Derivate und Interne Modelle

Modernes Risikomanagement

Bearbeitet von
Hans-Peter Deutsch, Mark Beinker

5., überarbeitete und erweiterte Auflage 2014. Buch. XIX, 696 S. Gebunden
ISBN 978 3 7910 3312 9
Format (B x L): 17 x 24 cm

978-3-7910-3312-9 Deutsch/Beinker, Derivate und Interne Modelle

SCHÄFFER
POESCHEL

1 Einleitung

Die explosionsartige Entwicklung derivativer Instrumente stellt immer wieder neue Möglichkeiten zur Verfügung, das Management von Finanzen und Risiken vollkommen flexibel und „maßgeschneidert" für den jeweiligen Investor, das jeweilige Unternehmen und die jeweilige Situation zu gestalten. Dies gilt besonders für Banken und Finanzdienstleister, deren Kerngeschäft Finanzprodukte sind, aber in zunehmendem Maße auch für andere Branchen. Ein aktives Finanz- und Risikomanagement im Corporate Treasury kann wesentlich zu Ertrag und Stabilität eines Unternehmens beitragen. Z. B. können mit Hilfe von Termingeschäften heute schon die Konditionen (Preise, Zinssätze, etc.) für in der Zukunft liegende Geschäfte fixiert werden, falls gewünscht mit der Option, das Geschäft dann letztendlich doch nicht zustande kommen zu lassen. Solche Geschäfte haben offensichtlich sehr viele attraktive Anwendungsmöglichkeiten wie z. B. die Möglichkeit, in einem Jahr einen langfristigen Festzinskredit mit heute schon fixiertem Zins einzugehen, oder eben auch nicht, falls der heute vermutete zukünftige Geldbedarf nicht eintritt (Anwendung einer so genannten „Payer-Swaption") oder das Absichern zukünftiger Fremdwährungseingänge gegen Devisenkursschwankungen, indem heute schon ein zukünftiger „Mindestwechelskurs" zur Umwandlung der Fremdwährung in Euro vereinbart wird (Anwendung von Devisenoptionen).

Allerdings haben die Komplexität der heutigen Finanzinstrumente und Märkte, aber auch der immer schneller werdende technologische Fortschritt, die mit Handel und Treasury behafteten Risiken in kaum beherrschbarer Weise ansteigen lassen und gleichzeitig die zur Entscheidungsfindung zur Verfügung stehenden Zeiten drastisch verkürzt. So kann der falsche Einsatz von Finanzinstrumenten Schäden anrichten, die in sehr kurzer Zeit den Erfolg jahrelanger Arbeit im jeweiligen Kerngeschäft (z. B. Produktion und Vertrieb von Autos oder Computer-Chips) zunichte machen können.

So häuften sich in den letzten Jahren Meldungen über hohe durch derivative Geschäfte entstandene Verluste, die teilweise bis hin zum Konkurs führten, und zwar nicht nur bei Banken, sondern bei Unternehmen aus den unterschiedlichsten Branchen. Spektakuläre Beispiele hierfür sind Metallgesellschaft (Öltermingeschäfte), Procter & Gamble (Spekulation mit exotischen, so genannten Power-Optionen), Orange County (Zinsderivate, hoher fremdfinanzierter Fondsanteil), Barings (sehr große offene Index-Future Positionen), Daiwa Bank (kurzfristige US-Anleihen), NatWest Markets (Fehlbewertung von Optionen aufgrund falscher Volatilitätsannahmen), der Hedge Fond LTCM, die Subprime-Krise in den USA 2007/2008 (strukturierte Verbriefungen von Hypothekenkrediten), Société Générale (Fehlspekulation eines Aktienhändlers), etc., etc.

Aber nicht nur die Finanzinstrumente, auch die Märkte selbst sind riskanter („volatiler") geworden. Seit Anfang der achtziger Jahre haben sich die wirtschaftlichen Rahmenbedingungen in der Finanzwelt grundlegend geändert. Im heutigen Anlageumfeld verändern sich die Renditen, Währungs-, Rohstoff- und Aktienkurse nahezu täglich in einem Ausmaß, das vor Jahren noch als undenkbar erschien. Erhöhte Marktschwankungen („Volatilitäten") sind die Antwort der Finanzmärkte auf Entwicklungstrends wie Akkumulation größerer Summen, Globalisierung der Finanzmärkte, zunehmende Haushaltsdefizite der führenden Industrienationen und Abbau von staatlichen Reglementierungen, um nur einige der wichtigsten zu nennen.

Die zentrale Voraussetzung für den anhaltenden Geschäftserfolg einer Bank oder einer Treasury-Abteilung in diesem Umfeld aus volatilen Märkten und hochkomplexen (und deshalb oft auch hochempfindlichen) Finanzinstrumenten ist ein solides Verständnis der gehandelten Produkte und ein effizientes Management der mit den Geschäften verbundenen Risiken. Derivate sind hierbei gleichzeitig der Hauptgrund und das effektivste Mittel für das Risikomanagement, und stehen somit am Anfang und am Ende des Risikomanagements.

