Statistik für Wirtschaftswissenschaftler

von
Prof. Dr. Josef Bleymüller, Prof. Dr. Rafael Weißbach, Dr. Günther Gehlert, Prof. Dr. Herbert Gülicher

17., überarbeitete Auflage

Verlag Franz Vahlen München 2015

Verlag Franz Vahlen im Internet:
www.vahlen.de
ISBN 978 3 8006 4960 0

(3) Kritischer Bereich

Bei der vorliegenden zweiseitigen Fragestellung und einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ erhält man den kritischen Wert $z_c = 1{,}96$. Gilt für den aus den Stichproben berechneten Wert z der Prüfgröße $|z| > 1{,}96$, dann wird H_0 abgelehnt; ist dagegen $|z| \leq 1{,}96$, dann kann H_0 nicht abgelehnt werden.

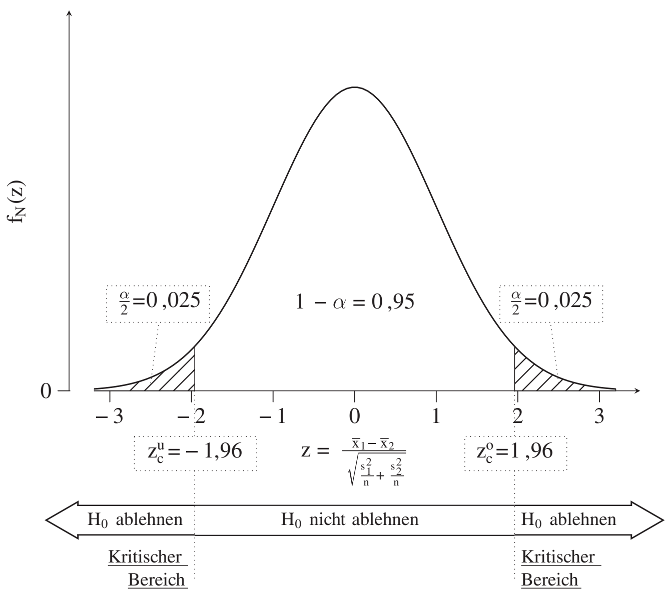

Abb. 17.4: Testverteilung und kritischer Bereich

(4) Berechnung der Prüfgröße

Aus den Ergebnissen der beiden Stichproben findet man

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{74 - 78}{\sqrt{\frac{8^2}{40} + \frac{7^2}{50}}} = -2{,}49\,.$$

(5) Entscheidung und Interpretation

Da wir hier $|z| > z_c$ erhalten, wird H_0 auf dem vorgegebenen Signifikanzniveau abgelehnt. Es muss also von einem signifikanten Unterschied der Ergebnisse der beiden Gruppen ausgegangen werden.

Fall (2)

Modellvoraussetzungen:

a) Die beiden Stichproben sind voneinander unabhängig.

b) Beide Stichproben stammen aus normalverteilten Grundgesamtheiten.

c) Die Umfänge der Grundgesamtheiten N_1 und N_2 sind so groß, dass die Korrekturfaktoren für endliche Gesamtheiten vernachlässigt werden können.

d) Es besteht **Varianzhomogenität**, d. h., es gilt $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.

Die *standardnormalverteilte Prüfgröße* beträgt dann

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}}\,.$$

Zur *Schätzung* der unbekannten Varianz σ^2 wird man wieder die beiden Stichprobenvarianzen S_1^2 und S_2^2 heranziehen: Nach Abschnitt 13.2 gehorcht die Zufallsvariable

$$U_1^* = \frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma^2}$$

einer Chi-Quadrat-Verteilung mit $\nu_1 = n_1 - 1$ Freiheitsgraden. Die Zufallsvariable

$$U_2^* = \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma^2}$$

gehorcht in analoger Weise einer Chi-Quadrat-Verteilung mit $\nu_2 = n_2 - 1$ Freiheitsgraden. Da U_1^* und U_2^* voneinander unabhängige Zufallsvariable sind und die Chi-Quadrat-Verteilung zur Klasse der reproduktiven Verteilungen gehört (vgl. Abschnitt 11.6), ist die Zufallsvariable

$$U = U_1^* + U_2^* = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{\sigma^2}$$

ebenfalls chi-quadrat-verteilt, und zwar mit $\nu = \nu_1 + \nu_2 = n_1 + n_2 - 2$ Freiheitsgraden. Nach Abschnitt 10.5 ist dann die Zufallsvariable

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{\nu}}}$$

studentverteilt mit $\nu = n_1 + n_2 - 2$ Freiheitsgraden. Setzt man für Z, U und ν die entsprechenden Ausdrücke ein, dann erhält man

