

# Laser

Grundlagen der Laserstrahlerzeugung

Bearbeitet von  
Prof. Dr. phil. nat. habil. Thomas Graf

2., überarbeitete und erweiterte Auflage 2015. Buch. IX, 283 S. Softcover

ISBN 978 3 658 07953 6

Format (B x L): 16,8 x 24 cm

[Weitere Fachgebiete > Technik > Sonstige Technologien, Angewandte Technik > Lasertechnologie, Holographie](#)

Zu [Inhaltsverzeichnis](#)

schnell und portofrei erhältlich bei

The logo for beck-shop.de features the text 'beck-shop.de' in a bold, red, sans-serif font. Above the 'i' in 'shop' are three red dots of increasing size. Below the main text, the words 'DIE FACHBUCHHANDLUNG' are written in a smaller, red, all-caps, sans-serif font.

**beck-shop.de**  
DIE FACHBUCHHANDLUNG

Die Online-Fachbuchhandlung [beck-shop.de](http://beck-shop.de) ist spezialisiert auf Fachbücher, insbesondere Recht, Steuern und Wirtschaft. Im Sortiment finden Sie alle Medien (Bücher, Zeitschriften, CDs, eBooks, etc.) aller Verlage. Ergänzt wird das Programm durch Services wie Neuerscheinungsdienst oder Zusammenstellungen von Büchern zu Sonderpreisen. Der Shop führt mehr als 8 Millionen Produkte.

## 2 Elektromagnetische Grundlagen der Lichtausbreitung

Das heutige Wissen über die Natur des Lichtes wurde hauptsächlich in der Zeit vom 17. bis in die Anfänge des 20. Jahrhunderts erarbeitet.<sup>1, 2</sup> Die Erklärungsversuche für die experimentell festgestellten Phänomene basierten zeitweise auf kontroversen Vorstellungen, beispielsweise von Partikelströmen oder elastischen Wellen in einem alles durchdringenden Lichtäther. Zunächst war auch nicht bekannt, ob sich das Licht unendlich schnell oder mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet. Erst 1675 zeigte der Däne Ole Christiansen Römer (1644-1710) aufgrund von Beobachtungen der Finsternis des Jupitermondes Io, dass sich das Licht zwar mit sehr hoher aber doch endlicher Geschwindigkeit ausbreitet. Spätere Messungen von Armand Hyppolite Louis Fizeau (1819-1896) mit Hilfe von rotierenden Zahnrädern ergaben 1849 für die Lichtgeschwindigkeit einen Wert von rund dreihunderttausend Kilometern pro Sekunde.

Die Forschung in der Optik verlief zunächst unabhängig von den Untersuchungen der Elektrizität und des Magnetismus. Der Zusammenhang dieser Forschungsgebiete wurde erst durch die Arbeiten von James Clerk Maxwell (1831-1879) endgültig offenbart. James Maxwell fasste das damals bekannte, empirische Wissen über die elektrischen und magnetischen Phänomene in einem einfachen Satz von vier mathematischen Gleichungen zusammen. Aus dieser bemerkenswert knappen Formulierung konnte er rein theoretisch die Existenz von elektromagnetischen Wellen herleiten und zeigen, dass deren Ausbreitungsgeschwindigkeit durch die elektrischen und magnetischen Eigenschaften der durchquerten Medien bestimmt wird ( $c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ ). Die Geschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen konnte so alleine mit elektrostatischen und magnetostatischen Messungen ermittelt werden. Da das Resultat dem damals bereits bekannten Wert für die Lichtgeschwindigkeit entsprach, folgte Maxwell, dass das Licht eine elektromagnetische Welle sein muss. Eine Folgerung, welche 1888 durch entsprechende Experimente von Heinrich Hertz (1859-1894) bestätigt wurde.

Damit war die Natur des Lichtes als hochfrequente, elektromagnetische Welle geklärt. Die Frage nach dem Träger dieser Wellen beschäftigte die damalige Wissenschaft hingegen noch weitere zwei Jahrzehnte. Erst mit der Einführung der speziellen Relativitätstheorie durch Albert Einstein (1879-1955) im Jahre 1905 wurde ersichtlich, dass ein Lichtäther für die Erklärung der Lichtausbreitung überflüssig war. Die elektromagnetische Welle ist ein unabhängiges Grundphänomen das keines Trägermediums bedarf.

### 2.1 Die Maxwellschen Gleichungen

Die von James Maxwell aufgestellten Gleichungen<sup>3</sup> sind die mathematische Beschreibung des empirisch ermittelten Verhaltens der elektromagnetischen Felder. Es handelt sich dabei um fundamentale Naturgesetze, die nicht auf andere Phänomene (z. B. elastische Eigenschaften eines Lichtäthers) zurückgeführt werden können. Für die experimentell ermittelten Grundge-

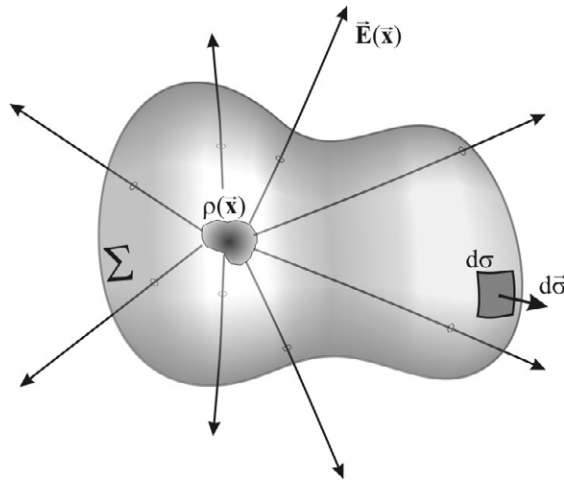
setze von Maxwell gibt es daher keine mathematische Herleitung, die Schwierigkeit liegt alleine in der räumlichen Vorstellung der Vektorfelder und deren Wechselbeziehungen.<sup>4</sup>

### 2.1.1 Das Grundgesetz der Elektrostatik

Fixiert man eine positive Punktladung  $Q_1$  im Raum und bringt dann eine zweite positive Testladung  $Q_2$  in die Nähe der ersten Ladung, so übt  $Q_1$  eine abstoßende elektrostatische Kraft auf  $Q_2$  aus. Diese Kraft wird durch das elektrische Feld zwischen den Ladungen übertragen. Jede Ladungsverteilung erzeugt im umgebenden Raum ein elektrisches Feld  $\vec{E}(\vec{x})$ , welches seinerseits auf eine Testpunktladung die Kraft  $\vec{F} = Q\vec{E}$  ausübt. Wie sich das elektrische Feld um eine beliebige Ladungsdichteverteilung  $\rho(\vec{x})$  ausbildet, wird auf kompakte Weise durch die Gleichung

$$\oint_{\Sigma(V)} \epsilon(\vec{x}) \vec{E}(\vec{x}) d\vec{\sigma} = \int_V \rho(\vec{x}) dV = Q(V) \quad (2-1)$$

zusammengefasst. Dieses Grundgesetz der Elektrostatik besagt, dass der Fluss des elektrischen Feldes durch die geschlossene Oberfläche  $\Sigma(V)$  eines beliebigen Volumens  $V$  proportional zu der in  $V$  eingeschlossenen Gesamtladung  $Q(V)$  ist. Die Proportionalität ist durch die absolute Dielektrizität  $\epsilon(\vec{x})$  gegeben. Befindet sich die Ladungsverteilung in Vakuum, so ist  $\epsilon(\vec{x})$  überall gleich der Dielektrizitätskonstante des freien Raumes  $\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}$ . Wie in Figur 2-1 dargestellt, zeigt der Vektor  $d\vec{\sigma}$  (Flächenvektor senkrecht zum Flächenelement  $d\sigma \in \Sigma(V)$ ) definitionsgemäß überall vom Volumen nach außen.



Figur 2-1. Illustration zum Grundgesetz der Elektrostatik.

