Finanzmathematik

Grundlagen - Prinzipien - Beispiele

Bearbeitet von
Tobias Martin

3., aktualisierte Auflage 2014. Buch. 180 S. Gebunden
ISBN 978 3 446 44187 3
Format (B x L): 14,7 x 210,2 cm
Gewicht: 263 g

Weitere Fachgebiete > Mathematik > Operational Research > Finanz- und Versicherungsmathematik

HANSER

Leseprobe

Tobias Martin

Finanzmathematik

Grundlagen - Prinzipien - Beispiele

ISBN (Buch): 978-3-446-44187-3

ISBN (E-Book): 978-3-446-44186-6

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-44187-3

sowie im Buchhandel.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

„Wozu brauche ich später schon die Mathematik?“ Dieser und ähnlichen Fragen begegnet man an unseren Schulen und Hochschulen immer wieder. Wenn die Antwort individuell auch ganz unterschiedlich ausfällt, so ist eines sicher: Ob bei der Verzinsung von Geldanlagen, der Aufnahme eines Darlehens, Kurs- und Renditevergleichen von Anleihen oder bei der Altersvorsorge – mit der Finanzmathematik kommt früher oder später jeder in Berührung.

Nach der Lektüre dieses Buches werden Sie erkennen, dass sich die beschriebenen Formeln und Prinzipien meist intuitiv und direkt auf viele praktische Probleme in der Welt der Finanzprodukte anwenden lassen. Darüber hinaus werden zum Verständnis der Zusammenhänge nur sehr wenige mathematische Kenntnisse und Techniken benötigt, ein Vorteil, den besonders der Leser ohne ausgeprägte mathematische Vorbildung zu schätzen weiß. Dennoch: Sie halten ein Mathematikbuch in den Händen, das die wichtigsten Grundlagen und Prinzipien der Finanzmathematik systematisch, logisch und in klarer Formelsprache erläutert. Zahlreiche, ausführlich besprochene Beispiele sind angefügt, sie werden ergänzt durch eine Reihe von Aufgaben mit Lösungen.

Das Buch folgt in seinem Aufbau der klassischen Gliederung der elementaren Finanzmathematik und ist deshalb als Begleitmaterial zu vielen Kursen über Finanzmathematik an Hoch- und Fachschulen, allgemeinbildenden Schulen und in Wirtschaftsunternehmen geeignet. Es spricht dabei insbesondere Studierende aller Fachrichtungen sowie Beschäftigte in kaufmännischen Berufen, im Bank- und Versicherungswesen sowie in der Verwaltung an. Inhaltlich reicht der Bogen von einfachen Verzinsungsfragen über Zahlungsströme, Renten, Tilgungs- und Abschreibungsprozesse bis hin zu Kurs- und Renditeberechnungen.

Aufgrund des beschränkten Umfangs können nur die wichtigsten Begriffe und Grundlagen erläutert werden, eine Ergänzung durch weiterführende Lehrbücher ist daher empfehlenswert. Auf stochastische Modelle wurde ganz verzichtet. Andererseits bietet die knappe Darstellung gute Möglichkeiten, das Buch zur Prüfungsvorbereitung oder auch als Formelsammlung bzw. Nachschlagewerk zu verwenden. Ganz in diesem Sinne sind wichtige Formeln, Definitionen, Sätze und Beispiele jeweils grafisch und auch unmittelbar verbal gekennzeichnet.

Mein Dank gilt meiner Familie für die Unterstützung und dem Fachbuchverlag Leipzig für die Aufnahme dieses Titels in die „Mathematik-Studienhilfen“, besonders Frau Christine Fritzsch, die mit zahlreichen Hinweisen in stets sehr angenehmer Zusammenarbeit zum Gelingen beigetragen hat.