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}\sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{\sigma^2(n_1 + n_2 - 2)}}}$$

und nach einigen Umformungen

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S\sqrt{\dfrac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}}$$

mit

$$S = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}\,.$$

S^2 ist also die *Schätzfunktion*, die zur Schätzung von σ^2 Anwendung findet; sie wird im Englischen als **„pooled variance“** bezeichnet. Aus den beiden Stichprobenvarianzen ermittelt man den *Schätzwert*

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\,.$$

T ist *studentverteilt mit* $\nu = n_1 + n_2 - 2$ *Freiheitsgraden* und kann als *Prüfgröße* des Tests verwendet werden. Dieser Test gehört also ebenfalls zur Gruppe der sogenannten t-Tests (vgl. Abschnitt 17.1, (2)).

Beispiel: Auf zwei Maschinen Nr. 1 und Nr. 2 wird Tee abgepackt. Auf Stichprobenbasis soll geprüft werden, ob die Maschine Nr. 1 mit einem größeren durchschnittlichen Füllgewicht arbeitet als die Maschine Nr. 2. Eine Stichprobe des Umfangs $n_1 = 12$ aus der laufenden Produktion der Maschine Nr. 1 liefert ein durchschnittliches Füllgewicht von $\overline{x}_1 = 130$ g bei einer Standardabweichung von $s_1 = 2{,}2$ g. Eine Stichprobe aus der Produktion der Maschine Nr. 2 vom Umfang $n_2 = 10$ ergibt ein durchschnittliches Füllgewicht von $\overline{x}_2 = 127$ g bei einer Standardabweichung von $s_2 = 1{,}8$ g. Aus der Vergangenheit sei bekannt, dass die Füllgewichte der beiden Maschinen *annähernd normalverteilt* sind und die *Varianzen* der Füllgewichte als *gleich* angenommen werden können (Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}01$).

(1) Null- und Alternativhypothese sowie Signifikanzniveau

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 = \mu_2 \\ H_A &: \mu_1 > \mu_2 \\ \alpha &= 0{,}01\,. \end{aligned}$$

(2) Prüfgröße und Testverteilung

Die Prüfgröße lautet bei Gültigkeit der Nullhypothese

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}{S\sqrt{\dfrac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}}$$

mit

$$S = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

und ist *studentverteilt mit* $\nu = n_1 + n_2 - 2 = 20$ *Freiheitsgraden.*

(3) Kritischer Bereich

Es liegt hier eine einseitige Fragestellung vor. Aus der Tabelle der Studentverteilung findet man zu dem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$ und $\nu = n_1 + n_2 - 2 = 20$ Freiheitsgraden den kritischen Wert $t_c = 2{,}528$. Für alle Werte t der Prüfgröße, für die $t \leq 2{,}528$ gilt, wird H_0 angenommen, für $t > 2{,}528$ wird H_0 abgelehnt.

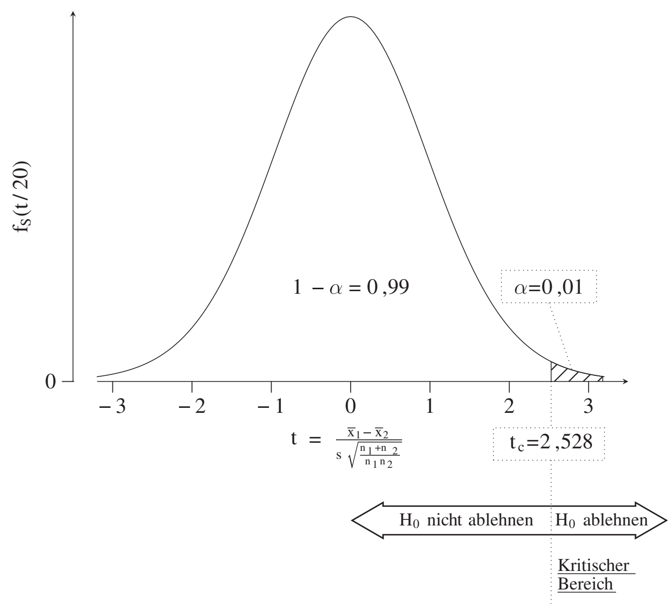

Abb. 17.5: Testverteilung und kritischer Bereich

(4) Berechnung der Prüfgröße

Man erhält

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \\ &= \frac{11 \cdot 2{,}2^2 + 9 \cdot 1{,}8^2}{20} = 4{,}12 \\ t &= \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{s\sqrt{\dfrac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}} \\ &= \frac{130 - 127}{\sqrt{4{,}12}\sqrt{\dfrac{22}{120}}} = 3{,}45\,. \end{aligned}$$

(5) Entscheidung und Interpretation

Es ist hier $t > t_c$; damit wird H_0 abgelehnt. Das durchschnittliche Füllgewicht der Maschine Nr. 1 ist also signifikant höher als das der Maschine Nr. 2.

