Wirtschaftsmathematik

Eine kompakte Einführung für Wirtschaftswissenschaftler

Bearbeitet von
Nikolaus Wolik

1. Auflage 2015. Buch. IX, 257 S. Kartoniert
ISBN 978 3 7910 3204 7
Format (B x L): 17 x 24 cm
Gewicht: 527 g

SCHÄFFER
POESCHEL

Nikolaus Wolik

Wirtschaftsmathematik

Eine kompakte Einführung
für Wirtschaftswissenschaftler

2015
Schäffer-Poeschel Verlag Stuttgart

Autor:
Prof. Dr. Nikolaus Wolik lehrt Wirtschaftsmathematik und Statistik an der Hochschule Bochum.
Er ist Diplom-Mathematiker und hat in Volkswirtschaftslehre promoviert.

Dozenten finden weitere Lehrmaterialien unter
www.sp-dozenten.de/3204 (Registrierung erforderlich)

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C103849

Gedruckt auf chlorfrei gebleichtem, säurefreiem und alterungsbeständigem Papier

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Print ISBN 978-3-7910-3204-7 Bestell-Nr. 20632-0001
EPDF ISBN 978-3-7992-6813-4 Bestell-Nr. 20632-0150

www.schaeffer-poeschel.de
info@schaeffer-poeschel.de

Einbandgestaltung: Melanie Frasch/Petra Rehr (Foto: Shutterstock.com)
Satz: primustype Hurler GmbH, Notzingen
Druck und Bindung: Schätzl Druck, Donauwörth

Printed in Germany
Juli 2015
Schäffer-Poeschel Verlag Stuttgart
Ein Tochterunternehmen der Haufe Gruppe

1 Grundlagen in Kürze

Lernziele

- Sie lernen die Sprache der Mathematik kennen und wissen, wie mathematische Aussagen exakt zu verstehen und zu formulieren sind.
- Sie erlernen Grundlagen der Aussagenlogik, der Mengenlehre und der mathematischen Notation. Insbesondere verwenden Sie das Summen- und Produktzeichen.
- Sie verstehen die reellen Zahlen als diejenige Zahlenmenge, die für ökonomischen Anwendungen relevant ist.
- Sie erwerben oder verfestigen die Fähigkeit, mit reellen Zahlen zu rechnen.
- Sie gehen sicher mit Potenzen, Wurzeln und Logarithmen um und können Gleichungen und Ungleichungen in den reellen Zahlen lösen.

n diesem Kapitel wird an mathematische Grundlagen erinnert, die vor allem in die otation, die im Buch verwendet wird, und die „Sprache" der Mathematik einführen.

.1 Ein wenig Logik vorweg

Jm die Sprache der Mathematik zu verstehen, benötigt man die wesentlichen Konstukte der Aussagenlogik. Wir beschränken uns hier auf das Nötigste, um die Aussagen es Buches zu verstehen.

Aussagen

ine mathematische Aussage ist ein sprachliches Gebilde, das die Eigenschaft hat, ntweder *wahr* oder *falsch* zu sein. Die Aussage „A: $2 < 3$" ist eine wahre Aussage, wähend „B: $4 < 3$" eine falsche Aussage darstellt. Häufig betrachten wir etwas allgemeiere Konstrukte wie zum Beispiel „A: $n < 3$". Hierbei handelt es sich um eine Aussageorm, die eine Variable n enthält und erst durch das Besetzen von n mit konkreten Verten zu einer Aussage in obigem Sinn wird. Dabei gilt unser Interesse denjenigen Verten für n, für die A zu einer wahren Aussage wird. Im Folgenden verzichten wir auf ie strenge Unterscheidung zwischen Aussagen und Aussageformen und sprechen ur noch von Aussagen.

n mathematischen Schlussketten ist man daran interessiert, was daraus folgt, wenn wahr ist. So folgt zum Beispiel für diejenigen n, für die A gilt, dass sie auch B: $n < 5$" erfüllen. Man sagt: Aus A folgt B.

