

IV

Equations de Navier-Stokes pour un fluide homogène

Ce chapitre est consacré en grande partie à la démonstration du théorème de J. Leray [Ler34a, Ler34b] qui, le premier, a établi en 1934 l'existence de solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes, qu'il appela "*solutions turbulentes*". La première section de ce chapitre s'intitule donc naturellement : "Le théorème de J. Leray".

Nous avons limité ce chapitre à l'exposé des résultats d'existence, d'unicité et de régularité dans un domaine borné de \mathbb{R}^d . Nous avons volontairement mis de côté tous les résultats concernant le comportement en temps long des solutions, les problèmes fondamentaux de stabilité, ainsi que les résultats anciens ou plus récents dédiés à l'étude des solutions des équations de Navier-Stokes dans des domaines non bornés (notamment dans \mathbb{R}^d tout entier). Le lecteur trouvera dans la bibliographie quelques références pour ces problèmes.

La première section est consacrée à l'existence de solutions dites *faibles* ou *solutions de Leray*, qui sont globales en temps, y compris pour un ouvert borné de \mathbb{R}^3 . Les techniques utilisées sont parfaitement classiques, et ce chapitre est largement inspiré des livres de O. A. Ladyzenskaya [Lad63], J. L. Lions [Lio69], et R. Temam [Tem77]. Notons cependant que nous avons pris soin d'expliciter la régularité du terme de pression.

La deuxième section est consacrée à l'existence et à l'unicité de solutions régulières (dites *fortes* dans le contexte des équations de Navier-Stokes) aussi bien en dimension 2 qu'en dimension 3 (en temps fini dans ce dernier cas). De plus, nous avons donné avec une démonstration détaillée les propriétés de régularité à tous ordres ainsi que les propriétés de régularisation au cours du temps de ces solutions, communes à toutes les équations aux dérivées partielles paraboliques. Nous avons par contre laissé de côté la régularité dans les classes Gevrey ainsi que les propriétés d'analyticité en temps dans un voisinage ouvert conique de \mathbb{R}_*^+ que l'on peut trouver par exemple dans [CF88] et [FT89]. Cette dernière propriété est bien sûr importante, car on en déduit l'unicité rétrograde des solutions régulières, c'est-à-dire que si deux solutions régulières coïncident à l'instant $T > 0$, alors elles coïncident sur tout $[0, T]$.

On ne peut bien entendu commencer ce chapitre sans mentionner qu'à l'heure actuelle la question de l'existence globale (c'est-à-dire pour tout temps $t > 0$) de solutions régulières en dimension 3, de même que celle de l'unicité des solutions faibles toujours en dimension 3 sont des questions ouvertes qui suscitent de nombreux travaux de recherche.

Dans tout ce chapitre, on utilise de façon systématique les notions introduites dans le chapitre précédent notamment les espaces \mathcal{V} , V , H et l'opérateur de Stokes A (voir le paragraphe 3.2 du chapitre précédent).

Convention :

De façon usuelle quand il s'agit de faire des estimations d'énergie, un certain nombre de constantes apparaissent dans les inégalités. Cependant, pour ne pas alourdir les notations, ces constantes seront toujours notées C et changeront éventuellement d'une ligne sur l'autre. La dépendance de ces constantes en fonction des divers paramètres du problème n'apparaîtra qu'en cas de nécessité.

1 Le théorème de J. Leray

Soient Ω un ouvert borné, régulier et connexe de \mathbb{R}^d (on supposera toujours dorénavant que $d = 2$ ou $d = 3$), un nombre de Reynolds $\mathcal{R}e > 0$ fixé, f donnée dans $L^2_{loc}([0, +\infty[, (H^{-1}(\Omega))^d$ et v_0 donnée dans H . Comme on l'a vu au chapitre I, l'écoulement d'un fluide homogène incompressible dans le domaine Ω soumis à un champ de forces volumiques f est bien décrit par les équations de Navier-Stokes. On s'intéresse donc au problème mathématique suivant : trouver un champ vectoriel $v(t, x)$ et un champ scalaire $p(t, x)$ vérifiant

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v - \frac{1}{\mathcal{R}e} \Delta v + \nabla p = f, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} v = 0, & \text{dans } \Omega, \\ v = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \\ v(t = 0) = v_0. \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

Pour étudier ce système, il faut déterminer un espace fonctionnel dans lequel on va chercher la solution, puis donner un sens (faible) aux différentes équations du système ci-dessus et enfin montrer que l'on peut trouver une solution à la formulation faible adoptée.

Commençons par quelques résultats techniques sur le seul terme non-linéaire présent dans ces équations, c'est-à-dire le terme d'inertie $(v \cdot \nabla)v$.

1.1 Terme d'inertie

Pour tous $u, v, w \in (H^1_0(\Omega))^d$, on définit

$$b(u, v, w) = \int_{\Omega} ((u \cdot \nabla) v) \cdot w \, dx = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \, dx.$$

Lemme IV.1.1. *La forme trilinéaire b est continue sur $(H_0^1(\Omega))^d \times (H_0^1(\Omega))^d \times (H_0^1(\Omega))^d$ et vérifie*

$$\begin{aligned} \forall u \in V, \quad \forall v, w \in (H_0^1(\Omega))^d, \quad b(u, v, w) + b(u, w, v) &= 0, \\ \forall u \in V, \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^d, \quad b(u, v, v) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

De plus, pour tout $u \in V$ et tous $v, w \in (H_0^1(\Omega))^d$ on a

$$|b(u, v, w)| \leq C \|u\|_{L^2}^{1-\frac{d}{4}} \|u\|_{H^1}^{\frac{d}{4}} \|v\|_{L^2}^{1-\frac{d}{4}} \|v\|_{H^1}^{\frac{d}{4}} \|w\|_{H^1}, \quad (\text{IV.3})$$

Dans la suite, pour tous $u, v \in V$ on note $B(u, v)$ la forme linéaire continue sur V définie par

$$\langle B(u, v), w \rangle_{V', V} = b(u, v, w). \quad (\text{IV.4})$$

Le résultat précédent montre que l'application bilinéaire B est continue de $V \times V$ à valeurs dans V' et que de plus on a pour tout $u \in V$,

$$\|B(u, u)\|_{V'} \leq C \|u\|_{L^2}^{2-\frac{d}{2}} \|u\|_{H^1}^{\frac{d}{2}}. \quad (\text{IV.5})$$

Remarque IV.1.1. De façon très simplifiée, on peut dire que c'est le fait que la puissance sur la norme H^1 dans cette estimation soit "moins bonne" (c'est-à-dire plus élevée) en dimension 3 qu'en dimension 2, qui pose certaines difficultés (en particulier en ce qui concerne le problème de l'unicité des solutions faibles).

Preuve.

La continuité est une conséquence immédiate de l'injection de Sobolev $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ valable en dimension inférieure ou égale à 4 (voir le théorème II.3.6).

La propriété d'antisymétrie se démontre (sur les fonctions régulières puis par densité) en utilisant la formule de Stokes (les termes de bord sont nuls car u est nulle au bord),

$$\begin{aligned} b(u, v, w) &= \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \, dx \\ &= - \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} v_j w_j \, dx - \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} u_i v_j \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \, dx \\ &= - \int_{\Omega} (\operatorname{div} u)(v \cdot w) \, dx - b(u, w, v) = -b(u, w, v), \end{aligned}$$

car la divergence de u est nulle dans Ω .

Pour prouver (IV.3), on utilise l'inégalité de Hölder pour écrire

$$|b(u, v, w)| = |b(u, w, v)| \leq \|u\|_{L^4} \|v\|_{L^4} \|w\|_{H^1},$$

puis on utilise le lemme II.3.7 pour obtenir le résultat. \square

1.2 Formulations faibles des équations de Navier-Stokes

Parmi les différentes formulations équivalentes possibles des équations de Navier-Stokes, nous avons choisi d'en présenter deux très proches qui nous semblent les plus agréables à manipuler. L'idée principale, et qui est due à J. Leray, consiste à ne prendre que des fonctions tests à divergence nulle et nulles au bord, ce qui a pour avantage de ne pas faire apparaître la pression dans les formulations considérées.

Comme on le verra plus tard, une fois que l'on a résolu l'une ou l'autre de ces formulations faibles on peut récupérer la pression en utilisant le théorème de de Rham présenté en détail dans le chapitre III.

1.2.1 Fonctions tests indépendantes du temps

Dans cette première formulation, on ne considère que des fonctions tests indépendantes du temps. De façon plus précise, au système (IV.1) on associe le problème suivant :

Trouver $v \in L^2([0, T], V)$ telle que pour tout $\psi \in V$ on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v(t) \cdot \psi \, dx + \int_{\Omega} ((v(t) \cdot \nabla) v(t)) \cdot \psi \, dx \\ + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_{\Omega} \nabla v(t) : \nabla \psi \, dx = \langle f(t), \psi \rangle_{H^{-1}, H_0^1}, \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

au sens des distributions de $\mathcal{D}'([0, T])$ et telle que $v(0) = v_0$ dans V' au sens faible.

Précisons le sens de cette dernière condition. Il est facile de voir que si v est dans $L^2([0, T], V)$ et vérifie (IV.6) alors, pour tout $\psi \in V$, la fonction numérique $F_{\psi} : t \mapsto F_{\psi}(t) \equiv (v(t), \psi)_H = \langle v(t), \psi \rangle_{V', V}$ a une dérivée au sens des distributions qui est dans $L^1([0, T])$. Ainsi F_{ψ} est dans $W^{1,1}([0, T])$ ce qui montre que cette fonction est continue (corollaire II.4.2). Autrement dit, toute solution de la formulation ci-dessus est *-faiblement continue à valeurs dans V' , ce qui permet de donner un sens à la donnée initiale.

Cette première formulation est, en un certain sens, plus simple que la suivante. Malheureusement afin d'établir l'égalité d'énergie, ou encore l'unicité des solutions, on sera amenés à prendre pour fonction test les solutions elles-mêmes ou des différences entre deux solutions. Ceci n'est possible que dans la formulation avec des fonctions test dépendant du temps.

1.2.2 Fonctions test dépendant du temps

Au système (IV.1) on associe le problème variationnel suivant :

Trouver une fonction $v \in L^2([0, T[, V)$ telle que $\frac{dv}{dt} \in L^1([0, T[, V')$, et vérifiant pour toute fonction φ dans $\mathcal{C}_c^0([0, T[, V)$,

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\langle \frac{dv}{dt}, \varphi(t) \right\rangle_{V', V} dt + \int_0^T \int_{\Omega} ((v(t) \cdot \nabla) v(t)) \cdot \varphi(t) dx dt \\ + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla v(t) : \nabla \varphi(t) dx dt = \int_0^T \langle f(t), \varphi(t) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt, \quad (\text{IV.7}) \end{aligned}$$

et telle que de plus $v(0) = v_0$ dans V' .

On donne immédiatement un sens à cette dernière condition car les fonctions $v \in L^2([0, T[, V)$ telles que $\frac{dv}{dt} \in L^1([0, T[, V')$ sont continues à valeurs dans V' pour la topologie forte (proposition II.5.11).

Remarquons maintenant que si l'on sait par ailleurs, que la solution v vérifie $\frac{dv}{dt} \in L^p([0, T[, V')$ pour un certain $p \in]1, 2]$, alors cette formulation peut être étendue, par densité, aux fonctions tests $\varphi \in L^{p'}([0, T[, V)$. Cette remarque est fondamentale car dans le cas de la dimension 2 nous verrons que la solution que l'on construit vérifie $\frac{dv}{dt} \in L^2([0, T[, V')$, et que l'on peut donc prendre des fonctions test $\varphi \in L^2([0, T[, V)$. En particulier, dans ce cas bidimensionnel, on peut prendre la solution v elle-même comme fonction test. Ceci n'est plus vrai en dimension 3 et constitue l'une des raisons de la difficulté particulière du cas tridimensionnel.

1.2.3 Equivalence des formulations

Commençons par démontrer un lemme de densité de fonctions de type "produits tensoriels".

Lemme IV.1.2. *L'ensemble \mathcal{E} des fonctions φ de la forme*

$$\varphi(t, x) = \sum_{k=1}^N \eta_k(t) \psi_k(x),$$

où N est un entier quelconque, $\eta_k \in \mathcal{D}([0, T[)$ et $\psi_k \in V$, est dense dans $\mathcal{C}_c^0([0, T[, V)$.

Preuve.

Soient $\varphi \in \mathcal{C}_c^0([0, T[, V)$ et $\varepsilon > 0$. Comme φ est continue sur le compact $[0, T]$, elle est uniformément continue. Il existe donc $\delta > 0$ tel que pour tous $s, t \in [0, T]$ vérifiant $|s - t| \leq \delta$ on a $\|\varphi(s) - \varphi(t)\|_V \leq \varepsilon$.

Soit maintenant $t_0 = 0, \dots, t_{N+1} = T$ une division régulière de l'intervalle $[0, T]$ en sous-intervalles de longueur inférieure à δ et suffisamment fine pour

que $\varphi(t_1) = \varphi(t_N) = 0$. Les intervalles $(]t_{k-1}, t_{k+1}[)_{1 \leq k \leq N}$ forment un recouvrement ouvert de $]0, T[$. Soit donc $(\alpha_k)_k$ une partition de l'unité de classe C^∞ associée à ce recouvrement (lemme C.1.2). On pose alors

$$\varphi_N(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k(t) \varphi(t_k) \in V,$$

qui est bien une fonction de l'ensemble \mathcal{E} .

Soit maintenant $t \in [0, T]$, comme $\sum_k \alpha_k(t) = 1$ et $\alpha_k \geq 0$, on a

$$\|\varphi(t) - \varphi_N(t)\|_V = \left\| \sum_{k=1}^N \alpha_k(t) (\varphi(t) - \varphi(t_k)) \right\|_V \leq \sum_{k=1}^N \alpha_k(t) \|\varphi(t) - \varphi(t_k)\|_V,$$

or $\alpha_k(t)$ ne peut être non nul que si $|t - t_k| < \delta$, mais alors on a l'inégalité $\|\varphi(t) - \varphi(t_k)\|_V \leq \varepsilon$, par définition de δ . Au final on a bien montré que $\|\varphi(t) - \varphi_N(t)\|_V \leq \varepsilon$, pour tout $t \in [0, T]$. \square

On peut maintenant montrer le résultat important suivant qui prouve que l'on peut travailler indépendamment avec l'une ou l'autre des formulations précédentes.

Proposition IV.1.3. *Soient $f \in L^1([0, T[, V')$ et $v \in L^2([0, T[, V)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *v admet une dérivée faible $\frac{dv}{dt}$ dans $L^1([0, T[, V')$ et v vérifie (IV.7).*
- *v vérifie (IV.6).*

De plus, si v vérifie ces deux assertions équivalentes alors pour presque tout t on a l'égalité suivante dans V' :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\mathcal{R}e} A v(t) + B(v(t), v(t)) = f(t).$$

Preuve.

Supposons que $\frac{dv}{dt} \in L^1([0, T[, V')$ et que v vérifie (IV.7). Soit $\psi \in V$ indépendante du temps et $\eta \in \mathcal{D}([0, T])$, une fonction numérique régulière à support compact. On peut prendre la fonction $\varphi(t, x) = \eta(t)\psi(x)$ comme fonction test dans la formulation (IV.7), ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\langle \frac{dv}{dt}, \eta(t)\psi \right\rangle_{V', V} dt + \int_0^T \eta(t) \int_{\Omega} (v(t) \cdot \nabla v(t)) \cdot \psi \, dx dt \\ & + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^T \eta(t) \int_{\Omega} \nabla v(t) : \nabla \psi \, dx dt = \int_0^T \eta(t) \langle f(t), \psi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt. \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

Par définition de la dérivée faible $\frac{dv}{dt}$ (définition II.5.7), et comme η est régulière, le premier terme s'écrit également

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left\langle \frac{dv}{dt}, \eta(t)\psi \right\rangle_{V',V} dt &= \left\langle \int_0^T \eta(t) \frac{dv}{dt} dt, \psi \right\rangle_{V',V} \\
&= - \left\langle \int_0^T \eta'(t)v(t) dt, \psi \right\rangle_{V',V} \\
&= - \int_0^T \eta'(t) \langle v(t), \psi \rangle_{V',V} dt.
\end{aligned}$$

Mais comme pour presque tout t , $v(t) \in V$, par identification de H et de son dual *via* le produit scalaire naturel de H (c'est-à-dire le produit scalaire de $(L^2(\Omega))^d$), on sait que $\langle v(t), \psi \rangle_{V',V} = (v(t), \psi)_H$ pour presque tout t . On a donc obtenu

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \eta'(t) (v(t), \psi)_H dt + \int_0^T \eta(t) \int_{\Omega} (v(t) \cdot \nabla v(t)) \cdot \psi dx dt \\
& + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^T \eta(t) \int_{\Omega} \nabla v(t) : \nabla \psi dx dt = \int_0^T \eta(t) \langle f(t), \psi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt. \quad (\text{IV.9})
\end{aligned}$$

Ceci étant valable pour toute fonction $\eta \in \mathcal{D}(]0, T[)$, on a bien montré que l'on a (IV.6) au sens des distributions. La condition initiale étant vérifiée au sens fort dans V' , il est clair qu'elle est également vérifiée au sens faible.