17.4 Zweistichprobentests für die Differenz zweier Anteilswerte

Wie bei den vorangegangenen Testverfahren lässt sich bei der Beurteilung des Unterschiedes von Anteilswerten ein Test aus der entsprechenden Stichprobenverteilung herleiten. Bezeichnet man mit P_1 und P_2 wieder die Stichprobenanteilswerte zweier Stichproben, die den Umfang n_1 bzw. n_2 aufweisen und aus zwei Grundgesamtheiten mit den Anteilswerten θ_1 bzw. θ_2 stammen, dann ist nach Abschnitt 13.4 unter den *dort gemachten Voraussetzungen* die *Zufallsvariable*

$$Z = \frac{(P_1 - P_2) - (\theta_1 - \theta_2)}{\sqrt{\frac{\theta_1(1-\theta_1)}{n_1} + \frac{\theta_2(1-\theta_2)}{n_2}}}$$

standardnormalverteilt. Beschränkt man sich auf den bei weitem wichtigsten Fall **„Nullhypothese: Anteilswerte der beiden Grundgesamtheiten sind gleich“**, also $H_0 : \theta_1 = \theta_2 = \theta$, dann ergibt sich für Z und damit als *Prüfgröße* des Tests

$$Z = \frac{(P_1 - P_2)}{\sqrt{\theta(1-\theta)}\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}} .$$

Zur Schätzung des unbekannten Parameters θ nimmt man an, dass beide Stichproben aus der *gleichen Grundgesamtheit* entnommen wurden, und erhält somit die *Schätzfunktion*

$$P = \frac{n_1 P_1 + n_2 P_2}{n_1 + n_2} .$$

Beispiel: Eine Stichprobe im Umfang von $n_1 = 400$ Haushalten im Vorort A einer Großstadt ergab $x_1 = 39$ Haushalte mit einem Jahreseinkommen von mehr als 60 000 €. Eine zweite Stichprobe im Umfang von $n_2 = 300$ Haushalten im Vorort B der gleichen Großstadt $x_2 = 45$ Haushalte mit einem Jahreseinkommen von mehr als 60 000 €. Steht dieses Ergebnis mit der Hypothese in Widerspruch, dass der Anteil der Haushalte mit einem Jahreseinkommen von mehr als 60 000 € in den beiden Vororten gleich ist (Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$)?

(1) Null- und Alternativhypothese sowie Signifikanzniveau

$$H_0 : \theta_1 = \theta_2$$
$$H_A : \theta_1 \neq \theta_2$$
$$\alpha = 0{,}05 .$$

(2) Prüfgröße und Testverteilung

Die Prüfgröße

$$Z = \frac{(P_1 - P_2)}{\sqrt{P(1-P)}\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}} \quad \text{mit} \quad P = \frac{n_1 P_1 + n_2 P_2}{n_1 + n_2}$$

gehorcht bei Gültigkeit der Nullhypothese einer *Standardnormalverteilung*.

(3) Kritischer Bereich

Der kritische Wert beträgt hier $z_c = 1{,}96$.

Für $|z| > 1{,}96$ wird H_0 abgelehnt,

für $|z| \le 1{,}96$ kann H_0 nicht abgelehnt werden.

(4) Berechnung der Prüfgröße

Man erhält

$$p_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{39}{400} = 0{,}0975$$

$$p_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{45}{300} = 0{,}1500$$

$$\begin{aligned}\hat{\theta} = p &= \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2} \\ &= \frac{400 \cdot 0{,}0975 + 300 \cdot 0{,}1500}{400 + 300} \\ &= 0{,}12\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}z &= \frac{(p_1 - p_2)}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}} \\ &= \frac{0{,}0975 - 0{,}1500}{\sqrt{0{,}12 \cdot 0{,}88}\sqrt{\frac{400 + 300}{120\,000}}} = -2{,}12 .\end{aligned}$$

(5) Entscheidung und Interpretation

Es ist hier $|z| > z_c$; damit muss H_0 verworfen werden, d. h. der Anteil der Haushalte mit einem Jahreseinkommen von mehr als 60 000 € muss in den beiden Vororten als unterschiedlich angenommen werden.