Notwendige Bedingung
Implikation

ie Formulierung „aus A folgt B" ($A \Rightarrow B$) oder gleichbedeutend „A impliziert B" wird oft o beschrieben: B ist notwendige Bedingung für A. Das bedeutet: Wenn die Aussage A ilt, also wahr ist, dann muss auch die Aussage B wahr sein. Aus der Voraussetzung A Prämisse) folgt der Schluss B. Gilt also die Aussage A: „Die natürliche Zahl n ist kleiner als drei", dann ist notwendigerweise auch die Aussage B: „Die natürliche Zahl n ist kleiner als fünf" richtig. Die Formulierung „B ist notwendige Bedingung für A" wird aus der logischen Gegenposition klar. Wenn n nicht kleiner als fünf ist, dann kann n auch nicht kleiner als drei sein. Allerdings muss die Umkehrung nicht gelten: Wenn offenbar gilt: $(A: n < 3 \Rightarrow B: n < 5)$, muss eine Zahl, die B erfüllt, z.B. die 4, nicht auch A erfüllen.

reichende Bedingung
uivalenz

Wenn das allerdings der Fall ist, ist B nicht nur notwendige Bedingung für A sondern auch hinreichend dafür, A vollständig zu charakterisieren. Immer wenn B richtig ist, muss auch A gelten: $B \Rightarrow A$. Man sagt B ist auch hinreichend für A. In diesem Fall gelten also $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ gleichzeitig und man sagt: A ist *äquivalent* zu B $(A \Leftrightarrow B)$ oder „A gilt *genau dann*, wenn B gilt" oder auch „A gilt *dann und nur dann*, wenn B gilt." Für $x \in \mathbb{R}$ gilt beispielsweise $x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$. Die Äquivalenz fasst also zusammen, dass $x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2$ und auch umgekehrt $-2 < x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$ gilt.

s logische „und"

Die letzte Formulierung wirft ein Schlaglicht auf die Bedeutung der mathematischen Formulierung „*und*". „*Dann und nur dann*" bedeutet, dass $(A \Rightarrow B)$ *und* $(B \Rightarrow A)$ beide denselben logischen Wert erhalten. Wenn die linke Implikation gilt, dann muss auch die rechte Implikation richtig sein; wenn die linke Implikation nicht richtig ist, dann muss auch die rechte Implikation falsch sein. Wird also die Aussage C mit der Aussage D durch die logische Verknüpfung „*und*" zu einer neuen Aussage (C *und* D) zusammengefasst, so ist diese nur wahr, wenn jeweils C und D wahr sind. Die mathematischen Formulierung (C *und* D) ist streng; ihre Gültigkeit verlangt, dass beide Teilaussagen wahr sind, ansonsten ist sie falsch.

s logische „oder"

Die mathematische Formulierung „*oder*" ist toleranter. Die Aussage (n ist gerade *oder* n ist ungerade) ist wahr, sofern auch nur eine der beiden Teilaussagen wahr ist. Manchmal sind auch beide Teilaussagen richtig: ($3 < 5$ *oder* $4 < 5$). Auch dies ist logisch wahr. Mindestens eine der beiden Teilaussagen muss wahr sein, damit die Oder-Verknüpfung wahr ist.

„*Mindestens*" über eine Anzahl von Aussagen formuliert, ist die bescheidene Forderung, dass nur eine dieser Aussagen wahr sein muss; es können allerdings mehrere oder sogar alle Aussagen wahr sein. Die Formulierung „*alle*" ist strikter. Sie verlangt, dass jede der Teilaussagen gilt.

stenzaussage

Hierauf bezieht sich die mathematische Formulierung „*es existiert*" oder „*es gibt*". „Es existiert eine gerade natürliche Zahl" heißt immer: Es gibt mindestens eine natürliche gerade Zahl. Dabei wird offen gelassen, ob es nicht auch mehrere gerade natürliche Zahlen gibt. Im vorliegenden Fall existieren sogar unendlich viele.