### Übung

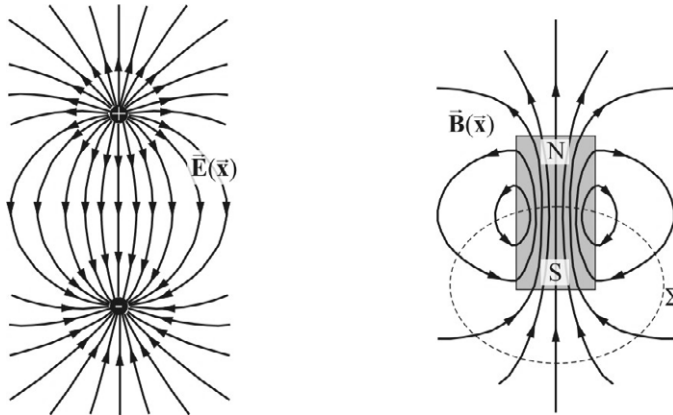
Berechne das elektrische Feld  $\vec{E}(\vec{x})$  einer Punktladung  $Q$  im freien Raum.

### 2.1.2 Das Grundgesetz des Magnetismus

Da keine magnetischen Monopole gefunden werden konnten, existiert kein magnetisches Gegenstück zur elektrischen Ladung. Bei zwei elektrischen Punktladungen beginnen die elektrischen Feldlinien immer bei der positiven Ladung und enden bei der negativen Ladung. Wie rechts in Figur 2-2 dargestellt, sind im Gegensatz dazu die Feldlinien eines Magneten oder einer Spule immer in sich geschlossen und durchdringen jede beliebige, geschlossene Integrationsoberfläche zweimal, einmal von außen nach innen und einmal von innen nach außen. Dies hat zur Folge, dass das zu (2-1) analoge Oberflächenintegral

$$\oint_{\Sigma(V)} \vec{B}(\vec{x}) d\vec{\sigma} = 0 \quad (2-2)$$

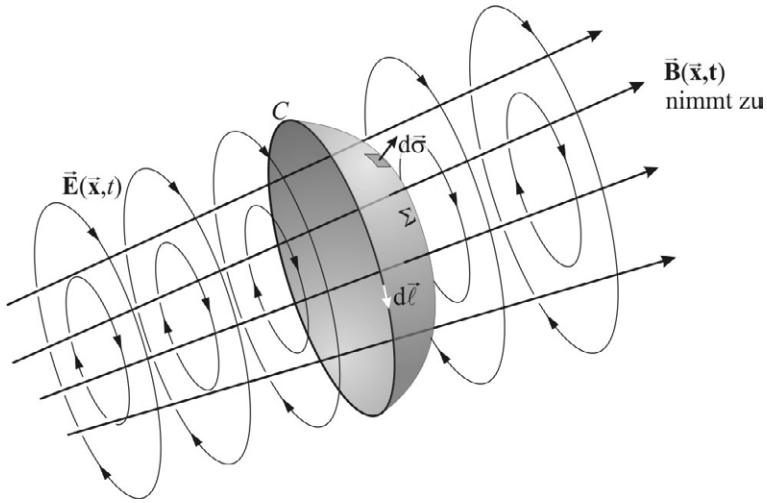
der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}(\vec{x})$  für jede geschlossene Oberfläche  $\Sigma$  exakt verschwindet. Die Nichtexistenz von magnetischen Monopolen, beziehungsweise die daraus resultierende Gleichung (2-2) bildet das Grundgesetz der Magnetostatik.



**Figur 2-2.** Links: Die elektrischen Feldlinien beginnen bei der positiven Punktladung und enden bei der negativen Punktladung. Rechts: Die magnetischen Feldlinien sind immer geschlossen und durchdringen jede beliebige, geschlossene Integrationsfläche  $\Sigma$  zweimal, einmal von außen nach innen und einmal von innen nach außen. Der magnetische Fluss durch  $\Sigma$  ist deshalb immer gleich 0.

### 2.1.3 Induktionsgesetz von Faraday

Die Stromerzeugung in einem Fahrraddynamo, in der Lichtmaschine von Kraftfahrzeugen oder in den Generatoren von Wind-, Wasser-, Kohle-, Kernkraftwerken etc. basiert auf dem Phänomen der Induktion, wie es von Michael Faraday (1791-1867) entdeckt wurde. Er stellte fest, dass ein zeitlich veränderlicher Magnetfluss, der durch die Öffnung einer geschlossenen Leiterschleife geht, einen elektrischen Strom in der Schleife hervorruft. Wenn aber im Leiter ein Strom fließt, muss um ihn ein elektrisches Feld existieren, um die Ladungsträger in Bewegung zu versetzen. Der experimentell festgestellte Zusammenhang zwischen der zeitlichen



**Figur 2-3.** Illustration zum Induktionsgesetz von Faraday. Das zeitlich veränderliche Magnetfeld induziert ein elektrisches Feld.

Änderungsrate des Magnetflusses und des dadurch induzierten elektrischen Feldes ist durch die Gleichung

$$\oint_{C(\Sigma)} \vec{E}(\vec{x}, t) d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B}(\vec{x}, t) d\vec{\sigma} \quad (2-3)$$

gegeben, wobei  $t$  hier für die Zeit steht. Dies ist das Induktionsgesetz von Faraday und besagt, dass das Linienintegral des elektrischen Feldes entlang einer geschlossenen Kurve  $C$  gleich dem Negativen der zeitlichen Änderungsrate des magnetischen Flusses durch die von dieser Kurve eingeschlossenen Fläche ist. Wie in Figur 2-3 skizziert, gilt für die Richtungen von  $d\vec{\sigma}$  und  $d\vec{\ell}$  die „Korkenzieherregel“.

Beim Induktionsgesetz ist zu Beachten, dass im Sinne der Maxwellschen Gleichungen – welche die Beziehung zwischen den elektromagnetischen Feldern und den Ladungen beschreiben – rechts in Gleichung (2-3) nur der Anteil, der von einer zeitlichen Veränderung des Magnetfeldes herrührt, zu betrachten ist (Ruheinduktion, keine bewegten Leiterschleifen). In diesem Fall kann die zeitliche Ableitung in (2-3) mit der Integration vertauscht werden,

$$\oint_{C(\Sigma)} \vec{E}(\vec{x}, t) d\vec{\ell} = - \int_{\Sigma} \frac{d}{dt} \vec{B}(\vec{x}, t) d\vec{\sigma} . \quad (2-4)$$

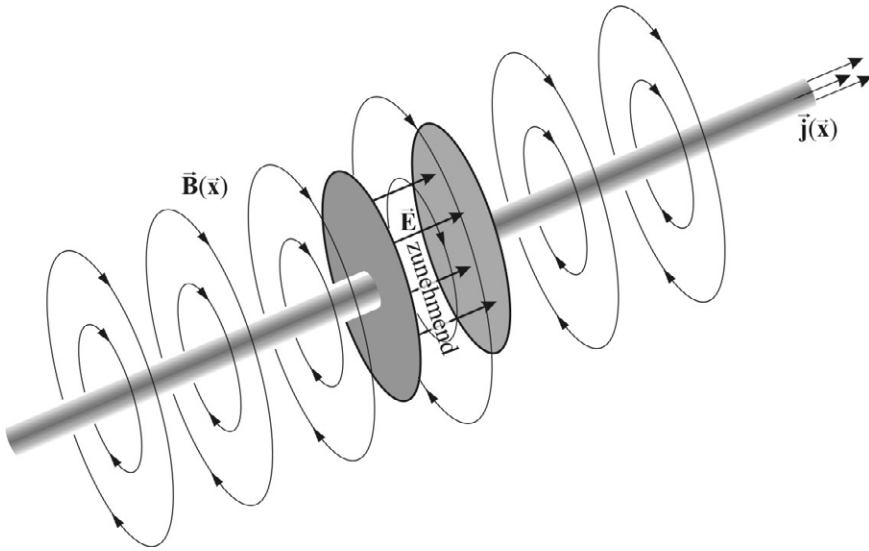
Die durch eine zeitliche Veränderung der Randlinie  $C(\Sigma)$  (bewegte Leiterschleifen) verursachte Unipolarinduktion (Bewegungsinduktion) ist ein separat zu betrachtender (relativistischer) Effekt und kann auf die Lorentzkraft zurückgeführt werden.