Supposons réciproquement que v vérifie (IV.6). Montrons tout d'abord que v a une dérivée faible en temps dans l'espace $L^1(]0, T[, V')$. Pour cela on reprend à l'envers le calcul précédent, de sorte que (IV.9) est encore vraie. On peut même l'écrire, en utilisant la définition de l'opérateur de Stokes (III.15) et celle de l'application bilinéaire B (IV.4)

$$\begin{aligned}
& \left\langle - \int_0^T \eta'(t)v(t) dt, \psi \right\rangle_{V',V} + \left\langle \int_0^T \eta(t)B(v(t), v(t)) dt, \psi \right\rangle_{V',V} \\
& + \left\langle \int_0^T \eta(t) \frac{1}{\mathcal{R}e} Av(t) dt, \psi \right\rangle_{V',V} = \left\langle \int_0^T \eta(t)f(t) dt, \psi \right\rangle_{V',V}.
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $\psi \in V$, on en déduit que l'on a l'égalité suivante dans V'

$$\begin{aligned}
- \int_0^T \eta'(t)v(t) dt &= - \int_0^T \eta(t)B(v(t), v(t)) dt \\
& - \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^T \eta(t)Av(t) dt + \int_0^T \eta(t)f(t) dt.
\end{aligned}$$

Or, comme l'opérateur de Stokes A est continu de V dans V' et que l'application bilinéaire B est continue de $V \times V$ dans V' , on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \|B(v(t), v(t))\|_{V'} dt &\leq C \int_0^T \|v(t)\|_V^2 dt \leq C \|v\|_{L^2([0, T], V)}^2, \\ \int_0^T \|Av(t)\|_{V'} dt &\leq C \int_0^T \|v(t)\|_V dt \leq C\sqrt{T} \|v\|_{L^2([0, T], V)}. \end{aligned}$$

Ainsi, comme (IV.9) est vraie pour toute fonction $\eta \in \mathcal{D}([0, T])$, on a bien montré que v admet une dérivée faible en temps dans $L^1([0, T], V')$ et on a même pour presque tout $t \in]0, T[$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\mathcal{R}e} Av(t) - B(v(t), v(t)) + f(t).$$

Maintenant que l'on sait que $\frac{dv}{dt}$ existe dans $L^1([0, T], V')$, on peut déduire à partir de (IV.9) que l'équation (IV.8) est vérifiée pour tout $\psi \in V$ et tout $\eta \in \mathcal{D}([0, T])$ et par densité, il est clair que (IV.8) reste valable pour tout $\eta \in \mathcal{C}_c^0([0, T])$.

De plus, par linéarité de (IV.8) par rapport à la fonction test $\eta(t)\psi$, on constate que la formulation (IV.7), est vérifiée pour toute fonction test appartenant à l'ensemble \mathcal{E} défini dans le lemme IV.1.2. Ce lemme permet de montrer que (IV.7) est valable pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^0([0, T], V)$. En effet, il est facile de voir que comme $v \in L^2([0, T], V)$ et $\frac{dv}{dt} \in L^1([0, T], V')$, la forme linéaire par rapport à φ qui définit (IV.7) est continue pour la topologie de $\mathcal{C}_c^0([0, T], V)$.

De plus, on sait d'après la proposition II.5.11, que v est continue à valeurs dans V' pour la topologie forte, et par hypothèse $v(0) = v_0$ au sens de la continuité faible à valeurs dans V' . On récupère donc bien la donnée initiale $v(0) = v_0$ au sens fort dans V' par unicité de la limite faible.

□

1.3 Énoncé du théorème de Leray

On peut maintenant donner le résultat principal d'existence et unicité de solutions (dites "faibles") pour les équations de Navier-Stokes.

Théorème IV.1.4 (J. Leray). *Soit Ω un ouvert borné connexe et lipschitzien de \mathbb{R}^d . Soient $\mathcal{R}e > 0$, v_0 donné dans H , et f dans $L_{loc}^2([0, +\infty[, (H^{-1}(\Omega))^d)$ alors il existe un couple (v, p) défini sur \mathbb{R}^+ tout entier, solution de (IV.1), et tel que pour tout $T > 0$,*

$$(v, p) \in (L^\infty([0, T], H) \cap L^2([0, T], V)) \times W^{-1, \infty}([0, T], L_0^2(\Omega)),$$

et

$$\frac{dv}{dt} \in L^{\frac{4}{d}}([0, T], V_{-1}) \cap L^2([0, T], V_{-\frac{d}{2}}).$$

• Si $d = 2$, cette solution est unique et v est continue de $[0, +\infty[$ dans H . De plus elle vérifie l'égalité d'énergie suivante pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau = \frac{1}{2}\|v_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \langle f(\tau), v(\tau) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} d\tau. \quad (\text{IV.10})$$

• Si $d = 3$, v est continue de $[0, +\infty[$ dans $V_{-\frac{1}{4}}$ et faiblement continue de $[0, +\infty[$ dans H . Elle vérifie l'inégalité d'énergie suivante, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \leq \frac{1}{2}\|v_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \langle f(\tau), v(\tau) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} d\tau. \quad (\text{IV.11})$$

L'unicité de telles solutions reste un problème ouvert.

Le plan de la preuve est le suivant. On se donne $T > 0$ quelconque et on cherche à résoudre l'une des formulations équivalentes (IV.6) ou (IV.7) sur $[0, T]$, pour cela on introduit un problème approché de dimension finie que l'on résout aisément grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz, puis on prouve des estimations sur les solutions de ce problème approché qui sont uniformes par rapport au paramètre d'approximation. On utilise enfin les théorèmes de compacité pour obtenir des convergences fortes et pour pouvoir passer à la limite dans la formulation approchée, notamment dans le terme non linéaire. On obtient donc l'existence d'un champ de vitesse v .

L'unicité de telles solutions dans le cas bidimensionnel est établie dans un paragraphe indépendant. Ensuite, on montre que l'on peut en fait construire une solution qui soit définie sur \mathbb{R}^+ tout entier, aussi bien en dimension 2, qu'en dimension 3.

La démonstration de l'égalité (ou de l'inégalité) d'énergie s'obtient dans un second temps ainsi que certaines propriétés de régularité en temps de la solution. Remarquons, que l'inégalité d'énergie (IV.11) dans le cas tridimensionnel n'est montrée que pour la solution faible particulière que l'on construit dans la démonstration du théorème de Leray. En particulier, si d'aventure il existait d'autres solutions faibles du problème, rien ne dit qu'elles vérifieraient cette inégalité d'énergie.

Pour terminer, comme la formulation faible utilisée ne fournit pas directement la pression p , il faut la retrouver indirectement à la fin de la preuve et s'assurer que l'on a bien résolu l'équation (IV.1) au sens des distributions par exemple.

1.4 Problème approché

Soit donc $T > 0$ fixé. On choisit de discrétiser la formulation faible (IV.6) des équations de Navier-Stokes qui ne fait intervenir que des fonctions tests indépendantes du temps. On va pour cela utiliser la base spéciale $(w_k)_k$ associée à l'opérateur de Stokes introduite dans le chapitre précédent (définition III.3.14). Soit H_N l'espace vectoriel de dimension finie engendré par les fonctions $(w_k)_{k \leq N}$. On introduit une régularisation en temps du second membre f notée $(f_N)_N$ définie, \bar{f} étant le prolongement par 0 de f à \mathbb{R} tout entier, par

$$f_N(t) = N \int_{-\frac{1}{N}}^0 \bar{f}(t+h) dh, \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{IV.12})$$

Ainsi, pour tout N , f_N est continue en temps à valeurs dans $(H^{-1}(\Omega))^d$. De plus la suite $(f_N)_N$ converge vers f dans $L^2([0, T], (H^{-1}(\Omega))^d)$. En effet, pour tout $t \geq 0$ nous avons grâce à l'inégalité de Jensen

$$\|f(t) - f_N(t)\|_{H^{-1}}^2 \leq N \int_{-\frac{1}{N}}^0 \|\bar{f}(t) - \bar{f}(t+h)\|_{H^{-1}}^2 dh,$$

et donc

$$\begin{aligned} \|f - f_N\|_{L^2([0, T], H^{-1})}^2 &\leq N \int_0^T \int_{-\frac{1}{N}}^0 \|\bar{f}(t) - \bar{f}(t+h)\|_{H^{-1}}^2 dh dt \\ &= N \int_{-\frac{1}{N}}^0 \left(\int_0^T \|\bar{f}(t) - \bar{f}(t+h)\|_{H^{-1}}^2 dt \right) dh \\ &\leq \sup_{|h| \leq \frac{1}{N}} \|\bar{f} - \tau_h \bar{f}\|_{L^2([0, T], H^{-1})}^2, \end{aligned}$$

où $\tau_h \bar{f}$ est la translatée de \bar{f} définie en (II.19). Le résultat découle donc du corollaire II.5.4. Notons par ailleurs que pour tout N et tout $T > 0$ on a

$$\|f_N\|_{L^2([0, T], X)} \leq \|f\|_{L^2([0, T], X)}, \quad (\text{IV.13})$$

pour tout espace de Banach X tel que $f \in L^2([0, T], X)$.

On considère maintenant le problème approché suivant : Trouver v_N dans $C^1([0, T], H_N)$ vérifiant pour tout $\psi_N \in H_N$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} v_N, \psi_N \right)_H + \int_{\Omega} ((v_N \cdot \nabla) v_N) \cdot \psi_N dx \\ + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_{\Omega} \nabla v_N : \nabla \psi_N dx = \langle f_N, \psi_N \rangle_{H^{-1}, H_0^1}, \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

ainsi que la condition initiale $v_N(0) = \mathcal{P}_N(v_0)$, où \mathcal{P}_N est le projecteur orthogonal dans H sur l'espace de dimension finie H_N . Un tel problème approché est appelé *approximation de Galerkin* de la formulation variationnelle considérée plus haut.

Comme la famille $(w_k)_k$ est orthonormale dans H , si on note $\alpha_k(t)$ la composante sur w_k de la fonction v_N et $\alpha(t)$ le vecteur de composantes $(\alpha_k(t))_{k \leq N}$, ce problème approché s'écrit comme un système d'équations différentielles ordinaires en $\alpha(t)$ de la forme

$$\frac{d\alpha}{dt} = \mathcal{F}(t, \alpha),$$

où \mathcal{F} est continue et localement lipschitzienne par rapport à α (car polynomiale).

Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'assurer l'existence d'une unique solution de classe \mathcal{C}^1 en temps, définie sur un intervalle maximal du type $[0, T_N)$ où $0 < T_N \leq T$.

Il s'agit maintenant d'établir des *estimations d'énergie* sur v_N indépendantes de N qui nous assureront tout d'abord que $T_N = T$, d'après le théorème d'explosion en temps fini pour les équations différentielles ordinaires. De plus ces estimations nous permettront par la suite d'établir l'existence de sous-suites faiblement convergentes dans des espaces appropriés et de justifier ainsi le passage à la limite dans le problème approché.

1.5 Estimations d'énergie

En prenant $\psi_N = v_N$ dans l'égalité (IV.14) on obtient, en choisissant comme norme sur $H_0^1(\Omega)$ la norme L^2 du gradient, et en utilisant l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_N\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\mathcal{R}e} \|\nabla v_N\|_{L^2}^2 &\leq \|f_N\|_{H^{-1}} \|v_N\|_{H_0^1} \\ &\leq \|f_N\|_{H^{-1}} \|\nabla v_N\|_{L^2} \\ &\leq \frac{\mathcal{R}e}{2} \|f_N\|_{H^{-1}}^2 + \frac{1}{2\mathcal{R}e} \|\nabla v_N\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

Remarquons que l'on a utilisé ici le fait que d'après (IV.2), le terme non-linéaire $b(v_N, v_N, v_N)$ est nul et donc n'apparaît pas dans cette estimation.

On en déduit, par simple intégration en temps, la majoration :

$$\begin{aligned} \|v_N(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^t \|\nabla v_N(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \\ \leq \|\mathcal{P}_N v_0\|_{L^2}^2 + \mathcal{R}e \int_0^t \|f_N(\tau)\|_{H^{-1}}^2 d\tau \\ \leq \|v_0\|_{L^2}^2 + \mathcal{R}e \int_0^t \|f_N(\tau)\|_{H^{-1}}^2 d\tau, \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

car le projecteur \mathcal{P}_N est orthogonal (donc de norme égale à 1) dans $(L^2(\Omega))^d$.

Grâce à (IV.13), on a donc démontré :

Lemme IV.1.5. *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a les majorations*

$$\begin{cases} \sup_{t \leq T_N} \|v_N(t)\|_{L^2}^2 \leq \|v_0\|_{L^2}^2 + \mathcal{R}e \|f\|_{L^2([0, T], (H^{-1}(\Omega))^d)}^2, \\ \int_0^{T_N} \|\nabla v_N(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \leq \mathcal{R}e \|v_0\|_{L^2}^2 + \mathcal{R}e^2 \|f\|_{L^2([0, T], (H^{-1}(\Omega))^d)}^2. \end{cases} \quad (\text{IV.17})$$

La première conséquence fondamentale de ce lemme est que, pour N fixé, la solution v_N est bornée sur $[0, T_N]$ (pour la norme de L^2 par exemple) indépendamment de T_N , ce qui prouve par le théorème d'explosion en temps

fini pour les équations différentielles ordinaires que $T_N = T$. En conséquence, les estimations (IV.17) sont valables avec $T_N = T$.

Pour passer à la limite dans les termes non-linéaires, il faut obtenir un résultat de convergence forte. Pour ce faire, dans l'optique d'utiliser le théorème de compacité d'Aubin–Simon (théorème II.5.16), on doit prouver une estimation sur les dérivées en temps des solutions approchées, et donc estimer les différents termes de l'égalité (IV.14).

Lemme IV.1.6. *Il existe une constante $K(T, v_0, f) > 0$ telle que pour tout N on a*

$$\left\| \frac{dv_N}{dt} \right\|_{L^{\frac{4}{d}}([0, T[, V'])} \leq K(T, v_0, f).$$

Preuve.

L'espace H_N est construit sur la base de fonctions propres de l'opérateur de Stokes. Comme on l'a vu cette base est bien sûr orthonormale dans H mais aussi orthogonale dans V . Ainsi, l'opérateur \mathcal{P}_N est aussi le projecteur orthogonal dans V sur H_N . L'opérateur adjoint ${}^t\mathcal{P}_N$ est donc un opérateur linéaire continu sur V' de norme inférieure ou égale à 1. Par définition de l'adjoint nous avons l'égalité suivante dans $\mathcal{D}'([0, T[)$,

$$\frac{dv_N}{dt} = - \left(\frac{1}{\mathcal{R}e} Av_N + {}^t\mathcal{P}_N(B(v_N, v_N)) - {}^t\mathcal{P}_N(f_N) \right). \quad (\text{IV.18})$$

En effet, pour tout $\psi \in V$, comme $\frac{dv_N}{dt}$ et Av_N sont dans H_N , on a

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dv_N}{dt} + \left(\frac{1}{\mathcal{R}e} Av_N + {}^t\mathcal{P}_N(B(v_N, v_N)) - {}^t\mathcal{P}_N(f_N) \right), \psi \right\rangle_{V', V} \\ = \left\langle \frac{dv_N}{dt} + \frac{1}{\mathcal{R}e} Av_N + B(v_N, v_N) - f_N, \mathcal{P}_N \psi \right\rangle_{V', V} = 0, \end{aligned}$$

car $\mathcal{P}_N \psi \in H_N$ et on peut donc appliquer (IV.14) avec $\psi_N = \mathcal{P}_N \psi$.