-Aussage

Auf der anderen Seite gilt die Aussage „Alle natürlichen Zahlen sind gerade" nicht, denn z.B. 3 ist nicht gerade. Da die Aussage über alle natürlichen Zahlen getroffen wurde, ist sie falsch. Ein einziges Gegenbeispiel reicht aus, die All-Aussage zu widerlegen.

weis

Dies führt uns zum Begriff des mathematischen Beweises. In ihm wird aus Voraussetzungen über eine Aneinanderreihung von Folgerungen oder Äquivalenzen eine Schlussfolgerung (ein mathematischer Satz) hergeleitet. Dies wird oft durch Beispiele verdeutlicht. Wichtig aber ist: Jedes Beispiel belegt den Beweis, aber das Beispiel kann ihn nicht ersetzen. Jedoch widerlegt auch nur ein einziges Gegenbeispiel den Satz. Denn dieser formuliert letztlich: Immer wenn die Voraussetzungen erfüllt sind, gilt…

1.2 Mengen

er Begriff der Menge ist grundlegend für die Mathematik. Er reflektiert die Fähigkeit es Menschen, eine Zusammenfassung von Objekten als ein Ganzes zu betrachten. In er Wirtschaftsstatistik bezeichnet der sogenannte Warenkorb mathematisch gese-en eine Menge. Der Warenkorb ist eine Zusammenstellung einer möglichst repräsen-ativen Auswahl von nachgefragten Waren und Dienstleistungen und umfasst ca. 700 lemente, deren Preise mit Gewichten versehen werden, um daraus eine Messzahl für ie Inflation zu berechnen.

Definition (Menge):
Eine Menge ist eine Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte zu einem Ganzen.

ie Definition der Menge ist sehr allgemein gehalten. Sie beschränkt uns nicht auf die etrachtung von Zusammenfassungen dinglicher Objekte, sondern erlaubt auch die lengenbildungen über abstrakte Konstrukte wie z.B. die Menge der ganzen Zahlen. abei bedeutet der Begriff „Zusammenfassung", dass es auf die Betrachtung der Rei-enfolge der Objekte nicht ankommt. „Wohlunterschieden" drückt aus, dass es kei-en Sinn macht, in einer Menge auch identische Objekte zusammenzufassen. ie Objekte einer Menge werden Elemente genannt. Man schreibt $2 \in \mathbb{N}$ (lies 2 ist lement der Menge der natürlichen Zahlen), um zu verdeutlichen, dass die 2 zur lenge der natürlichen Zahlen gehört. Entsprechend notiert man $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$, um zu ver-eutlichen, dass $\frac{1}{2}$ nicht zu den natürlichen Zahlen gehört. Wesentlich für diesen auf eorg Cantor, den Begründer der Mengenlehre, zurückgehenden Mengenbegriff ist s, dass man von den Objekten stets entscheiden kann, ob sie ein Element der betrach-eten Menge sind oder nicht.

Beschreibung von Mengen

ur Beschreibung einer Menge benutzt man oft die Aufzählung in Mengenklammern. $:=\{1,2,3\}$[1] ist die Menge der natürlichen Zahlen 1, 2 und 3. Im Vertrauen darauf, ass das Bildungsgesetz hinreichend klar wird, kann man auch unendlich große Men-en beschreiben: $\mathbb{N}:=\{1,2,3,4,5,\ldots\ldots\}$ soll (wenn auch wenig exakt) die Menge er natürlichen Zahlen bezeichnen. Häufig werden Mengen auch etwas formaler eschrieben: $\{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq 3\}$ bezeichnet ebenfalls die Menge A. Bei der Defini-ion einer Menge kommt es also nicht auf die Art und Weise der Beschreibung an, ins-esondere ist die Reihenfolge der Aufzählung der Elemente einer Menge unerheblich: $1,2,3,4\} = \{4,2,3,1\}$.

Teilmenge

ie obige Menge A ist Teil der natürlichen Zahlen. Man sagt allgemein, dass A eine eilmenge der Menge B darstellt, wenn gilt: $x \in A \Rightarrow x \in B$, und schreibt $\subseteq B$.