Die *Bewertung* von Derivaten und strukturierten Finanzinstrumenten ist die Grundbedingung, die Conditio sine qua non, für jedes Risikomanagement. Hierzu lassen sich alle Derivate mit einer Systematik aus Kassa-, Termin- und Optionsgeschäften kategorisieren, in die sich jedes noch so komplizierte Instrument nach Zerlegung in seine Bestandteile, dem so genannten *Stripping* einordnen lässt. Sowohl dieses Stripping als auch das Verständnis und die Bewertung der Grundinstrumente stellen sehr hohe Ansprüche an die beteiligten Mitarbeiter, die in dieser Form und Zusammenstellung früher in der Finanzwelt nicht oder nur ansatzweise notwendig waren. Hiervon seien beispielhaft erwähnt:

- Theoretische Ansprüche: Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Zeitreihenanalyse, etc. zum Verständnis von Konzepten wie „Value at Risk" und zur Einschätzung von Risikofaktoren und deren Korrelationen; Differentialgleichungen, Martingal-Theorie, Numerik, Finanzmathematik, etc. zur Bewertung von Finanzinstrumenten.
- Händlerische Ansprüche: Verständnis der Funktionsweise immer komplizierter werdender Papiere und Geschäfte (z. B. durch Stripping); und „Phantasie" in der Auswahl und Abbildung von Derivaten zum Erreichen einer bestimmten Strategie unter Berücksichtigung der oft überraschenden „Nebenwirkungen", Entwicklung von oft aufwendigen Hedge-Strategien; Bedienen hochkomplexer EDV-Systeme.
- DV-organisatorische Ansprüche: Client-Server-Computing, Verteilte Systeme, Objektorientierte Programmierung, neue Betriebssysteme, Netzwerktechnik, Real Time-Informationsverteilung, Internet- und Intranet-Architekturen und in zunehmendem Maße Unterstützung für parallele Algorithmen auf Computer-Grids, Mehrkernprozessoren oder Grafikprozessoren (GPUs).

Insbesondere die theoretischen und händlerischen Ansprüche ziehen sich durch alle Hierarchien. Denn der Händler/Treasurer muss das Risiko seines Portfolios genauso gut verstehen wie der Bereichsleiter oder der Vorstand, der aufgrund dieser Information das Unternehmen steuert. Ziel des vorliegenden Buches ist es deshalb, die Methoden und Verfahren zur Bewertung von Finanzinstrumenten und zur Identifikation, Quantifizierung, Überwachung und Steuerung von Risiko im Detail darzustellen. Dies ist nach Kenntnis des Autors das erste Buch in deutscher Sprache, das einen umfassenden Überblick über moderne Bewertungs- *und* Risikomanagementkonzepte gibt, in einer Tiefe, die bisher nur von Veröffentlichungen aus dem angloamerikanischen Raum bekannt war. Der Aufbau des Buches ist wie folgt:

Im Teil I werden die grundsätzlichen Marktparameter eingeführt, die die Ursachen für Preise und Risiken von Finanzinstrumenten sind. Hierbei handelt es sich im Wesentlichen um Kurse von Aktien, Rohstoffen, Devisen, etc. und natürlich um die Zinsen. Für diese Grundrisiken, oft auch *Risikofaktoren* genannt, wird ein stochastisches Modell vorgestellt, wodurch sowohl die zufälligen als auch die deterministischen Aspekte der Risikofaktoren beschrieben werden können, der so genannte *Random-Walk*, bzw. seine Verallgemeinerung, der *Ito-Prozess*. Dadurch kommt ein weiterer Parameter ins Spiel, der, ähnlich wie die vorher erwähnten Risikofaktoren, Ursache für Preise und Risiken von Finanzinstrumenten ist, nämlich die *Volatilität*.

Schließlich werden im Teil I die gängigsten Instrumente kurz vorgestellt, mit denen die Risikofaktoren gehandelt werden können. *Handeln* kann so definiert werden, dass mittels eines Finanzinstruments Risiken bzgl. bestimmter Risikofaktoren übernommen, und dafür eine gewisse Rendite aus dem Instrument und/oder direkt ein gewisser Geldbetrag vom Kontrahenten des Geschäftes eingenommen werden. Umgekehrt kann man durch Handeln natürlich auch Risiken an Kontrahenten abgeben, wofür die Kontrahenten dann Rendite und/oder einen Geldbetrag erhalten. Im Teil I wird nur die *Funktionsweise* der wichtigsten Finanzinstrumente vorgestellt, ohne auf die oft komplizierte Bewertung einzugehen.

Nachdem die Grundrisiken und die Finanzinstrumente zum Handeln dieser Grundrisiken vorgestellt wurden, sind die „Bausteine“ definiert, und es kann mit dem eigentlichen Thema dieses Buches, der Erfassung des Wertes und des Risikos dieser Bausteine, begonnen werden. Bei Bewertung und Risikomanagement der verschiedenen Instrumente werden immer wieder die gleichen Methoden verwendet. Um dies zu verdeutlichen, werden im Teil II die wichtigsten Methoden zur Bewertung und zum Hedgen in allgemeiner Weise vorgestellt. Dieser Teil ist naturgemäß teilweise recht theoretisch bzw. technisch. Die Anwendungen der Konzepte aus dem Teil II auf konkrete, einfache Finanzinstrumente befinden sich dann im Teil III. Diese Trennung von allgemeinen Methoden und konkreten Finanzinstrumenten trägt sehr zu einem klaren Verständnis der recht komplexen Materie bei. Die konkrete Bewertung der gebräuchlichsten Finanzinstrumente geschieht im Teil III, die Erfassung der mit den Instrumenten verbundenen Risiken wird im Teil IV vorgestellt. Der folgende Teil V führt die Methoden des klassischen Portfoliomanagements ein. Die Möglichkeiten zur Bestimmung und Charakterisierung der Risikofaktoren aus aktuellen und historischen Marktdaten werden im Teil VI aufgezeigt.