Ainsi, comme l'opérateur de Stokes A est continu de V dans V' , il vient d'après (IV.18) et (IV.5),

$$\begin{aligned} \left\| \frac{dv_N}{dt} \right\|_{V'} &\leq \frac{1}{\mathcal{R}e} \|Av_N\|_{V'} + \|B(v_N, v_N)\|_{V'} + \|f_N(t)\|_{V'} \\ &\leq C \|v_N\|_V + \|v_N\|_{L^2}^{2-\frac{d}{2}} \|v_N\|_{H^1}^{\frac{d}{2}} + \|f_N(t)\|_{V'}, \\ &= g_N(t), \end{aligned}$$

où g_N est une suite de fonctions bornée dans $L^{\frac{4}{d}}([0, T[)$ d'après (IV.13) et les estimations fournies par le lemme IV.1.5. Ainsi

$$\left\| \frac{dv_N}{dt} \right\|_{L^{\frac{4}{d}}([0, T[, V'])} \leq \left(\int_0^T g_N^{\frac{4}{d}} dt \right)^{\frac{d}{4}},$$

ce qui fournit l'estimation souhaitée. \square

Remarque IV.1.2. En dimension 3 d'espace, en remarquant que $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ (ou aussi $V_{\frac{1}{2}}$) s'injecte continûment dans $L^3(\Omega)$, on peut montrer, en écrivant un peu différemment l'estimation sur le terme bilinéaire, que $B(v_N, v_N)$ est également borné dans $L^2([0, T[, V_{-\frac{3}{2}})$. En effet, on écrit

$$b(v, v, w) = b(v, w, v) = \int_{\Omega} ((v \cdot \nabla)w) \cdot v \, dx,$$

et donc par l'inégalité de Hölder

$$|b(v, v, w)| \leq \|v\|_{L^3} \|\nabla w\|_{L^3} \|v\|_{L^3} \leq \|v\|_{L^2} \|v\|_{H^1} \|w\|_{V_{\frac{3}{2}}}.$$

Ceci prouve par dualité que

$$\|B(v, v)\|_{V_{-\frac{3}{2}}} \leq \|v\|_{L^2} \|v\|_{H^1},$$

et que donc comme $(v_N)_N$ est bornée dans $L^\infty([0, T[, H) \cap L^2([0, T[, V)$, on a

$$(B(v_N, v_N))_N \text{ est bornée dans } L^2([0, T[, V_{-\frac{3}{2}}),$$

ce qui permet de montrer une borne sur $\frac{dv_N}{dt}$ dans $L^2([0, T[, V_{-\frac{3}{2}})$.

1.6 Passage à la limite

Nous avons établi dans les lemmes IV.1.5 et IV.1.6 que la suite $(v_N)_N$ est bornée dans $L^\infty([0, T[, H)$ et dans $L^2([0, T[, V)$ et que $\left(\frac{dv_N}{dt}\right)_N$ est bornée dans $L^{\frac{4}{3}}([0, T[, V')$. De plus, d'après les injections de Sobolev, nous savons que $H^1(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^6(\Omega)$ dès que la dimension d de l'espace est inférieure ou égale à 3, ce qui correspond au cas physique dans lequel nous nous plaçons ici. On en déduit donc que la suite $(v_N)_N$ est également bornée dans $L^2([0, T[, (L^6(\Omega))^d)$.

Il nous faut maintenant obtenir une borne sur le terme d'inertie non linéaire $(v_N \cdot \nabla)v_N$. Or nous avons, d'après l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} \|(v_N \cdot \nabla)v_N\|_{L^2([0, T[, (L^1(\Omega))^d)} &\leq \|v_N\|_{L^\infty([0, T[, (L^2(\Omega))^d)} \|\nabla v_N\|_{L^2([0, T[, (L^2(\Omega))^d)} \\ &\leq \|v_N\|_{L^\infty([0, T[, H)} \|v_N\|_{L^2([0, T[, V)} \leq C(T, v_0, f). \end{aligned}$$

Mais nous avons également

$$\begin{aligned} \|(v_N \cdot \nabla)v_N\|_{L^1([0, T[, (L^{\frac{3}{2}}(\Omega))^d)} &\leq \|v_N\|_{L^2([0, T[, (L^6(\Omega))^d)} \|\nabla v_N\|_{L^2([0, T[, (L^2(\Omega))^d)} \\ &\leq \|v_N\|_{L^2([0, T[, V)}^2 \leq C(T, v_0, f). \end{aligned}$$

Nous avons donc montré que la suite $((v_N \cdot \nabla)v_N)_N$ est bornée dans les espaces $L^2([0, T[, (L^1(\Omega))^d)$ et $L^1([0, T[, (L^{\frac{3}{2}}(\Omega))^d)$. Ces espaces de régularité sont extrémaux au sens où la régularité L^1 en temps, ou L^1 en espace est la régularité la plus faible dans la classe des espaces L^p . De façon usuelle, on observe qu'un gain en régularité en temps implique une perte de régularité en espace et inversement. La borne obtenue dans les deux espaces ci-dessus permet de déduire de nombreuses autres bornes dans des espaces intermédiaires d'après le théorème II.5.5. Plus précisément, pour tout $0 \leq \theta \leq 1$, on déduit de ce théorème que la suite $((v_N \cdot \nabla)v_N)_N$ est bornée dans $L^p([0, T[, (L^q(\Omega))^d)$ avec

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{2}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{q} = \frac{2\theta}{3} + \frac{1-\theta}{1}. \quad (\text{IV.19})$$

De quelle estimation a-t-on besoin ? Pour le déterminer, il faut revenir à la formulation faible du problème approché dans laquelle on souhaite passer à la limite. Le terme non-linéaire apparaît dans la formulation sous la forme

$$\int_0^t \int_{\Omega} ((v_N \cdot \nabla)v_N) \cdot \psi \, dx,$$

où ψ est une fonction de $(H^1(\Omega))^d$ indépendante du temps et donc dans $L^\infty([0, T[, (L^6(\Omega))^d)$. Pour pouvoir passer à la limite dans ce terme, il nous faut donc une convergence faible du terme non-linéaire $((v_N \cdot \nabla)v_N)_N$ dans l'espace dual $L^r([0, T[, (L^{\frac{6}{5}}(\Omega))^d)$ avec $r > 1$ car $\frac{6}{5}$ est l'exposant conjugué de 6. En revenant à (IV.19), on voit que l'on doit prendre $\theta = \frac{1}{2}$ pour avoir $q = \frac{6}{5}$ ce qui donne $p = \frac{4}{3}$. En résumé, l'estimation qui nous sera utile est donc

$$((v_N \cdot \nabla)v_N)_N \text{ est bornée dans } L^{\frac{4}{3}}([0, T[, (L^{\frac{6}{5}}(\Omega))^d). \quad (\text{IV.20})$$

D'après le théorème II.1.9 il existe une fonction v et une sous-suite de $(v_N)_N$ toujours notée $(v_N)_N$ pour simplifier les notations, vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_N \rightharpoonup v \text{ dans } L^\infty([0, T[, H) \text{ faiblement } \star, \\ v_N \rightharpoonup v \text{ dans } L^2([0, T[, V) \text{ faiblement}, \\ v_N \rightharpoonup v \text{ dans } L^2([0, T[, (L^6(\Omega))^d) \text{ faiblement}, \\ \frac{dv_N}{dt} \rightharpoonup \frac{dv}{dt} \text{ dans } L^{\frac{4}{3}}([0, T[, V') \text{ faiblement}. \end{array} \right.$$

Notons que les limites faibles dans les trois premiers espaces sont nécessairement les mêmes, car les trois convergences faibles impliquent la convergence au sens des distributions (dans $\mathcal{D}'([0, T[\times \Omega))$, et l'on sait que la limite d'une suite au sens des distributions est unique. Enfin, la limite faible de $\frac{dv_N}{dt}$ est bien égale à $\frac{dv}{dt}$, car l'opérateur de dérivée temporelle est continu au sens des distributions.

Ensuite, quitte à extraire à nouveau une sous-suite, on sait toujours par le théorème II.1.9 et grâce à l'estimation (IV.20), qu'il existe une fonction g telle que

$$(v_N \cdot \nabla)v_N \rightharpoonup g \text{ dans } L^{\frac{4}{3}}([0, T[, (L^{\frac{6}{5}}(\Omega))^d) \text{ faiblement.}$$

Notons qu'à ce stade de la preuve, on ne peut absolument pas affirmer que $g = (v \cdot \nabla)v$. L'étape fondamentale qui suit consiste précisément à utiliser les propriétés de compacité (que nous n'avons pas utilisées jusqu'à présent) pour prouver que l'on a bien cette relation.

Commençons par noter que grâce aux convergences faibles ci-dessus, au théorème II.5.16 et à la proposition II.2.4, on obtient immédiatement que

$$v_N \rightarrow v \text{ dans } L^2([0, T[, H) \text{ fortement.}$$

On sait donc que $(v_N)_N$ converge fortement vers v dans $L^2([0, T[, (L^2(\Omega))^d)$ et que $(\nabla v_N)_N$ converge faiblement dans $L^2([0, T[, (L^2(\Omega))^{d \times d})$ vers ∇v . D'après la proposition II.1.12, ceci montre que la suite $((v_N \cdot \nabla)v_N)_N$ converge faiblement dans $L^1([0, T[, (L^1(\Omega))^d)$ vers $(v \cdot \nabla)v$. Mais on sait également que $((v_N \cdot \nabla)v_N)_N$ converge faiblement vers g dans $L^{\frac{4}{3}}([0, T[, (L^{\frac{6}{5}}(\Omega))^d)$. Comme les deux convergences en question impliquent la convergence au sens des distributions, on en déduit que $g = (v \cdot \nabla)v$ par unicité de la limite dans $\mathcal{D}'([0, T[\times \Omega)$.

Nous tenons à insister sur la méthode très générale qui consiste, pour traiter des termes non-linéaires, à établir des estimations et des convergences faibles dans les espaces de régularité les plus précis vers des limites *a priori* inconnues et à identifier ces limites par compacité en justifiant le passage à la limite dans des espaces plus gros (c'est-à-dire des espaces de fonctions moins régulières).

On peut maintenant passer à la limite proprement dit dans la formulation faible. Soit ψ_K une fonction fixée de H_K et $\theta(t)$ une fonction de $\mathcal{D}([0, T])$. Les espaces H_K étant emboîtés, on a pour tout N suffisamment grand :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\langle \frac{dv_N}{dt}, \psi_K \right\rangle_{V', V} \theta(\tau) d\tau + \int_0^T \int_{\Omega} ((v_N \cdot \nabla)v_N) \cdot \psi_K \theta(\tau) dx d\tau \\ + \frac{1}{Re} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla v_N : \nabla \psi_K \theta(\tau) dx d\tau = \int_0^T \langle f_N, \psi_K \rangle_{H^1, H_0^1} \theta(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

L'entier K étant fixé on fait tendre N vers l'infini en utilisant toutes les convergences établies ci-dessus pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\langle \frac{dv}{dt}, \theta(\tau) \psi_K \right\rangle_{V', V} d\tau + \int_0^T \int_{\Omega} ((v \cdot \nabla)v) \cdot (\theta(\tau) \psi_K) dx d\tau \\ + \frac{1}{Re} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla v : \nabla (\theta(\tau) \psi_K) dx d\tau = \int_0^T \langle f, \theta(\tau) \psi_K \rangle_{H^{-1}, H_0^1} d\tau. \quad (\text{IV.21}) \end{aligned}$$

Notons qu'on n'utilise ici que des convergences faibles, la convergence forte de $(v_N)_N$ vers v dans $L^2([0, T[, H)$ n'a en fait servi qu'à identifier la limite faible du produit $(v_N \cdot \nabla)v_N$.

Soit maintenant $\psi \in V$, on pose $\psi_K = \mathcal{P}_K \psi$. Comme les $(w_k)_k$ forment une famille totale dans V , on sait que ψ_K converge vers ψ dans V . Mais alors, il est clair que $\theta(\cdot)\psi_K$ converge vers $\theta(\cdot)\psi$ dans $\mathcal{C}^0([0, T], V)$ et donc également dans $\mathcal{C}^0([0, T], (L^6(\Omega))^d)$ par injection de Sobolev. Mais comme $\frac{dv}{dt} \in L^{\frac{4}{3}}([0, T[, V')$, $(v \cdot \nabla)v \in L^{\frac{4}{3}}([0, T[, (L^{\frac{6}{5}}(\Omega))^d)$ et $f \in L^2([0, T[, (H^{-1}(\Omega))^d)$, on peut passer à la limite dans tous les termes de l'équation (IV.21), ce qui montre exactement (IV.6) pour la fonction test ψ .

Notons que, d'après la proposition IV.1.3, la fonction v ainsi obtenue vérifie également la formulation (IV.7). Mais comme de plus, on a vu que $\frac{dv}{dt}$ est dans l'espace $L^{\frac{4}{3}}([0, T[, V')$, on peut étendre par densité la formulation (IV.7) aux fonctions test $\varphi \in L^{\frac{4}{4-d}}([0, T[, V)$.

Il faut maintenant vérifier que la condition initiale est satisfaite. D'après la proposition II.5.11, la fonction limite v est continue à valeurs dans V' .

De plus, grâce au théorème II.5.16 on sait que la suite $(v_N)_N$ converge fortement vers v dans $\mathcal{C}^0([0, T], V')$ ce qui signifie en particulier que $v_N(0)$ converge vers $v(0)$ dans V' . Mais par construction, on a $v_N(0) = \mathcal{P}_N(v_0)$ et comme la base spéciale choisie est une base hilbertienne de H , la suite $v_N(0)$ converge bien vers v_0 dans H et donc dans V' . Par unicité de la limite dans V' , on a bien obtenu $v(0) = v_0$.

□

1.7 Problème d'unicité

C'est encore un problème ouvert, à l'heure actuelle, d'établir l'unicité des solutions faibles en dimension 3. Ceci est, entre autres, lié au manque de régularité du terme non-linéaire qui est seulement $L^{\frac{4}{3}}([0, T[, V')$ comme on l'a vu. Cela ne permet pas de prendre une fonction test de $L^2([0, T[, V)$ dans la formulation faible (IV.7), ce qui est la régularité de la solution construite. Par contre, cette objection tombe en dimension 2.