A:= bedeutet, dass eine Definitionsgleichung vorliegt. Links vom „:=" steht ein Name für das, was rechts beschrieben ist. Mit „=" ohne Doppelpunkt werden Identitäten oder Bestim-mungsgleichungen notiert.

ere Menge

Es erweist sich als sinnvoll, auch eine leere Menge zu betrachten. Es ist die Menge, die keine Elemente enthält. Sie wird mit { } oder auch mit $\varnothing$ notiert. Z.B. ist $\{x \in \mathbb{N} | x < 0\} = \{\ \}$. Die folgenden Mengenoperationen erweisen sich als hilfreich.

Definition (Mengenoperationen):
Es seien M und N Mengen. $M \cup N := \{x | x \in M \text{ oder } x \in N\}$ heißt Vereinigungsmenge von M und N, sprich „M vereinigt mit N“.

$M \cap N := \{x | x \in M \text{ und } x \in N\}$

heißt Schnittmenge von M und N, sprich „M geschnitten mit N“.
Gilt $M \cap N = \varnothing$, so haben die Mengen M und N keine gemeinsamen Elemente und werden als disjunkt bezeichnet.

$M \setminus N := \{x | x \in M \text{ und } x \notin N\}$

heißt Differenzmenge, sprich „M ohne N“.
Betrachtet man alle Elemente als zu einer Grundmenge Ω zugehörig, dann heißt $\bar{M} := \{x | x \in \Omega \text{ und } x \notin M\}$ das Komplement von M.

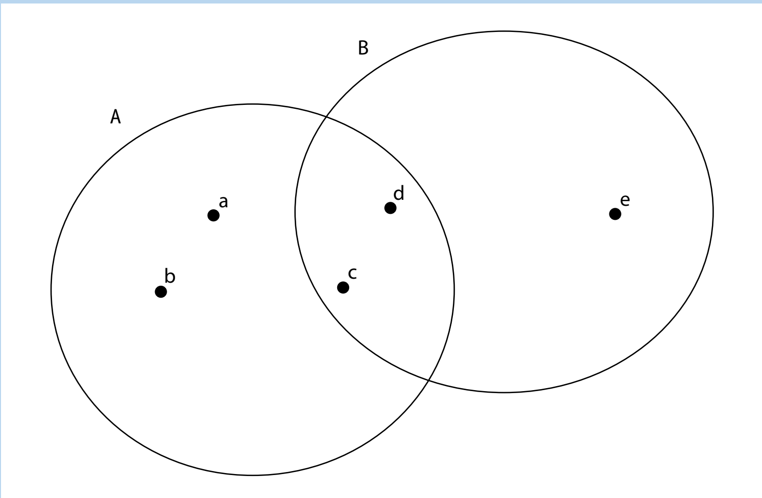
macht man sich ein Bild
n Mengen.

Beispiel 1.1 **Mengenoperationen und Venn-Diagramme**

▶▶▶ Gegeben seien die Mengen $A := \{a,b,c,d\}$ und $B := \{c,d,e\}$. Es ist $A \cup B = \{a,b,c,d,e\}$, $A \cap B = \{c,d\}$, $A \setminus B = \{a,b\}$ und $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \{a,b\} \cap \{c,d\} = \varnothing$.
Mengen und Mengenoperationen werden oft mit den intuitiv verständlichen Venn-Diagrammen verdeutlicht:

Abb. 1-1

Venn-Diagramm



ine weitere Mengenoperation, das kartesische Produkt, geht auf den Mathematiker nd Naturphilosophen Descartes (Lat. Cartesius) zurück.

Definition (Kartesisches Produkt):
Das kartesische Produkt der nichtleeren Mengen X_i, $(i=1,\ldots,n)$ ist die Menge $X_1 \times X_2 \times \ldots X_n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in X_i, i=1,\ldots,n\}$.
$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ heißt das aus den X_i gebildete n-Tupel. Ein einzelnes x_i wird i-te Komponente des n-Tupels genannt.

-Tupel sind geordnet, das heißt, hier kommt es auf die Reihenfolge der Komponenen an: $(a,b) \neq (b,a)$. Daher nennt man 2-Tupel in der Regel geordnete Paare. Tripel nd Quadrupel sind ebenfalls gängige Bezeichnungen für Tupel mit drei und vier omponenten.