### 2.1.4 Das Durchflutungsgesetz von Ampère und Maxwell

Mit Hilfe einer Kompassnadel kann leicht festgestellt werden, dass in der Umgebung eines stromdurchflossenen Leiters ein Magnetfeld herrscht. In Analogie zum Induktionsgesetz induziert zudem auch ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld ein Magnetfeld, wie dies im Beispiel von Figur 2-4 skizziert ist. Je nach Anordnung können beide Phänomene zusammen auftreten und sich überlagern. Der mathematische Zusammenhang zwischen der Stromdichteverteilung  $\vec{j}(\vec{x})$  und den elektromagnetischen Feldern ist durch das Durchflutungsgesetz

$$\oint_{C(\Sigma)} \frac{\vec{B}(\vec{x}, t)}{\mu(\vec{x})} d\vec{\ell} = \int_{\Sigma} \left( \vec{j}(\vec{x}, t) + \frac{d}{dt} \varepsilon(\vec{x}) \vec{E}(\vec{x}, t) \right) d\vec{\sigma} \quad (2-5)$$

gegeben, wobei  $\mu$  die absolute Permeabilität ist. Im Vakuum ist  $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ . Die Integrationen über die Fläche  $\Sigma$  und entlang der dazugehörigen Kurve  $C(\Sigma)$  sind analog zu jenen des Induktionsgesetzes in Figur 2-3 und sind in Figur 2-4 aus Übersichtsgründen nicht eingezeichnet.



**Figur 2-4.** Illustration des Durchflutungsgesetzes. Sowohl der Fluss von Ladungsträgern (z. B. in einem elektrischen Leiter) als auch ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld (z. B. zwischen zwei Kondensatorplatten) erzeugen ein Magnetfeld.

## 2.2 Die Maxwellschen Gleichungen in differentieller Form

Die Maxwellschen Gleichungen in der oben wiedergegebenen Integralform sind anschaulich gut zugänglich. Besonders für die Berechnung der Lichtausbreitung ist die im Folgenden her-

geleitete differentielle Form der Gleichungen jedoch handlicher. Für die Umformung der Gleichungen wenden wir zwei mathematische Sätze aus der Vektorrechnung an.<sup>3</sup>

Der Satz von Gauß besagt, dass der Fluss eines beliebigen Vektorfeldes  $\vec{V}$  durch eine beliebige, geschlossene Oberfläche  $\Sigma$  gleich dem Volumenintegral der Divergenz  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$  des Vektorfeldes im von  $\Sigma$  eingeschlossenen Volumen  $V$  ist (siehe z. B. Figur 2-1):

$$\oint_{\Sigma(V)} \vec{V}(\vec{x}) d\vec{\sigma} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\vec{x}) dV . \quad (2-6)$$

Der Satz von Stokes besagt, dass das Linienintegral eines beliebigen Vektorfeldes  $\vec{V}$  entlang einer geschlossenen Linie  $C$  gleich dem Fluss der Rotation  $\vec{\nabla} \times \vec{V}$  des Vektorfeldes durch die von  $C$  umschlossene Fläche  $\Sigma$  ist (siehe z. B. Figur 2-3):

$$\oint_{C(\Sigma)} \vec{V}(\vec{x}) d\vec{\ell} = \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{x})) d\vec{\sigma} . \quad (2-7)$$

Durch Anwendung des Satzes von Gauß (2-6) auf das Volumenintegral in (2-1) erhalten wir

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\varepsilon(\vec{x}) \vec{E}(\vec{x})) dV = \int_V \rho(\vec{x}) dV . \quad (2-8)$$

Diese Gleichung kann nur dann für alle beliebig gewählte Volumen gelten, wenn die Integranden an jedem Ort im Raum gleich sind, d. h.

$$\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon(\vec{x}) \vec{E}(\vec{x})) = \rho(\vec{x}) . \quad (2-9)$$

Wendet man den Satz von Gauß auf (2-2) an, so folgt auf gleiche Weise

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}) = 0 . \quad (2-10)$$

Durch Anwendung des Satzes von Stokes (2-7) auf die linke Seite des Induktionsgesetzes (2-4) erhalten wir

$$\int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}, t)) d\vec{\sigma} = - \int_{\Sigma} \frac{d}{dt} \vec{B}(\vec{x}, t) d\vec{\sigma} . \quad (2-11)$$

Auch diese Gleichung kann nur dann für alle beliebig gewählten Flächen  $\Sigma$  gelten, wenn die beiden Integranden überall identisch sind, also

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}, t) = - \dot{\vec{B}}(\vec{x}, t) , \quad (2-12)$$

wobei hier für die Ableitung nach der Zeit die übliche Abkürzung mit dem Punkt über der abgeleiteten Größe verwendet wurde.

Auf gleiche Weise folgt aus dem Durchflutungsgesetz (2-5) und dem Satz von Stokes (2-7) die Beziehung

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}(\vec{x}, t)}{\mu(\vec{x})} = \vec{j}(\vec{x}, t) + \varepsilon(\vec{x}) \dot{\vec{E}}(\vec{x}, t) . \quad (2-13)$$

In der differentiellen Form lassen sich die Maxwell'schen Gleichungen also wie folgt zusammenfassen:

$$\vec{\nabla}(\epsilon\vec{E}) = \rho \quad (2-14)$$

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \quad (2-15)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \quad (2-16)$$

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu} \right) - \epsilon \dot{\vec{E}} = \vec{j} . \quad (2-17)$$

In der Literatur wird die dielektrische Verschiebung  $\epsilon\vec{E}$  oft mit  $\vec{D}$  abgekürzt. Historisch wurde für  $\vec{B}$  der Begriff der magnetischen Induktion (oder magnetische Flussdichte) verwendet und nur die mit  $\vec{H}$  abgekürzte Größe  $\vec{B}/\mu$  als Magnetfeld bezeichnet. Wir werden diesen historischen Bezeichnungen keine weitere Bedeutung zumessen und in diesem Buch immer nur die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  bzw. explizit die Ausdrücke  $\epsilon\vec{E}$  und  $\vec{B}/\mu$  verwenden.

Oft werden die elektromagnetischen Felder in homogenen Medien untersucht, wo sich sowohl die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  als auch die magnetische Permeabilität  $\mu$  örtlich nicht ändern. In diesem Fall können  $\epsilon$  und  $\mu$  von der Differentiation ausgeschlossen werden. Die Maxwellschen Gleichungen in homogenen Medien lauten dann

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_r\epsilon_0} \quad (2-18)$$

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \quad (2-19)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \quad (2-20)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_r\mu_0\epsilon_r\epsilon_0\dot{\vec{E}} = \mu_r\mu_0\vec{j} , \quad (2-21)$$

wobei hier die absolute Dielektrizität  $\epsilon = \epsilon_r\epsilon_0$  mit Hilfe der relativen Dielektrizität  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$  und die absolute Permeabilität  $\mu = \mu_r\mu_0$  mit Hilfe der relativen Permeabilität  $\mu_r = \mu/\mu_0$  ausgedrückt wurden.

## 2.3 Energie des elektromagnetischen Feldes

Bereits in den frühen Untersuchungen wurde das Vorhandensein elektrischer und magnetischer Felder an deren Wirkung auf geladene Probekörper ergründet. So wurde festgestellt, dass ein elektrisches Feld  $\vec{E}$  auf eine Punktladung  $Q$  die Kraft

$$\vec{F}_E = Q\vec{E} \quad (2-22)$$

ausübt. Das magnetische Feld  $\vec{B}$  äußert sich hingegen gemäß

$$\vec{F}_B = Q\vec{v} \times \vec{B} \quad (2-23)$$

als Kraft auf bewegte Ladungsträger, wobei  $\vec{v}$  die Geschwindigkeit der Testpunktladung  $Q$  ist. Treten beide Kräfte zusammen auf, ist die resultierende Kraft durch

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2-24)$$



gegeben. Für nicht relativistische Geschwindigkeiten lautet das Bewegungsgesetz für punktförmige Ladungsträger der Masse  $m$  somit

$$m\ddot{\mathbf{x}} = Q(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}). \quad (2-25)$$

Bei jeder Bewegung des Ladungsträgers leistet das Feld während der Zeit  $dt$  die Arbeit

$$dA = \vec{\mathbf{F}} d\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{F}} \vec{\mathbf{v}} dt, \quad (2-26)$$

was mit (2-24)

$$dA = Q\vec{\mathbf{E}}\vec{\mathbf{v}}dt + \underbrace{(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}})\vec{\mathbf{v}}}_{=0} dt \quad (2-27)$$

ergibt. Der zweite Term in (2-27) verschwindet, weil  $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$  senkrecht zu  $\vec{\mathbf{v}}$  steht.