Leipzig, im Sommer 2014 Tobias Martin

2 Kapital und Zinsen

2.1 Verzinsungsmodelle

In einer Volkswirtschaft besitzt jede (handelbare) Ware oder Dienstleistung einen Preis als den in Geld ausgedrückten Wert. Die Faktoren, welche die Höhe des Preises beeinflussen, sind dabei von ganz unterschiedlicher Natur. Stellt eine natürliche oder juristische Person (**Gläubiger**) einer anderen Person (**Schuldner**) vorübergehend Geld zur Verfügung (ein **Kapital**), so ist auch dies eine Dienstleistung. Der Schuldner entrichtet dem Gläubiger dafür i. Allg. ein Nutzungsentgelt, den **Zins** bzw. die **Zinsen**. Die Höhe der Zinsen hängt ab von

- der Höhe des Kapitals,
- der Dauer der Nutzung durch den Schuldner,
- dem speziell vereinbarten Zinssatz (s. u.).

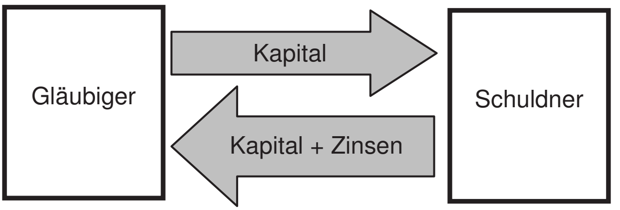

Bild 2.1:
Zahlungen zwischen
Gläubiger und Schuldner

In den meisten Fällen werden die Zinsen einmalig oder in regelmäßigen Zeitabständen fällig, d. h., der Schuldner muss dem Gläubiger die Zinsen zu einem bestimmten oder regelmäßig wiederkehrenden Zeitpunkten zahlen, solange er das Kapital des Gläubigers zur Verfügung hat. Bei der Art der Zahlung dieser Zinsen werden grundsätzlich zwei Formen unterschieden:

Modell 1: Direkte Zahlung der Zinsen an den Gläubiger zum Fälligkeitstermin

Modell 2: Gutschrift der Zinsen (beim Schuldner) und Saldierung zum Kapital

Die Fälligkeitszeitpunkte der Zinsen heißen **Zinszuschlags-** bzw. **Zinszahlungstermine**. Die (positive) Differenz zweier aufeinander folgender Zinszuschlagstermine bezeichnet man als **Zinsperiode**. Üblich sind Zinsperioden von einem Jahr, einem halben Jahr, einem Vierteljahr oder einem Monat. Beim Modell 1 bleibt die *Höhe der Schuld während der Nutzungsdauer des Kapitals unverändert*, weil die Zinsen an den vereinbarten Zinszahlungsterminen dem Gläubiger zufließen. Man spricht in diesem Fall von **einfachen** bzw. **linearen Zinsen**. Anders ist die Situation im Modell 2: Hier werden die Zinsen zwar einem Konto des Gläubigers gutgeschrieben, dieses Konto wird jedoch beim Schuldner geführt, dem diese Zinsen praktisch noch zur Verfügung stehen. Damit *erhöht sich das Kapital*, das der Schuldner zur Verfügung hat, um die jeweiligen Zinsen. Am nächsten Zinszahlungstermin sind dann Zinsen auf (schon gutgeschriebene) Zinsen fällig, die sog. **Zinseszinsen** (auch **geometrische Zinsen**). Bei beiden Formen handelt es sich um sog. **Verzinsungsmodelle**.

Oft wird vereinbart, dass über gewisse Zeiträume nur das anfangs zur Verfügung gestellte Kapital und nicht eventuelle, bereits früher gutgeschriebene Zinsen verzinst werden. Diese Form ist mathematisch dem Modell 1 äquivalent, selbst wenn der Gläubiger die Zinsen nicht sofort bekommt. Zwar ist dann eine solche Verfahrensweise finanzmathematisch inkorrekt, die einfache Verzinsung ist aber rechnerisch leichter zu handhaben und liefert für kurze Zeiträume Ergebnisse, die nicht gravierend von denen des Zinseszinsmodells abweichen.

Werden die Zinsen am Ende einer Zinsperiode fällig (Zinszuschlagstermin = letzter Tag der Zinsperiode), so spricht man von **nachschüssiger** (bzw. dekursiver) Verzinsung, sind sie jedoch bereits am Anfang einer Zinsperiode fällig (Zinszuschlagstermin = erster Tag der Zinsperiode), so liegt **vorschüssige** (bzw. antizipative) Verzinsung vor (Bild 2.2). Wir werden sehen, dass diese Unterscheidung aus Sicht der Finanzmathematik nur für Zinseszinsmodelle relevant ist.

