor der 1 versagt.

Kapitel 4 *Zwiespalt*: Mannigfaltiges kann zwiespältig (allgemeiner: spältig, weil es nicht auf Zwieheit = Zweiheit ankommt) sein, wenn im Binnenverhältnis seiner Inhalte, die sämtlich einzeln sind, die (absolute und relative) Identität gestört ist. Dann liegt in diesem Verhältnis weder Identität noch Verschiedenheit vor, sondern eine unauflösliche Konkurrenz um Identität, die wegen der Unauflösbarkeit nicht zum Widerspruch führt. In diesem Verhältnis stehen die Inhalte zum Ganzen und das Ganze zu ihnen, das daher doppelsinnig ist, als übergeordnetes Ganzes und als Konkurrent unter Konkurrenten. Die konkurrierenden Inhalte sind einzeln und Fälle von Gattungen; das ganze spältige Mannigfaltige ist als Ganzes nicht einzeln und ohne Zahl, wohl aber als einzelner Inhalt, konkurrierend um Identität mit den anderen Inhalten. Auch dieser Zwiespalt ist kein Widerspruch. Beispiele des spältigen Mannigfaltigen sind außer Ausnahmefällen (Husserl'sche Puppe, Wasserfallillusion) und dem Kapieren von Witzen alle lernenden Wesen, insbesondere alle menschlichen Personen, darunter alle Logiker und Mathematiker.

Kapitel 5 *Der Hauptsatz*: Der Hauptsatz bezieht sich auf den von Kant formulierten Grundsatz der durchgängigen Bestimmung, dass für jede Bestimmung und jedes Ding (im Sinne von etwas überhaupt) feststeht, ob das Ding die Bestimmung besitzt oder nicht. Es wird bewiesen: Dieser Grundsatz ist falsch und äquivalent mit den beiden anderen Sätzen: (1) Alles ist einzeln und alles Mannigfaltige numerisch, d. h. bestehend aus lauter Einzelnem. (2) Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten gilt allgemein in seiner einfachsten (bisher allein in Augenschein genommenen) Form, die besagt, dass für jeden Satz a mindestens a oder das Negat ¬ a wahr ist. Aus der Widerlegung von (1) folgt, dass nicht alles Mannigfaltige numerisch ist. Aus der Widerlegung von (2) folgt, dass indirekte Beweise nicht allgemein zulässig sind. Überdies folgt aus der Widerlegung des Grundsatzes die Falschheit des allgemeinen Determinismus, der nur als Determinismus bezüglich gewisser Eigenschaften begründbar sein kann. Eine weitere Folge wird angekündigt und im ersten Absatz des nächsten Kapitels angegeben: Der Geltungsbereich des einfachen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten lässt sich nicht sauber abstecken, da alles numerische Mannigfaltige in nicht numerisches unauflöslich verstrickt ist.