Wenn sich statt einer diskreten Punktladung eine kontinuierliche Ladungsverteilung bewegt, ist  $dQ$  durch die Ladungsdichte  $\rho$  im Volumen  $dV$  zu ersetzen und wir erhalten

$$dA = \rho dV \vec{\mathbf{E}} \vec{\mathbf{v}} dt. \quad (2-28)$$

Das Produkt  $\rho \vec{\mathbf{v}}$  entspricht gemäß Definition gerade der Stromdichte  $\vec{\mathbf{j}}$ . Die vom elektromagnetischen Feld im Volumenelement  $dV$  während des Zeitintervalls  $dt$  an der bewegten Ladungsverteilung geleistete Arbeit beträgt

$$dA = \vec{\mathbf{j}} \vec{\mathbf{E}} dV dt. \quad (2-29)$$

Es sei hier nur die Feldenergie in dispersionsfreier und homogener Umgebung betrachtet (für weiterführende Betrachtungen wird auf entsprechende Lehrbücher verwiesen).<sup>5</sup> Dann folgt durch Einsetzen von (2-21)

$$\frac{dA}{dVdt} = \vec{\mathbf{j}} \vec{\mathbf{E}} = \left( \frac{\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}}{\mu_r \mu_0} - \epsilon_r \epsilon_0 \dot{\vec{\mathbf{E}}} \right) \vec{\mathbf{E}}. \quad (2-30)$$

Durch Anwendung der Vektor-Rechenregel<sup>3</sup>

$$\vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) = \vec{\mathbf{b}}(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{a}}) - \vec{\mathbf{a}}(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{b}}) \quad (2-31)$$

erhalten wir mit (2-20) daraus

$$\frac{dA}{dVdt} = \vec{\mathbf{j}} \vec{\mathbf{E}} = \left( -\epsilon_r \epsilon_0 \dot{\vec{\mathbf{E}}} \vec{\mathbf{E}} - \frac{\dot{\vec{\mathbf{B}}} \vec{\mathbf{B}}}{\mu_r \mu_0} - \frac{1}{\mu_r \mu_0} \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}) \right). \quad (2-32)$$

Die ersten beiden Terme in der Klammer sind zusammen gleich der negativen zeitlichen Änderung von

$$u = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{2} \vec{\mathbf{E}}^2 + \frac{1}{2\mu_r \mu_0} \vec{\mathbf{B}}^2. \quad (2-33)$$

Der dritte Term ist die negative Divergenz des so genannten Poyntingvektors

$$\vec{\mathbf{S}} = \frac{\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}}{\mu_r \mu_0}. \quad (2-34)$$

Wir erhalten somit

$$\frac{dA}{dVdt} = \vec{j}\vec{E} = -\dot{u} - \vec{\nabla}\vec{S} \quad (2-35)$$

und daraus den Satz von Poynting

$$\dot{u} + \vec{\nabla}\vec{S} + \vec{j}\vec{E} = 0. \quad (2-36)$$

Gemäß Herleitung hat die Gleichung (2-35) die Dimension der zeitlichen Ableitung einer Energiedichte. Durch Integration über ein gegebenes Volumen  $V$  erhält man die Energiebilanz

$$\dot{A} = \int_V \vec{j}\vec{E} dV = - \int_V (\dot{u} + \vec{\nabla}\vec{S}) dV. \quad (2-37)$$

Rechts steht also die pro Zeiteinheit von den bewegten Ladungsträgern aufgenommene Energie und links die vom Feld pro Zeiteinheit an die Ladungsträger abgegebene Energie.

Wenn keine freien Ladungsträger vorhanden sind ( $\vec{j} = 0$ ) reduziert sich diese Gleichung auf

$$\int_V (\dot{u} + \vec{\nabla}\vec{S}) dV \doteq \dot{U} + \int_V \vec{\nabla}\vec{S} dV = 0, \quad (2-38)$$

was mit dem Satz von Gauß (2-6) in

$$\dot{U} = - \oint_{\Sigma(V)} \vec{S} d\vec{\sigma} \quad (2-39)$$

umgeformt werden kann. Die aus dem Volumen  $V$  durch die geschlossene Oberfläche  $\Sigma(V)$  zu- oder abfließende Leistung ist demnach durch das Oberflächenintegral des Poyntingvektors gegeben. Die Größe  $U$  entspricht offenbar der im elektromagnetischen Feld gespeicherten Energie ( $u$  ist die Energiedichte) und der Betrag des Poyntingvektors entspricht dem lokalen Energiedichtefluss (Leistung pro Querschnittsfläche) in Richtung von  $\vec{S}$ .

Bei stationären Feldern ist die Energie  $U$  konstant, d. h.  $\dot{U} = 0$ . Im Allgemeinen verschwindet dabei  $\vec{S}$  aber nicht. Aus (2-34) und den Maxwellgleichungen folgt hingegen  $\vec{\nabla}\vec{S} = 0$ , womit (2-38) und (2-39) auch in diesem Fall erfüllt sind.

## 2.4 Elektromagnetische Wellen

Wir gehen nun wie Maxwell vor und leiten aus den oben besprochenen vier Grundgesetzen der Elektrodynamik die Existenz von elektromagnetischen Wellen her. Die Herleitung sei auf den Spezialfall mit  $\rho = 0$  und  $\vec{j} = 0$  (Abwesenheit von freien Ladungsträgern) und auf homogene Medien eingeschränkt. Als erstes wird die Rotation der Gleichung (2-20) berechnet:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \vec{\nabla} \times \dot{\vec{B}} = 0. \quad (2-40)$$

Durch Anwendung der Vektor-Produktregel<sup>3</sup>

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \quad (2-41)$$

erhalten wir daraus

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - (\vec{\nabla} \vec{\nabla}) \vec{E} + \vec{\nabla} \times \dot{\vec{B}} = 0. \quad (2-42)$$

Mit  $\rho = 0$  führt dies durch Einsetzen von (2-18) zur Gleichung

$$-\Delta \vec{E} + \vec{\nabla} \times \dot{\vec{B}} = 0, \quad (2-43)$$

wobei für  $\vec{\nabla} \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2$  die übliche Abkürzung  $\Delta$  verwendet wurde. Die Rotation der magnetischen Flussdichte ersetzen wir mit Hilfe der Gleichung (2-21) und erhalten unter der Voraussetzung  $\vec{j} = 0$  die Wellengleichung

$$\Delta \vec{E} - \mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0 \ddot{\vec{E}} = 0. \quad (2-44)$$

Auf ähnliche Weise gelangt man durch Bildung der Rotation von (2-21) und Einsetzen von (2-19) und (2-20) zur Wellengleichung

$$\Delta \vec{B} - \mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0 \ddot{\vec{B}} = 0. \quad (2-45)$$

Artgleiche Wellengleichungen sind überall dort anzutreffen, wo harmonisch schwingende Größen auftreten. Für die hier behandelten elektromagnetischen Wellen werden die wichtigsten Lösungen im Folgenden kurz erörtert.

### 2.4.1 Die ebenen Wellen

Durch Einsetzen lässt sich leicht verifizieren, dass die Felder

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E} e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega t} \quad (2-46)$$

und

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B} e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega t} \quad (2-47)$$

die Wellengleichungen (2-44) und (2-45) lösen, sofern die Dispersionsrelation

$$\omega = \frac{|\vec{k}|}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0}} \quad (2-48)$$

erfüllt ist.<sup>a</sup>  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  stehen hier für die Wellenamplituden.

Die hier verwendete komplexe Schreibweise ist für die meisten Berechnungen sehr bequem. Da aber die elektrischen und magnetischen Felder reelle Größen sind, erhält man die physikalisch sinnvollen Lösungen der Wellengleichung mit den Realteilen

---


$$^a \Delta \vec{E} = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right] \vec{E} = (-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2) \vec{E} e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega t} = -|\vec{k}|^2 \vec{E} e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega t}$$

$$\ddot{\vec{E}} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \vec{E} = -\omega^2 \vec{E} e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega t}$$

analog für  $\vec{B}$ .