Beispiel 1.2 Kartesisches Produkt zweier Mengen

Schachbrett

egeben seien die Mengen $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ und $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Dann st das kartesische Produkt

$$\times B = \left\{\begin{matrix} (a,1), & (a,2), & \ldots\ldots & (a,7), & (a,8), \\ (b,1), & (b,2), & \ldots\ldots & \ldots\ldots & (b,8), \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (h,1), & (h,2) & \ldots\ldots & \ldots\ldots & (h,8) \end{matrix}\right\}.$$

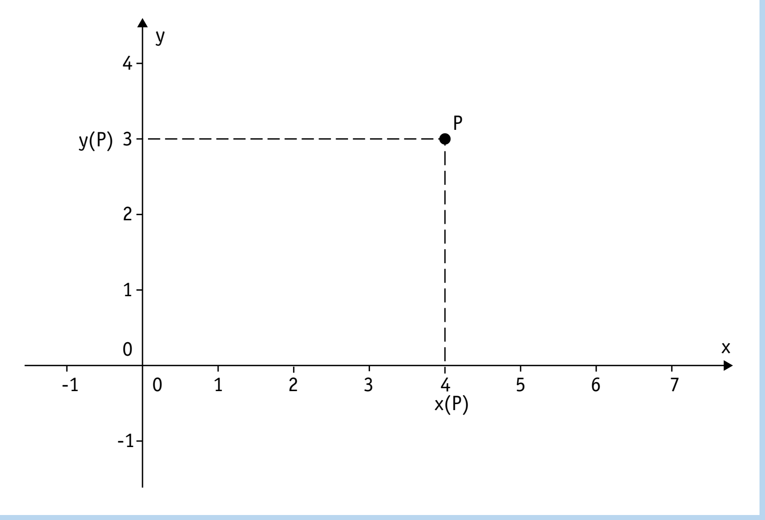
blich für die Notation einer Menge ist die beliebige Aufzählung der Elemente. Die ier getroffene Anordnung soll suggerieren, dass dieses kartesische Produkt das athematische Abbild eines Schachbrettes darstellen könnte, sofern man auf die nterscheidung von schwarzen und weißen Feldern verzichtet.

Geordnete reelle Paare

äufig ist eine ökonomische Größe nicht von einer einzelnen reellen Zahl abhängig. So ängt zum Beispiel die Nachfrage nach einem Gut nicht nur allein von dessen Preis p b, sondern auch vom Budget B des Konsumenten. In diesem Fall fasst man die beiden elevanten Parameter zu einem Paar (p, B) zusammen. Belegt man die Parameter mit onkreten Zahlen, so erhält man ein geordnetes Paar reeller Zahlen.
ührt man ein Koordinatensystem ein, dann können solche Paare wie z.B. das Paar $x,y) = (1,2)$ mit einem Punkt P in der Ebene identifiziert werden (siehe Abb. 1-2).
in Punkt P besitzt somit eine x- und eine y-Koordinate.
ie Menge aller geordneten Paare reeller Zahlen bezeichnet man mit $\mathbb{R}^2$. Offensichtch ist $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ das kartesische Produkt von $\mathbb{R}$ mit sich selbst. Dies erklärt auch en bekannten Begriff „kartesisches Koordinatensystem“. ◀◀◀

Abb. 1-2

Die reelle Zahlenebene



rechnet man mit Men-
n.

Abschließend nennen wir einige Gesetzmäßigkeiten, die im Zusammenhang mit Mengenoperationen nützlich sind.

Satz (Mengenoperationen):
M, N und P seien beliebige Mengen. Dann gilt

Idempotenzgesetz:	$M \cap M = M \cup M = M$
Kommutativgesetz:	$M \cap N = N \cap M$
	$M \cup N = N \cup M$
Assoziativgesetze:	$M \cap (N \cap P) = (M \cap N) \cap P$
	$M \cup (N \cup P) = (M \cup N) \cup P$
Distributivgesetze:	$M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$
	$M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$

Die Gültigkeit dieser Gesetzmäßigkeiten sieht man schnell unter Verwendung von Venn-Diagrammen ein. (Aufgabe!)