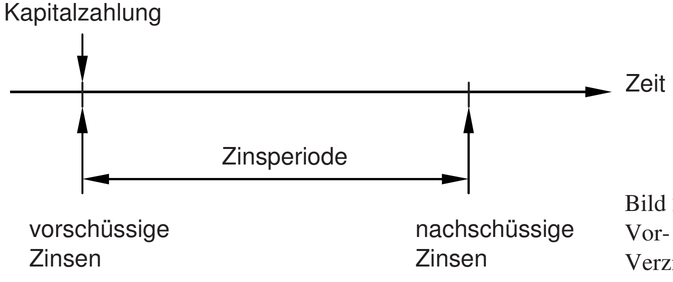

Bild 2.2:
Vor- und nachschüssige Verzinsung

Beispiel 2.1: *Vor- und nachschüssige Verzinsung*

> Eine Bank (Gläubiger) stellt einem Kunden am 1.10.2014 ein Darlehen über 10.000 € zur Verfügung. Sie verlangt dafür bis zur Rückzahlung monatlich *nachschüssig* 100,00 € Zinsen. Wie lauten die Zinszahlungstermine?

Lösung: Zinszahlungstermine: 31.10.2014, 30.11.2014, 31.12.2014, 31.1.2015, ...
Wäre *vorschüssige* Zinszahlung vereinbart worden, so lauteten die Zinszahlungstermine: 1.10.2014 (= Auszahlungstermin), 1.11.2014, 1.12.2014, 1.1.2015, ... ■

Wir wollen nun folgende grundsätzlichen Vereinbarungen treffen, die im gesamten Buch Gültigkeit besitzen:

***Allgemeine Voraussetzungen*:**
Z1. Die *Zinsen* je Zinsperiode sind *proportional* dem zu Beginn der Periode zur Verfügung gestellten *Kapital*.
Z2. Die Zinsperiode ist ein ganzer Bruchteil eines Jahres.
Z3. Alle Zahlungen erfolgen *mit Sicherheit* zu den vorgesehenen Terminen.

Die *erste* Bedingung Z1 erscheint sinnvoll und garantiert die Linearität der Zinsen als Funktion des Kapitals, d. h.:

- Die Summe der Zinsen auf zwei Kapitalien ist stets gleich den Zinsen auf die Summe der Kapitalien. Es spielt also keine Rolle, ob ein bestimmter Geldbetrag insgesamt oder in Teilen verzinst wird.
- Die Zinsen auf das Vielfache eines Kapitals sind gleich diesem Vielfachen der Zinsen auf das einfache Kapital.

Dennoch findet man in der Praxis auch andere Modelle. So bieten zahlreiche Banken Sparkonten an, bei denen der Zinssatz gestaffelt ist und von der Höhe des Guthabens abhängt. Dabei wird für größere Kapitalwerte oft ein höherer Zinssatz gewährt, um den Sparer dazu anzuregen, einen möglichst großen Geldbetrag anzulegen. Ein weiterer Grund ist die Tatsache, dass die Kosten, die dem Kreditinstitut durch das Sparkonto entstehen, größtenteils nicht von der Höhe der Einlagen abhängen, so dass sie mit wachsendem Guthaben relativ gesehen abnehmen.

Die *zweite* Bedingung Z2 ist lediglich technischer Natur, um den Formelapparat nicht unnötig aufzublähen. Sie wird aber auch praktisch überall eingehalten, da Kreditinstitute und Finanzdienstleister spätestens nach Ablauf eines Jahres alle Konten abrechnen. Die *dritte* Voraussetzung Z3 schließt die Ausfallmöglichkeit von Zahlungen aus. Wollte man dies berücksichtigen, so wären Instrumente der Wahrscheinlichkeitsrechnung erforderlich.

2.2 Das 1-Perioden-Modell

Wir betrachten zunächst die Verzinsung in *einer* Zinsperiode. Sie beginne auf einer Zeitachse zum Zeitpunkt $t = 0$ und soll bei $t = 1$ enden.