Kapitel 6 *Typen der Mannigfaltigkeit*: Außer dem numerischen Mannigfaltigen mit unangefochten einzelnen Inhalten und dem spältigen Mannigfaltigen, bei dem die Einzelheit der Inhalte zwar gegeben, aber durch Störung der Identität im Binnenverhältnis angefochten ist, gibt es chaotisches Mannigfaltiges, in dem die Einzelheit ganz oder teilweise fehlt; im ersten Fall ist das Mannigfaltige absolut chaotisch, im zweiten relativ chaotisch. Absolut und relativ chaotisches Mannigfaltiges gibt es auf zwei Weisen: als konfuses und als diffuses. Den Inhalten des konfusen Mannigfaltigen fehlt (sämtlich oder teilweise) sogar die absolute Identität. Den Inhalten des diffusen Mannigfaltigen fehlt (sämtlich oder teilweise) außer der Einzelheit nur die relative Identität. Konfuses Mannigfaltiges gibt es beim Aufleuchten von Gedanken, im Andeutungsreichtum von Gedichten, in den verschiedenen Gestalten des Kontinuums, in der Persönlichkeit eines Menschen. Diffus chaotisch mannigfaltig sind alle routinierten motorischen Verrichtungen, die trotz flüssigen Ablaufs vor Verwechslungen (wie z. B. bei Apraxie) geschützt sind, wie Gehen, Sprechen, Schwimmen, Tanzen, und die Kompetenzen dafür. Im chaotischen Mannigfaltigen ist universelle Quantifikation nur summarisch (für alle Inhalte zusammen), nicht streuend (für jeden Inhalt einzeln) sinnvoll, partikuläre Quantifikation nie. Freges Verwechslung des partikulären Quantors mit der Existenzangabe ist die Usurpation, das chaotische Mannigfaltige sowie das spältige (als Ganzes) mit einem Federstrich ins Nichtsein zu befördern. Die beiden Quantoren haben verschiedene Variationsbereiche. Der universelle Quantor betrifft alles, der partikuläre (als Angabe einer Mindeszahl) nur Einzelnes und numerisches Mannigfaltiges. Daher sind die üblichen Formeln für den gegenseitigen Ersatz beider Quantoren teilweise falsch, sämtlich falsch als Angaben ihrer Äquivalenz und Ersetzbarkeit durch einander beim Aufbau von Logiksystemen. Das wird im Einzelnen ausgeführt; die Folgen für die Analysis werden an einem Beispiel beleuchtet.

Kapitel 7 *Ganze und ihre Inhalte*: Ganze sind Produkte der Vereinigung von Zusammenhang und Abgrenzung. Für die Logik und Mathematik sind drei Typen von Wichtigkeit: Situationen, Mengen und Komplexe. Grundlegend für alles menschliche Tun, Leiden und Denken sind die Situationen (mit ihren Subtypen). Sie sind Mannigfaltiges, das zusammengehalten und abgegrenzt wird durch eine binnendiffuse Bedeutsamkeit aus Bedeutungen, die Sachverhalte, Programme oder Probleme sind. Binnendiffus ist die Bedeutsamkeit, weil nicht alles in ihr (sehr oft nichts) einzeln ist. Situationen können, aber müssen nicht einzeln sein. Das Leben der Tiere und Säuglinge und bei Personen der Unterbau ihrer Lebensführung ist in Situationen befangen. Menschliche Personen erheben sich aus dieser Befangenheit durch ihre satzförmige (d. h. durch Sätze, das sind Regeln aus Sprachen für die Erzeugung von Sprüchen, geleitete) Rede, die aus der binnendiffusen Bedeutsamkeit der Situationen einzelne Bedeutungen freisetzt und kombiniert. Darunter sind partikulär quantifizierte Sachverhalte (nicht notwendig Tatsachen) der Existenz, die Gattungen nach Kapitel 2. Mit ihrer Hilfe gelingt die Vereinzelung und Vernetzung absolut identischer Inhalte von Situationen als Fälle von Gattungen. Der Umgang mit solchen Fällen wird vielseitig und wendig, sobald sie durch relative Identität Fälle mehrerer Gattungen werden. Mit den Gattungen und Fällen entstehen die Umfänge der Fälle einer Gattung, darunter die Mengen und deren Zahlen (Anzahlen). Die Gattung besorgt dem Ganzen die Abgrenzung (ihren Umfang) und den Zusammenhang ihrer Fälle (als der Fälle dieser Gattung). Die Zahl wird dadurch möglich, dass mit dem Ganzen (der Menge) dessen Inhalte (die Fälle) ohne Rücksicht auf variable Einteilungen feststehen. Der Versuch (von Russell u. a.), Mengen mit der Vereinigung aller sämtlichen Elementen gemeinsamen Gattungen zu identifizieren und dadurch überflüssig zu machen, missglückt. Unter den Mengen, die nicht Ganze sind, ist die leere Menge. Ihre Einführung wird verbessert, mit Auswirkung auf den Aufbau der Mengenlehre und einem kritischen Seitenblick auf den Versuch, die geordneten Paare, die die Bausteine der Relationen sind, in Mengen umzudeuten. Komplexe, der dritte Typ von Ganzen, hängen durch paarende Verbindungen, deren Qualität von Schritt zu Schritt wechseln kann, zusammen und werden durch Nachlassen der Bindekraft abgegrenzt. Ihre Inhalte sind einzeln; daher setzen Komplexe Mengen voraus und nicht umgekehrt Mengen Komplexe. Der Versuch, Mengen durch Komplexe überflüssig zu machen, missglückt in Gestalt der Mereologie.