.3 Zahlenmengen

atürliche Zahlen

lithilfe der natürlichen Zahlen werden wir in die Lage versetzt, Mengen abzuzählen:

$:=\{1,2,3,4,5,\dots\}$.

ie natürlichen Zahlen sind (u.a.) dadurch charakterisiert, dass 1 eine natürliche ahl ist und jede natürliche Zahl n einen Nachfolger $n+1$ besitzt. Die kleinste natürli- he Zahl ist die 1. Sie ist die einzige natürliche Zahl, die keinen natürlichen Vorgänger esitzt.

Ein sehr wichtiges Prinzip in der Mathematik

ierauf beruht das Prinzip der vollständigen Induktion:
eiß man, dass eine Behauptung $A(n)$

- für $n=1$ richtig ist (Induktionsverankerung), und folgt aus logischen Gründen:
- Sofern $A(n)$ für ein beliebiges n richtig ist (Induktionsvoraussetzung), dann ist auch $A(n+1)$ richtig (Induktionsschluss),
- dann ist die Behauptung für jedes n korrekt.

Beispiel 1.3 Vollständige Induktion

Man kann durch direktes Nachrechnen nachweisen, dass folgendes richtig ist:
ie Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n zum Quadrat.
tellen wir uns vor, dass wir das nicht wüssten, sondern durch Beobachten und Aus- robieren lediglich vermuten würden. Dann könnten wir diese Vermutung auf die fol- ende Art und Weise bestätigen:
nduktionsverankerung: $1=1^2$ ist sicherlich korrekt.
nduktionsvoraussetzung: *Nehmen wir an*, dass die Behauptung für beliebiges n rich- ig ist:

$$\underbrace{+3+5+\dots+(2n-1)}_{n\text{ Zahlen}}=n^2.$$

nduktionsschluss: Dann zeigt die nachfolgende Rechnung, dass die Behauptung uch für $n+1$ gelten muss:

$$+3+5+\dots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2.$$

amit aber muss unsere Vermutung nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für ede natürliche Zahl zutreffen.

ügen wir den natürlichen Zahlen die Null zu, erhalten wir

$_0:=\mathbb{N}\cup\{0\}$.

ie natürlichen Zahlen sind abgeschlossen bezüglich der Addition. Das bedeutet: enn man zwei beliebige natürliche Zahlen addiert, erhält man wieder eine natürli- he Zahl.

1.3 Grundlagen in Kürze
Zahlenmengen

Ganze Zahlen

Fügt man den natürlichen Zahlen die negativen natürlichen Zahlen hinzu, erhält man die Menge der ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = -\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_0.$$

In den ganzen Zahlen sind auch die Subtraktion und die Multiplikation abgeschlossen, nicht aber die Division. Hierfür benötigt man die Brüche.

ezianische Kaufleute utzten die negativen len, um Guthaben von ulden unterscheiden können.

Rationale Zahlen

Die Brüche oder auch rationalen Zahlen sind definiert durch

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{z}{n} \middle| z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Der Nenner eines Bruches darf offensichtlich nicht null sein. Das wissen wir seit der frühesten Schulzeit: „Durch null darf man nicht teilen!“
Aber warum eigentlich nicht? Die folgende „Rechnung“ macht deutlich, dass die Mathematik ins Chaos führte, würde man das zulassen:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ 0 \cdot 1 &= 0 \cdot 2 \,|\, :0? \\ ?1 &= 2? \end{aligned}$$

iche bilden die rationa- Zahlen.

Viele Fragestellungen des täglichen Lebens lassen sich durch die Berechnungen im Bereich der Brüche lösen.