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{2} \left( \vec{E} e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega t} + \vec{E}^* e^{+i\vec{k}\vec{x} - i\omega t} \right) \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{2} \left( \vec{B} e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega t} + \vec{B}^* e^{+i\vec{k}\vec{x} - i\omega t} \right).\end{aligned}\quad (2-49)$$

Solange nur lineare Operationen durchzuführen sind, kann mit den komplexen Ausdrücken gerechnet und am Schluss der Realteil des Resultats betrachtet werden. Bei anderen Operationen, insbesondere bei Produkten aus Feldgrößen (z. B. Energie der Felder, nicht-lineare Optik etc.) dürfen jedoch nur die Realteile verwendet werden. Um die Notation zu entlasten, wird hinfür im ganzen Buch bei linearen Rechnungen immer nur die komplexe Schreibweise benutzt. Für die physikalischen Felder sind dabei implizit stets nur die Realteile gemeint.

Um die physikalischen Eigenschaften der Felder in (2-46) und (2-47) zu untersuchen, stellen wir zunächst fest, dass<sup>b</sup>

$$\vec{E}(\vec{x}_0, t) = \vec{E} \left( \vec{x}_0 + \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \frac{2\pi}{|\vec{k}|}, t \right), \text{ (analog für } \vec{B} \text{).} \quad (2-50)$$

Das Feld weist also in Richtung von  $\vec{k}$  eine Periodizität – d. h. eine Wellenlänge – von

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|} \quad (2-51)$$

auf. In Ebenen senkrecht zu  $\vec{k}$  sind die Felder zu einem gegebenen Zeitpunkt überall gleich.<sup>c</sup> Es handelt sich hier also um so genannt ebene Wellen.

Betrachten wir die Felder zum Zeitpunkt  $t_0 + dt$  so stellen wir andererseits fest,<sup>d</sup> dass

$$\vec{E}(\vec{x}_0, t_0 + dt) = \vec{E} \left( \vec{x}_0 - \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \frac{\omega}{|\vec{k}|} dt, t_0 \right), \text{ (analog für } \vec{B} \text{).} \quad (2-52)$$

Wenn zum Zeitpunkt  $t_0 + dt$  das Feld an der Stelle  $\vec{x}_0$  einen gegebenen Wert  $\vec{E}$  hat, so war derselbe Wert zum früheren Zeitpunkt  $t_0$  offenbar um die Strecke  $(\omega/|\vec{k}|)dt$  in Richtung von  $-\vec{k}$  vor der Stelle  $\vec{x}_0$  anzutreffen. Mit anderen Worten, die Feldverteilung bewegt sich als Ganzes mit der Geschwindigkeit

$$^b \quad e^{-i\vec{k}\vec{x}_0} = e^{-i\vec{k}\vec{x}_0 - i2\pi} = e^{-i\vec{k}\vec{x}_0 - i\frac{|\vec{k}|^2}{|\vec{k}|^2}2\pi} = e^{-i\vec{k}\vec{x}_0 - i\frac{\vec{k}\vec{k}}{|\vec{k}|^2}2\pi} = e^{-i\vec{k}\left(\vec{x}_0 + \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \frac{2\pi}{|\vec{k}|}\right)}$$

$$^c \quad \vec{k}(\vec{x}_0 + \vec{x}_{\perp\vec{k}}) = \vec{k}\vec{x}_0 + \vec{k}\vec{x}_{\perp\vec{k}} = \vec{k}\vec{x}_0$$

$$\begin{aligned}^d \quad -i\vec{k}\vec{x}_0 + i\omega(t_0 + dt) &= -i\vec{k}\vec{x}_0 + i\omega dt + i\omega t_0 = -i\vec{k}\vec{x}_0 + i\frac{|\vec{k}|^2}{|\vec{k}|^2}\omega dt + i\omega t_0 \\ &= -i\vec{k}\vec{x}_0 + i\frac{\vec{k}\vec{k}\omega}{|\vec{k}|^2}dt + i\omega t_0 = -i\vec{k}\left(\vec{x}_0 - \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \frac{\omega}{|\vec{k}|} dt\right) + i\omega t_0\end{aligned}$$

$$c = \frac{\omega}{|\vec{k}|} \quad (2-53)$$

in der Richtung von  $\vec{k}$ . Mit der Dispersionsrelation (2-48) findet man für diese Phasengeschwindigkeit den Wert

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0}}. \quad (2-54)$$

Mit der Definition des Brechungsindex

$$n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \quad (2-55)$$

kann die Phasengeschwindigkeit durch

$$c = \frac{c_0}{n} \quad (2-56)$$

ausgedrückt werden, wobei

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.99792458 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \quad (2-57)$$

die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist.

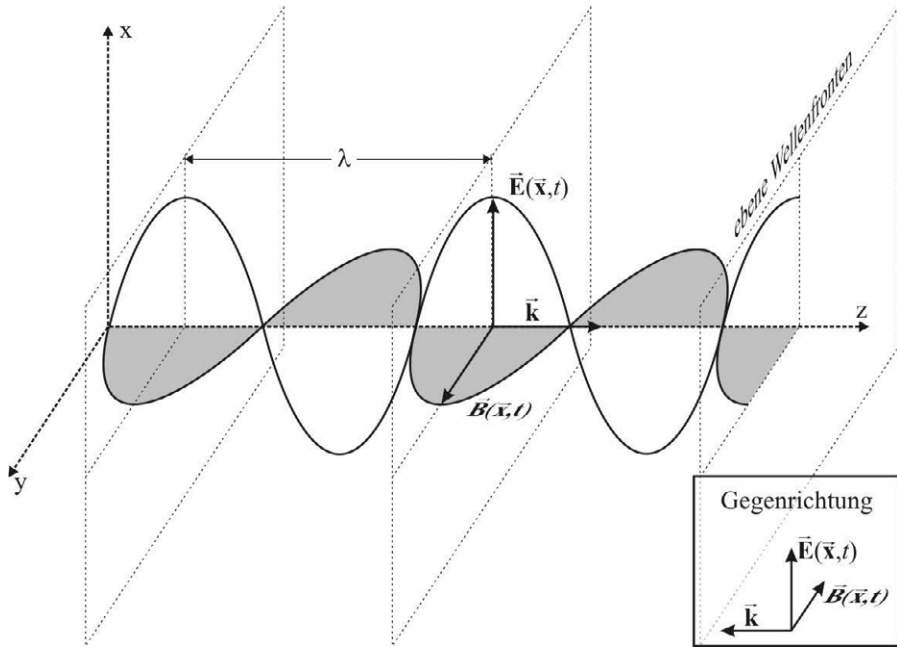
Ohne Beweis sei hier der Vollständigkeit halber erwähnt, dass sich ein Lichtpuls in einem dispersiven Medium (Brechungsindex ändert sich mit der Frequenz  $\omega$ ) mit einer von der Phasengeschwindigkeit abweichenden, so genannten Gruppengeschwindigkeit

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \left( \frac{dk}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{c_0}{n(\omega) + \omega \frac{dn(\omega)}{d\omega}} \quad (2-58)$$

fortpflanzt.<sup>2,5</sup> Mit  $k$  ist hier der Betrag von  $\vec{k}$  gemeint. Wegen den unterschiedlichen Geschwindigkeiten der verschiedenen Farbkomponenten im Lichtpuls wird dieser im Allgemeinen auch zerfließen und seine Form ändern. Dies führt z. B. bei der Übertragung von Signalen in optischen Telekommunikationsfasern zu Limitierungen bezüglich Übertragungsdistanz und Signalarate. Nur in ganz speziellen Fällen können optische Pulse erzeugt werden, die über lange Distanzen nicht zerfließen. Das Phänomen solcher Solitonen wurde ursprünglich bei Oberflächenwellen in einem Wasserkanal entdeckt.

Die Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi\nu$  bestimmt die Farbe des Lichtes. Im sichtbaren Wellenlängenbereich von ca. 380 nm bis 750 nm liegt die Lichtfrequenz  $\nu$  in der Größenordnung von  $10^{14}$  Hz. Die Frequenz des Lichtes ist in Medien mit unterschiedlichen Brechungsindizes überall gleich; sie ist also eine *invariante* Eigenschaft des Lichts und damit des Laserstrahls. Hingegen ändern sich sowohl die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  als auch die Wellenlänge  $\lambda$  und der Betrag des Wellenzahlvektors  $\vec{k}$ . Denn aus (2-53) und (2-51) folgt mit (2-56)

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{c_0} n = |\vec{k}_0| n \quad (2-59)$$



Figur 2-5. Ausbreitung der linear polarisierten ebenen Welle.

und

$$\lambda = \frac{2\pi c_0}{\omega n} = \frac{\lambda_0}{n}. \quad (2-60)$$

Der Index 0 bezeichnet hier die Beträge der entsprechenden Größen im Vakuum.