Kapitel 8 *Verhältnisse und Beziehungen*: In diesem Kapitel wird die Mathematik durch die Option für das Studium von Strukturen (Systemen von Beziehungen) bei Blindheit für Verhältnisse charakterisiert. Beziehungen sind gerichtet (von etwas zu etwas, auch durch Zwischenglieder hindurch), Verhältnisse ungerichtet. Alle Beziehungen entstehen durch Spaltung von Verhältnissen; das zeigt sich an ihrer Umkehrbarkeit, die sie von Abläufen unterscheidet. Der Fluss der Zeit, der auf Grund phänomenologischer Analyse der Modalzeit ohne Metapher definiert wird, ermöglicht die Spaltung von Verhältnissen und ist daher unentbehrlich dafür, vorgegebene Situationen zu überholen, z. B. planend und phantasierend. Es gibt aber auch unspaltbare Verhältnisse, differenziert in absolut und relativ unspaltbare. Beziehungen benötigen, wie in Kapitel 6 gezeigt wird, wegen ihrer Angewiesenheit auf eine Stellenzahl sowie eine Teilnehmerzahl einzelne Beziehungsglieder. Absolut unspaltbare Verhältnisse kommen dagegen ohne Vereinzelung der Glieder aus. Das erklärt die Möglichkeit von Ordnung im chaotischen Mannigfaltigen ohne Vereinzelung in Einzelwesen: in der Sprache, wie sie der kompetente Sprecher beim flüssigen Sprechen gebraucht, im Kontinuum, im Leben der Tiere und Säuglinge sowie bei unwillkürlicher motorischer Routine im Leben erwachsener Personen. Das Übersehen der Verhältnisse in Logik und Mathematik passt daher zur Option für das Einzelne und das numerische Mannigfaltige. Die Mathematik ist der Versuch, die Domäne des numerischen Mannigfaltigen, und damit der Beziehungen, so weit wie möglich auszudehnen. Sie ignoriert die Genealogie des numerischen Mannigfaltigen (absolut unspaltbare Verhältnisse, chaotisches und spältiges Mannigfaltiges, Explikation von Situationen, Fluss der Zeit), ignoriert durch Fehldeutung des partikulären Quantors als Existenzoperator den Einbruch des Nichtseienden in die modalzeitliche Welt und stützt ihre Methode indirekter Beweise über den einfachen Satz vom ausgeschlossenen Dritten auf den falschen Grundsatz der durchgängigen Bestimmung, der mit der Deutung alles Mannigfaltigen als numerisch gleichwertig ist. Wie der konsequente, höchst scharfsinnige und geduldige Mut dieses Übermuts belohnt wird, so dass sein Scheitern in Erfolg gewendet werden kann, soll im Folgenden an den Antinomien gezeigt werden.