17.5 Zweistichprobentests für den Quotienten zweier Varianzen

In Abschnitt 13.5 war festgestellt worden, dass die Zufallsvariable

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$$

einer F-Verteilung gehorcht mit $\nu_1 = n_1 - 1$ und $\nu_2 = n_2 - 1$ Freiheitsgraden. S_1^2 und S_2^2 sind hier die Stichprobenvarianzen zweier *unabhängiger Stichproben* aus zwei *normalverteilten Grundgesamtheiten* mit den Varianzen σ_1^2 und σ_2^2; n_1 und n_2 bezeichnen wieder die entsprechenden Stichprobenumfänge. Die Zufallsvariable F kann als Prüfgröße für den Test des Quotienten zweier Varianzen verwendet werden. In den allermeisten Fällen wird sicher die **Gleichheit zweier Varianzen** zu *überprüfen* sein, so dass die Prüfgröße des Tests bei Vorliegen der Nullhypothese $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ folgende Gestalt annimmt:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}.$$

Da die Prüfgröße F einer F-Verteilung folgt, wird dieser Test oft als **F-Test** bezeichnet.

Beispiel: Es soll untersucht werden, ob die Streuung der Angestelltengehälter in einem Unternehmen A größer ist als in einem Unternehmen B. Es möge davon ausgegangen werden können, dass die Gehälter in beiden Unternehmen *normalverteilt* sind. Eine Stichprobe von $n_1 = 21$ Angestellten des Unternehmens A liefert eine Standardabweichung der Gehälter von $s_1 = 322$ €, eine zweite Stichprobe von $n_2 = 16$ Angestellten des Unternehmens B liefert eine Standardabweichung von $s_2 = 288$ € (Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$).

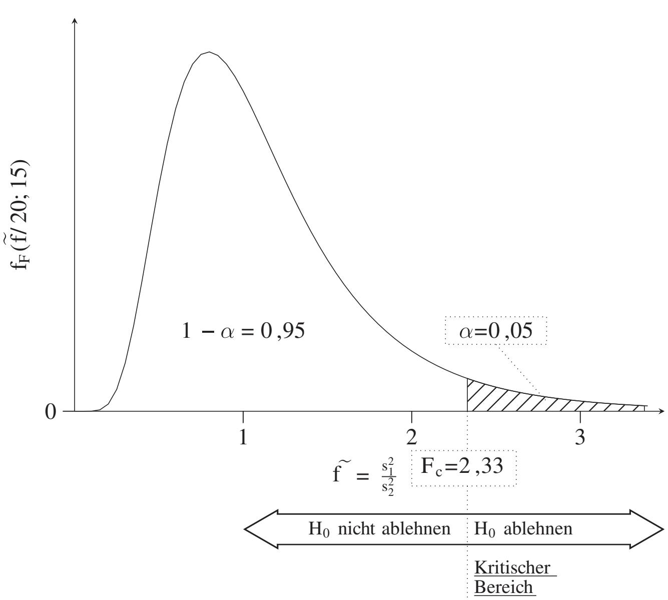

Abb. 17.6: Testverteilung und kritischer Bereich

(1) Null- und Alternativhypothese sowie Signifikanzniveau

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_A : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$
$$\alpha = 0{,}05 .$$

(2) Prüfgröße und Testverteilung

Die Prüfgröße

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

gehorcht einer F-Verteilung mit $\nu_1 = n_1 - 1 = 20$ und $\nu_2 = n_2 - 1 = 15$ Freiheitsgraden.

(3) Kritischer Bereich

Die Tabelle der F-Verteilung liefert für ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ und $\nu_1 = 20$, $\nu_2 = 15$ Freiheitsgrade den kritischen Wert $F_c = 2{,}33$.

Für $\tilde{f} = \frac{s_1^2}{s_2^2} > 2{,}33$ wird H_0 abgelehnt, für $\tilde{f} \leq 2{,}33$ kann H_0 nicht abgelehnt werden (die Realisation der Zufallsvariablen F soll mit $\tilde{f}$ bezeichnet werden, um eine Verwechslung mit dem allgemeinen Funktionssymbol f zu vermeiden).

(4) Berechnung der Prüfgröße

Man findet

$$\tilde{f} = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{322^2}{288^2} = 1{,}25 .$$

(5) Entscheidung und Interpretation

Es ist hier $\tilde{f} \leq F_c$; damit kann die Nullhypothese also nicht abgelehnt werden, d. h. der beobachtete Unterschied der beiden Standardabweichungen ist nicht signifikant.

Der F-Test kann selbstverständlich auch als **zweiseitiger Test** aufgebaut werden. In diesem Fall wird der Nullhypothese $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ die Alternativhypothese $H_A : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ gegenübergestellt. Es ergeben sich dann zwei kritische Bereiche, denen jeweils die Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha/2$ zugeordnet ist (vgl. Abbildung 17.7). Die Nullhypothese wird dann nicht abgelehnt, wenn die Prüfgröße F einen Wert $\tilde{f}$ zwischen F_c^u und F_c^o annimmt.