Die hier behandelten Lösungen der Wellengleichungen müssen nach wie vor alle Maxwellgleichungen erfüllen. Die Richtungen der Amplitudenvektoren  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  können deshalb nicht unabhängig voneinander gewählt werden. Damit (2-19) sowie (2-18) für den hier betrachteten Fall mit  $\rho = 0$  erfüllt sind, müssen beide Feldvektoren senkrecht zu  $\vec{k}$  stehen,<sup>e</sup> das heißt

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{B} = 0. \quad (2-61)$$

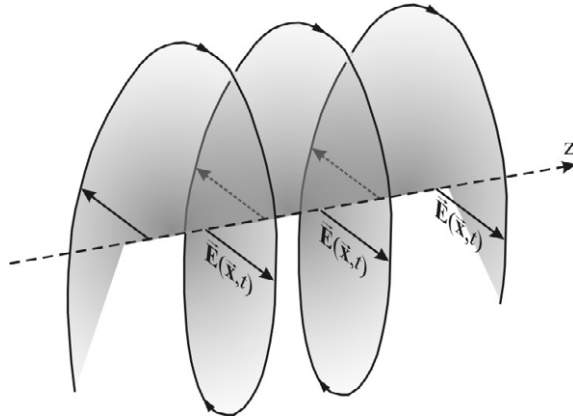
Bei den elektromagnetischen Wellen handelt es sich also um Transversalwellen.

Mit (2-20) stellt man zudem fest, dass das elektrische und das magnetische Feld gemäß

$$\omega \vec{B} = \vec{k} \times \vec{E} \quad (2-62)$$

<sup>e</sup>  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z = (-ik_x E_x - ik_y E_y - ik_z E_z) e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega t} = -i\vec{k} \cdot \vec{E} e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega t}$

muss gemäß (2-18) und der Voraussetzung  $\rho = 0$  überall verschwinden (analog für das Magnetfeld).



**Figur 2-6.** Eine elliptisch polarisierte Welle.

ebenfalls senkrecht zueinander stehen.<sup>f</sup>

Die Ausbreitung einer ebenen elektromagnetischen Welle ist als Momentaufnahme in Figur 2-5 skizziert. Wenn das elektrische Feld und das magnetische Feld wie hier dargestellt je in einer festen Richtung schwingen, spricht man von einer linear polarisierten Welle. Als *Polarisationsrichtung* bezeichnet man die *Schwingungsrichtung des elektrischen Feldes*. Für solch transversale Wellen gibt es zwei orthogonal unabhängige Polarisationen. Beispielsweise wie in Figur 2-5 in  $x$ -Richtung oder aber in  $y$ -Richtung.

Da die Wellengleichungen und die Maxwellgleichungen linear sind, ist jede Überlagerung solcher Wellen wieder eine Lösung der Wellengleichungen. Durch Addition zweier orthogonal zueinander polarisierter Wellen, können je nach Phasenunterschied weitere Polarisationszustände erzeugt werden. Die phasengleiche Addition zweier ebener, in  $x$ - und  $y$ -Richtung polarisierter Wellen mit gleicher Amplitude ergibt eine ebene Welle mit einer linearen, um  $45^\circ$  von der  $x$ - zur  $y$ -Achse gedrehten Polarisation. Besteht zwischen den beiden orthogonal polarisierten Komponenten eine Phasenverschiebung  $\varphi$ ,

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega t} + \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega t + i\varphi}, \quad (2-63)$$

so beschreiben die Enden der Feldvektoren bei einer Momentaufnahme im Allgemeinen eine elliptische Spirale, wie dies in Figur 2-6 dargestellt ist. Betrachtet man das zeitliche Verhalten derselben Welle an einem festen Ort, so rotiert die Spitze des Feldvektors entlang einer Ellipse, die senkrecht zur Ausbreitungsrichtung steht. Man spricht hier von einer elliptisch

<sup>f</sup>  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y \\ \frac{\partial}{\partial z} E_x - \frac{\partial}{\partial x} E_z \\ \frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} k_y E_z - k_z E_y \\ k_z E_x - k_x E_z \\ k_x E_y - k_y E_x \end{pmatrix} = -i\vec{k} \times \vec{E} = -i\vec{k} \times \vec{E} e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega t}, \quad \dot{\vec{B}}(\vec{x}, t) = i\omega \vec{B} e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega t}$

polarisierten Welle. Der Spezialfall der zirkular polarisierten Welle entsteht dann, wenn die Phasenverschiebung gerade ein Viertel einer Wellenlänge beträgt, d.h.  $\varphi = \pi/2$ .

Wenn der Wellenzahlvektor  $\vec{k}$  und die Polarisation einer ebenen Welle festgelegt sind, folgen alle weiteren Eigenschaften aus den soeben hergeleiteten Beziehungen. Jeder beliebige Wert von  $\vec{k}$  ergibt eine gültige Lösung der Wellengleichung und der Maxwellgleichungen. Eine solche Lösung wird besonders in Zusammenhang mit Lasern auch Mode genannt. Jede solche Mode hat dann noch einen Freiheitsgrad bezüglich der Polarisation, wobei hier, wie soeben gesehen, zwei linear unabhängige Zustände als Basis gewählt werden können.

Zur eindeutigen Bezeichnung einer ebenen Welle gehören also die Modenfunktion (2-46) bzw. (2-47) (diese legen die Mode als ebene Welle fest) sowie die Angabe von  $\vec{k}$  und die Polarisation. In der Notation können wir dies mit geeigneten Indizes berücksichtigen und schreiben

$$\vec{E}_{\vec{k},p}(\vec{x},t) = \vec{E}_{\vec{k},p} e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega t} \quad (2-64)$$

beziehungsweise

$$\vec{B}_{\vec{k},p}(\vec{x},t) = \vec{B}_{\vec{k},p} e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega t}, \quad (2-65)$$

wobei  $p$  einfach einen der beiden linear unabhängigen Polarisationszustände indiziert.

Die hier betrachteten ebenen Wellen sind aber bei weitem nicht die einzigen möglichen Lösungen der Wellengleichung. Weitere Lösungsformen, d. h. weitere elektromagnetische Moden werden in den folgenden Abschnitten behandelt.

Obwohl die ebenen Wellen die Maxwellgleichungen und die Wellengleichung erfüllen, sind sie streng genommen physikalisch gar nicht zulässig. Wegen ihrer unendlichen transversalen Ausdehnung und der endlichen Amplitude würde nämlich eine solche ebene Welle eine unendlich hohe Energie enthalten. In vielen Fällen ist es aber nützlich, sich einen gegebenen Lichtstrahl wenigstens lokal als durch eine ebene Welle genähert vorzustellen. Zudem lässt sich gemäß Fourier-Transformation<sup>6</sup> jede beliebige Mode des elektromagnetischen Feldes als Linearkombination von ebenen Wellen ausdrücken.

#### 2.4.1.1 Stehende Wellen

Die in Figur 2-5 dargestellte Welle breitet sich von links nach rechts aus (dasselbe gilt für die Welle in Figur 2-6). In einem optischen Resonator schwingen aber oft stehenden Wellen (Lasermode zwischen zwei Resonatorspiegeln). Eine stehende Welle lässt sich einfach als Überlagerung zweier räumlich in umgekehrter Richtung laufender Wellen erzeugen (die eine in  $z$ -Richtung, die andere in Richtung  $-z$ ). Dabei gelten weiterhin die Beziehungen (2-61) und (2-62), wodurch die Richtungen der Feldvektoren der rücklaufenden Welle wie unten rechts in Figur 2-5 dargestellt ausgerichtet sind. Im Gegensatz zu der nach rechts laufenden Welle zeigt nun das magnetische Feld in Richtung  $-y$  statt in  $y$ -Richtung, wenn das elektrische Feld in Richtung  $+x$  zeigt. Dies hat zur Folge, dass bei der stehenden und linear polarisierten Welle sich das Maximum der Wellenbäuche des Magnetfeldes entlang des Strahles dort befindet, wo die Knoten des elektrischen Feldes liegen. Ist ein optischer Resonator durch ideal leitende



Spiegel (z. B. metallische Spiegel eines CO<sub>2</sub>-Lasers) begrenzt, so bilden sich auf diesen ebenfalls Knoten des elektrischen Feldes aus.