Rechenregeln für Brüche:

Zwei Brüche werden addiert, indem man sie gleichnamig macht und die Zähler addiert:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Zwei Brüche werden multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dessen Kehrwert multipliziert:

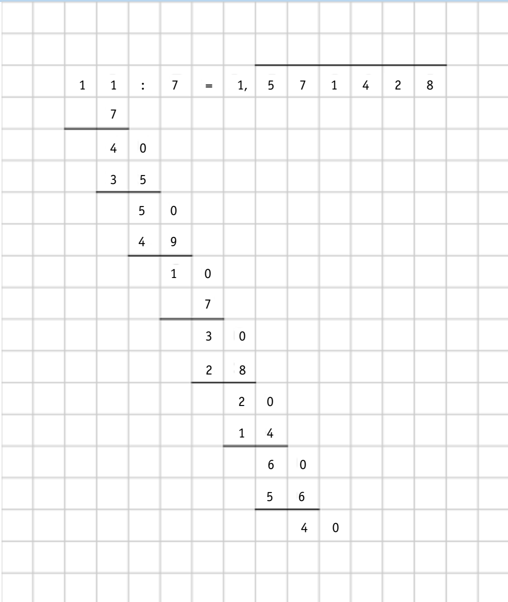
$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Reelle Zahlen

Bereits die alten Griechen entdeckten, dass sich nicht alles in der Mathematik durch Proportionen, also Brüche, ausdrücken lässt. Schon Euklid bewies (ca. 300 v. Chr.!), dass nicht jede Zahl (eigentlich jedes Verhältnis von geometrischen Längen) als Bruchzahl darstellbar ist. Es existieren Zahlen, die eine nichtendliche und nichtperiodische Dezimaldarstellung besitzen wie zum Beispiel
$\sqrt{2} = 1{,}41421356237\ldots$ und die Kreiszahl $\pi = 3{,}14159265358\ldots.$

Abb. 1-3

Division, periodische Zahlen



ür uns ist dieser Umstand leichter einsehbar, weil wir das dezimale Zahlensystem ennen. Wir wissen, dass sich jeder Bruch als Dezimalzahl schreiben lässt, die entwe-er endlich oder periodisch ist. Zum Beispiel ist $\frac{1}{2} = 0{,}5$ und $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$. Der nachfolgende all ist komplizierter und vermittelt uns durch das handschriftliche Dividieren eine iefere Einsicht.

Vir erkennen die beiden Möglichkeiten, die bei der Division auftauchen können:

1. Bei der Division $\frac{z}{n}$ ist der Divisionsrest irgendwann null und die Dezimaldarstellung bricht ab.
2. Bei der Division $\frac{z}{n}$ bleiben Divisionsreste r mit $0 < r < n$. Spätestens im n-ten Schritt ist der Rest also bereits einmal vorgekommen und die Rechenschritte wiederholen sich periodisch.
3. Im Beispiel der Abb. 1-3 ist die maximal mögliche Periodenlänge 6 erreicht, die bei der Division durch 7 möglich ist.
4. Umgekehrt kann man jede Dezimalzahl in einen Bruch verwandeln. Dies ist klar für endliche Dezimaldarstellungen: $11{,}71 = \frac{1171}{100}$. Für periodische Dezimalzahlen sieht man das mit folgender Rechnung ein:

$$
\begin{aligned}
x &= 1{,}\overline{571428} \\
1000000x &= 1571428{,}\overline{571428} \qquad | -x = -1{,}\overline{571428} \\
999999x &= 1571427 \\
x &= \frac{1571427}{999999}
\end{aligned}
$$

Es gibt jedoch Zahlen, die diese Eigenschaft nicht besitzen, die Nicht-Bruch-Zahlen oder auch irrationalen Zahlen. Die folgende Dezimalzahl ist weder abbrechend noch periodisch:

1,101001000100001000001000000100000001 . . . . .

Vor jeder Eins wird im Nachkommabereich stets einfach eine Null mehr eingefügt als bei der vorausgegangenen Eins. Nach diesem Muster erhält man offensichtlich eine unendliche Dezimaldarstellung, die auch nicht periodisch ist. Es kann sich also, so weit wir jetzt wissen, nicht um eine Dezimaldarstellung eines Bruches handeln. Und doch gibt es diese Zahl.
Die alten Griechen entdeckten die irrationalen Zahlen u.a. in der Zahl $\sqrt{2}$. Da wir als Ökonomen oft auf Gleichungen treffen, die Potenzen und Wurzeln enthalten, ist es auch für ökonomische Zwecke erforderlich, damit rechnen zu können.

ional vereinigt mit irra-
nal ergibt reell.