On suppose donc dans ce paragraphe que $d = 2$. On considère v_1 et v_2 deux solutions faibles de (IV.7) et on introduit $v = v_2 - v_1$. La fonction v vérifie donc pour toute fonction $\psi \in L^2([0, T[, V)$:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left\langle \frac{dv}{dt}(\tau), \psi(\tau) \right\rangle_{V', V} d\tau + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla v(\tau) : \nabla \psi(\tau) dx d\tau \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} (v_2(\tau) \cdot \nabla v(\tau)) \cdot \psi(\tau) dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega} (v(\tau) \cdot \nabla v_1(\tau)) \cdot \psi(\tau) dx d\tau = 0. \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0, T]$, la fonction $\psi(\tau) = 1_{[0, t]}(\tau)v(\tau)$ est dans $L^2([0, T[, V)$, il est donc loisible de la prendre comme fonction test dans l'égalité précédente. On obtient d'après le théorème II.5.12 :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|v(t)\|_H^2 + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla v(\tau)|^2 dx d\tau \\ & + \int_0^t b(v_2(\tau), v(\tau), v(\tau)) d\tau + \int_0^t b(v(\tau), v_1(\tau), v(\tau)) d\tau = \frac{1}{2} \|v(0)\|_H^2. \end{aligned}$$

Comme $b(v_2(\tau), v(\tau), v(\tau)) = 0$ pour presque tout τ (voir (IV.2)), on obtient en utilisant l'estimation (IV.3), et l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|v(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \\ & \leq \frac{1}{2} \|v(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t |b(v(\tau), v_1(\tau), v(\tau))| d\tau \\ & \leq \frac{1}{2} \|v(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla v_1(\tau)\|_{L^2} \|v(\tau)\|_{L^2} \|\nabla v(\tau)\|_{L^2} d\tau \\ & \leq \frac{1}{2} \|v(0)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\mathcal{R}e} \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \\ & \quad + \frac{\mathcal{R}e}{2} \int_0^t \|\nabla v_1(\tau)\|_{L^2}^2 \|v(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\|v(t)\|_{L^2}^2 \leq \|v(0)\|_{L^2}^2 + \mathcal{R}e \int_0^t \|\nabla v_1(\tau)\|_{L^2}^2 \|v(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau.$$

La fonction v_1 est dans $L^2([0, T], V)$ de sorte que la fonction numérique définie par $\tau \mapsto g(\tau) = \|\nabla v_1(\tau)\|_{L^2}^2$ est dans $L^1([0, T])$. On peut donc appliquer le lemme de Gronwall (lemme II.4.8) et obtenir

$$\forall t \in [0, T], \quad \|v(t)\|_{L^2}^2 \leq \|v(0)\|_{L^2}^2 \exp \left(\mathcal{R}e \int_0^t g(\tau) d\tau \right).$$

Or, $v_1(0) = v_2(0) = v_0$ et donc $v(0) = 0$, et ainsi pour tout $t \in [0, T]$, on obtient $v(t) = 0$ ce qui prouve l'unicité des solutions faibles. \square

Remarque IV.1.3. Le lecteur se convaincra qu'en dimension 3 d'espace, les équations de Navier-Stokes (IV.1) possèdent au plus une solution dans la classe

$$L^\infty([0, T], H) \cap L^4([0, T], V).$$

Ceci implique en particulier que $\frac{dv}{dt} \in L^2([0, T], V')$. De plus, cette solution vérifie l'égalité d'énergie (IV.10).

Malheureusement l'existence de solutions globales dans cette classe reste un problème ouvert.

1.8 Globalité des solutions faibles

Dans tout ce qui précède, nous avons construit des solutions faibles du problème sur des intervalles $[0, T]$, où $T > 0$ était fixé arbitrairement grand. On veut maintenant montrer, comme on l'a prétendu dans l'énoncé, que l'on peut en réalité obtenir des solutions globales, *i.e.* définies sur tout temps.

– Le cas bidimensionnel :

Nous avons, dans ce cas, obtenu l'unicité des solutions sur tout intervalle $[0, T]$. Ceci permet de construire aisément une solution globale. En effet, si l'on note (v_n, p_n) l'unique solution du problème sur l'intervalle $[0, n]$, nous avons, grâce à la propriété d'unicité,

$$v_n = v_k, p_n = p_k, \quad \text{sur } [0, n],$$

dès que $n < k$. On obtient la solution sur tout \mathbb{R}^+ en posant

$$v(t) = v_n(t), p(t) = p_n(t), \quad \text{pour } t \leq n.$$

– Le cas tridimensionnel :

Le raisonnement précédent ne s'applique plus car il manque l'unicité des solutions, et on n'est donc pas certain que les diverses solutions sur les intervalles $[0, n]$ se recouvrent correctement. Il faut donc procéder de façon différente en revenant à la façon dont sont construites les solutions. Nous avons introduit un problème approché dont on a noté les solutions $(v_N)_N$ (la pression s'obtient directement à la fin, à partir de la solution v). Nous avons établi des estimations d'énergie qui montrent que ces solutions approchées sont uniques et existent sur \mathbb{R}^+ tout entier (Théorème de Cauchy-Lipschitz) .

Posons $K = 1$ et considérons l'intervalle $[0, K] = [0, 1]$. En extrayant une sous-suite $(v_{\varphi_1(N)})_N$ de $(v_N)_N$ qui converge sur $[0, 1]$ dans les espaces appropriés, on obtient à la limite, une solution v du problème sur $[0, 1]$ (voir le paragraphe 1.6).

Prenons maintenant $K = 2$ et regardons la situation sur l'intervalle $[0, K] = [0, 2]$. On extrait une sous-suite $(v_{\varphi_1(\varphi_2(N))})_N$ de la suite $(v_{\varphi_1(N)})_N$ ce qui fournit une solution sur $[0, 2]$, etc ...

Ainsi par extractions successives, on obtient des fonctions φ_i de \mathbb{N} dans \mathbb{N} strictement croissantes telles que $(v_{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_K(N)})_N$ fournit à la limite une solution du problème de départ sur l'intervalle $[0, K]$.

Pour conclure, il suffit maintenant d'utiliser un procédé d'extraction diagonal, c'est-à-dire de considérer la sous-suite

$$(v_{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_N(N)})_N.$$

Celle-ci converge vers une solution du problème de départ sur tout intervalle $[0, K]$, ou encore sur tout intervalle $[0, T]$. Ainsi, la limite de cette sous-suite est bien une solution définie sur \mathbb{R}^+ tout entier.

1.9 Evolution de l'énergie

Nous allons maintenant préciser les propriétés de continuité en temps des solutions faibles obtenues ci-dessus.

Proposition IV.1.7. *En dimension 2 d'espace, la solution v construite précédemment vérifie :*

$$v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, H).$$

En dimension 3 d'espace, elle vérifie :

$$v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, V_{-\frac{1}{4}}),$$

et

$$v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, H_{faible}),$$

c'est-à-dire qu'elle est faiblement continue à valeurs dans H .

Preuve.

En dimension 2 nous savons que

$$\begin{aligned} v &\in L^2(]0, T[, V), \\ \frac{dv}{dt} &\in L^2(]0, T[, V'). \end{aligned}$$

Le corollaire II.5.13 permet alors de conclure.

En dimension 3, nous avons avec la remarque IV.1.2

$$\begin{aligned} v &\in L^2(]0, T[, V), \\ \frac{dv}{dt} &\in L^2(]0, T[, V_{-\frac{3}{2}}), \end{aligned}$$

dans ce cas, le théorème III.3.19 exprime le premier résultat souhaité.

On remarque que, comme v est fortement continue dans $V_{-\frac{1}{4}}$, elle est aussi faiblement continue dans ce même espace et que de plus on a

$$v \in L^\infty(]0, T[, H).$$

Ainsi le lemme II.5.9 permet de conclure à la continuité faible de v à valeurs dans H . □

Que peut-on dire de l'évolution de l'énergie au cours du temps ? L'énergie physique du système est l'énergie cinétique $\frac{1}{2} \int_{\Omega} |v|^2 dx$ (rappelons que dans ce modèle adimensionné la densité du fluide est ramenée à 1). Nous allons montrer qu'en dimension 2, nous pouvons écrire une égalité d'énergie (IV.10) que l'on peut interpréter physiquement de la façon suivante :

$$\underbrace{\frac{1}{2} \|v(t)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \|v_0\|_{L^2}^2}_{\text{Variation d'énergie cinétique}} + \underbrace{\frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau}_{\text{Energie dissipée}} = \underbrace{\int_0^t \langle f, v \rangle_{V', V} d\tau}_{\text{Travail du terme source}}.$$

En dimension 3, cette équation de bilan d'énergie devient seulement une inégalité. Ce problème est intimement lié au problème encore ouvert à l'heure actuelle de l'unicité des solutions faibles en dimension 3.

- Cas bidimensionnel :

Nous savons qu'en dimension 2, la solution faible construite précédemment vérifie $\frac{dv}{dt} \in L^2(]0, T[, V')$, et qu'il en est de même pour le terme $(v \cdot \nabla)v$, ce qui implique que l'on peut prolonger (IV.7) par densité à toutes les fonctions $\varphi \in L^2(]0, T[, V)$ comme on l'a déjà remarqué plus haut. En particulier, on peut appliquer (IV.7), avec $\varphi = v$ et on obtient très exactement l'égalité d'énergie (IV.10) grâce au théorème II.5.12.

- Cas tridimensionnel :

Ici, comme nous l'avons vu, nous n'avons plus $\frac{dv}{dt} \in L^2(]0, T[, V')$, mais seulement

$$\frac{dv}{dt} \in L^2(]0, T[, V_{-\frac{3}{2}}) \cap L^{\frac{4}{3}}(]0, T[, V').$$

Ceci ne permet pas de prolonger (IV.7) aux fonctions de $L^2(]0, T[, V)$, et donc de faire le même calcul qu'en dimension 2. La démonstration de l'inégalité d'énergie est donc bien plus redoutable.

• **Etape 1 :** On peut prendre $\psi_N = v_N$ dans le problème approché (IV.14), et obtenir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_N\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_{\Omega} |\nabla v_N|^2 dx = \langle f_N, v_N \rangle_{H^{-1}, H_0^1}, \quad (\text{IV.22})$$

ce qui en intégrant en temps donne pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|v_N(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^t \|\nabla v_N\|_{L^2}^2 d\tau \\ = \frac{1}{2} \|\mathcal{P}_N v_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \langle f_N, v_N \rangle_{H^{-1}, H_0^1} ds \\ \leq \frac{1}{2} \|v_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \langle f_N, v_N \rangle_{H^{-1}, H_0^1} d\tau. \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

Le but de la démonstration est de justifier le passage à la limite dans cette estimation.

• **Etape 2 :** On va montrer que

$$\|v_0\|_H^2 = \|v(0)\|_H^2 = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{s} \int_0^s \|v(t)\|_H^2 dt. \quad (\text{IV.24})$$

Remarquons que comme v est faiblement continue de $[0, T]$ dans H , ceci revient essentiellement à démontrer que 0 est un point de Lebesgue pour l'application $t \mapsto \|v(t)\|_H^2$.

Pour cela intégrons (IV.23) entre 0 et $s > 0$ et divisons par s , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{s} \int_0^s \|v_N\|_H^2 dt + \frac{1}{\mathcal{R}e} \frac{1}{s} \int_0^s \left(\int_0^t \|\nabla v_N\|_{L^2}^2 d\tau \right) dt \\ \leq \frac{1}{2} \|v_0\|_H^2 + \frac{1}{s} \int_0^s \left(\int_0^t \langle f_N, v_N \rangle_{H^{-1}, H_0^1} d\tau \right) dt. \end{aligned} \quad (\text{IV.25})$$

A $s > 0$ fixé, le passage à la limite quand N tend vers l'infini dans le premier terme est une conséquence immédiate de la convergence forte de $(v_N)_N$ vers v dans $L^2([0, T[, H)$.

Comme $(v_N)_N$ est bornée dans $L^2([0, T[, V)$, et d'après (IV.13), le terme $\int_0^t \langle f_N, v_N \rangle_{H^{-1}, H_0^1} ds$ est borné uniformément en t et N , par

ailleurs pour tout $t \in [0, T]$, ce terme converge vers $\int_0^t \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} ds$ quand N tend vers l'infini, par convergence faible de $(v_N)_N$ vers v dans $L^2([0, T[, V)$ et par convergence forte de $(f_N)_N$ vers f . Ainsi, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous avons :

$$\frac{1}{s} \int_0^s \left(\int_0^t \langle f_N, v_N \rangle_{H^{-1}, H_0^1} d\tau \right) dt \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{s} \int_0^s \left(\int_0^t \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} d\tau \right) dt.$$

Par ailleurs, la suite $(\nabla v_N)_N$ converge faiblement vers ∇v dans l'espace $L^2([0, T[, (L^2(\Omega))^{d \times d})$ et donc, en notant $1_{[0, t]}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, t]$, il est aisé de voir que $(1_{[0, t]} \nabla v_N)_N$ converge faiblement vers $1_{[0, t]} \nabla v$ dans $L^2([0, T[, (L^2(\Omega))^{d \times d})$. Donc, par faible semi-continuité inférieure de la norme (corollaire II.1.10), on obtient pour tout $t \in [0, T]$:

$$\int_0^t \|\nabla v\|_{L^2}^2 d\tau \leq \liminf_{N \rightarrow +\infty} \int_0^t \|\nabla v_N\|_{L^2}^2 d\tau.$$

Ainsi, grâce au lemme de Fatou on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \int_0^s \left(\int_0^t \|\nabla v\|_{L^2}^2 d\tau \right) dt &\leq \frac{1}{s} \int_0^s \left(\liminf_{N \rightarrow +\infty} \int_0^t \|\nabla v_N\|_{L^2}^2 d\tau \right) dt \\ &\leq \frac{1}{s} \liminf_{N \rightarrow +\infty} \int_0^s \left(\int_0^t \|\nabla v_N\|_{L^2}^2 d\tau \right) dt. \end{aligned}$$

On peut donc, au final, passer à la limite inférieure (en N) dans l'inégalité (IV.25). Il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{s} \int_0^s \|v\|_H^2 dt + \frac{1}{\mathcal{R}e} \frac{1}{s} \int_0^s \left(\int_0^t \|\nabla v\|_{L^2}^2 d\tau \right) dt \\ \leq \frac{1}{2} \|v_0\|_H^2 + \frac{1}{s} \int_0^s \left(\int_0^t \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} d\tau \right) dt. \end{aligned} \quad (\text{IV.26})$$

Par ailleurs, les fonctions $\tau \mapsto \|\nabla v(\tau)\|_{L^2}^2$ et $\tau \mapsto \langle f(\tau), v(\tau) \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$ sont dans $L^1(]0, T[)$ et ainsi leurs primitives $t \mapsto \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau$ et $t \mapsto \int_0^t \langle f(\tau), v(\tau) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} d\tau$ sont des fonctions continues (lemme II.4.1) qui s'annulent en zéro, leurs propres primitives sont donc dérivables en 0 de dérivée nulle (proposition II.4.6). Autrement dit, on a

$$\frac{1}{s} \int_0^s \left(\int_0^t \|\nabla v\|_{L^2}^2 d\tau \right) dt \xrightarrow{s \rightarrow 0^+} 0,$$

et

$$\frac{1}{s} \int_0^s \left(\int_0^t \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} d\tau \right) dt \xrightarrow{s \rightarrow 0^+} 0.$$

En prenant la limite supérieure quand s tend vers 0^+ dans l'inégalité (IV.26), on obtient

$$\limsup_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{s} \int_0^s \|v\|_H^2 dt \leq \|v_0\|_H^2. \quad (\text{IV.27})$$

Il faut maintenant obtenir une inégalité dans l'autre sens. Pour cela, on utilise le fait que v est faiblement continue à valeurs dans H (proposition IV.1.7), et la propriété de faible semi-continuité inférieure de la norme dans un espace de Banach (corollaire II.1.10). Il vient alors :

$$\|v_0\|_H^2 = \|v(0)\|_H^2 \leq \liminf_{s \rightarrow 0^+} \|v(s)\|_H^2 = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \left(\inf_{t \in [0, s]} \|v(t)\|_H^2 \right).$$

Or pour tout $s > 0$, on a

$$\inf_{t \in [0, s]} \|v(t)\|_H^2 \leq \frac{1}{s} \int_0^s \|v(t)\|_H^2 dt,$$

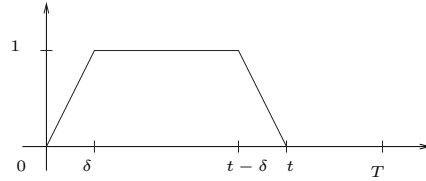
et en prenant la limite inférieure dans cette inégalité, il vient

$$\|v_0\|_H^2 \leq \liminf_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{s} \int_0^s \|v(t)\|_H^2 dt. \quad (\text{IV.28})$$

Ainsi, en rassemblant (IV.27) et (IV.28), on a bien montré (IV.24).