2 Die grundlegenden Risikofaktoren der Finanzmärkte

Die Grundrisiken der Finanzmärkte sind die Parameter im Markt, die die Preise der gehandelten Finanzinstrumente bestimmen. Das sind Devisen-, Rohstoff- und Aktienkurse und natürlich die Zinsen. Durch die Schwankungen dieser Grundrisiken werden Wertschwankungen der Finanzinstrumente induziert. Sie sind also die Ursache des Marktrisikos von Finanzinstrumenten und werden deshalb *Risikofaktoren* genannt. Die Risikofaktoren eines Finanzinstrumentes sind also die Marktparameter (Zinsen, Devisen-, Rohstoff-, Aktienkurse), deren Änderung eine Wertänderung des Finanzinstruments bewirkt. Das sind bei einem gegebenen Finanzinstrument bei weitem nicht immer alle Marktparameter. Der Wert einer fünfjährigen festverzinslichen Anleihe in Schweizer Franken wird z. B. nicht durch den aktuellen Goldkurs bestimmt. Ein erster Schritt im Risikomanagement ist also zunächst, die für ein gegebenes Finanzinstrument relevanten Risikofaktoren zu identifizieren.

2.1 Zinsen

An den Märkten gibt es viele unterschiedliche *Usancen* und *Konventionen* zur Berechnung von Zinsen. Zum Beispiel wird am amerikanischen Geldmarkt (T-Bills, T-Bill-Futures) mit der *linearen Verzinsung* gerechnet, am Devisenmarkt und am europäischen Geldmarkt mit der *einfachen Verzinsung*, am Kapitalmarkt mit der *diskreten* oder *annualisierten Verzinsung* und zur Bewertung von Optionen meist mit der *stetigen* oder *kontinuierlichen Verzinsung*. Konventionen sind zwar für das prinzipielle Verständnis von Finanzinstrumenten und Risikomanagement unerheblich, haben aber eine zentrale Bedeutung bei der *Implementierung* jedes Handels- oder Risikomanagementsystems. Bevor wir Zinsen allgemein ab Abschnitt 2.1.5 besprechen, stellen wir deshalb zunächst die wichtigsten Konventionen vor.

2.1.1 Day Count Conventions

Noch bevor eine der vielen Methoden zur Verzinsung eines Betrages über eine Periode von einem Zeitpunkt (Datum) t bis zu einem späteren Zeitpunkt T angewendet werden kann, muss zunächst die Zeit zwischen t und T (Anzahl der Zinstage) bestimmt werden. Es muss genau spezifiziert sein, wann dieser Zeitraum beginnt, wann er endet und wie lange er andauert (gemessen in Jahren).

Auch hierfür gibt es an den verschiedenen Märkten verschiedene Usancen, so genannte *Day Count Conventions* (kurz *DCC*), *Tageszählmthode* oder *Tageberechnungskonventionen*. Eine Größe der Form $T - t$ ist also grundsätzlich abhängig von der gewählten Tageszählmethode. Dort, wo das explizit hervorgehoben werden soll, wird in diesem Buch auch der Ausdruck $\tau(t, T)$ für die Differenz in Jahren zwischen zwei Tagen t und T, berechnet mit einer gegebenen Methode, verwendet. Diese Tageszählmethoden werden oft als formale Quotienten angegeben, wobei vor dem Schrägstrich die Zählweise für die Anzahl der Tage innerhalb

Tabelle 2.1: Die gebräuchlichsten Tageszählmethoden

Übliche Bezeichnung	**Alternative Bezeichnungen**
Act/365f	Act/365(f), Act/365(fixed), Act/365fixed
Act/360	
30/360	BondBasis, Bond, 30
30E/360	EuroBondBasis, EuroBond, 30E
Act/Act	Act/Act ISDA, Act, Act/365(l), Act/365leap
ICMA	Act/Act, Act/Act ICMA, Act/Act ISMA
BD/252	Brasilianisch

eines *Monats* spezifiziert ist, und hinter dem Schrägstrich die Zählweise für die Anzahl der Tage innerhalb eines *Jahres*. In Tabelle 2.1 sind die gebräuchlichsten Konventionen aufgelistet. Diese Konventionen rechnen folgendermaßen:

- Bei *Actual/365f* werden die tatsächlichen Kalendertage zwischen t und T gezählt und dann durch 365 geteilt, um den Zinszeitraum in Jahren zu erhalten. Es wird immer durch genau 365 geteilt, unabhängig davon, ob es sich um ein Schaltjahr handelt oder nicht. Dies ergibt bei Schaltjahren einen Unterschied zu Act/Act.
- Bei *Actual/360* werden die tatsächlichen Kalendertage zwischen t und T gezählt und dann durch 360 geteilt, um den Zinszeitraum in Jahren zu erhalten.
- Bei *30/360* wird so gezählt, als hätte jeder Monat genau 30 und jedes Jahr genau 360 Tage. Zusätzlich gilt Folgendes:
  - Falls der *Beginn* der Zinsperiode auf den 31. eines Monats fällt, wird für die Berechnung der Beginn vom 31. auf den 30. desselben Monats vorverlegt.
  - Falls das *Ende* der Zinsperiode auf den 31. eines Monats fällt, wird für die Berechnung das Ende auf den 01. des nächsten Monats verschoben, außer wenn der *Beginn* der Zinsperiode der 30. oder 31. eines Monats ist: Dann wird das Ende vom 31. auf den 30. desselben Monats vorverlegt.
- Bei *30E/360* wird so gezählt, als hätte jeder Monat genau 30 und jedes Jahr genau 360 Tage. Zusätzlich gilt folgendes:
  - Falls der *Beginn* der Zinsperiode auf den 31. eines Monats fällt, wird für die Berechnung der Beginn vom 31. auf den 30. desselben Monats vorverlegt.
  - Falls das *Ende* der Zinsperiode auf den 31. eines Monats fällt, wird für die Berechnung immer das Ende vom 31. auf den 30. desselben Monats vorverlegt (Hier liegt der Unterschied zu 30/360).
- *Act/Act* werden die tatsächlichen Kalendertage durch die *tatsächliche* Anzahl der Tage eines Jahres geteilt. Dieselbe Bezeichnung wird auch häufig für Methoden verwenden, die von der hier verwendeten Definition abweichen, weshalb Vorsicht geboten ist.
- *ICMA* ist eine spezielle, von der International Capital Market Association vorgeschlagene Methode, die vielfach für Bondemissionen verwendet wird. Die Anzahl der Tage entspricht den tatsächlichen Kalendertagen, die durch den Nenner geteilt wird. Für die Bestimmung des Nenners werden die Frequenz m der Zahlungen pro Jahr und das Rolldatum D_R benötigt, auf dessen Basis die Zinsperioden ausgerollt und gemäß Kalenderregel

adjustiert werden. Dann wird die natürliche Länge L (d. h. ohne Verkürzung oder Verlängerung um ein paar Tage) der aktuellen Periode bestimmt und mit m multipliziert, um den Nenner mL zu erhalten. Dadurch ist sichergestellt, dass jeder Kupon, dessen Start- und Enddatum genau mit den ausgerollten und adjustierten Tagen zusammenfällt, immer genau die Länge $m/12$ hat. Lediglich durch Verkürzung oder Verlängerung von Zinsperioden können davon abweichende Periodenlängen entstehen.
- Bei *BD/252* wird die Anzahl der Bankarbeitstage der Zinsperiode durch 252 geteilt.

Diese Vorschriften zur Zeitberechnung zwischen zwei Daten lassen sich auch in Formeln ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\text{Act}/365\text{f}: &\ \frac{D_2 - D_1}{365} \\
\text{Act}/360: &\ \frac{D_2 - D_1}{360} \\
30/360: &\ J_2 - J_1 + \frac{M_2 - M_1}{12} \\
&+ \frac{T_2 - \min(T_1, 30) - \max(T_2 - 30, 0) * \text{feb}(T_1 - 29)}{360} \\
30E/360: &\ J_2 - J_1 + \frac{M_2 - M_1}{12} + \frac{\min(T_2, 30) - \min(T_1, 30)}{360} \\
\text{Act}/\text{Act}: &\ J_2 - J_1 + \frac{D_2 - \text{Date}(J_2, 1, 1)}{\text{Date}(J_2 + 1, 1, 1) - \text{Date}(J_2, 1, 1)} \\
&- \frac{D_1 - \text{Date}(1, 1, J_1)}{\text{Date}(J_1 + 1, 1, 1) - \text{Date}(J_1, 1, 1)} \\
\text{ICMA}: &\ \frac{D_2 - D_1}{m\,(\text{Adjusted}(D_R + m/12\ \text{Monate}) - \text{Adjusted}(D_R))} \\
\text{BD}/252: &\ \frac{\text{Bankarbeitstage zwischen } D_1 \text{ und } D_2}{252}\,.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Die Notation ist hierbei folgendermaßen: D_1 steht für das Anfangsdatum, D_2 für das Enddatum. D_1 besteht aus den Zahlen T_1 für die Tage, M_1 für die Monate und J_1 für die Jahre, für D_2 entsprechend. m ist die Zahlungsfrequenz pro Jahr und D_R das Rolldatum, von dem aus die laufende Periode ausgerollt wird. Die Funktion „Date" liefert die fortlaufende Zahl des jeweils angegebenen Datums. Die Zählung für diese fortlaufende Zahl beginnt irgendwann weit in der Vergangenheit, z. B. am 1.1.1900 (so z. B. Microsoft Excel, wobei aus Kompatibilitätsgründen fälschlicherweise der 29. Februar 1900 existiert), z. B. liefert „Date (1997, 10, 25)" dann den Wert 35728. Dies ist die fortlaufende Zahl, die dem 25. Oktober 1997 entspricht. Die Funktion „feb(x)" nimmt den Wert 0 an, wenn $x \leq 0$ ist, andernfalls den Wert 1. Die Funktion $\min(x, y)$ gibt den kleineren der beiden Werte x und y zurück, die Funktion $\max(x, y)$ entsprechend den größeren. Die Differenz $D_2 - D_1$ ist die tatsächliche Anzahl von Tagen zwischen D_1 und D_2, aber inklusive D_1 und exklusive D_2. Einzige Ausnahme sind *Credit-Default-Swaps* (*CDS*), bei denen bei der letzen Prämienperiode der letzte Tag ebenfalls mitzählt, also um einen Tag länger ist als bei einem Zinsswap mit glei-

Tabelle 2.2: Konventionengerechte Zeitberechnung für die Periode vom 15.02.2012 bis zum 31.12.2012

	Zeitperiode	
	Tage	Jahre
Act/365f	320	0,87671233
Act/360	320	0,88888889
30/360	316	0,87777778
30/E360	315	0,875
Act/Act	320	0,87431694
ICMA	320	0,87356322
BD/252	223	0,88492063

cher Laufzeit und Kuponperiode. Die Funktion Adjusted(D) adjustiert das Datum D gemäß den Kalenderregeln bzw. Business Day Conventions 2.1.2 auf einen Bankarbeitstag.