Kapitel 9 *Die Antinomien*: Zur Auseinandersetzung mit den in Logik und Mathematik diskutierten Antinomien über die Defensive hinaus, die heute in den Rückzugspositionen der axiomatischen Mengenlehren, der Typentheorien und der Scheidung von Objekt- und Metasprachen das Wort führt, ist eine Relativierung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten erforderlich. Er ist bisher nur in der einfachen Fassung $a \vee \neg a$ (für beliebige Sätze a) bekannt und im Allgemeinen falsch, weil mit dem falschen Grundsatz der durchgängigen Bestimmung äquivalent; wenn auch in beschränktem Ausmaß richtig. Dieser Satz kann einmal oder (in aufsteigender Folge) mehrmals um je eine neue Möglichkeit erweitert werden und vergrößert damit seinen Geltungsbereich. Zu diesem Zweck führe ich die Sonderzeichen »!« und »$\not!$« ein. Das Ausrufungszeichen (lies: »entschieden, dass«) besagt, dass für den nachgestellten Satz der einfache Satz vom ausgeschlossenen Dritten gilt. Das schräg durchstrichene Ausrufungszeichen (lies: »unentschieden, ob«) ist das Negat von »!«. Die erste Erweiterung führt von »$a \vee \neg a$« zu »$!\, a \vee \neg\, !\, a$«, wobei »$\neg\, !\, a$« die beiden Möglichkeiten »$!\, \neg a$« und »$\not!\, a$« offen lässt. Ich teile die Antinomien nicht, wie das bloße Entlastungsbedürfnis die Mathematiker treibt, in mengentheoretische und semantische ein, sondern in oberflächliche und radikale. Oberflächlich sind Antinomien (mit einer Ausnahme: der Antinomie des Lügners), die sich nur dadurch ergeben, dass von zwei zu einander kontradiktorischen Sätzen jeder den anderen impliziert, ohne dass für den einen oder den anderen, isoliert betrachtet, irgend ein Grund angeführt werden kann. Ich nenne vier oberflächliche Antinomien: von Russell, von Grelling, von Tarski und von Carnap. Sie lassen sich ganz einfach lösen, wenn man die Falschheit des Grundsatzes der durchgängigen Bestimmung und des äquivalenten einfachen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten einsieht und zu dessen erster Erweiterung übergeht. Die radikalen Antinomien (außer der Antinomie des Lügners) enthalten dagegen für jeden der zwei zu einander kontradiktorischen Sätze einen Beweis, der die Wahrheit des Satzes und damit die Geltung des einfachen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für ihn bezeugt. Ich meine die Antinomien von Mirimanow, Cantor, Burali-Forti und die verbleibenden semantischen Antinomien, unter denen die Antinomie von Hilbert und Ackermann (»die kleinste natürliche Zahl, die im 21. Jahrhundert nicht benannt wird«) dadurch hervorragt, dass eine notwendige mathematische Wahrheit von einer zufälligen empirischen aufgehoben wird, wodurch der Versuch von Tarski, die Schuld an den semantischen Antinomien einer Vermischung von Objekt- und Metasprache zur Last zu legen, unergiebig wird. (Das zeigt sich auch beim Vergleich der Antinomie von Hilbert und Ackermann mit der ihr in der Formulierung ähnlichen Pseudo-Antinomie von Finsler.) Die radikalen Antinomien können nicht durch die Behauptung einfacher Unentschiedenheit erledigt werden. Das gilt auch für die von mir ausführlich diskutierte und in neuer Fassung dargebotene Antinomie des Lügners, die daher, obwohl sie formal wie die oberflächlichen Antinomien gebaut ist, zu den radikalen gerechnet werden muss. Zur richtigen Bestimmung der durch die radikalen Antinomien geschaffenen Sachlage bedarf es einer Iteration der Unentschiedenheit, die durch Indizierung des Sonderzeichens »$\not{!}$« mit einer natürlichen Zahl oder (bei unendlichfacher Unentschiedenheit) mit der kleinsten transfiniten Ordnungszahl angezeigt wird. Die von der einfachen Erweiterung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten zugelassene Unentschiedenheit erhält den Index 1.