- **Etape 3 :** Soit $t \in]0, T]$. Pour tout $\delta < \frac{t}{2}$ on introduit la fonction affine par morceaux θ_δ définie par

$$\theta_\delta(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\delta}\tau & \text{sur } [0, \delta], \\ 1 & \text{sur } [\delta, t - \delta], \\ \frac{1}{\delta}(t - \tau) & \text{sur } [t - \delta, t], \\ 0 & \text{sur } [t, T]. \end{cases}$$



Cette fonction est dans $W_0^{1,1}([0, T])$ on peut donc multiplier (IV.22) par θ_δ , intégrer sur $[0, T]$ et effectuer une intégration par parties. Il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{\delta} \int_{t-\delta}^t \|v_N\|_H^2 d\tau + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^t \|\nabla v_N\|_{L^2}^2 \theta_\delta(\tau) d\tau \\ = \frac{1}{2} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \|v_N\|_H^2 d\tau + \int_0^t \langle f_N, v_N \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \theta_\delta(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons que dans l'étape précédente, on peut passer à la limite inférieure quand N tend vers l'infini dans cette égalité (tous les termes convergent sauf celui qui porte sur le gradient de v_N pour lequel on utilise la faible semi-continuité inférieure de la norme dans un Banach). Il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{\delta} \int_{t-\delta}^t \|v\|_H^2 d\tau + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^t \|\nabla v\|_{L^2}^2 \theta_\delta(s) d\tau \\ \leq \frac{1}{2} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \|v\|_H^2 d\tau + \int_0^t \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \theta_\delta(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

On souhaite maintenant passer à la limite quand δ tend vers 0. Les deux intégrales qui contiennent la fonction θ_δ se traitent immédiatement par convergence dominée.

Supposons pour commencer que t est un point de Lebesgue de la fonction $s \mapsto \|v(s)\|_H^2$. En utilisant la proposition II.4.4 et la convergence (IV.24), on obtient l'inégalité d'énergie souhaitée :

$$\frac{1}{2} \|v(t)\|_H^2 + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^t \|\nabla v\|_{L^2}^2 d\tau \leq \frac{1}{2} \|v_0\|_H^2 + \int_0^t \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} d\tau.$$

On sait que les points de Lebesgue d'une fonction $L^1([0, T])$ sont denses dans $]0, T[$ (théorème II.4.5), on a donc montré l'inégalité d'énergie pour un ensemble dense de points de $[0, T]$. Soit maintenant $t \in [0, T]$ qui n'est pas un point de Lebesgue de $s \mapsto \|v(s)\|_H^2$. Il existe une suite $(t_j)_j$ de points de $[0, T]$ qui tend vers t formée de points de Lebesgue de cette fonction et donc en lesquels l'inégalité d'énergie est vraie. On a donc

$$\frac{1}{2} \|v(t_j)\|_H^2 + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^{t_j} \|\nabla v\|_{L^2}^2 ds \leq \frac{1}{2} \|v_0\|_H^2 + \int_0^{t_j} \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} ds,$$

par ailleurs, la fonction v étant faiblement continue dans H , on a

$$\|v(t)\|_H \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \|v(t_j)\|_H,$$

et donc on peut passer à la limite inférieure dans l'inégalité d'énergie ci-dessus et obtenir le résultat, pour tout $t \in [0, T]$

$$\frac{1}{2} \|v(t)\|_H^2 + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^t \|\nabla v\|_{L^2}^2 ds \leq \frac{1}{2} \|v_0\|_H^2 + \int_0^t \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} ds.$$

□

1.10 Existence et régularité de la pression

Soit $\psi \in V$ fixée et $\eta \in \mathcal{D}(]0, T[)$. On prend $\varphi = \eta(t)\psi(x)$ dans la formulation (IV.7), ceci donne

$$\begin{aligned} \int_0^T \eta(t) \left\langle \frac{dv}{dt}, \psi \right\rangle_{V', V} dt + \int_0^T \eta(t) \left(\int_{\Omega} ((v \cdot \nabla)v) \cdot \psi dx \right) dt \\ + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^T \eta(t) \left(\int_{\Omega} \nabla v : \nabla \psi dx \right) dt - \int_0^T \eta(t) \langle f, \psi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} dt = 0. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute fonction η , on obtient que pour presque tout t dans $]0, T[$, on a

$$\left\langle \frac{dv}{dt}, \psi \right\rangle_{V', V} + \int_{\Omega} ((v \cdot \nabla)v) \cdot \psi dx + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \psi dx - \langle f(t), \psi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = 0.$$

Ceci s'écrit également sous la forme

$$\left\langle \frac{dv}{dt}, \psi \right\rangle_{V', V} + \left\langle (v \cdot \nabla)v - \frac{1}{\mathcal{R}e} \Delta v - f, \psi \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1} = 0. \quad (\text{IV.29})$$

Intégrons maintenant (IV.29) par rapport au temps en utilisant le théorème II.5.12 et le fait que ψ ne dépend pas du temps. On obtient

$$\begin{aligned} (v(t), \psi)_H - (v(0), \psi)_H \\ + \left\langle \int_0^t (v \cdot \nabla)v d\tau - \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^t \Delta v d\tau - \int_0^t f d\tau, \psi \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1} = 0. \end{aligned}$$

Le produit scalaire sur H étant exactement le produit scalaire de $(L^2(\Omega))^d$, cette égalité s'écrit aussi

$$\left\langle G(t), \psi \right\rangle_{H^{-1}, H_0^1} = 0, \quad \text{pour tout } t \in [0, T], \quad (\text{IV.30})$$

avec

$$G(t) = v(t) - v(0) + \int_0^t (v \cdot \nabla)v d\tau - \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^t \Delta v d\tau - \int_0^t f d\tau.$$

On a déjà vu que la fonction v est faiblement continue à valeurs dans H , et donc à valeurs dans $(L^2(\Omega))^d$ mais aussi à valeurs dans $(H^{-1}(\Omega))^d$. Par ailleurs v est dans $L^2(]0, T[, V)$ et donc dans $L^2(]0, T[, (H_0^1(\Omega))^d)$, ainsi comme le laplacien envoie continûment H_0^1 dans H^{-1} le terme Δv est dans $L^2(]0, T[, (H^{-1}(\Omega))^d$. De même d'après (IV.3), le terme non-linéaire $(v \cdot \nabla)v$ est dans $L^1(]0, T[, (H^{-1}(\Omega))^d)$. Ainsi tous les termes intégraux dans (III.34)

sont des primitives de fonctions intégrables à valeurs dans $(H^{-1}(\Omega))^d$ et par conséquent sont continus en temps à valeurs dans $(H^{-1}(\Omega))^d$.

Tout ceci montre que la fonction G est faiblement continue sur $[0, T]$ à valeurs dans $(H^{-1}(\Omega))^d$. Ainsi, pour tout $t \in [0, T]$, $G(t)$ est un élément de $(H^{-1}(\Omega))^d$ qui vérifie de plus (IV.30) pour tout $\psi \in V$. D'après le théorème de de Rham (théorème III.1.16), pour tout $t \in [0, T]$, il existe un unique $\pi(t) \in L_0^2(\Omega)$ tel que

$$G(t) = -\nabla \pi(t). \quad (\text{IV.31})$$

Montrons que $t \mapsto \pi(t)$ est faiblement continue à valeurs dans $L^2(\Omega)$. En effet si g est une fonction de $L^2(\Omega)$, d'après le lemme III.1.17 il existe une fonction $h \in (H_0^1(\Omega))^d$ tel que $\operatorname{div} h = g - m(g)$. On a alors, $\pi(t)$ étant à moyenne nulle :

$$\begin{aligned} (\pi(t), g)_{L^2} &= (\pi(t), g - m(g))_{L^2} = (\pi(t), \operatorname{div} h)_{L^2} \\ &= -\langle \nabla \pi(t), h \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \langle G(t), h \rangle_{H^{-1}, H_0^1}, \end{aligned}$$

et cette dernière quantité est continue en temps car G est faiblement continue en temps à valeurs dans $(H^{-1}(\Omega))^d$.

On a donc établi, en particulier, que la fonction $t \mapsto \pi(t)$ est dans $L^\infty([0, T], L_0^2(\Omega))$. On peut donc introduire la distribution $p = \frac{\partial \pi}{\partial t}$ qui est dans $W^{-1, \infty}([0, T], L_0^2(\Omega))$. En prenant des fonctions test de la forme $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ avec $\varphi \in \mathcal{D}([0, T] \times \Omega)$ dans (IV.31) on montre aisément que l'équation de Navier-Stokes

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v - \frac{1}{\mathcal{R}e} \Delta v + \nabla p = f,$$

est vérifiée au sens des distributions sur $]0, T[\times \Omega$. Notons que si v est donnée, solution de (IV.7), alors la pression $p \in W^{-1, \infty}([0, T], L_0^2(\Omega))$ est unique.

□

Ceci termine la démonstration du théorème de Leray.

2 Solutions fortes

Pour pallier la non unicité des solutions faibles en dimension 3, on peut se demander s'il existe des solutions plus régulières pour lesquelles on pourrait obtenir l'unicité. La réponse à cette question est positive mais avec une restriction importante, qui est la perte de la globalité (en dimension 3). Pour établir l'existence de solutions fortes on reprend l'approximation de Galerkin à l'aide de la base spéciale (IV.14) et on obtient de nouvelles estimations. Bien entendu, pour espérer obtenir ces solutions plus régulières, il faut prendre des données (v_0, f) plus régulières elles-aussi. Dans cette direction, on dispose du résultat suivant.

Théorème IV.2.1. *Soit Ω un ouvert borné, connexe et de classe $\mathcal{C}^{1,1}$ dans \mathbb{R}^d . Soient $\mathcal{R}e > 0$, v_0 donnée dans V et f donnée dans $L_{loc}^2([0, +\infty[, (L^2(\Omega))^d)$.*

- Si $d = 2$, il existe une **unique** solution au problème (IV.1) vérifiant :

$$v \in C^0([0, +\infty[, V) \cap L_{loc}^2([0, +\infty[, (H^2(\Omega))^d \cap V), \quad \frac{dv}{dt} \in L_{loc}^2([0, +\infty[, H),$$

et

$$p \in L_{loc}^2([0, +\infty[, H^1(\Omega)).$$

Cette solution vérifie bien entendu l'égalité d'énergie pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau = \frac{1}{2}\|v_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t (f(\tau), v(\tau))_{L^2} d\tau. \quad (\text{IV.32})$$

- Si $d = 3$, il existe $T^* > 0$ dépendant des données et une **unique** solution au problème (IV.1) vérifiant :

$$v \in C^0([0, T^*[, V) \cap L_{loc}^2([0, T^*[, (H^2(\Omega))^d \cap V), \quad \frac{dv}{dt} \in L_{loc}^2([0, T^*[, H).$$

et

$$p \in L_{loc}^2([0, T^*[, H^1(\Omega)).$$

En outre, elle vérifie également l'égalité d'énergie (IV.32).

De plus, lorsque Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^3 , si les données sont suffisamment petites on peut montrer qu'en fait $T^* = +\infty$. D'un point de vue physique, ceci exprime que si la viscosité est suffisamment grande, alors les solutions régulières sont globales. On peut également voir ce résultat comme un résultat de stabilité de la solution nulle. C'est ce que précise le théorème suivant :

Théorème IV.2.2 (Solutions fortes à données petites). *Dans le cas tridimensionnel, si v_0 est donné dans V et f dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, (L^2(\Omega))^d)$, alors sous les hypothèses suivantes,*

$$\|\nabla v_0\|_{L^2}^2 \leq \frac{C(\Omega)}{\mathcal{R}e^2}, \quad \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2)}^2 \leq \frac{C(\Omega)}{\mathcal{R}e^4},$$

où $C(\Omega)$ est une constante ne dépendant que de l'ouvert Ω , on a $T^* = +\infty$, autrement dit, les solutions fortes sont globales.

Nous concluons cette section en donnant un résultat asymptotique en temps sur le comportement des solutions bidimensionnelles lorsque le terme source f est indépendant du temps.

Théorème IV.2.3 (Borne uniforme en temps). *Soient Ω un ouvert borné, connexe et de classe $\mathcal{C}^{1,1}$ de \mathbb{R}^2 , $v_0 \in V$ et $f \in (L^2(\Omega))^2$ indépendant du temps, alors il existe une constante C telle que*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|\nabla v(t)\|_{L^2} \leq C$$

Remarque IV.2.1. Ce résultat a des conséquences importantes pour l'étude qualitative des écoulements bidimensionnels. Par exemple, ceci entraîne qu'un tel écoulement est parfaitement déterminé par un nombre fini de degrés de liberté. Autrement dit, si l'écoulement est connu en un nombre fini de points, il est parfaitement déterminé.

De même, on peut "presque" dire que la dynamique des équations de Navier-Stokes pour un écoulement bidimensionnel se ramène à une équation différentielle ordinaire. Pour en savoir plus sur ce type de questions le lecteur intéressé pourra se reporter aux travaux de R. Temam, O. Ladysenskaya, et bien d'autres concernant l'existence et l'estimation de la dimension fractale de l'attracteur associé aux équations de Navier-Stokes.

La suite de cette section est consacrée à la preuve des divers résultats que nous venons d'exposer.

2.1 Nouvelles estimations

On reprend l'approximation de Galerkin qui consiste à considérer une solution approchée $v_N \in \mathcal{C}^1([0, T], H_N)$ vérifiant pour tout $\psi_N \in H_N$

$$\int_{\Omega} \frac{dv_N}{dt} \cdot \psi_N \, dx + \int_{\Omega} ((v_N \cdot \nabla) v_N) \cdot \psi_N \, dx + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla v_N : \nabla \psi_N \, dx = \int_{\Omega} f_N \cdot \psi_N \, dx.$$

L'idée est de prendre comme fonction test $-\Delta v_N$, mais ceci est impossible car $\Delta v_N \notin H_N$. Par contre, on peut prendre comme fonction test $\mathcal{P}_N(-\Delta v_N)$. Comme l'espace d'approximation H_N est construit sur les fonctions propres de l'opérateur de Stokes on voit que ceci revient à prendre

$$\psi_N = Av_N = -\Delta v_N + \nabla p_N \in H_N.$$

On remarque que, comme $Av_N \in H_N \subset V$, on a

$$\forall w \in H_N, \int_{\Omega} \nabla w : \nabla v_N \, dx = \langle Av_N, w \rangle_{V', V} = \int_{\Omega} w \cdot Av_N \, dx,$$

d'après l'identification de H à son dual, via le produit scalaire de $L^2(\Omega)$.

En particulier, en prenant respectivement $w = v_N$, $w = \frac{dv_N}{dt}$ et $w = Av_N$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v_N \cdot Av_N \, dx &= \int_{\Omega} |\nabla v_N|^2 \, dx, \\ \int_{\Omega} \frac{dv_N}{dt} \cdot Av_N \, dx &= \int_{\Omega} \nabla \frac{dv_N}{dt} : \nabla v_N \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla v_N|^2 \, dx, \\ \int_{\Omega} \nabla v_N : \nabla (Av_N) \, dx &= \int_{\Omega} |Av_N|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Ces calculs sont parfaitement licites car la solution approchée v_N est régulière en temps et en espace.

Prenons donc $\psi_N = Av_N$ dans la formulation faible du problème approché, il vient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla v_N\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\mathcal{R}e} \|Av_N\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} f_N \cdot Av_N \, dx - \int_{\Omega} ((v_N \cdot \nabla) v_N) \cdot Av_N \, dx.$$

Il nous faut maintenant estimer le membre de droite de cette estimation. Pour cela, on utilise l'inégalité de Hölder, les injections de Sobolev précisées (proposition II.3.7) et enfin l'inégalité de Young de la façon suivante

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla v_N\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\mathcal{R}e} \|Av_N\|_{L^2}^2 &\leq \|f_N\|_{L^2} \|Av_N\|_{L^2} + \|Av_N\|_{L^2} \|v_N\|_{L^6} \|\nabla v_N\|_{L^3} \\ &\leq \|f_N\|_{L^2} \|Av_N\|_{L^2} \\ &\quad + C \|Av_N\|_{L^2} \left(\|v_N\|_{L^2}^{1-\frac{d}{3}} \|\nabla v_N\|_{L^2}^{\frac{d}{3}} \right) \left(\|\nabla v_N\|_{L^2}^{1-\frac{d}{6}} \|Av_N\|_{L^2}^{\frac{d}{6}} \right) \\ &\leq \|f_N\|_{L^2} \|Av_N\|_{L^2} + C \|Av_N\|_{L^2}^{1+\frac{d}{6}} \|\nabla v_N\|_{L^2}^{1+\frac{d}{6}} \|v_N\|_{L^2}^{1-\frac{d}{3}} \\ &\leq \frac{1}{2\mathcal{R}e} \|Av_N\|_{L^2}^2 + C\mathcal{R}e \|f_N\|_{L^2}^2 + C\mathcal{R}e^{\frac{6+d}{6-d}} \|\nabla v_N\|_{L^2}^{2\frac{6+d}{6-d}} \|v_N\|_{L^2}^{4\frac{3-d}{6-d}} \end{aligned}$$

d'où l'on tire :

$$\frac{d}{dt} \|\nabla v_N\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\mathcal{R}e} \|Av_N\|_{L^2}^2 \leq C\mathcal{R}e \|f_N\|_{L^2}^2 + C\mathcal{R}e^{\frac{6+d}{6-d}} \|\nabla v_N\|_{L^2}^{2\frac{6+d}{6-d}} \|v_N\|_{L^2}^{4\frac{3-d}{6-d}}. \quad (\text{IV.33})$$

A partir de maintenant on distingue le cas de la dimension 2 et celui de la dimension 3.