***1-Perioden-Modell*:**
- Die Verzinsung eines Kapitals wird nur über eine Zinsperiode betrachtet.
- Geldflüsse (sowohl Kapital als auch Zinsen) können nur zu Beginn und am Ende der Zinsperiode erfolgen. Anders gesagt: Nur Beginn ($t = 0$) und Ende ($t = 1$) der Zinsperiode sind mögliche **Handelszeitpunkte** für die Ware Geld.

Zu Beginn stellt der Gläubiger dem Schuldner ein bestimmtes Kapital $K > 0$ zur Verfügung. Dafür soll er Zinsen in Höhe von Z erhalten. Aufgrund von Voraussetzung Z1 ist Z proportional zu K, es gibt also einen (von K unabhängigen) Proportionalitätsfaktor i, so dass gilt

$$Z = K \cdot i. \tag{2.1}$$

Ein Vergleich mit Formel (1.2) macht klar: Im Sinne der Prozentrechnung ist Z der Prozentwert zum Grundwert K mit dem Prozentsatz i bzw. dem Prozentfuß p. Es gilt demnach gemäß (1.1) und (1.2)

$$\frac{Z}{K} = i = \frac{p}{100}. \tag{2.2}$$

Definition 2.1: *Zinssatz*

In der Zinsrechnung bezeichnet man i gem. (2.2) als **Zinssatz** bzw. **Zinsrate** (engl.: *interest rate* bzw. nur *rate*) und p als **Zinsfuß** der Zinsperiode. Wenn die Zinsperiode ein Jahr beträgt, so ist i der **Jahreszinssatz** bzw. die **Jahreszinsrate** und p der **Jahreszinsfuß**.
Der Faktor $q = 1 + i$ heißt **Verzinsungsfaktor** (auch **Aufzinsungsfaktor**, engl.: *accumulation factor*) und sein reziproker Wert $d = 1/(1+i)$ **Abzinsungs-** bzw. **Diskontierungsfaktor** (engl.: *reduction factor*) zum Zinssatz i.

Bemerkungen:

1. In nahezu allen praktischen Anwendungen gilt $i \geq 0$, weil negative Zinsen wirtschaftlich unsinnig sind. Wir wollen dies ab sofort auch voraussetzen (Ausnahme: Rendite in Kapitel 7). Es sei aber darauf hingewiesen, dass viele Formeln formal auch für $i < 0$ richtig bleiben.
2. Setzt man $K = 1$, so erkennt man, dass i auch interpretiert werden kann als der *Zins auf ein Kapital der Höhe* 1.

Beispiel 2.1 (Fortsetzung): *Zinssatz, Auf- und Abzinsungsfaktor*

Der Bankkunde hat monatlich 100 € Zinsen zu zahlen. Wie lauten bei dem Darlehen (Kapital) von 10.000 € der (monatliche) Zinssatz, Zinsfuß, Aufzinsungs- und Diskontierungsfaktor?

Lösung: Zinssatz $i = \frac{Z}{K} = \frac{100\,€}{10.000\,€} = 1\%$, zugehöriger Zinsfuß $p = 1$, Aufzinsungsfaktor $q = 1{,}01$ und Diskontierungsfaktor $d = \frac{1}{1{,}01} \approx 0{,}990099$. ■

Aus (2.2) erhält man sofort

$$q = 1 + i = 1 + \frac{Z}{K} = \frac{K+Z}{K},$$

der Aufzinsungsfaktor gibt also das Verhältnis von Kapital plus Zinsen zum Kapital nach einer Zinsperiode wieder. Mit ihm muss man das Anfangskapital

Damit erhält man die rekursive Beziehung

$$\tilde{K}_0 = 0, \quad \tilde{K}_t = \tilde{K}_{t-1} + R + Z_t, \quad t = 1, \ldots, n. \tag{4.1}$$

(*Modellgleichung n-Perioden-Modell mit Ratenzahlung*)