Kapitel 10 *Die Logik der iterierten Unentschiedenheit*: Der sprachliche Ausdruck für iterierte Unentschiedenheit ist einfach: Man kann sagen, dass unentschieden ist, ob unentschieden ist, ob unentschieden ist, ob unentschieden ist, ob p (für irgend einen Satz p) usw., je nach der Stufe der Iteration. Bei der Suche nach Beispielen habe ich aber nur zwei, von denen eines fiktiv ist, für zweifache Unentschiedenheit gefunden. Das ist wenig, zeigt aber mindestens die prinzipielle Anwendbarkeit der Iteration. Auf jeder Stufe bleibt ein Satz vom ausgeschlossenen Dritten gültig, aber in einer gegenüber der vorangehenden Stufe durch eine zusätzliche Möglichkeit erweiterten Form, die die Allgemeingültigkeit des auf der vorigen Stufe gültigen Vorgängers aufhebt, indem sie diesen auf Spezialfälle beschränkt. Daher ist die Negation des auf einer Stufe n gültigen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten gleichwertig oder auch identisch mit der Geltung seines Vorgängers auf der Stufe n-1. Das gilt ebenso für die erste, einfache Erweiterung wie für die höheren Stufen. Mit diesem Konstruktionsprinzip stelle ich zur Erweiterung der Aussagenlogik ein formales System der iterierten Unentschiedenheit auf, in dem ich einige Lehrsätze beweise, übrigens in einer

Metasprache, deren ich mich zu dem beweistechnischen Zweck bediene, für einen Induktionsbeweis von oben herab (von m–n auf m–(n+1) schließend) den Index um 1 zu erhöhen. Das System wird als widerspruchsfrei erwiesen und führt zu dem Ergebnis, dass mit der Festlegung auf irgend eine Stufe der Iteration jede im Bereich der natürlichen Zahlen höhere oder niedere Stufe ausgeschlossen ist, einschließlich der Grundstufe, wo der einfache Satz vom ausgeschlossenen Dritten gilt. Damit ist klar, dass die endlichfache Iteration der Unentschiedenheit für erfolgreiche Auseinandersetzung mit den radikalen Antinomien unbrauchbar ist. Sofern jeder der zu einander kontradiktorischen Sätze für sich einzeln beweisbar ist, schützt ihn der Beweis vor Entwertung seines Wahrheitsanspruchs durch bloße (einfache oder endlichfach interierte) Unentschiedenheit, ob er wahr ist; ebenso wenig aber können beide Sätze wahr sein. Im Fall der Antinomie des Lügners, dessen Behauptung mit einem Ausrufungszeichen am Anfang versehen wird, spielt ihr die Entscheidung für endlichfache Unentschiedenheit in die Hände. Die einzige Klärung des Problems ist die Entscheidung für unendlichfache Unentschiedenheit mit der kleinsten transfiniten Ordnungszahl als Index. Dadurch bleibt, weil sich vom Unendlichen nicht Schritt für Schritt durch Subtraktion ins Endliche übergehen lässt, bezüglich der Wahrheit der zu einander kontradiktorischen Sätze alles offen, in einer Schwebe, die nicht das Eingeständnis einer Unkenntnis ist, sondern die Tatsache eines spältigen (hier zwiespältigen) Mannigfaltigen im Gebiet der Wahrheitswerte. Die unendlichfache Unentschiedenheit ist eine zugleich unendlich große und unendlich schwache Unentschiedenheit; weil mit jedem Aufstieg auf der Leiter der Iteration die Unentschiedenheit abnimmt. Wenn z. B. unentschieden ist, ob unentschieden ist, ob p, dann ist nicht mehr die volle Unentschiedenheit, ob p, vorhanden, sondern nur noch eine durch deren Fragwürdigkeit (Unentschiedenheit) angenagte. Abschließend vergleich ich meine Logik der iterierten Unentschiedenheit mit der dreiwertigen Logik von Lukasiewicz. Nie würde ich zugeben, dass ein Widerspruch der Form $a \wedge \neg a$ anders als falsch, auch nur halbwahr, sein kann. Ich bestreite nicht, sondern erweitere stufenweise den Satz vom ausgeschlossenen Dritten und komme mit den zwei üblichen Wahrheitswerten aus, weswegen ich auch nicht genötigt bin, der Negation und in ihrem Gefolge den übrigen Wahrheitsfunktionen andere Werttafeln zuzuteilen; allerdings muss ich den Sinn der Negation für iterierte Unentschiedenheit neu festlegen.