2.2 Le cas de la dimension 2

2.2.1 Existence

Nous avons déjà établi, lors de l'étude des solutions faibles (estimation (IV.16)), que :

$$\|v_N(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^t \|\nabla v_N(\tau)\|_{L^2}^2 \, d\tau \leq \|v_0\|_{L^2}^2 + \mathcal{R}e \int_0^t \|f_N(\tau)\|_{H^{-1}}^2 \, d\tau. \quad (\text{IV.34})$$

De plus, l'estimation (IV.33) écrite pour $d = 2$ donne :

$$\frac{d}{dt} \|\nabla v_N\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\mathcal{R}e} \|Av_N\|_{L^2}^2 \leq C\mathcal{R}e \|f_N\|_{L^2}^2 + C\mathcal{R}e^2 \|\nabla v_N\|_{L^2}^4 \|v_N\|_{L^2}. \quad (\text{IV.35})$$

Ainsi, après intégration en temps, et d'après (IV.34), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \|\nabla v_N(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^t \|Av_N(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \leq \|\nabla v_N(0)\|_{L^2}^2 + C\mathcal{R}e \int_0^t \|f(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \\
& + C\mathcal{R}e^2 \left(\|v_0\|_{L^2}^2 + \mathcal{R}e \int_0^T \|f(s)\|_{H^{-1}}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^t \|\nabla v_N(\tau)\|_{L^2}^2 \|\nabla v_N(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau.
\end{aligned}
\tag{IV.36}$$

Rappelons que $v_N(0) = \mathcal{P}_N v_0$, c'est-à-dire la projection orthogonale dans $(L^2(\Omega))^d$ de v_0 sur l'espace H_N . Nous avons déjà vu que, comme H_N est construit sur la base de fonctions propres de l'opérateur de Stokes, l'opérateur \mathcal{P}_N est aussi le projecteur orthogonal sur H_N dans l'espace V . Ainsi nous avons

$$\|\nabla v_N(0)\|_{L^2} = \|\mathcal{P}_N v_0\|_V \leq \|v_0\|_V = \|\nabla v_0\|_{L^2}. \tag{IV.37}$$

Le lemme de Gronwall (lemme II.4.8) appliqué à $y(t) = \|\nabla v_N(t)\|_{L^2}^2$, permet alors de déduire de (IV.36) la majoration suivante :

$$\|\nabla v_N(t)\|_{L^2}^2 \leq \left(\|\nabla v_0\|_{L^2}^2 + C\mathcal{R}e \int_0^T \|f(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \right) e^{k_N(t)},$$

où $k_N(t) = C\mathcal{R}e^2 \left(\|v_0\|_{L^2}^2 + \mathcal{R}e \int_0^T \|f(s)\|_{H^{-1}}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^t \|\nabla v_N(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau$. On utilise maintenant l'estimation sur $\int_0^t \|\nabla v_N(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau$ donnée par (IV.34), ce qui montre que pour tout N et tout $t \in [0, T]$,

$$k_N(t) \leq C\mathcal{R}e^3 \left(\|v_0\|_{L^2}^2 + \mathcal{R}e \int_0^T \|f(s)\|_{H^{-1}}^2 ds \right)^{\frac{3}{2}}.$$

On a donc montré qu'il existe une constante $C(v_0, f, T)$ telle que

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\nabla v_N(t)\|_{L^2} \leq C(v_0, f, T).$$

Grâce à cette estimation, on peut retourner à (IV.36) pour obtenir l'existence d'une autre constante, toujours notée $C(v_0, f, T)$, telle que

$$\int_0^T \|Av_N(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \leq C(v_0, f, T).$$

Tout ceci nous montre que la suite de solutions approchées $(v_N)_N$ est bornée dans $L^\infty(]0, T[, V)$ et dans $L^2(]0, T[, V \cap (H^2(\Omega))^d)$. On en déduit aisément, de façon similaire au cas des solutions faibles, que la suite $(\frac{dv_N}{dt})_N$ est bornée dans $L^2(]0, T[, H)$.

Ainsi, moyennant des extractions de sous-suites supplémentaires, on peut supposer que la suite de solutions approchées $(v_N)_N$ vérifie, **en plus** des convergences obtenues au paragraphe 1.6,

$$\begin{cases} v_N \rightharpoonup v \text{ dans } L^\infty(]0, T[, V) \text{ faiblement-}, \\ v_N \rightharpoonup v \text{ dans } L^2(]0, T[, V \cap (H^2(\Omega))^d) \text{ faiblement}, \\ \frac{dv_N}{dt} \rightharpoonup \frac{dv}{dt} \text{ dans } L^2(]0, T[, H) \text{ faiblement}. \end{cases}$$

À partir de ces estimations, on aboutit comme dans le cas des solutions faibles à l'existence d'une unique solution de l'équation (IV.1) telle que

$$v \in C^0(\mathbb{R}^+, V) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, V \cap (H^2(\Omega))^d) \text{ avec } \frac{dv}{dt} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, H).$$

En effet, la continuité de la solution à valeurs dans V résulte du théorème III.3.19 puisque $v \in L^2(]0, T[, D(A))$ avec $\frac{dv}{dt} \in L^2(]0, T[, H)$.

De plus maintenant que l'on sait que les termes $\frac{dv}{dt}$ et $(v \cdot \nabla)v$ sont dans $L^2(]0, T[, (L^2(\Omega))^d)$, on peut écrire

$$\nabla p = -\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\mathcal{R}e} \Delta v - (v \cdot \nabla)v + f \in L^2(]0, T[, (L^2(\Omega))^d).$$

Comme p est à moyenne nulle, l'inégalité de Poincaré (proposition II.3.10) nous montre que

$$p \in L^2(]0, T[, H^1(\Omega)).$$

□

2.2.2 Uniformité en temps

L'ingrédient essentiel ici est le lemme de Gronwall uniforme (lemme II.4.10).

Preuve (du Théorème IV.2.3).

On rappelle qu'on suppose que f ne dépend pas du temps de sorte que la régularisation en temps définie par (IV.12) n'est autre que $f_N = f$. On note λ_1 la plus petite valeur propre de l'opérateur de Stokes. On a vu dans la proposition III.3.20, qu'alors on a l'inégalité de Poincaré suivante $\|v\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \|\nabla v\|_{L^2}^2$. L'estimation (IV.15) donne

$$\frac{d}{dt} \|v_N\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda_1}{\mathcal{R}e} \|v_N\|_{L^2}^2 \leq \mathcal{R}e \|f\|_{H^{-1}}^2.$$

Le lemme II.4.7 permet alors de déduire que :

$$\|v_N(t)\|_{L^2}^2 \leq \|v_0\|_{L^2}^2 e^{-\frac{\lambda_1}{\mathcal{R}e} t} + \frac{\mathcal{R}e^2}{\lambda_1} \|f\|_{H^{-1}}^2 \leq \|v_0\|_{L^2}^2 + \frac{\mathcal{R}e^2}{\lambda_1} \|f\|_{H^{-1}}^2.$$

En intégrant (IV.15) entre t et $t+1$, et en utilisant l'inégalité ci-dessus, il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathcal{R}e} \int_t^{t+1} \|\nabla v_N(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau &\leq \|v_N(t)\|_{L^2}^2 + \mathcal{R}e \|f\|_{H^{-1}}^2 \\
&\leq \|v_0\|_{L^2}^2 + \mathcal{R}e \|f\|_{H^{-1}}^2 \left(1 + \frac{\mathcal{R}e}{\lambda_1}\right).
\end{aligned}$$

En utilisant (IV.35), ceci permet d'appliquer le lemme de Gronwall uniforme (lemme II.4.10), avec

$$\begin{aligned}
y(t) &= \|\nabla v_N\|_{L^2}^2, \\
g_1(t) &= C\mathcal{R}e \|f\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

et

$$g_2(t) = C\mathcal{R}e \|v_N\|_{L^2} \|\nabla v_N\|_{L^2}^2.$$

On obtient ainsi la majoration voulue sur les approximations de Galerkin v_N de la solution, uniformément en N . Plus précisément, on a montré

$$\|\nabla v_N\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, (L^2(\Omega))^{d \times d})} \leq C.$$

D'après le corollaire II.1.10, on sait que la norme est faiblement semi-continue inférieurement. L'inégalité précédente passe donc à la limite, ce qui donne :

$$\sup_{t \geq 0} \|\nabla v(t)\|_{L^2} \leq C.$$

□

2.3 Le cas de la dimension 3

L'estimation (IV.33) écrite pour $d = 3$ donne :

$$\frac{d}{dt} \|\nabla v_N\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\mathcal{R}e} \|Av_N\|_{L^2}^2 \leq C\mathcal{R}e \|f_N\|_{L^2}^2 + C\mathcal{R}e^3 \|\nabla v_N\|_{L^2}^6. \quad (\text{IV.38})$$

Nous allons étudier successivement le cas général puis le cas des données petites.

2.3.1 Cas général

On note pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_N(t) = \|\nabla v_N(t)\|_{L^2}^2$. En utilisant (IV.12) et (IV.37), et en intégrant en temps (IV.38), il vient pour tout $t \geq 0$

$$y_N(t) \leq \|\nabla v_0\|_{L^2}^2 + C\mathcal{R}e \int_0^t \|f(s)\|_{L^2}^2 ds + C\mathcal{R}e^3 \int_0^t y_N^3(s) ds.$$

Soit donc $T^* > 0$ l'unique réel vérifiant

$$T^* = \frac{1}{2C\mathcal{R}e^3 \left(\|\nabla v_0\|_{L^2}^2 + C\mathcal{R}e \int_0^{T^*} \|f(s)\|_{L^2}^2 ds \right)^2}. \quad (\text{IV.39})$$

D'après le lemme II.4.11, on déduit que pour tout $T < T^*$, il existe une constante $C(T, \|\nabla v_0\|_{L^2}, \mathcal{R}e, \|f\|_{L^2})$ indépendante de N telle que :

$$\forall t < T, \|\nabla v_N(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^t \|Av_N(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \leq C(T, \|\nabla v_0\|_{L^2}, \mathcal{R}e, \|f\|_{L^2}).$$

Remarquons que T^* tend vers 0 quand $\|\nabla v_0\|_{L^2}$ tend vers l'infini mais aussi que ce "temps de vie" tend vers l'infini quand les données v_0 et f tendent vers 0. Ce dernier comportement va être précisé dans la section 2.3.3.

En appliquant le théorème de régularité du problème de Stokes (théorème III.3.16) on déduit de ce qui précède :

Proposition IV.2.4. *Soient $\mathcal{R}e > 0$, $v_0 \in V$, et f dans $L_{loc}^2([0, +\infty[, (L^2(\Omega))^d)$, alors il existe $T^* > 0$ tel que pour tout $T < T^*$, il existe une constante $C = C(T, \|\nabla v_0\|_{L^2}, \mathcal{R}e, \|f\|_{L^2})$ telle que :*

$$\begin{aligned} \forall t \leq T, \|\nabla v_N(t)\|_{L^2} &\leq C, \\ \int_0^T \|v_N(\tau)\|_{H^2}^2 d\tau &\leq C. \end{aligned} \quad (\text{IV.40})$$

Il convient maintenant d'estimer le terme non linéaire $(v_N \cdot \nabla)v_N$.

Proposition IV.2.5. *Pour tout $T < T^*$, il existe une constante C telle que :*

$$\int_0^T \|(v_N(\tau) \cdot \nabla)v_N(\tau)\|_{L^2}^4 d\tau \leq C. \quad (\text{IV.41})$$

Preuve.

En utilisant la proposition II.3.7, on a la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \|(v_N \cdot \nabla)v_N\|_{L^2}^4 &\leq \|v_N\|_{L^6}^4 \|\nabla v_N\|_{L^3}^4 \\ &\leq \|\nabla v_N\|_{L^2}^4 \left(\|\nabla v_N\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|Av_N\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \right)^4 \\ &\leq \|\nabla v_N\|_{L^2}^6 \|Av_N\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

L'estimation (IV.40) permet alors de conclure. \square

Ceci montre en particulier que le terme non linéaire est borné dans $L^2([0, T], (L^2(\Omega))^d)$.

Remarque IV.2.2. Quand on veut estimer la dérivée en temps de v_N , on voit que dans l'égalité

$$\frac{dv_N}{dt} = -{}^t \mathcal{P}_N(B(v_N, v_N)) - \frac{1}{\mathcal{R}e} Av_N + {}^t \mathcal{P}_N(f_N), \quad (\text{IV.42})$$

le terme limitant est maintenant le terme linéaire.

Proposition IV.2.6. *Pour tout $T < T^*$, il existe une constante C telle que :*

$$\left\| \frac{dv_N}{dt} \right\|_{L^2([0, T[, (L^2(\Omega))^d)} \leq C. \quad (\text{IV.43})$$

Preuve.

Ceci découle facilement de l'hypothèse sur f , des estimations (IV.40), (IV.41) et de l'égalité (IV.42). \square

Comme dans le cas bidimensionnel, les estimations (IV.40) et (IV.43) permettent de conclure à l'existence d'une sous-suite toujours notée $(v_N)_N$ telle que pour tout $T < T^*$,

$$\begin{cases} v_N \rightharpoonup v \text{ dans } L^\infty([0, T[, V) \text{ faiblement-}\star, \\ v_N \rightharpoonup v \text{ dans } L^2([0, T[, V \cap (H^2(\Omega))^d) \text{ faiblement,} \\ \frac{dv_N}{dt} \rightharpoonup \frac{dv}{dt} \text{ dans } L^2([0, T[, H) \text{ faiblement,} \\ v_N \rightarrow v \text{ dans } L^2([0, T[, V) \text{ fortement,} \end{cases}$$

où v est solution de (IV.1). La solution v ainsi obtenue est bien une solution forte des équations. Comme on l'a déjà vu dans le cas bidimensionnel, la pression p appartient alors à $L^2([0, T[, H^1(\Omega))$.

2.3.2 Unicité des solutions fortes

Soient donc v_1 et v_2 deux solutions fortes de (IV.1) pour la même donnée initiale $v_0 \in V$, et posons $v = v_2 - v_1$. Comme pour $i \in \{1, 2\}$, $(v_i \cdot \nabla)v_i$ et $\frac{dv_i}{dt}$ sont dans $L^2([0, T[, (L^2(\Omega))^d)$, on peut étendre la formulation (IV.7) pour v_1 et v_2 à des fonctions test $\varphi \in L^2([0, T[, V)$. Par soustraction de ces deux formulations, on obtient que v vérifie pour tout $\varphi \in L^2([0, T[, V)$,

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\langle \frac{dv}{dt}, \varphi \right\rangle_{V', V} dt + \frac{1}{Re} \int_0^T \int_\Omega \nabla v : \nabla \varphi dx dt \\ + \int_0^T \int_\Omega ((v_2 \cdot \nabla)v) \cdot \varphi dx dt + \int_0^T \int_\Omega ((v \cdot \nabla)v_1) \cdot \varphi dx dt = 0. \end{aligned}$$

Il est maintenant loisible, pour tout $t \in]0, T[$, de prendre $\varphi = 1_{[0, t]} \cdot v$ dans l'égalité précédente, et comme d'après (IV.2), on a $\int_\Omega ((v_2 \cdot \nabla)v) \cdot v dx = 0$, on obtient avec le théorème II.5.12 :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|v(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \\
& \leq \frac{1}{2} \|v(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla v_1(\tau)\|_{L^2} \|v(\tau)\|_{L^4}^2 d\tau \\
& \leq \frac{1}{2} \|v(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t g(\tau) \left(\|v(\tau)\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \|\nabla v(\tau)\|_{L^2}^{\frac{3}{4}} \right)^2 d\tau \\
& \leq \frac{1}{2} \|v(0)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\mathcal{R}e} \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau + C \int_0^t g(\tau)^4 \|v(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau,
\end{aligned}$$

où $\tau \mapsto g(\tau) = \|\nabla v_1(\tau)\|_{L^2} \in L^\infty(]0, T[)$ car v_1 est une solution forte du problème. On a donc obtenu l'inégalité

$$\frac{1}{2} \|v(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2} \|v(0)\|_{L^2}^2 + C \int_0^t g(\tau)^4 \|v(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau,$$

ce qui permet d'appliquer le lemme de Gronwall II.4.8 qui nous assure alors que

$$\|v(t)\|_{L^2}^2 \leq \|v(0)\|_{L^2}^2 \exp \left(2C \int_0^t g(\tau)^4 d\tau \right).$$

Or, $v(0) = v_1(0) - v_2(0) = v_0 - v_0 = 0$, et l'inégalité précédente implique que $v(t) = 0$ pour tout t , et termine donc la démonstration du théorème. \square

En fait on a un résultat plus fort qui s'énonce ainsi.