Die Berechnung von Zeiträumen mittels dieser Day Count Conventions ist im beiliegenden Excel-Sheet USANCE.XLS und in Tabelle 2.2 demonstriert. Die Zinsperiode wurde so gewählt, dass die Ergebnisse sich möglichst unterscheiden. Die Periode startet am 15. Februar 2012 und endet am 31. Dezember 2012. Als Kalender wurde TARGET2, als Rolldatum der 15. Februar 2012 und als Periode 1 Monat gewählt. Es wurde bewusst ein Zeitraum gewählt, der einen 29. Februar enthält, um den durch Schaltjahre hervorgerufenen Unterschied zwischen *Act/Act* und *Act/365f* zu demonstrieren. Außerdem wurde bewusst das Enddatum auf den 31. eines Monats gelegt, um den Unterschied zwischen *30/360* und *30/E360* zu demonstrieren.

2.1.2 Business Day Conventions

Die Festlegung einer Day Count Convention genügt noch nicht zur eindeutigen Bestimmung von Zinszeiträumen. Es ist auch noch die *Valuta* der Zahlungsströme zu definieren, d. h. wie viele Tage nach dem Zinstermin T der Zinsbetrag eingegangen sein muss. Auch hierfür gibt es verschiedene Usancen. Außerdem gibt es verschiedene Usancen dafür, wie Feiertage und Wochenenden zu behandeln sind. Fällt die Valuta z. B. auf einen *Bankfeiertag*, ist dann ein Tag vorher oder erst nach dem Feiertag zu zahlen? Und schließlich sind die Bankfeiertage selbst natürlich von Land zu Land verschieden. Die Konventionen, die all diese Fragen regeln, heißen *Business Day Conventions* (kurz *BDC*) oder *Arbeitstagekonvention* bzw. *Kalenderregel*. Diese Konventionen verschieben die Valuta eines Zahlungsstroms weg von Wochenenden oder Bankfeiertagen gemäß den in Tabelle 2.3 zusammengefassten Regeln.

Als Beispiele zeigt Tabelle 2.4 die Adjustierung des 31. März 2012 und des 01. Januar 2012. Diese Beispiele fallen auf ein Wochenende bzw. einen Feiertag (gemäß TARGET2-Kalender). Für den EUR-Raum ist der *TARGET2*-Kalender maßgeblich. TARGET2 steht dabei für Trans-European Automated Real Time Gross Settlement Express Transfer System, das Zahlungssystem für den EUR-Raum. TARGET2 hat am 19. Mai 2008 das Vorgängersystem

Tabelle 2.3: Business Day Conventions

Konvention	**Adjustierung auf:**
Following	den nächsten Bankarbeitstag
Modified Following	den nächsten Bankarbeitstag, sofern dieser in den gleichen Monat fällt, sonst der vorhergehende Bankarbeitstag
Preceding	den vorhergehenden Bankarbeitstag
Modified Preceding	den vorhergehenden Bankarbeitstag, sofern dieser in den gleichen Monat fällt, sonst der nächste Bankarbeitstag (wird selten oder nie verwendet)

Tabelle 2.4: Wirkungsweise der Business Day Conventions

Konvention	Adjustierung 31.03.12	Adjustierung 01.01.12
Following	02.04.12	02.01.12
Modified Following	30.03.12	02.01.12
Preceding	30.03.12	30.12.11
Modified Preceding	30.03.12	02.01.13

(eigentlich eine Sammlung von Systemen) TARGET abgelöst. In TARGET2 sind alle Tage mit Ausnahme von Samstagen und Sonntagen sowie den Feiertagen am 1. Januar, Karfreitag, Ostermontag, 1. Mai sowie 25. und 26. Dezember Arbeitstage.

Bei Zinsinstrumenten wird weiterhin unterschieden, ob die Adjustierungskonvention nur für den *Zahlungstermin* einer Zinsperiode gilt oder auch für deren *Fälligkeitstermin*. Die Fälligkeitstermine bestimmen die *Längen* der Zinsperioden und damit die *Höhen* der Zinszahlungen (wenn für einen längeren Zeitraum Zinsen gezahlt werden, ist die Zahlung natürlich höher als für einen kürzern). Die Zahlungstermine bestimmen, wann die Zinszahlungen tatsächlich fließen (das ist üblicherweise ein oder zwei Bankarbeitstage später als die zugehörigen Fälligkeiten) und beeinflussen deshalb, wie stark eine Zahlung auf heute abdiskontiert wird, um ihren heutigen *Wert* durch Abdiskontieren zu bestimmen. Das Abdiskontieren ist notwendig, weil der Wert einer zukünftigen Zahlung kleiner ist als ihr Betrag (siehe Abschnitt 2.1.3). Hierfür ist relevant, wann die Zahlung geleistet wird, nicht wann sie fällig war.