Kapitel 11 *Befreundung mit den Antinomien*: Die radikalen Antinomien erweisen sich im Licht der unendlichfachen Unentschiedenheit nicht als Widersprüche, sondern als Zwiespälte. Der Zwiespalt besteht, in der Ausdrucksweise von Kapitel 8, darin, dass kontradiktorisch entgegengesetzte Sachverhalte so in absolut unspaltbarem Verhältnis vereinigt sind, dass zwischen ihnen keine Beziehung, auch nicht die des Widerspruchs, zu Stande kommt. Auf Widersprüche ($a \wedge \neg a$) trifft im Geltungsbereich des einfachen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten das Prinzip der selektiven Rehabilitation zu: Einer und nur einer der beiden zu einander kontradiktorischen Sätze ist wahr. Bei unendlichfacher Unentschiedenheit hängt ebenso wie im spältigen Mannigfaltigen das Unvereinbare unauflöslich zusammen. Die kontradiktorischen Gegenteile kommen nicht mehr so weit auseinander, dass eines von ihnen seinen Wahrheitsanspruch gegen das andere durchsetzen könnte. Man kann sich das klar machen, indem man die in Kapitel 3 behandelten Beispiele für spältiges Mannigfaltiges – u. a. die Erscheinung der Husserl'schen Puppe, der Mensch in Konkurrenz mit den verschiedenen Menschen seiner Lebensphasen – mit der Antinomie von Hilbert und Ackermann vergleicht: Mathematisch ist es richtig, dass unter allen natürlichen Zahlen, die im 21. Jahrhundert nicht benannt werden, eine die kleinste ist, aber wenn jemand im 21. Jahrhundert diese Wahrheit ausspricht, ist es damit vorbei, doch nicht so, dass die natürlichen Zahlen plötzlich ihre Wohlordnung verloren hätten; beide kontradiktorisch entgegengesetzten Sätze sind fortan auf ewig unentscheidbar in einander verstrickt. Die radikalen Antinomien sind der Einbruch des spältigen Mannigfaltigen in das numerische, das die Mathematik als ihre Domäne über alles erstrecken will, so dass sie nur noch unbegreifliche Widersprüche registriert, wenn sich dieser Anspruch als unhaltbar erweist. Von dieser Verkrampfung sollte sie sich lösen und die radikalen Antinomien, statt als Steine des Anstoßes, als exotische Geschenke begreifen, als Besucher aus einem anderen Reich der Mannigfaltigkeit. Dann kann sie sich mit den Antinomien befreunden und in das »Paradies, das Cantor uns geschaffen hat« (Hilbert) ungescheut zurückkehren, ohne die großen Errungenschaften der axiomatischen Mengenlehre preiszugeben. Dabei kann sie vielleicht die Quantenphysik mitnehmen, die in der Superposition unvereinbarer Eigenschaften ihrer Quantenobjekte ebenso mit unerkanntem spältigem Mannigfaltigen zu tun hat wie die Mathematik in den radikalen Antinomien. Die

Schrödinger'sche Katze, in unauflöslicher Schwebe zwischen Leben und Tod, ist eine Husserl'sche Puppe.