4.2 Renten bei einfacher Verzinsung

Zunächst befassen wir uns wieder mit dem Modell 1, also der *einfachen Verzinsung*. Für die Zinsberechnung spielt nur das vom Gläubiger zur Verfügung gestellte Kapital eine Rolle, nicht bereits früher gutgeschriebene bzw. ausgezahlte Zinsen des Schuldners. Zuerst wollen wir von einer *nachschüssigen Rente* ausgehen. In Periode t steht dem Schuldner in diesem Fall ein Kapital in Höhe von $(t-1)R$ zur Verfügung. Es ist also

$$Z_t = i_t (t-1) R, \quad t = 1, \ldots, n,$$

wenn in Periode t der Zinssatz i_t gilt. Zusammen mit der Modellgleichung (4.1) erhält man somit

$$\tilde{K}_0 = 0, \quad \tilde{K}_t = \tilde{K}_{t-1} + R + i_t (t-1) R = \tilde{K}_{t-1} + (1 + i_t (t-1)) R, \quad t = 1, \ldots, n.$$

Summiert man all diese Gleichungen auf, so entsteht

$$K_n = \sum_{t=1}^{n} (1 + i_t (t-1)) R = nR + R \sum_{t=1}^{n} (t-1) i_t. \tag{4.2}$$

Der Endwert ergibt sich demnach als Summe aus allen Raten (erster Summand) sowie aus den einfachen Zinsen auf die Raten (zweiter Summand). Eine Darstellung dieses Endwerts der Rente unter Verwendung der Verzinsungsfolge gewinnt man aus (2.13). Wegen $i_t = q_t - q_{t-1}$ ergibt sich nämlich aus (4.2)

$$\begin{aligned} K_n &= R\left(n + \sum_{t=1}^{n} (t-1) i_t \right) = R\left(n + \sum_{t=1}^{n} (t-1)(q_t - q_{t-1}) \right) \\ &= R(n + q_2 - q_1 + 2(q_3 - q_2) + 3(q_4 - q_3) + \ldots + (n-1)(q_n - q_{n-1})) \\ &= R(n - q_1 - q_2 - \ldots - q_{n-1} + (n-1) q_n). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Hier zeigt sich erneut, dass die Verzinsungsfolge das n-Perioden-Modell charakterisiert (auch im Falle von Ratenzahlungen).

Besonders wichtig ist natürlich der Fall konstanter Verzinsung $i_t = i$, $t = 1, \ldots, n$. Hier ergibt sich sofort aus (4.2) in Verbindung mit der Fomel aus Beispiel 1.9

$$\boxed{K_n = nR(1+\frac{n-1}{2}i).} \tag{4.4}$$

(*Endwert einer konstanten nachschüssigen Rente bei konstanter einfacher Verzinsung*)

Aus dieser Darstellung kann man ablesen, dass der Endwert der gleiche ist, wenn eine Einmalzahlung in Höhe von nR über $(n-1)/2$ Perioden mit Zinssatz i linear verzinst wird.

Im Falle einer *vorschüssigen Rente* steht dem Schuldner die je Periode zahlbare Rate bereits ab Periodenanfang zur Verfügung, insgesamt also ein Kapital in Höhe von tR in Periode t. Demzufolge betragen die Zinsen in dieser Periode

$$Z_t = i_t tR.$$

Die gleiche Rechnung wie oben ergibt in diesem Fall den folgenden Endwert, den wir zur Unterscheidung gegenüber nachschüssigen Renten mit einem Strich versehen wollen,

$$K'_n = R(n-1-q_1-q_2-\ldots-q_{n-1}+nq_n) \tag{4.5}$$

bzw. bei konstanter Verzinsung

$$\boxed{K'_n = nR(1+\frac{n+1}{2}i).} \tag{4.6}$$

(*Endwert einer konstanten vorschüssigen Rente bei konstanter einfacher Verzinsung*)

Beispiel 4.1: *Rente bei einfacher Verzinsung*

Ein Sparer legt monatlich 100 € über 7 Jahre im Rahmen eines Sparplans mit einfacher Verzinsung und Zinssatz 6,2 % p.a. an. Unterjährlich wird der linear proportionale Zinssatz angewendet. Wie groß ist das Endkapital?