Ist der Fälligkeitstag als *fix* vereinbart, d. h. unbeweglich, wird dieser nicht adjustiert, jedoch wird der Zahlungstermin gemäß der für das betreffende Instrument geltenden Bankarbeitstagekonvention adjustiert. Ist *nichtfix* vereinbart, so wird neben dem Zahlungstermin auch der Fälligkeitstag konventionsgemäß adjustiert. Der so genannte *Rollover Day* eines Zinsinstruments bestimmt, an welchem Tag und Monat innerhalb eines Jahres das *Rollover* von einer Zinsperiode zur nächsten stattfindet, wann also die Fälligkeitstage und die Zahlungstermine einzelner Zinszahlungen vorliegen. Gemäß der gewählten Konvention wird entschieden, wie die vom Rollover-Tag abgeleiteten Fälligkeitstage und Zahlungstermine adjustiert werden. Z. B. sind Bundesanleihen üblicherweise als *fix* vereinbart. D. h. es wird nur der

Zahlungstermin auf den nächsten gültigen Bankarbeitstag hin adjustiert, während der Fälligkeitstag konstant mit dem Rollover-Tag übereinstimmt. Bei Swaps hingegen werden sowohl der Zahlungstermin als auch der Fälligkeitstag auf den nächsten gültigen Bankarbeitstag hin ab dem Rollover-Tag adjustiert. Der Fälligkeitstag einer Periode fällt in der Regel mit dem *Start-Tag* bzw. *Periodenbeginn* der nächsten Kuponperiode zusammen. Am *Fixing-Tag* wird ein variabler Zinssatz festgestellt und für die folgende Periode festgelegt. Im EUR-Raum liegt der Fixing-Tag z. B. typischerweise zwei Geschäftstage vor Beginn der Periode, sodass unter Berücksichtigung der zwei Tage Valuta der tatsächliche Termin, auf den sich der fixierte Zinssatz bezieht, mit dem tatsächlichen Periodenbeginn zusammenfällt. Es kann aber auch abweichend davon vereinbart werden, dass die Rate erst kurz vor dem Fälligkeitstag einer Peridoe fixiert wird (*Fixing-in-Arrears*).

Viele dieser Konventionen verkomplizieren das tägliche Handelsgeschäft erheblich, ohne eine prinzipielle Änderung der Eigenschaften der gehandelten Instrumente zu bewirken. Sie sind also eigentlich unnötig, aber aufgrund starker historischer Bindungen nicht aus den Märkten wegzudenken. Dies wird besonders deutlich z. B. bei den Feiertagskalendern, die teilweise sogar religiöse Wurzeln haben oder beim Devisenmarkt, der sich durch auffällig viele spezielle Konventionen auszeichnet, die aber unbedingt zu beachten sind, will man die Produkte marktkonform bewerten.

2.1.3 Diskontfaktoren

Um den Blick auf das Wesentliche zu konzentrieren, wird in diesem Buch eine sehr allgemeine Notation benutzt, die für alle Zinsmethoden, Day Count Conventions und sonstige Marktusancen gilt. Um dies zu erreichen, wird grundsätzlich nicht mit Zinssätzen, sondern mit Diskontfaktoren gearbeitet. Der *Diskontfaktor* ist die Zahl, mit der ein zur Zeit T fließender Geldbetrag (*Cashflow*) zu multiplizieren ist, um den Wert dieses Betrages zu einer früheren Zeit t (z. B. heute) zu erhalten. Ein Geldbetrag, der schon heute zur Verfügung steht, ist grundsätzlich mehr wert als ein Geldbetrag gleicher Höhe, über den man erst zu einem späteren Zeitpunkt T verfügen kann, da man die Wahl hat, ihn direkt für Konsum auszugeben, in eine profitable Anlage zu investieren oder aber einfach bis zum Zeitpunkt T liegen zu lassen. Dieses Wahlrecht hat einen positiven Wert, den so genannten *Zeitwert* (engl. *Time Value of Money*). Deshalb sind Diskontfaktoren im Allgemeinen kleiner als Eins (aber größer als Null). Für einen Diskontfaktor zur *Diskontierung* von einem Zeitpunkt T zu einem früheren Zeitpunkt t wird in diesem Buch durchgängig die Notation

$$B(t,T) \tag{2.2}$$

verwendet. Der Buchstabe B zur Bezeichnung des Diskontfaktors wird deshalb verwendet, da ein Diskontfaktor nichts anderes ist als der Preis zur Zeit t eines Zerobonds mit Fälligkeit T und Nominalbetrag in Höhe von einer Geldeinheit (z. B. 1 EUR).

Der Diskontfaktor $B(t,T)$ liefert den Wert eines zukünftigen Geldbetrages per heute (*Abzinsung*). Umgekehrt erhält man den zukünftigen Wert eines heutigen Geldbetrages (*Aufzinsung*) durch Multiplikation des heutigen Geldbetrages mit $B^{-1}(t,T)$. Die während der Zeit von t bis T aufgelaufenen *Zinsen* sind dann der aufgezinste Betrag minus dem ursprünglichen Betrag, also der ursprüngliche Betrag multipliziert mit $(B^{-1}(t,T)-1)$.