Der *rechtsseitige kritische Wert* F_c^o ist so zu bestimmen, dass die Überschreitungswahrscheinlichkeit $\frac{\alpha}{2}$ beträgt, d. h., dass die Verteilungsfunktion der F-Verteilung bei F_c^o genau den Wert $1 - \frac{\alpha}{2}$ annimmt.

Es gilt also:

$$F_c^o = F_{1-\frac{\alpha}{2};\nu_1;\nu_2} .$$

Für den *linksseitigen kritischen Wert* F_c^u gilt die Beziehung:

$$F_c^u = F_{\frac{\alpha}{2};\nu_1;\nu_2} .$$

F_c^u kann man wie folgt aus den tabellierten rechtsseitigen kritischen Werten erhalten:

Aus:

$$W\left(F \leq F_{\frac{\alpha}{2};\nu_1;\nu_2}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

folgt

$$W\left(F \geq F_{\frac{\alpha}{2};\nu_1;\nu_2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

und damit

$$W\left(\frac{1}{F} \leq \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2};\nu_1;\nu_2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \qquad \text{(I).}$$

Wenn nun

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

F-verteilt ist mit ν_1 Freiheitsgraden im Zähler und ν_2 Freiheitsgraden im Nenner, dann ist

$$\frac{1}{F} = \frac{S_2^2}{S_1^2}$$

ebenfalls F-verteilt, aber mit ν_2 Freiheitsgraden im Zähler und ν_1 Freiheitsgraden im Nenner. Es gilt also

$$W\left(\frac{1}{F} \leq F_{1-\frac{\alpha}{2};\nu_2;\nu_1}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \qquad \text{(II).}$$

Ein Vergleich der beiden Formeln (I) und (II) zeigt, dass folgende Beziehung besteht:

$$\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2};\nu_1;\nu_2}} = F_{1-\frac{\alpha}{2};\nu_2;\nu_1}$$

bzw.

$$F_{\frac{\alpha}{2};\nu_1;\nu_2} = \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2};\nu_2;\nu_1}}$$

Da in den Tabellensammlungen die *kritischen Werte* der F-Verteilung meist nur für die einseitige Fragestellung und für Signifikanzniveaus von 1 % bzw. 5 % tabelliert sind, ergibt sich bei Verwendung dieser kritischen Werte bei zweiseitiger Fragestellung ein Signifikanzniveau von 2 % bzw. 10 %.

Beispiel: Zwei Gruppen I und II von Studenten mit $n_1 = 15$ und $n_2 = 13$ Teilnehmern werden nach zwei unterschiedlichen Lehrmethoden ausgebildet. In einem abschließenden Test erreichen die Teilnehmer der Gruppe I eine durchschnittliche Punktzahl von $\bar{x}_1 = 50{,}7$ Punkten bei einer Standardabweichung von $s_1 = 4{,}3$ Punkten. Die Teilnehmer der Gruppe II erreichen eine durchschnittliche Punktzahl von ebenfalls $\bar{x}_2 = 50{,}7$ Punkten bei einer Standardabweichung von $s_2 = 9{,}1$ Punkten. Es soll nun auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}02$ geprüft werden, ob der beobachtete Unterschied der beiden Stichprobenstandardabweichungen signifikant ist.

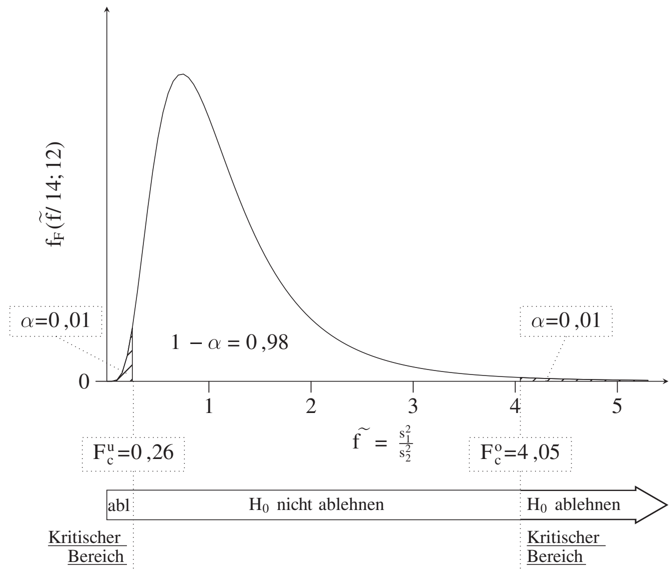

Abb. 17.7: Testverteilung und kritischer Bereich

(1) Null- und Alternativhypothese sowie Signifikanzniveau

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_A &: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \\ \alpha &= 0{,}02 \end{aligned}$$

(2) Prüfgröße und Testverteilung

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

gehorcht einer *F-Verteilung* mit $\nu_1 = n_1 - 1 = 14$ und $\nu_2 = n_2 - 1 = 12$ *Freiheitsgraden*.