Lösung: Der Sparplan erstreckt sich über $n = 7 \cdot 12 = 84$ Monate. Werden die 100 € jeweils am *Monatsende* eingezahlt, so liefert (4.4)

$$K_{84} \underset{(4.4)}{=} 100\,€ \cdot 84(1+\frac{84-1}{2}\cdot\frac{0{,}062}{12}) = 10.201{,}10\,€.$$

Dieser Betrag steht dem Sparer also nach 7 Jahren (unmittelbar nach Einzahlung seiner letzten Rate) zur Verfügung. Werden die Sparraten hingegen jeweils am *Monatsanfang* eingezahlt, so ist der Endwert

$$K'_{84} \underset{(4.6)}{=} 100\,€ \cdot 84(1+\frac{84+1}{2}\cdot\frac{0{,}062}{12}) = 10.244{,}50\,€.$$

Dieser Betrag wäre dann nach 7 Jahren auf seinem Konto, genau einen Monat nach seiner letzten (vorschüssigen) Ratenzahlung. ■

4.3 Renten bei Verzinsung mit Zinseszinsen

Nun unterstellen wir die *geometrische Verzinsung* im n-Perioden-Modell. Wir betrachten wieder zuerst eine *nachschüssige Rente*. Am Ende einer jeden Zinsperiode möge der Gläubiger wieder ein Kapital R zur Verfügung stellen. Lautet der Zinssatz in Periode t wieder i_t, so ist diesmal

$$Z_t = i_t \tilde{K}_{t-1}.$$

Die Modellgleichung (4.1) lautet also

$$\tilde{K}_0 = 0, \quad \tilde{K}_t = \tilde{K}_{t-1} + R + i_t \tilde{K}_{t-1} = \tilde{K}_{t-1}(1+i_t) + R, \quad t = 1, \ldots, n.$$

Verwenden wir den Zusammenhang (2.20) zwischen Zinssätzen und Verzinsungsfolge bei geometrischer Verzinsung

$$1 + i_t = \frac{q_t}{q_{t-1}}, \quad t = 1, \ldots, n,$$

so ergibt sich aus der Modellgleichung (nach Division durch q_t)

$$K_0 = 0, \quad \frac{\tilde{K}_t}{q_t} = \frac{\tilde{K}_{t-1}}{q_{t-1}} + \frac{R}{q_t}, \quad t = 1, \ldots, n.$$

Summiert man all diese Gleichungen, so heben sich die meisten Summanden weg und es bleibt

$$\frac{K_n}{q_n} = \sum_{t=1}^{n} \frac{R}{q_t} = R \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{q_t},$$

also

$$K_n = R q_n \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{q_t} = R q_n \sum_{t=1}^{n} d_t. \tag{4.7}$$

Der Endwert der Rente ergibt sich also aus der Summe der (auf $t = 0$) diskontierten Barwerte aller Raten, aufgezinst auf den Zeitpunkt $t = n$. (4.7) folgt übrigens auch aus der Kapitalwertformel (3.6) eines allgemeinen Zahlungsstroms, wenn die Voraussetzung synchroner, konstanter Raten (R1, R3) beachtet wird.

Im wichtigen Fall konstanter Verzinsung $i_t = i$, $t = 1, \ldots, n$, vereinfacht sich (4.7) wegen $q_n = (1 + i)^n = q^n$ (2.22) zu

$$K_n = R q^n \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{q^t} = R \sum_{t=1}^{n} q^{n-t} = R \sum_{t=0}^{n-1} q^t,$$

mit Hilfe der Summenformel (1.15) einer endlichen geometrischen Reihe ist

$$\boxed{K_n = \begin{cases} R\dfrac{q^n-1}{q-1} & \text{falls } i>0, \\ Rn & \text{falls } i=0. \end{cases}} \tag{4.8}$$

(*Endwert einer konstanten nachschüssigen Rente bei konstant. geometrischer Verzinsung*)

Werden die Raten zu Beginn jeder Periode gezahlt (*vorschüssige Rente*), so berechnen sich die Periodenzinsen analog aus dem Grundwert $\tilde{K}'_{t-1}+R$ ($\tilde{K}'_t$ ist der Endwert der vorschüssigen Teilrenten bis Periode t), d. h.

$$Z_t = i_t(\tilde{K}'_{t-1}+R).$$

Die Modellgleichung (4.1) lautet dann

$$\tilde{K}'_0 = 0, \quad \tilde{K}'_t = \tilde{K}'_{t-1}+R+i_t(\tilde{K}'_{t-1}+R) = (\tilde{K}'_{t-1}+R)(1+i_t), \quad t=1,\dots,n.$$