2.1.4 Zinsmethoden

Für die explizite Berechnung von Zinsen haben sich verschiedene Methoden durchgesetzt. Die explizite Form für die Berechnung von Abzinsung (Diskontfaktor), Aufzinsung und den Zinsbetrag selbst (mit Nominal=1) sind in Tabelle 2.5 mit ihren jeweiligen Ausprägungen in den vier gängigen Zinsmethoden zusammengefasst. An jeder Stelle in diesem Buch können die in allgemeiner Form notierten Ergebnisse sofort in die gewünschte Zinsrechnung überführt werden, indem gemäß Tabelle 2.5 die Diskontfaktoren in ihrer für die gewünschte Zinsrechnung geltende Form geschrieben werden, da Diskontfaktoren eine allgemeine, konventionsunabhängige Darstellung dieser Größen ermöglichen.

Tabelle 2.5: Faktoren zur Zinsrechnung in allgemeiner Notation und ihre konkreten Formen in den drei wichtigsten Zinsmethoden. Die lineare Verzinsung ist streng genommen keine eigene Zinsmethode, sondern lediglich eine Näherung der einfachen Verzinsung für kurze Zeiträume und wird hier nur der Vollständigkeit halber aufgeführt. Die Berechnung des Zinsbetrags erfordert die explizite Angabe einer Zinsmethode, deshalb kann allein aufgrund des Diskontfaktors kein Zinsbetrag angegeben werden.

	Abzinsung	Aufzinsung	Zinsbetrag
Allgemein	$B(t,T)$	$B^{-1}(t,T)$	nicht definiert
Stetige Verzinsung	$e^{-R(T-t)}$	$e^{R(T-t)}$	$e^{R(T-t)}-1$
Diskrete Verzinsung	$(1+\frac{R}{m})^{-m(T-t)}$	$(1+\frac{R}{m})^{m(T-t)}$	$(1+\frac{R}{m})^{m(T-t)}-1$
Einfache Verzinsung	$[1+R(T-t)]^{-1}$	$1+R(T-t)$	$R(T-t)$
Lineare Verzinsung	$1-R(T-t)$	$1+R(T-t)$	$R(T-t)$

Man erhält diese Diskontfaktoren durch einfache anschauliche Überlegungen, die wir im Folgenden ausführlich darstellen. Hierbei ist zu beachten, dass ein Zinssatz R sich immer auf eine bestimmte *Zeitperiode* bezieht, die mittels einer bestimmten Day Count Convention bestimmt wird. Typischerweise bezieht sich der Zinssatz immer auf ein Jahr. Das der Zins pro Monat oder sogar pro Tag angegeben wird ist möglich, aber unüblich. Eine Angabe für einen Zinssatz von z. B. 6 % wird also erst durch die zusätzliche Angabe der Zinsmethode (z. B. *einfach*), der Day Count Convention (z. B. *act/365*) und der Bezugsperiode (z. B. *pro Jahr*) vollständig. Wird die Bezugsperiode weggelassen, kann i. d. R. von einem annualisierten Zins (also *pro Jahr*) ausgegangen werden.

Einfache Verzinsung

Bei der *einfachen Verzinsung* ergibt sich der Zins, der am Ende der vereinbarten Laufzeit gezahlt wird, aus einem einfachen Dreisatz: Wenn pro Zeiteinheit (z. B. pro Tag, pro Monat) der Zinssatz R vereinbart wurde, und die Zinsperiode $(T-t)$ über n Zeiteinheiten geht, dann sind am Ende einfach n mal R Zinsen zu zahlen. Wird nun die Zeitperiode $(T-t)$ in derselben Zeiteinheit gemessen, die zur Quotierung der Zinssätze benutzt wird, dann ist $T-t=n$ und deshalb ist der nach der Zinsperiode gezahlte Zins R mal $(T-t)$, wie in Tabelle 2.5 angegeben. Investiert man das Kapital K_0, ist der aufgrund dieser Zinsen gezahlte

Geldbetrag K_0 multipliziert mit $R(T-t)$. Das Kapital am Ende der Laufzeit ist dann z. B. für einen Zinssatz von 6 % pro Jahr und einen Zeitraum von einem Vierteljahr:

$$K = K_0(1 + 6\frac{\%}{\text{Jahr}} \times 0,25\text{Jahre}) = K_0(1 + 6\,\% \times 0,25) = K_0\,[1 + R(T-t)] \ .$$

Der Aufzinsungsfaktor ist also $1 + R(T-t)$, der Diskontfaktor das Inverse davon. Einfache Verzinsung wird für Zinsperioden $T-t$ von einem 1 Jahr oder kürzer verwendet.

Einfache Verzinsung wird z. B. für Zinsinstrumente verwendet, die periodisch Zinsen zahlen.

Diskrete Verzinsung

Diskrete Verzinsung berücksichtigt im Unterschied zur einfachen Verzinsung auch Zinseszinseffekte und wird vor allem für die Berechnung von Zinsen über längere Zeiträume (ab ein Jahr) verwendet, wenn zwischenzeitlich keine Zinsen ausgezahlt werden. Dazu ist die zusätzliche Angabe notwendig, mit welcher Periodizität Zinseszinsen berechnet werden sollen. Typische Periodizitäten sind jährlich, halbjährlich, vierteljährlich oder täglich. Auch hier wird der Zins im Allgemeinen als annualisierte Zinsrate angegeben, d. h. $T-t$ wird in Jahren berechnet. Der Parameter m gibt an, wie oft pro Jahr Zinseszinsen berechnet werden sollen. Dann wird so gerechnet, als würde nach jedem Ablauf einer Zeiteinheit (also im Beispiel nach einem Jahr) der Zins ausgezahlt und sofort wieder zum gleichen Zinssatz angelegt. Anders ausgedrückt wird anstelle einer Auszahlung des Zinses das Nominal um den Zinsbetrag erhöht. Der Zins, der nach einer Zeiteinheit gezahlt wird, wird nach der *einfachen* Verzinsung berechnet. Bei einem Zinssatz von 5 % mit $m = 2$ (halbjährliche Zinseszinsberechnung) beträgt das Kapital des Investors nach dem ersten halben Jahr also

$$K_1 = K_0\left(1 + \frac{6\,\%}{2}\right)^{2\times 0,5} = K_0(1 + 2,5\,\%) = K_0(1 + R/2)\ .$$