(3) Kritischer Bereich

Aus der Tabelle der F-Verteilung ergibt sich der rechtsseitige kritische Wert F_c^o zu

$$F_c^o = F_{0,99;14;12} = 4{,}05\,.$$

Der linksseitige kritische Wert F_c^u beträgt

$$F_c^u = F_{0,01;14;12} = \frac{1}{F_{0,99;12;14}} = \frac{1}{3{,}80} = 0{,}26\,.$$

Es ist wieder $\tilde{f} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ der Wert der Prüfgröße.

Für $F_c^u \leq \tilde{f} \leq F_c^o$, also $0{,}26 \leq \tilde{f} \leq 4{,}05$,

wird die Nullhypothese beibehalten, für $\tilde{f} < F_c^u$ bzw. $\tilde{f} > F_c^o$ wird H_0 abgelehnt.

(4) Berechnung der Prüfgröße

Es ist

$$\tilde{f} = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{4{,}3^2}{9{,}1^2} = 0{,}22\,.$$

(5) Entscheidung und Interpretation

Da $\tilde{f} < F_c^u$ ist, wird die Nullhypothese abgelehnt. Es kann also auf einen signifikanten Unterschied der beiden Varianzen und damit der beiden Standardabweichungen geschlossen werden.

17.6 Zweistichprobentests für die Differenz arithmetischer Mittel bei verbundenen Stichproben

Bei den in den vorangegangenen Abschnitten 17.3 bis 17.5 behandelten Zweistichprobentests waren die Beobachtungen der einen Stichprobe stets unabhängig von denen der anderen Stichprobe, d. h. es lagen *unabhängige (unverbundene) Stichproben* vor.

Im Gegensatz dazu spricht man von **verbundenen Stichproben** *(abhängigen oder paarigen Stichproben, paired samples)*, wenn die Beobachtungen der einen Stichprobe von denen der anderen Stichprobe *nicht unabhängig* also *abhängig* sind. Eine verbundene Stichprobe liegt beispielsweise dann vor, wenn die *Merkmalsausprägungen* der ersten Stichprobe und die der zweiten Stichprobe *jeweils an demselben Merkmalsträger* erhoben werden. So könnte man beispielsweise zur Beantwortung der Frage, ob zwischen den Fächern Volkswirtschaftslehre und Betriebswirtschaftslehre ein signifikanter Leistungsunterschied besteht, bei Studenten die Zwischenprüfungsnoten der beiden Fächer erfassen. Der Vorteil der Erhebung beider Ausprägungen jeweils *am gleichen* Merkmalsträger liegt darin, dass individuelle Leistungsunterschiede, wie sie beim Vergleich von zwei aus verschiedenen Studenten bestehenden Stichproben möglicherweise auftreten, ausgeschaltet werden. Ein Zweistichprobentest auf der Basis verbundener Stichproben dürfte so meist effizienter sein als ein solcher auf der Basis unverbundener Stichproben.

Im Folgenden sollen mit x_{1i} $(i = 1, \ldots, n)$ die Merkmalsausprägungen des ersten Merkmals und mit x_{2i} $(i = 1, \ldots, n)$ die Merkmalsausprägungen des zweiten Merkmals am Merkmalsträger i bezeichnet werden.

Bei der **Ableitung der Testverteilung** geht man davon aus, dass die Beobachtungswerte x_{1i} und x_{2i} Realisationen von *normalverteilten Zufallsvariablen* X_{1i} und X_{2i} mit den *Erwartungswerten* $E(X_{1i}) = \mu_{1i}$ und $E(X_{2i}) = \mu_{2i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ sind. Unabhängig von i soll nun für die Wertepaare

$$\mu_{2i} = \mu_{1i} + \delta \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

gelten, wobei δ ein konstanter Betrag ist.

Betrachtet man die n Zufallsvariablen

$$D_i = X_{2i} - X_{1i} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

dann ist $E(D_i) = \mu_{2i} - \mu_{1i} = \delta$ $(i = 1, \ldots, n)$. Es wird weiterhin angenommen, dass die Varianzen der Differenzen D_i unabhängig von i, also konstant sind, d. h. dass

$$\mathrm{Var}(D_i) = \sigma_D^2 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

gilt.