Théorème IV.2.7 (Unicité faible-fort). *En dimension $d = 3$, soit u une solution faible de (IV.1) vérifiant l'inégalité d'énergie (IV.11) et soit v une solution faible de (IV.1) telle qu'il existe un temps $T > 0$, pour lequel*

$$v \in L^4(]0, T[, V).$$

Si $u(0) = v(0)$ alors les solutions u et v coïncident sur $[0, T[$.

Remarque IV.2.3.

- Notons, que si v est une solution forte construite ci-dessus, alors v est dans $L^\infty(]0, T[, V) \subset L^4(]0, T[, V)$ pour tout $T < T^*$ et vérifie donc les hypothèses du théorème.
- On est obligé de supposer que la solution faible u vérifie l'inégalité d'énergie (IV.11). En effet, comme on l'a déjà noté, on sait seulement que la solution faible construite par la méthode de Galerkin proposée ci-dessus vérifie cette inégalité. Comme on ne possède pas de résultat d'unicité des solutions faibles en dimension 3, on ne peut pas assurer que toute autre éventuelle solution faible vérifie cette inégalité d'énergie.

Preuve.

Il faut tout d'abord remarquer que la solution faible v vérifie l'égalité d'énergie (IV.32). En effet, on a vu qu'en dimension 3, les solutions faibles

vérifient $\frac{dv}{dt} \in L^{\frac{4}{3}}(]0, T[, V')$ et $(v \cdot \nabla)v \in L^{\frac{4}{3}}(]0, T[, V')$, ce qui permet d'étendre la formulation faible (IV.7) à des fonctions tests $\varphi \in L^4(]0, T[, V)$. Si on suppose donc que $v \in L^4(]0, T[, V)$, on peut prendre $\varphi = v$ dans la formulation faible et obtenir, de façon maintenant usuelle, l'égalité d'énergie (IV.32).

Par ailleurs, comme $v \in L^4(]0, T[, V)$, on montre aisément que $(v \cdot \nabla)v$ est dans $L^2(]0, T[, V')$ ce qui prouve que l'on a en fait $\frac{dv}{dt} \in L^2(]0, T[, V')$.

Comme $v \in L^4(]0, T[, V)$, pour la même raison que ci-dessus, on peut prendre v comme fonction test dans la formulation faible (IV.7) pour la solution u . De même comme on l'a vu plus haut on peut prendre la fonction $u \in L^2(]0, T[, V)$ comme fonction test dans la formulation faible (IV.7) pour la solution v . On obtient donc pour tout $t \in [0, T]$ les deux relations :

$$\begin{aligned} \int_0^t \left\langle \frac{du}{dt}, v \right\rangle_{V', V} d\tau + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^t \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v dx d\tau \\ + \int_0^t \int_{\Omega} ((u \cdot \nabla)u) \cdot v dx d\tau = \int_0^t \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} d\tau, \\ \int_0^t \left\langle \frac{dv}{dt}, u \right\rangle_{V', V} d\tau + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^t \int_{\Omega} \nabla v : \nabla u dx d\tau \\ + \int_0^t \int_{\Omega} ((v \cdot \nabla)v) \cdot u dx d\tau = \int_0^t \langle f, u \rangle_{H^{-1}, H_0^1} d\tau. \end{aligned}$$

Un calcul purement algébrique sur les termes non-linéaires, ainsi que l'application du théorème II.5.12, montre alors que si on note $w = u - v$, on obtient en ajoutant les deux relations précédentes

$$\begin{aligned} (u(t), v(t))_H + \frac{2}{\mathcal{R}e} \int_0^t \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v dx d\tau \\ = (u(0), v(0))_H + \int_0^t \langle f, u + v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} d\tau - \int_0^t \int_{\Omega} ((w \cdot \nabla)w) \cdot v dx d\tau. \end{aligned} \quad (\text{IV.44})$$

L'inégalité d'énergie pour u et l'égalité d'énergie pour v s'écrivent :

$$(u(t), u(t))_H + \frac{2}{\mathcal{R}e} \int_0^t \|\nabla u\|_{L^2}^2 d\tau \leq (u(0), u(0))_H + 2 \int_0^t \langle f, u \rangle_{H^{-1}, H_0^1} d\tau, \quad (\text{IV.45})$$

$$(v(t), v(t))_H + \frac{2}{\mathcal{R}e} \int_0^t \|\nabla v\|_{L^2}^2 d\tau = (v(0), v(0))_H + 2 \int_0^t \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} d\tau, \quad (\text{IV.46})$$

en formant la relation (IV.45) + (IV.46) - 2 × (IV.44) on obtient l'inégalité :

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\mathcal{R}e} \int_0^t \|\nabla w(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \leq \|w(0)\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \int_{\Omega} ((w \cdot \nabla)w) \cdot v dx d\tau.$$

Par hypothèse on a $w(0) = u(0) - v(0) = 0$, ainsi en utilisant les inégalités de Sobolev données par la proposition II.3.7 et l'inégalité de Young, on déduit

$$\begin{aligned}
& \|w(t)\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\mathcal{R}e} \int_0^t \|\nabla w(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \\
& \leq 2 \int_0^t \|w(\tau)\|_{L^3} \|\nabla w(\tau)\|_{L^2} \|v(\tau)\|_{L^6} d\tau \\
& \leq C \int_0^t \|w(\tau)\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla w(\tau)\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \|\nabla v(\tau)\|_{L^2} d\tau \\
& \leq \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_0^t \|\nabla w(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau + C \int_0^t \|w(\tau)\|_{L^2}^2 \|\nabla v(\tau)\|_{L^2}^4 d\tau.
\end{aligned}$$

En particulier on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 \leq C \int_0^t \|w(\tau)\|_{L^2}^2 \|\nabla v(\tau)\|_{L^2}^4 d\tau,$$

ce qui permet de conclure en utilisant le lemme de Gronwall, car par hypothèse $\nabla v \in L^4([0, T], (L^2(\Omega))^{d \times d})$.

□

2.3.3 Cas des données petites

On a obtenu en (IV.39) une minoration du temps de vie des solutions qui montre que ce temps de vie est d'autant plus grand que les données sont petites. Le but de ce paragraphe est de montrer, en dimension $d = 3$, que si les forces extérieures f , le nombre de Reynolds $\mathcal{R}e$ et la donnée initiale v_0 sont assez petits, alors $T^* = +\infty$, c'est-à-dire que la solution forte associée aux données (v_0, f) est globale. Commençons par donner un résultat élémentaire concernant une classe d'inéquations différentielles non-linéaires.

Lemme IV.2.8. *Soit z une fonction numérique de classe \mathcal{C}^1 , positive, vérifiant l'inégalité différentielle :*

$$\begin{cases} z'(t) + \alpha z(t) \leq \beta + \gamma z(t)^3, \\ z(0) = z_0, \end{cases}$$

sur un intervalle de temps maximal, et où $\alpha, \beta, \gamma, z_0$ sont des données positives. Si

$$z_0 \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{2\gamma}}, \quad \beta \leq \frac{\alpha}{4} \sqrt{\frac{\alpha}{2\gamma}},$$

alors la fonction z est définie pour tout $t \geq 0$ et de plus, on a

$$z(t) \leq \sqrt{\frac{\alpha}{2\gamma}}.$$

Preuve.

Soit $z_0 \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{2\gamma}}$, comme $t \mapsto z(t)$ est continue, il existe un temps maximal $T_1 > 0$ tel que $z(t)$ reste inférieur à $\sqrt{\frac{\alpha}{2\gamma}}$ sur l'intervalle $[0, T_1]$. Si $T_1 = +\infty$, le lemme est démontré, supposons donc $T_1 < +\infty$ et montrons qu'on aboutit à une contradiction.

Ainsi, pour $t \leq T_1$, $\gamma z^2(t) - \alpha$ reste inférieur à $-\frac{\alpha}{2}$ et donc on a l'inégalité :

$$z'(t) \leq \beta + z(t)(\gamma z(t)^2 - \alpha) \leq \beta - \frac{\alpha}{2}z(t).$$

Ainsi, d'après le lemme II.4.7, on a pour tout $t \leq T_1$,

$$z(t) \leq z_0 e^{-\frac{\alpha}{2}t} + \frac{2\beta}{\alpha},$$

et donc d'après les hypothèses sur z_0, α et β , on a

$$z(T_1) \leq z_0 e^{-\frac{\alpha}{2}T_1} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{2\gamma}} < \sqrt{\frac{\alpha}{2\gamma}}.$$

La fonction z étant continue, on voit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $z(t) \leq \sqrt{\frac{\alpha}{2\gamma}}$ pour tout $t \in [T_1, T_1 + \varepsilon]$, ce qui contredit la maximalité de T_1 . \square

On peut maintenant prouver la globalité des solutions fortes des équations de Navier-Stokes en dimension 3 pour des données petites.

Preuve (du Théorème IV.2.2).

D'après la proposition III.3.20, l'inégalité (IV.38) fournit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\nabla v_N(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda_1}{\mathcal{R}e} \|\nabla v_N(t)\|_{L^2}^2 &\leq C\mathcal{R}e \|f_N\|_{L^2}^2 + C\mathcal{R}e^3 \|\nabla v_N(t)\|_{L^2}^6 \\ &\leq C\mathcal{R}e \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2)}^2 + C\mathcal{R}e^3 \|\nabla v_N(t)\|_{L^2}^6, \end{aligned}$$

et le lemme précédent permet de conclure que sous l'hypothèse

$$\|\nabla v_0\|_{L^2}^2 \leq \frac{C(\Omega)}{\mathcal{R}e^2}, \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2)}^2 \leq \frac{C(\Omega)}{\mathcal{R}e^4},$$

où $C(\Omega)$ dépend de λ_1 et des constantes de Sobolev sur l'ouvert Ω , la suite $(\nabla v_N)_N$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, (L^2(\Omega))^{d \times d})$. Ceci permet de conclure à l'existence d'une solution globale. \square

2.4 Régularité à tous ordres pour les équations de Navier-Stokes

Théorème IV.2.9. *Soit Ω un ouvert borné, connexe et de classe $\mathcal{C}^{k+1,1}$ de \mathbb{R}^d , avec $k \geq 1$. Soient $\mathcal{R}e > 0$, v_0 dans V et f dans $L_{loc}^2([0, +\infty[, (L^2(\Omega))^d)$.*

D'après le théorème IV.2.1, il existe $0 < T^* \leq +\infty$ et un unique couple (v, p) (à une constante près pour la pression), solution forte de l'équation de Navier-Stokes (IV.1) au sens du théorème IV.2.1, pour la donnée initiale v_0 .

On suppose maintenant que l'on a de plus

$$v_0 \in (H^k(\Omega))^d,$$

et pour tout entier $s \leq \frac{k}{2}$,

$$\frac{\partial^s f}{\partial t^s} \in L^2(]0, T[, (H^{k-2s-1}(\Omega))^d).$$

Alors, sous l'hypothèse (IV.50) de compatibilité au bord sur les données, que nous détaillerons dans la preuve, la solution (v, p) des équations de Navier-Stokes possède les propriétés de régularité suivantes :

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{N}, s \leq \frac{k}{2}, \quad \frac{\partial^s v}{\partial t^s} &\in L^\infty(]0, T[, (H^{k-2s}(\Omega))^d \cap V), \\ \forall s \in \mathbb{N}, s \leq \frac{k}{2}, \quad \frac{\partial^s v}{\partial t^s} &\in L^2(]0, T[, (H^{k-2s+1}(\Omega))^d \cap V), \\ \text{pour } s = E\left(\frac{k}{2} + 1\right), \quad \frac{\partial^s v}{\partial t^s} &\in L^2(]0, T[, V_{k-2s+1}), \\ \forall s \in \mathbb{N}, s \leq \frac{k}{2} - 1, \quad \frac{\partial^s p}{\partial t^s} &\in L^\infty(]0, T[, H^{k-2s-1}(\Omega)), \\ \forall s \in \mathbb{N}, s < \frac{k}{2}, \quad \frac{\partial^s p}{\partial t^s} &\in L^2(]0, T[, H^{k-2s}(\Omega)). \end{aligned}$$

Avant de démontrer ce théorème, on va énoncer et montrer un corollaire immédiat de ce résultat.

Corollaire IV.2.10. Dans les conditions du théorème précédent, on a de plus

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{N}, s < \frac{k}{2}, \quad \frac{\partial^s v}{\partial t^s} &\in \mathcal{C}^0([0, T], (H^{k-2s}(\Omega))^d \cap V), \\ \text{si } s = \frac{k}{2} \in \mathbb{N}, \quad \frac{\partial^s v}{\partial t^s} &\in \mathcal{C}^0([0, T], H), \\ \forall s \in \mathbb{N}, s < \frac{k}{2} - 1, \quad \frac{\partial^s p}{\partial t^s} &\in \mathcal{C}^0([0, T], H^{k-2s-1}(\Omega)). \end{aligned}$$

Preuve (du corollaire).

Il suffit d'utiliser les résultats du théorème précédent ainsi que le corollaire II.5.13 (ou le théorème III.3.19).

□

Preuve (du théorème).

Par souci de simplicité des calculs, on va choisir un nombre de Reynolds égal à 1 dans la preuve qui suit de sorte que (v, p) est solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v - \Delta v + \nabla p = f, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} v = 0, & \text{dans } \Omega, \\ v = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

De façon usuelle, nous allons faire ci-dessous des estimations d'énergie formelles sur l'équation précédente. Pour faire la preuve complète, il faut effectuer ces estimations sur les approximations de Galerkin de la solution (qui sont aussi régulières qu'on veut à condition que le domaine soit assez régulier) puis passer à la limite. Ce processus est maintenant standard et nous laissons les détails au lecteur.

Par ailleurs, afin de préserver la lisibilité des calculs, nous posons jusqu'à la fin de la preuve :

$$v^{(s)} = \frac{\partial^s v}{\partial t^s}, \quad p^{(s)} = \frac{\partial^s p}{\partial t^s}, \quad f^{(s)} = \frac{\partial^s f}{\partial t^s}.$$

Il s'agit bien entendu de raisonner par récurrence. Le cas $k = 1$, n'est qu'une réécriture de la régularité obtenue par le théorème IV.2.1.

Soit donc $k \geq 2$ et supposons le résultat acquis jusqu'au rang $k - 1$ et montrons-le au rang k . La démonstration est maintenant différente selon la parité de k .