Dieses Kapital wird im zweiten Halbjahr in der gleichen Art verzinst. Nach einem Jahr ist das Kapital also gestiegen auf

$$K_2 = K_1(1 + R/2) = K_0(1 + R/2)(1 + R/2) = K_0(1 + R/2)^2\ .$$

Der im ersten Halbjahr aufgelaufene Zins wird also im zweiten Halbjahr mit verzinst. Dies ist der oben schon erwähnte *Zinseszins*. Nach dem dritten Halbjahr ist das Kapital

$$K_3 = K_2(1 + R/2) = K_0(1 + R/2)^3$$

usw. Der Aufzinsungsfaktor ist also $(1 + R/m)^{mn}$, wobei n die Anzahl der während der Zinsperioden verstrichenen Jahre und m die Anzahl der Zinseszinsberechnungen pro Jahr angibt, bzw. allgemeiner (wie in Tabelle 2.5 angegeben) gleich $(1 + R/m)^{m(T-t)}$. Hierbei muss $m(T-t)$ nicht unbedingt eine ganze Zahl sein.

Stetige Verzinsung

Bei der *stetigen Verzinsung* wird nun so gerechnet, also würde nach jeder infinitesimal kleinen Zeitperiode der aufgelaufene Zins (berechnet nach der einfachen Verzinsung) ausgezahlt und der Investor würde den ausgezahlten Betrag zum gleichen Zinssatz wieder anlegen. Es handelt sich also um den Grenzfall der diskreten Verzinsung für die Zinseszinsberechnung für infinitesimal kleine Zeitspannen. Diese Methode wird sehr gerne für die Modellierung von Derivaten verwendet, weil sie besonders schöne mathematische Eigenschaften hat, die dem Finanzmathematiker das Leben erleichtern. Da die verschiedenen Zinsmethoden ohne Probleme ineinander umgerechnet werden können, hat man auch die freie Wahl der Konvention für die Modellierung. Für die Berechnung der Zinskupons von Zinsinstrumenten findet diese Methode jedoch keine Anwendung.

Das aufgelaufene Kapital nach $T - t$ Zeiteinheit ist mit dieser Methode gegeben durch

$$K_{(T-t)} = \lim_{m\to\infty} K_0(1 + \frac{1}{m}R)^{(T-t)m} = K_0 e^{R(T-t)} . \tag{2.3}$$

Der Aufzinsungsfaktor ist also wie in Tabelle 2.5 angegeben $e^{R(T-t)}$. Hier taucht die *Euler'sche Zahl e* auf, auch *natürliche Zahl* genannt. Es handelt sich um eine irrationale Zahl mit dem (nährungsweisen) Wert

$$e \approx 2,718281828459\ldots$$

Die Euler'sche Zahl potenziert mit einer Zahl x nennt man die *Exponentialfunktion* von x. Diese ist gerade über den in Gl. 2.3 auftauchenden Grenzwert definiert:

$$\exp(x) := e^x := \lim_{m\to\infty} (1 + \frac{x}{m})^m .$$

Lineare Verzinsung

Die *lineare Verzinsung* hat ihre Berechtigung für sehr kurze Zeiten $T - t$. Für diese wird das Produkt $R(T - t)$ sehr klein. Z. B. ist für $R = 3\,\%$ pro Jahr und eine Laufzeit $T - t$ von einem Monat $= 0,083$ Jahre das Produkt $R(T - t) = 0,0025$, das Quadrat dieses Produkts wäre noch erheblich kleiner, nämlich $R^2(T - t)^2 = 0,00000625$. Bei der linearen Verzinsung werden deshalb bei allen Größen nur die in $R(T-t)$ linearen Anteile beibehalten und alle anderen vernachlässigt. Führt man dies für den inversen Aufzinsungsfaktor durch, indem man nach $R(T - t)$ entwickelt[1] und nur den linearen Anteil behält, ergibt sich gerade der Diskontfaktor aus Tabelle 2.5:

$$[1 + R(T-t)]^{-1} \approx \underbrace{1 - R(T-t)}_{\text{linearer Anteil}} + \underbrace{(R(T-t))^2 \pm \cdots}_{\text{höhere Ordnungen vernachläßigen!}} .$$

In streng linearer Näherung gilt also auch bei der linearen Verzinsung, dass der Aufzinsungsfaktor der Kehrwert des Diskontfaktors ist. Da diese Bedingung aber eben nur eine Näherung darstellt, ist die lineare Verzinsung nicht gleichberechtigt zu den anderen Zinsmethoden und sollte lediglich als eine Näherung der einfachen Verzinsung betrachtet werden. Sie wird deshalb in diesem Buch auch nicht weiter verwendet.

[1] Die benutzte Entwicklung ist $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 \pm \cdots$. Für x setze man dann $R(T - t)$ ein.