### Übung

Man berechne die Feldverteilung einer linear polarisierten stehenden Welle als Überlagerung zweier gegenläufiger ebenen Wellen und stelle diese graphisch dar.

#### 2.4.2 Die Intensität elektromagnetischer Wellen

Gemäß Abschnitt 2.3 ist bei Abwesenheit von freien Ladungsträgern (womit auch keine Dispersion auftritt) der lokale Energiedichte- und Poynting-Vektor (2-34) als Vektorprodukt aus  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  gegeben. Da die beiden Felder durch (2-62) verknüpft sind, ist es nützlich, den Energiedichte- und Poynting-Vektor allein mit dem üblicherweise betrachteten elektrischen Feld  $\vec{E}$  auszudrücken. Da es hier um ein Produkt von Feldern geht, dürfen nur die Realteile der komplexen Schreibweise verwendet werden,

$$\begin{aligned}\vec{E}_r(\vec{x}, t) &= \frac{1}{2} \left( \vec{E} e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega t} + \vec{E}^* e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \vec{E}_r \left( e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega t + i\varphi} + e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega t - i\varphi} \right) = \vec{E}_r \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t - \varphi) .\end{aligned}\quad (2-66)$$

Auf die Notation der Modenindizes  $\vec{k}$  und  $p$  wird hier aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit (Entwicklung des Feldes nach Moden) genügt die Betrachtung einer z. B. in  $x$ -Richtung polarisierten Welle mit

$$\vec{E}_r = \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2-67)$$

und

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} . \quad (2-68)$$

Aus (2-62) erhält man für das Magnetfeld somit

$$\vec{B}_r = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ kE_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{B}_r(\vec{x}, t) = \vec{B}_r \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t - \varphi) . \quad (2-69)$$

In (2-34) eingesetzt erhalten wir daher

$$\vec{S}(\vec{x}, t) = \vec{E}_r \times \vec{B}_r \frac{\cos^2(\vec{k}\vec{x} - \omega t - \varphi)}{\omega \mu_0 \mu_r} = \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ kE_0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\cos^2(\vec{k}\vec{x} - \omega t - \varphi)}{\omega \mu_0 \mu_r} \quad (2-70)$$

und schließlich

$$\vec{S}(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\cos^2(\vec{k}\vec{x} - \omega t - \varphi)}{\omega \mu_0 \mu_r} k E_0^2. \quad (2-71)$$

Wie erwartet, fließt die Energie in Richtung der Ausbreitungsrichtung der Welle. Der Wellennatur entsprechend wird die Energie gemäß  $\cos^2$  paketweise transportiert. Die einzelnen Energieberge folgen einander aber mit der bei optischen Wellen sehr hohen Frequenz  $\omega$ . In der Praxis interessiert meist nur für die wenigstens über eine Wellenlänge bzw. eine Schwingungsperiode  $T = 2\pi/\omega$  gemittelte Intensität

$$I(\vec{x}, t) = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{S}(\vec{x}, t)| dt = \frac{1}{T} \frac{k E_0^2}{\omega \mu_0 \mu_r} \int_0^T \cos^2(\vec{k}\vec{x} - \omega t - \varphi) dt = \frac{1}{2} \frac{k E_0^2}{\omega \mu_0 \mu_r}. \quad (2-72)$$

Mit (2-59), (2-54) und (2-55) erhält man daraus

$$I = \frac{1}{2\mu_r} n \varepsilon_0 c_0 E_0^2. \quad (2-73)$$

Die Intensität ist somit direkt proportional zum Quadrat der (lokalen) Amplitude der elektrischen Feldstärke im Laserstrahl.

Da hier nur noch das Betragsquadrat der Feldamplituden eingeht, kann dieses Resultat auch wieder direkt mit den komplexen Feldgrößen

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E} e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega t} \quad (2-74)$$

ausgedrückt werden,

$$I = \frac{1}{2\mu_r} n \varepsilon_0 c_0 \vec{E}(\vec{x}, t) \vec{E}^*(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\mu_r} n \varepsilon_0 c_0 \vec{E} \vec{E}^* e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega t} e^{+i\vec{k}\vec{x} - i\omega t} = \frac{1}{2\mu_r} n \varepsilon_0 c_0 \vec{E} \vec{E}^*, \quad (2-75)$$

was in der Regel wesentlich praktischer ist, da nicht erst die Realteile bestimmt werden müssen.

Die soeben hergeleitete und üblicherweise verwendete Intensität  $I$  ist ein Maß für die zeitlich gemittelte Energie, die pro Zeiteinheit und pro Querschnittsfläche im Strahl fließt. Da sich die Energie im Strahl mit Lichtgeschwindigkeit (in dispersiven Medien genau genommen mit der Gruppenlichtgeschwindigkeit  $c_g = c_0/n_g$ )<sup>2,5</sup> fortpflanzt, muss ein einfacher Zusammenhang zwischen der Energiedichte  $u$  (2-33) und der Intensität  $I$  bestehen.

Wie soeben bei der Herleitung der Intensität gemacht, kann die Beziehung (2-62) verwendet werden, um die Energiedichte alleine mit der elektrischen Feldstärke auszudrücken. Setzt man die in (2-66) bis (2-69) definierten Felder in (2-33) ein, so findet man die örtlich und zeitlich aufgelöste Energiedichte

$$u(\vec{x}, t) = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{2} E_0^2 \cos^2(\vec{k}\vec{x} - \omega t - \varphi) + \frac{1}{2\mu_r \mu_0} \frac{k^2}{\omega^2} E_0^2 \cos^2(\vec{k}\vec{x} - \omega t - \varphi). \quad (2-76)$$

Wieder mit (2-54), (2-55) und (2-59) vereinfacht sich dies zu

$$u(\vec{x}, t) = \frac{1}{\mu_r} n^2 \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\vec{k}\vec{x} - \omega t - \varphi). \quad (2-77)$$

Wenn wir dies mit der zeitlich gemittelten Intensität (2-73) vergleichen wollen, müssen wir auch hier die mittlere Energiedichte  $\bar{u}$  durch Mittelung über eine Schwingungsperiode berechnen. Analog zu (2-72) erhält man dadurch

$$\bar{u} = \frac{1}{2\mu_r} n^2 \varepsilon_0 E_0^2. \quad (2-78)$$

Die Energiedichte (2-33) wurde für den dispersionsfreien Fall hergeleitet. Wird die Dispersion berücksichtigt,<sup>2,5</sup> so erhält man für die mittlere Energiedichte den Ausdruck

$$\bar{u} = \frac{1}{2\mu_r} n n_g \varepsilon_0 E_0^2, \quad (2-79)$$

wo  $n_g = c_0/c_g$  der Gruppenbrechungsindex ist.

Wie zu erwarten war, errechnet sich die Intensität  $I$  (2-73) aus der sich mit der Gruppengeschwindigkeit fortbewegenden mittleren Energiedichte (2-79) gemäß

$$I = \bar{u} c_g = \bar{u} \frac{c_0}{n_g}. \quad (2-80)$$

### 2.4.3 Die Kohärenz

Die ebenen Wellen bilden ein unendliches Kontinuum von möglichen Lösungen der Wellengleichung, denn die Werte von  $\vec{k}$  können im dreidimensionalen Raum der reellen Zahlen  $\mathbb{R}^3$  beliebig gewählt werden.

Ein zentraler – wenn nicht der wichtigste – Aspekt von Laserstrahlen besteht darin, dass diese nur wenige oder sogar nur eine einzige Mode enthalten. Im Gegensatz dazu emittieren konventionelle Strahlquellen wie Leuchtstoffröhren, Glühlampen oder Kerzen in ein unendliches Kontinuum von unabhängigen elektromagnetischen Moden. Wir werden später auf diese wichtige Besonderheit der Laser zurückkommen und zeigen, dass die Einschränkung der Modenzahl eine Folge der Resonatoreigenschaften und der geringen spektralen Bandbreite der eigentlichen Strahlungsquelle ist.