Premier cas : k est impair

On pose $k = 2S + 1$. L'idée est de dériver l'équation s fois par rapport au temps, pour tout $0 \leq s \leq S$:

$$\frac{\partial v^{(s)}}{\partial t} - \Delta v^{(s)} + \sum_{r=0}^s C_s^r (v^{(r)} \cdot \nabla) v^{(s-r)} + \nabla p^{(s)} = f^{(s)}. \quad (\text{IV.47})$$

Plus particulièrement au temps $t = 0$, on trouve pour tout $s \leq S$:

$$\begin{aligned} v_0^{(s)} &= v_{|t=0}^{(s)} = \frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial t} \Big|_{t=0} \\ &= \Delta v_0^{(s-1)} - \sum_{r=0}^{s-1} C_{s-1}^r (v_0^{(r)} \cdot \nabla) v_0^{(s-1-r)} - \nabla p_0^{(s-1)} + f_0^{(s-1)}. \end{aligned}$$

On peut alors projeter cette équation sur l'ensemble des fonctions à divergence nulle pour obtenir

$$v_0^{(s)} = -A v_0^{(s-1)} - \sum_{r=0}^{s-1} C_{s-1}^r \mathcal{P} \left((v_0^{(r)} \cdot \nabla) v_0^{(s-1-r)} \right) + \mathcal{P} f_0^{(s-1)}. \quad (\text{IV.48})$$

Notons maintenant que ces équations ont bien un sens. En effet, le résultat étant supposé vrai au rang $k - 1$, on peut appliquer le corollaire IV.2.10 au rang $k - 1$, ce qui prouve que pour tout $s \leq S$ la trace de

$v^{(s)}$ à $t = 0$ est bien définie. De même les hypothèses de régularité sur f et toutes ses dérivées en temps montrent que $f_0^{(s)}$ est bien défini et de plus on a

$$f_0^{(s)} \in (H^{k-2s-2}(\Omega))^d.$$

Grâce à l'hypothèse $v_0 \in (H^k(\Omega))^d$ et aux équations (IV.48), il est maintenant aisé de montrer (par une petite récurrence) que pour tout $s \leq S$, on a

$$v_0^{(s)} \in (H^{k-2s}(\Omega))^d. \quad (\text{IV.49})$$

Pour cela, on utilise le fait que l'opérateur de Stokes envoie $(H^t(\Omega))^d$ sur $(H^{t-2}(\Omega))^d$ et le fait que le produit de deux fonctions respectivement dans H^{s_1} et H^{s_2} ($s_1, s_2 > 0$ entiers) est dans H^s avec $s = \min(s_1, s_2)$ sauf si $s_1 = s_2 = 1$ auquel cas $s = 0$. La preuve aisée de ce résultat est laissée au lecteur.

On peut maintenant donner l'hypothèse de compatibilité nécessaire à l'obtention de la régularité de la solution à tous ordres. Intuitivement, comme v est nulle au bord, on voit bien que si v est suffisamment régulière, on doit avoir $v^{(s)} = 0$ sur le bord également. Ainsi, pour espérer avoir la continuité jusqu'à $t = 0$ de $v^{(s)}$ à valeurs dans $(H^1(\Omega))^d$ par exemple, on voit qu'on doit avoir $v_0^{(s)} = 0$ sur le bord de Ω . On va donc supposer dans toute la suite que les $v_0^{(s)}$ définis par récurrence par la formule (IV.48), vérifient la condition

$$v_0^{(s)} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (\text{IV.50})$$

Sous cette hypothèse, on voit qu'on a montré en particulier, en prenant $s = S$ dans (IV.49), que

$$v_0^{(S)} \in V.$$

On reprend alors l'équation (IV.47) avec $s = S$, dont on sait maintenant que la donnée initiale est dans V . L'idée est donc de multiplier cette équation par $Av^{(S)}$ et d'intégrer par parties pour obtenir l'estimation de l'énergie suivante

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla v^{(S)}\|_{L^2}^2 + \|Av^{(S)}\|_{L^2}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \|Av^{(S)}\|_{L^2}^2 + C \sum_{r=0}^S \|(v^{(r)} \cdot \nabla)v^{(S-r)}\|_{L^2}^2 + C \|f^{(S)}\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, on sait que, pour tout $r \leq S$

$$v^{(r)} \in L^\infty([0, T[, (H^{k-2r-1}(\Omega))^d \cap V) \cap L^2([0, T[, (H^{k-2r}(\Omega))^d \cap V),$$

et donc en particulier pour tout $r \leq S - 1$

$$\begin{aligned} v^{(r)} &\in L^\infty([0, T[, (H^2(\Omega))^d \cap V) \cap L^2([0, T[, (H^3(\Omega))^d \cap V), \\ \text{et } v^{(S)} &\in L^\infty([0, T[, H) \cap L^2([0, T[, V). \end{aligned} \quad (\text{IV.51})$$

Ainsi on peut contrôler le terme non-linéaire de l'estimation ci-dessus de la façon suivante, en séparant le cas $r = S$:

$$\begin{aligned} &\sum_{r=0}^S \|(v^{(r)} \cdot \nabla) v^{(S-r)}\|_{L^2}^2 \\ &\leq \sum_{r=0}^{S-1} \|v^{(r)}\|_{L^\infty}^2 \|\nabla v^{(S-r)}\|_{L^2}^2 + \|v^{(S)}\|_{L^4}^2 \|\nabla v^{(0)}\|_{L^4}^2 \\ &\leq C \left(\sum_{r=0}^{S-1} \|v^{(r)}\|_{H^2}^2 \|v^{(S-r)}\|_{H^1}^2 + \|v^{(S)}\|_{H^1}^2 \|v^{(0)}\|_{H^1}^2 \right) \\ &\leq k_1(t) + k_2(t) \|\nabla v^{(S)}\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

où k_1 et k_2 sont deux fonctions de t appartenant à $L^1([0, T[)$ d'après (IV.51). Au final, l'estimation d'énergie s'écrit

$$\frac{d}{dt} \|\nabla v^{(S)}\|_{L^2}^2 + \|Av^{(S)}\|_{L^2}^2 \leq C \|f^{(S)}\|_{L^2}^2 + Ck_1(t) + Ck_2(t) \|\nabla v^{(S)}\|_{L^2}^2,$$

et nous permet d'utiliser le lemme de Gronwall pour conclure que

$$v^{(S)} \in L^\infty([0, T[, V) \cap L^2([0, T[, (H^2(\Omega))^d \cap V).$$

Ceci constitue la première partie du résultat que nous devons montrer.

Ecrivons maintenant l'équation (IV.47) prise en $s = S$ et projetée sur les fonctions à divergence nulle sous la forme :

$$v^{(S+1)} = \frac{\partial v^{(S)}}{\partial t} = -Av^{(S)} - \sum_{r=0}^S C_S^r \mathcal{P} \left((v^{(r)} \cdot \nabla) v^{(S-r)} \right) + \mathcal{P} f^{(S)}.$$

Grâce aux hypothèses sur $f^{(s)}$ et au résultat obtenu ci-dessus, on obtient immédiatement que

$$v^{(S+1)} \in L^\infty([0, T[, V') \cap L^2([0, T[, H).$$

Maintenant, on réécrit à nouveau l'équation (IV.47) prise en $s = S$ mais sous une forme un peu différente

$$Av^{(S)} = -\Delta v^{(S)} + \nabla p^{(S)} = f^{(S)} - \frac{\partial v^{(S)}}{\partial t} + \sum_{r=0}^S C_S^r (v^{(r)} \cdot \nabla) v^{(S-r)},$$

qui fait apparaître le couple $(v^{(S)}, p^{(S)})$ comme solution d'un certain problème de Stokes. Or, les résultats précédents obtenus sur $v^{(S+1)}$, ainsi

que les hypothèses sur f , montrent que le second membre de ce problème de Stokes est dans $L^\infty(]0, T[, V') \cap L^2(]0, T[, (L^2(\Omega))^d)$. Ainsi, en utilisant le théorème de régularité pour le problème de Stokes (théorème III.3.16), et le fait que l'opérateur A est un isomorphisme de V sur V' , on obtient

$$\begin{aligned} v^{(S)} &\in L^\infty(]0, T[, V) \cap L^2(]0, T[, (H^2(\Omega))^d \cap V), \\ p^{(S)} &\in L^2(]0, T[, H^1(\Omega)). \end{aligned}$$

La fin de la preuve est maintenant claire. On procède de la même façon par récurrence descendante de $s = S$ à $s = 0$, en écrivant à chaque fois que $(v^{(s)}, p^{(s)})$ est solution du problème de Stokes

$$-\Delta v^{(s)} + \nabla p^{(s)} = f^{(s)} - \frac{\partial v^{(s)}}{\partial t} + \sum_{r=0}^s C_s^r (v^{(r)} \cdot \nabla) v^{(s-r)},$$

dont la régularité du second membre est donnée par les résultats au rang $s + 1$. Ceci conclut la preuve dans le cas où k est impair.

Second cas : k est pair

On pose $k = 2S$. Le principe est tout à fait identique au cas précédent et nous ne détaillerons pas la preuve qui est même légèrement plus simple. Tout d'abord la première partie de la preuve est strictement la même de sorte que (IV.49) est encore vraie. Bien sûr maintenant $k = 2S$ et donc on a seulement

$$v_0^{(S)} \in H.$$

Ainsi, on peut seulement effectuer une estimation L^2 sur l'équation (IV.47) pour $s = S$. Celle-ci s'obtient en multipliant l'équation par $v^{(S)}$ et en intégrant par parties. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v^{(S)}\|_{L^2}^2 + \|\nabla v^{(S)}\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{2} \|\nabla v^{(S)}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|f^{(S)}\|_{H^{-1}}^2 \\ &\quad + \sum_{r=0}^S \left| \int_{\Omega} \left((v^{(r)} \cdot \nabla) v^{(S-r)} \right) \cdot v^{(S)} dx \right|. \end{aligned}$$

On remarque alors que le terme non-linéaire correspondant à l'indice $r = 0$ est nul grâce à la propriété (IV.2). Les termes non-linéaires restant (pour $1 \leq r \leq S$) s'estiment alors de manière similaire au cas où k est impair en utilisant l'hypothèse de récurrence au rang $k - 1$. Par ailleurs, les hypothèses sur f nous donnent en particulier que $f^{(S)}$ est dans $L^2(]0, T[, (H^{-1}(\Omega))^d)$.

Au final, on obtient

$$v^{(S)} \in L^\infty(]0, T[, H) \cap L^2(]0, T[, V).$$

La fin de la preuve est alors strictement identique, les diverses régularités de $v^{(s)}$ et $p^{(s)}$ s'obtenant en écrivant que le couple $(v^{(s)}, p^{(s)})$ est solution

d'un problème de Stokes dont la régularité est connue par récurrence descendante en s .

□

2.5 Régularisation en temps

Comme pour tous les problèmes paraboliques non dégénérés (dont le modèle est l'équation de la chaleur), les solutions faibles des équations de Navier-Stokes se régularisent au cours du temps. Plus précisément, dans le cas **bidimensionnel**, si l'ouvert Ω est de classe \mathcal{C}^∞ et la donnée f suffisamment régulière alors partant d'une condition initiale v_0 dans H , la solution vérifie

$$v \in \mathcal{C}^\infty(]0, T[, V \cap (H^k(\Omega))^d), \text{ pour tout } k,$$

une telle régularité étant bien sûr fautive sur tout l'intervalle $[0, T]$.

Cette propriété illustre l'irréversibilité des phénomènes de diffusion. On ne tombera pas dans le piège de croire que ceci a lieu pour les solutions faibles en dimension 3! En effet n'ayant pas unicité de telles solutions on ne pourrait espérer qu'un résultat du type : "sous certaines hypothèses, il existe des solutions faibles qui se régularisent au cours du temps". De tels résultats n'ont aucune pertinence physique. Par contre, si on considère les solutions fortes locales en dimension 3, elles se régularisent également au cours du temps, sur tout l'intervalle de temps d'existence de la solution.

On va établir ce phénomène pour $k \leq 2$ et dans le cas où f ne dépend pas du temps. Le cas plus général peut s'obtenir en combinant la preuve qui va suivre avec la méthode utilisée dans le paragraphe précédent pour montrer le théorème IV.2.9.

Pour obtenir ce résultat on procède par approximation de Galerkin et on effectue les estimations qui vont suivre sur les solutions approchées, cette étape fastidieuse avec laquelle le lecteur est désormais familier est omise. On se contente donc d'effectuer les calculs formels.

Théorème IV.2.11. *Soient Ω un ouvert borné, connexe et de classe $\mathcal{C}^{1,1}$ de \mathbb{R}^2 , $\mathcal{R}e > 0$, v_0 donnée dans H et f donnée dans $(L^2(\Omega))^d$ indépendante du temps. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'unique solution faible (v, p) des équations de Navier-Stokes vérifie*

$$v \in \mathcal{C}^1([\varepsilon, +\infty[, H) \cap \mathcal{C}^0([\varepsilon, +\infty[, V) \cap L_{loc}^2([\varepsilon, +\infty[, V \cap (H^2(\Omega))^d),$$

et

$$p \in L_{loc}^2([\varepsilon, +\infty[, H^1(\Omega)).$$

Preuve.

Afin de simplifier les notations on note désormais \dot{v} la dérivée de v par rapport au temps. Soit $\psi \in V$ fixée indépendante du temps. La solution v vérifie presque partout

$$\langle \dot{v}, \psi \rangle_{V', V} + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \psi \, dx + \int_{\Omega} ((v \cdot \nabla) v) \cdot \psi \, dx = \int_{\Omega} f \cdot \psi \, dx.$$

Après multiplication par t et dérivation par rapport au temps on obtient, en introduisant $w = t\dot{v}$,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dw}{dt}, \psi \right\rangle_{V', V} + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_{\Omega} \nabla w : \nabla \psi \, dx + \frac{1}{\mathcal{R}e} \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \psi \, dx + \int_{\Omega} ((w \cdot \nabla) v) \cdot \psi \, dx \\ + \int_{\Omega} ((v \cdot \nabla) w) \cdot \psi \, dx + \int_{\Omega} ((v \cdot \nabla) v) \cdot \psi \, dx = \int_{\Omega} f \cdot \psi \, dx. \end{aligned}$$

En prenant $\psi = w(t)$ dans cette identité, et comme $\int_{\Omega} ((v \cdot \nabla) w) \cdot w \, dx = 0$ (grâce à (IV.2)), on trouve que la fonction w vérifie l'estimation d'énergie :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\mathcal{R}e} \|\nabla w\|_{L^2}^2 &= -\frac{1}{\mathcal{R}e} \int_{\Omega} \nabla v : \nabla w \, dx - \int_{\Omega} ((w \cdot \nabla) v) \cdot w \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} ((v \cdot \nabla) v) \cdot w \, dx + \int_{\Omega} f \cdot w \, dx \\ &\leq \frac{1}{\mathcal{R}e} \|\nabla v\|_{L^2} \|\nabla w\|_{L^2} + C \|\nabla v\|_{L^2} \|w\|_{L^2} \|\nabla w\|_{L^2} \\ &\quad + C \|v\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla v\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \|w\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla w\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} + \|f\|_{L^2} \|w\|_{L^2} \\ &\leq g(t) \|w\|_{L^2}^2 + h(t) + \frac{1}{2\mathcal{R}e} \|\nabla w\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

où g et h sont deux fonctions de $L^1([0, T])$ pour $T > 0$ fixé, car v est solution faible du problème et vérifie donc les estimations d'énergie correspondantes. Ainsi, on a

$$\frac{d}{dt} \|w\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\mathcal{R}e} \|\nabla w\|_{L^2}^2 \leq 2g(t) \|w\|_{L^2}^2 + 2h(t).$$

Comme $w(0) = 0$, on déduit de cette estimation, par le lemme de Gronwall, que pour tout $T > 0$

$$w \in L^\infty([0, T], H) \cap L^2([0, T], V),$$

ce qui implique de façon classique (voir la démonstration du théorème de Leray), que

$$\frac{dw}{dt} \in L^2([0, T], V').$$

Tout ceci montre (par le théorème II.5.13), que

$$w \in C^0([0, T], H).$$

Or $w = t \frac{dv}{dt}$, on voit donc que pour tout $\varepsilon > 0$, et tout $T > 0$ on a bien

$$v \in \mathcal{C}^1([\varepsilon, T], H) \cap \mathcal{C}^0([\varepsilon, T]; V).$$

Comme $v(\varepsilon) \in V$, l'application $t \mapsto v(t)$ est aussi une solution **forte** des équations de Navier-Stokes sur l'intervalle $[\varepsilon, T]$ (on utilise ici l'unicité des solutions **faibles** en dimension 2). Ainsi, on a bien

$$v \in L^2(]\varepsilon, T[, V \cap (H^2(\Omega))^d),$$

et

$$p \in L^2(]\varepsilon, T[, H^1(\Omega)).$$

□