Die n Differenzen D_i können als eine Stichprobe von n unabhängigen Werten angesehen werden, die, da die X_{1i} und X_{2i} normalverteilt sind, ebenfalls einer Normalverteilung gehorchen; dabei können die Differenzen D_i selbst dann noch in guter Näherung normalverteilt sein, wenn die Normalverteilungsannahme bezüglich X_{1i} und X_{2i} verletzt ist. Die Signifikanz der Differenzen kann nun analog der Vorgehensweise beim „Einstichprobentest für das arithmetische Mittel bei unbekannter Varianz der Grundgesamtheit“ (Abschnitt 17.1 (2)) geprüft werden.

Da die Differenzen D_i normalverteilt sind, ist die *durchschnittliche Differenz* der n Paare

$$\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i$$

ebenfalls normalverteilt mit dem Erwartungswert

$$E(\overline{D}) = \delta$$

und der Varianz

$$\mathrm{Var}(\overline{D}) = \sigma_{\overline{D}}^2 = \frac{\sigma_D^2}{n}\,.$$

Als *Schätzfunktion* für die unbekannte Varianz der Differenzen σ_D^2 verwendet man

$$S_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2\,.$$

Die *Prüfgröße*

$$T = \frac{\overline{D} - \delta}{\dfrac{S_D}{\sqrt{n}}}$$

ist dann *studentverteilt* mit $\nu = n - 1$ *Freiheitsgraden.*

Die typische Vorgehensweise bei dem Zweistichprobentest für abhängige Stichproben soll an folgendem Beispiel erläutert werden.

Beispiel: Ein Automobilhersteller interessiert sich für die Frage, ob ein bestimmtes von ihm produziertes PKW-Modell bei Verwendung von unverbleitem Superbenzin einen höheren Verbrauch aufweist als bei der Verwendung von verbleitem Superbenzin. An 12 zufällig ausgewählten Exemplaren dieses Modells wurden in einem Test folgende Werte erhoben:

PKW i	Verbrauch von verbleitem Superbenzin (l/100 km) x_{1i}	Verbrauch von unverbleitem Superbenzin (l/100 km) x_{2i}
1	7,4	7,8
2	9,0	8,8
3	7,9	9,0
4	9,8	10,5
5	8,6	9,3
6	10,2	11,1
7	7,8	8,1
8	9,5	9,3
9	9,1	10,4
10	8,4	10,0
11	8,9	9,1
12	8,8	8,7

Tabelle 17.1: Verbrauch von verbleitem und unverbleitem Superbenzin

Die einzelnen Schritte des Tests sind dann:

(1) Null- und Alternativhypothese sowie Signifikanzniveau

Die Nullhypothese lautet hier: „Der Verbrauch ist bei Verwendung von verbleitem und unverbleitem Benzin gleich. ($\delta = 0$)“ und die Alternativhypothese: „Der Verbrauch ist bei Verwendung von unverbleitem Superbenzin höher als bei Verwendung von verbleitem ($\delta > 0$)“; als Signifikanzniveau soll $\alpha = 0{,}05$ zugrundegelegt werden.

Es gilt also

$$\begin{aligned} H_0 &: \delta = 0 \\ H_A &: \delta > 0 \\ \alpha &= 0{,}05 \end{aligned}$$

(2) Prüfgröße und Testverteilung

$$T = \frac{\overline{D}}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \text{ ist } \textit{studentverteilt mit}$$

$\nu = n - 1 = 11$ *Freiheitsgraden.*

(3) Kritischer Bereich

Bei einseitiger Fragestellung und einem Signfikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ liefert die Tabelle der Studentverteilung für $\nu = 11$ Freiheitsgrade den kritischen Wert $t_c = 1{,}796$. Für $t > 1{,}796$ wird H_0 abgelehnt, für $t \leq 1{,}796$ kann H_0 nicht abgelehnt werden.

(4) Berechnung der Prüfgröße

Die Berechnung des Wertes der Prüfgröße

$$t = \frac{\overline{d}}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}}$$

erfolgt am besten anhand folgender Arbeitstabelle 17.2:

i	x_{1i}	x_{2i}	$d_i = x_{2i} - x_{1i}$	d_i^2
1	7,4	7,8	0,4	0,16
2	9,0	8,8	−0,2	0,04
3	7,9	9,0	1,1	1,21
4	9,8	10,5	0,7	0,49
5	8,6	9,3	0,7	0,49
6	10,2	11,1	0,9	0,81
7	7,8	8,1	0,3	0,09
8	9,5	9,3	−0,2	0,04
9	9,1	10,4	1,3	1,69
10	8,4	10,0	1,6	2,56
11	8,9	9,1	0,2	0,04
12	8,8	8,7	−0,1	0,01
$\sum$	•	•	6,7	7,63