Kapitel 12: *Der pythagoreische Gedanke*: Der pythagoreische Gedanke meint eigentlich, dass alles Mannigfaltige numerisch sei (aus Einzelnem bestehe). Da aber die Alten nicht scharf zwischen der Zahl und dem Gezählten unterschieden, hat man ihn auf den Slogan gebracht: »Alles ist Zahl.« Den Christen galt alles als von Gott nach Maß, Zahl und Gewicht geordnet, und zur Hypertrophie führte Leibniz den pythagoreischen Gedanken mit der Vision, das Denken einschließlich des religiösen Glaubens auf Rechnen zu reduzieren, nachdem jedem Ding eine charakteristische Zahl zugeordnet wäre. Dieses Ideal, dem Frege seine Begriffsschrift als Schritt auf dem Wege zu ihm zudachte, verbindet sich mit der von mir so genannten dynamistischen Verfehlung des abendländischen Geistes – der Bindung des affektiven Betroffenseins an die Macht als Thema – zur Auffassung der Welt als Netz von Beziehungen zwischen Einzelwesen, das dazu da ist, nach Belieben umgeknüpft zu werden. Dieses Netz, ausgeformt zu einem Schienensystem von Angeboten an Normalverbraucher, verdeckt die Situationen mit binnendiffuser Bedeutsamkeit und lähmt die menschliche Schöpferkraft, aus der in Situationen geborgenen Fülle ungeformter Möglichkeiten zu schöpfen. Im Dienst dieser Bewegung steht die Mathematik, indem sie aus dem mit dem falschen Grundsatz der durchgängigen Bestimmung äquivalenten pythagoreischen Gedanken die Legitimation bezieht, mit ihren indirekten Beweisen den gleichfalls mit jenem Grundsatz äquivalenten einfachen Satz vom ausgeschlossenen Dritten zu Grunde zu legen und mit Hilfe der Fehldeutung der partikulären Quantifikation als Existenzbehauptung die beiden aristotelischen Quantoren in unzulässiger Breite durch einander zu ersetzen. Gegen diese Überdehnung ihrer Domäne sind in ihr zwei Wellen von Bedenken aufgekommen: erstens der Protest gegen imprädikative Begriffsbildung, der als Verdacht eines fehlerhaften Zirkels im Allgemeinen irrt, aber gegen das Auswahlaxiom als eine ungedeckte (wenn auch nicht logisch fehlerhafte) Usurpation ins Gewicht fällt; zweitens die intuitionistische Bewegung, mit der ich in der Ablehnung der Allgemeingültigkeit des einfachen Satzes vom ausgeschlossenen Dritten und des darauf gestützten ungehemmten Vertrauens in indirekte Beweise übereinstimme, obwohl ich mir die Begründungen des intuitionistischen Protestes, soweit ich sie zu erkennen vermag, nicht zu eigen machen kann. Diese Begründungen sind: 1. die Reduktion der Mathematik auf das Konstruierbare, die ich mir nur aus der irrigen Annahme eines ontologischen Vorrangs der Komplexe vor den Mengen erklären kann, 2. der Singularismus Hermann Weyls, 3. die Ablehnung des aktual Unendlichen, der ich mit einem eigenen Argument gegen die Hoffnung, mit dem sogenannten potentiell Unendlichen allein auszukommen, entgegentrete. Mir gilt die Mathematik als der mit höchstem Mut, Eifer und Scharfsinn unternommene Versuch einer Entdeckungsreise mit dem imperialistischen Verlangen, den Herrschaftsbereich des numerischen Mannigfaltigkeitstypus überall bis in die feinsten Verästelungen auszubreiten; dabei hat sie, neben großen Erfolgen auf vielen Gebieten, das Glück, auf spältiges Mannigfaltiges in Gestalt der Antinomien zu stoßen, die sie als Aussichten in ein fremdes Gebiet begrüßen sollte. Am Schluss erörtere ich die Frage: Warum passt die rein gedanklich konzipierte Mathematik so gut auf das Wirkliche? Meine Antwort: Sie führt in die Richtung, in die die Menschen ohnehin blicken, da ihre Bewährung im Lebenskampf darauf beruht, Situationen in Konstellationen zu übersetzen, anderes Mannigfaltiges in numerisches. Dieses andere Mannigfaltige, worauf die Mathematik nicht passen würde, verlieren die Menschen dann leicht aus dem Blick.

Anhang: An Freges Zahldefinition anknüpfend, führe ich für die Bildung elementefremder Klassen durch Äquivalenzrelationen einen kurzen Beweis, der mit dem Vorurteil aufräumt, man müsse für diese Relationen außer Symmetrie und Transitivität noch Reflexivität fordern.