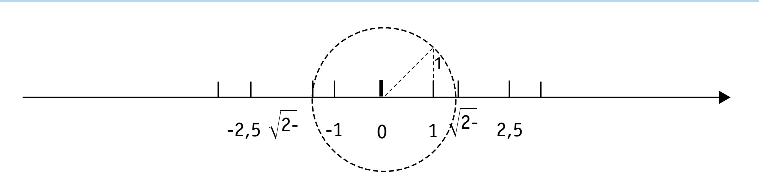
Fassen wir die irrationalen Zahlen $\mathfrak{I}$ mit den Brüchen $\mathbb{Q}$ zusammen, dann erhalten wir die reellen Zahlen

$\mathbb{R} := \mathbb{Q} \cup \mathfrak{I}$.

Der Zahlbereich der reellen Zahlen kann mithilfe der Zahlengeraden veranschaulicht werden. Hierbei handelt es sich um eine Gerade, auf der man die Null positioniert. Links davon befinden sich dann die negativen reellen Zahlen $x < 0$ und rechts davon die positiven reellen Zahlen $x > 0$.

Abb. 1-4

Die reelle Zahlenachse



Jede reelle Zahl entspricht einem Punkt auf der Zahlengeraden. Umgekehrt entspricht jeder Punkt auf der Zahlengeraden einer reellen Zahl. Da der abgebildete Kreis nach dem Satz des Pythagoras den Radius $\sqrt{2}$ hat, belegt Abb. 1-3, dass auf der Zahlengeraden auch die irrationalen Zahlen Ihren Platz finden.
Es gilt

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Teilmengen der reellen Zahlen

In den ökonomischen Anwendungen ist es selten erforderlich, die gesamte Menge der reellen Zahlen zu betrachten. In der Regel reicht es aus, sich auf Teilmengen von $\mathbb{R}$ zu beschränken.

Definition (reelle Intervalle):
Für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ sind Intervalle zusammenhängende Teile der reellen Zahlenachse:

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ ist ein abgeschlossenes Intervall.
$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ ist ein offenes Intervall.
$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ heißt rechtsoffenes Intervall.
$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ heißt linksoffenes Intervall.

Es bezeichnet
$\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen,
$\mathbb{R}_{++} := (0, \infty)$ die Menge der positiven reellen Zahlen,
$\mathbb{R}_- := (-\infty, 0]$ die Menge der nichtpositiven reellen Zahlen,
$\mathbb{R}_{--} := (-\infty, 0)$ die Menge der negativen reellen Zahlen.

Ein offenes Intervall kann auch als eine Epsilon-Umgebung um seinen Mittelpunkt verstanden werden:
Für $\varepsilon > 0$ ist $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$ die Epsilon-Umgebung von a.

Diese Definitionen erscheinen lästig, sind aber tatsächlich höchst hilfreich.

ie ε-Umgebung wird uns noch hilfreiche Dienste bei der Betrachtung von Grenzwer-en leisten; sie ist das wohl wichtigste Konstrukt in der Analysis.

.4 Summe und Produkt

as griechische große „S", das Symbol Σ, bedeutet mathematisch die Aufforderung zu ummieren. Es ist nützlich, um umfangreiche Additionen übersichtlich zu notieren.

Das Summenzeichen hilft, eine Summation kurz zu notieren.

Beispiel 1.4 Summation

Ein Unternehmen schreibt die Absatzzahlen a_i eines Produktes in Stück für die alenderwochen $i = 1,\dots,52$ und die jeweiligen Verkaufspreise p_i fortlaufend in eine

Abb. 1-5

Tabelle der Absatzdaten

Kalenderwoche	1	2	3	....	51	52
Absatzmenge [Stück]	a_1	a_2	a_3	....	a_{51}	a_{52}
Verkaufspreis [€]	p_1	p_2	p_3	....	p_{51}	p_{52}
Korrektur [Stück]	c_1	c_2	c_3	....	c_{51}	c_{52}