Tabelle 17.2: Arbeitstabelle

Damit ergibt sich das arithmetische Mittel der Differenzen zu

$$\overline{d} = \frac{1}{n} \sum d_i = \frac{6{,}7}{12} = 0{,}558\,.$$

Für die Varianz der Differenzen erhält man

$$\begin{aligned} s_D^2 &= \frac{1}{n-1} \sum (d_i - \overline{d})^2 \\ &= \frac{n}{n-1} \left[\frac{\sum d_i^2}{n} - \overline{d}^2 \right] \\ &= \frac{n}{n-1} \left[\frac{\sum d_i^2}{n} - \left(\frac{\sum d_i}{n} \right)^2 \right] \\ &= \frac{12}{11} \cdot \left[\frac{7{,}63}{12} - \left(\frac{6{,}7}{12} \right)^2 \right] = 0{,}3536 \text{ und für} \end{aligned}$$

die Standardabweichung der Differenzen

$$s_D = 0{,}595\,.$$

Damit beträgt der Wert der Prüfgröße

$$t = \frac{\bar{d}}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}} = \frac{0{,}558}{\frac{0{,}595}{\sqrt{12}}} = 3{,}25\,.$$

(5) Entscheidung und Interpretation

Da hier $t > t_c$ ist, wird H_0 abgelehnt. Es muss also auf einen signifikanten Mehrverbrauch von unverbleitem Superbenzin geschlossen werden.

17.7 Ausgewählte Literatur

Graf, Ulrich, Hans-Joachim Henning, Kurt Stange, Peter-Theodor Wilrich, Formeln und Tabellen der angewandten mathematischen Statistik (3., völl. neu bearb. Aufl., 2., korr. Nachdruck). Berlin, Heidelberg, New York usw. 1997.

Sachs, Lothar, Angewandte Statistik (13., akt. u. erw. Aufl.). Berlin, Heidelberg, New York usw. 2009.

Stange, Kurt, Angewandte Statistik, Teil 1 (2. Aufl.) Berlin, Heidelberg, New York 2001.

Walpole, Ronald E., Introduction to Statistics (3rd. ed.). New York, London 1982.

Aufgaben zu Kapitel 17

17.1 Ein Schiffsmotorhersteller behauptet, dass seine Maschinen im Durchschnitt höchstens 29,5 l Brennstoff pro Betriebsstunde verbrauchen. Eine Stichprobe im Umfang $n = 10$ Motoren liefert einen durchschnittlichen Verbrauch von $\bar{x} = 31$ l bei einer Standardabweichung von $s = 3,16$ l. Kann damit die Behauptung des Herstellers als widerlegt angesehen werden, wenn man voraussetzt, dass der Brennstoffverbrauch pro Betriebsstunde normalverteilt ist (Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$)?

17.2 Ein Taxiunternehmen rüstete seine Pkw mit zwei verschiedenen Reifensorten A und B aus. 12 Reifen der Sorte A erreichten eine durchschnittliche Laufleistung von $\bar{x}_1 = 40\,000$ km bei einer Standardabweichung von $s_1 = 5\,950$ km; eine gleich große Stichprobe der Reifensorte B erreichte eine durchschnittliche Laufleistung von $\bar{x}_2 = 38\,000$ km bei einer Standardabweichung von $s_2 = 5\,150$ km. Wie beurteilen Sie die Hypothese, dass beide Reifensorten die gleiche durchschnittliche Laufleistung besitzen und somit der beobachtete Unterschied nur zufälliger Natur ist, wenn vorausgesetzt wird, dass die Laufleistungen normalverteilt sind, und zwar mit gleicher Varianz $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$)?

17.3 In einem Farbfernsehgerätewerk wird die Qualität zweier besonders günstig angebotener größerer Lieferungen von Transistoren auf Stichprobenbasis überprüft. Die Stichprobe aus Lieferung 1 im Umfang $n_1 = 300$ liefert einen Ausschussanteil von $p_1 = 0,21$ und die aus Lieferung 2 im Umfang $n_2 = 200$ einen solchen von $p_2 = 0,25$. Kann aus diesen Ergebnissen geschlossen werden, dass die Transistoren aus Lieferung 2 einen größeren Ausschussanteil aufweisen als die aus Lieferung 1 (Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}01$)?

17.4 Testen Sie die in Aufgabe 17.2 aufgestellte Nullhypothese $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ gegen die Alternativhypothese $H_A : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ (Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$).

beck-shop.de