Mit (2.20) ergibt sich aus dieser Modellgleichung (wieder Division durch q_t)

$$\tilde{K}'_0 = 0, \quad \frac{\tilde{K}'_t}{q_t} = \frac{\tilde{K}'_{t-1}+R}{q_{t-1}} = \frac{\tilde{K}'_{t-1}}{q_{t-1}} + \frac{R}{q_{t-1}}, \quad t=1,\dots,n.$$

Summation all dieser Gleichungen ergibt jetzt

$$\frac{K'_n}{q_n} = \sum_{t=1}^{n}\frac{R}{q_{t-1}} = R\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{q_{t-1}},$$

also

$$K'_n = Rq_n\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{q_{t-1}} = Rq_n\sum_{t=1}^{n}d_{t-1}. \tag{4.9}$$

Auch (4.9) kann man genauso aus der Kapitalwertformel (3.6) eines allgemeinen Zahlungsstroms ableiten.

Liegt konstante Verzinsung $i_t = i$, $t = 1, \dots, n$, vor, so vereinfacht sich (4.9) zu

$$K'_n = Rq^n\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{q^{t-1}} = R\sum_{t=1}^{n}q^{n-t+1} = R\sum_{t=1}^{n}q^t,$$

also ergibt sich wegen der Summenformel (1.15) einer endlichen geometrischen Reihe

$$\boxed{K'_n = \begin{cases} Rq\dfrac{q^n-1}{q-1} & \text{falls } i>0, \\ Rn & \text{falls } i=0. \end{cases}} \tag{4.10}$$

(*Endwert einer konstanten vorschüssigen Rente bei konstanter geometrischer Verzinsung*)

Beispiel 4.1 (Fortsetzung): *Rente bei geometrischer Verzinsung*

Wie groß ist das Endkapital eines 7-jährigen Sparplans mit monatlicher Einzahlung von 100 € und dem zu 6,2 % p.a. linear proportionalen Monatszinssatz bei geometrischer Verzinsung?

Lösung: Bei nachschüssiger Zahlung (am Monatsende) ergibt (4.8)

$$K_{84} \underset{(4.8)}{=} 100\,€ \cdot \frac{(1+\frac{0{,}062}{12})^{84}-1}{\frac{0{,}062}{12}} = 10.484{,}43\,€.$$

Bei vorschüssiger Ratenzahlung ist nach (4.10) hingegen

$$K'_{84} \underset{(4.10)}{=} 100\,€ \cdot (1+\frac{0{,}062}{12})\frac{(1+\frac{0{,}062}{12})^{84}-1}{\frac{0{,}062}{12}} = 10.538{,}60\,€. \quad ■$$

Am Beispiel erkennt man, dass die Endwerte bei geometrischer Verzinsung größer als bei linearer Verzinsung sind. Dies hatten wir bei Einmalzahlungen bereits in Satz 2.4 (1) festgestellt, es gilt auch bei Ratenzahlungen allgemein.

Bemerkung: In der täglichen Finanzpraxis werden nicht nur explizite Formeln wie z. B. (4.8) oder (4.10) verwendet. Stattdessen wird oft rekursiv gerechnet, d. h. das vorhandene Kapital (bei geometrischer Verzinsung einschließlich bereits gutgeschriebener Zinsen) an jedem Zinsfälligkeitstag verzinst. Der ermittelte Zinsbetrag wird dabei i. d. R. kaufmännisch auf 2 Nachkommastellen gerundet. Im n-Perioden-Modell treten also n Rundungsvorgänge auf, die im Ergebnis evtl. einen geringfügig abweichenden Endwert zur Folge haben können.

Beispiel 4.1 (Fortsetzung): *Rundungsdifferenzen bei rekursiver Rechnung*

Welcher Endwert ergäbe sich bei rekursiver Rechnung und Rundung?

Lösung: Durch Runden auf zwei Nachkommastellen bei jeder Zinsgutschrift würde sich für K'_{84} der Betrag von 10.538,64 € ergeben, also 4 Cent mehr als nach (4.10). Dies erhält man z. B. mit einem Tabellenkalkulationsprogramm am PC. ■

Sachwortverzeichnis