Die Einschränkung der Modenzahl ist gleichbedeutend mit einer Erhöhung der Kohärenz. Zwei *Wellenfelder*, bzw. zwei Anteile eines Wellenfeldes heißen *kohärent*, wenn sie einen definierten und nicht zufällig ändernden Phasen- oder Gangunterschied aufweisen. Ändern sich hingegen die Phasen der Felder relativ zueinander in zufälliger Weise, so sind die Felder inkohärent. Kohärente Felder zeichnen sich durch eine sichtbare Interferenzbildung aus.

Aufgrund der unterschiedlichen Messverfahren hat sich die Unterscheidung in zeitliche Kohärenz – mit einer definierten Phasenbeziehung zwischen zwei Punkten in Ausbreitungsrichtung – und örtliche Kohärenz – mit einer definierten Phasenbeziehung zwischen zwei Punkten quer zur Ausbreitungsrichtung – eingebürgert. Die örtliche Kohärenz kann mittels Betrachtung der Interferenz beispielsweise an einem Doppelspalt gemessen werden. Die Interferenzerscheinungen zwischen Teilstrahlen mit unterschiedlichen Verzögerungen z. B. in einem

Mach-Zehnder Interferometer dienen hingegen der Charakterisierung der zeitlichen Kohärenz eines elektromagnetischen Strahles.

Eine einzelne Mode beschreibt nach dieser Definition demnach ein kohärentes Feld, da z. B. mit den Gleichungen (2-64) und (2-65) die Phasenbeziehungen zwischen den Feldgrößen an allen beliebigen Punkten im Raum konstant festgelegt sind.

Wir bezeichnen umgekehrt jeden kohärent zusammenhängenden Anteil eines Feldes als eine Mode, auch wenn diese keine ebene Welle ist. Gemäß Fourier-Transformation<sup>6</sup> kann jede beliebige Mode als Linearkombination von ebenen Wellen dargestellt werden. Dies darf aber nicht mit einer Überlagerung von inkohärenten Wellen verwechselt werden! Notiert man das Feld einer Mode als Linearkombination von ebenen Wellen, so werden die Felder (2-64) und (2-65) mit festen Phasenbeziehungen addiert, das Feld ist also vollständig kohärent. Es handelt sich hier lediglich um eine mathematische Schreibweise, nicht um eine Überlagerung von physikalisch unabhängigen Moden. Die entsprechende Intensität ergibt sich aus dem *Quadrat der Summe der elektrischen Feldstärken*.

Besteht ein Feld jedoch aus mehreren physikalisch unabhängigen Moden, nimmt die Kohärenz mit zunehmender Modenzahl ab. Das inkohärente Feld kann nicht durch eine Linearkombination von Wellen (Addition der Feldamplituden) beschrieben werden. Mathematisch wird die Intensität eines inkohärenten Strahles als *Summe der Intensitäten der einzelnen* (zueinander inkohärenten) *Moden* beschrieben.

Eine einzelne elektromagnetische Mode in der mathematischen Form wie wir sie oben notiert haben, weist eine unendlich lange Kohärenzzeit auf, weil die Felder mit  $e^{i\omega t}$  über alle Zeiten ungestört harmonisch schwingen. In der Realität unterliegen aber die Felder aller realen Strahlquellen stochastischen Störungen der Phase (thermische Fluktuationen, Vibrationen optischer Komponenten, Zufälligkeit der Spontanemission etc.), wodurch die Kohärenzzeit deutlich reduziert wird. Selbst bei einem Laser beträgt diese in der Regel nur kleine Sekundenbruchteile.

Wichtigstes Merkmal kohärenter Strahlen ist die so genannte Interferenz. Inkohärente Strahlen zeigen keine Interferenz. Interferenzmuster können nur über kohärente Anteile eines Feldes erzeugt werden. Die Tatsache, dass nur mit kohärentem Licht Interferenzmuster gebildet werden können, heißt nicht, dass weißes Licht z. B. einer einzelnen Glühlampe oder von der Sonne überhaupt keine Interferenz zeigt. Die Kohärenz ist hier lediglich sehr stark eingeschränkt und Interferenz nur über sehr kurze Weg- und Zeitunterschiede möglich. Ohne gegenseitige Phasenkopplung sind aber zwei unabhängige Quellen (zwei Taschenlampen, zwei Laserstrahlquellen etc.) vollständig inkohärent.

Für eine weiterführende Diskussion der Kohärenz und der verschiedenen Ansätze zur Quantifizierung der Kohärenzgrade über Korrelationsfunktionen wird auf die entsprechende Fachliteratur verwiesen.<sup>1, 7, 8</sup>

#### 2.4.4 Die Kugelwellen

Neben den ebenen Wellen ist eine weitere Lösungsform der Wellengleichung (2-44) und (2-45) für  $|\vec{x}| > 0$  durch die Kugelwellen

$$A(\vec{x}) = A_0 \frac{A}{|\vec{x}|} e^{-i(k|\vec{x}| - \omega t)} \quad (2-81)$$

gegeben (Beweis durch Einsetzen), wobei hier  $A$  bzw.  $A_0$  für jede beliebige Feldkomponente stehen kann und wiederum die Dispersionsrelation

$$\omega = \frac{k}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0}} \quad (2-82)$$

gelten muss.  $A$  sorgt für die Normierung der Wellenamplitude und hat hier die Dimension einer Länge. Auch diese Welle ist periodisch und zwar in radialer Richtung. Die Wellenlänge beträgt

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (2-83)$$

Die Lösung der Wellengleichung ist nur eine notwendige, nicht eine hinreichende Bedingung dafür, dass auch die Maxwellgleichungen erfüllt sind. Wie bei der gegenseitigen Ausrichtung der verschiedenen Vektoren von ebenen Wellen müssen auch hier zusätzliche Bedingungen beachtet werden, damit die Maxwellgleichungen überall erfüllt sind. Unter gewissen Voraussetzungen ist aber in vielen praktischen Fällen die Kugelwelle bereits in der einfachen Form von (2-81) eine gute Näherung für das tatsächliche Feld. Ein schwingender Dipol beispielsweise strahlt zwar in Dipolrichtung keine Welle ab (siehe Antenne eines Radiosenders), in einem Gebiet nahe um die Ebene senkrecht durch die Mitte des Dipols entspricht die abgestrahlte Welle aber in sehr guter Näherung einer Kugelwelle. Da jede solche Welle auch als Überlagerung von ebenen Wellen geschrieben werden kann, müssen lokal wiederum die Beziehungen (2-61) und (2-62) gelten, wobei  $\vec{k}$  überall radial nach außen zeigt (in (2-81) ist  $k|\vec{x}| = \vec{k}\vec{x}$ ).

### 2.4.5 Der Gauß-Strahl

In der Praxis interessiert man sich meist nur für räumlich begrenzte Wellen. Gerade der Laser zeichnet sich ja durch einen stark gebündelten Strahl mit begrenzter transversaler Ausdehnung und kleiner Divergenz aus.

Strahlen mit begrenzter transversaler Divergenz nennt man paraxial. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie durch eine einfache Umformung aus der Kugelwelle (2-81) eine paraxiale Welle gewonnen werden kann. Eine formale Herleitung folgt dann in Abschnitt 2.4.6. Die Gauß-Mode ist die wichtigste Strahlform in der Laseroptik und ist die beugungsbegrenzte Grundmode einer ganzen Klasse von Strahlungsmoden.

Für die folgende Diskussion können wir uns auf das elektrische Feld  $E$  beschränken, für das Magnetfeld  $B$  gilt alles analog. Um die Notation zu entlasten, betrachten wir nur eine der beiden transversalen Feldkomponenten und erinnern uns, dass für die Feldvektoren weiterhin die aus den Maxwellgleichungen hergeleiteten Beziehungen (2-61) und (2-62) gelten.

Wenn  $E(\vec{x}, t)$  eine Kugelwelle der Form (2-81) ist, so ist auch die um einen Vektor  $\vec{a}$  verschobene Welle  $E(\vec{x} + \vec{a}, t)$  eine Lösung der Wellengleichung (2-44) (die Wellengleichung ist also unabhängig vom Ort der Quelle erfüllt). Wir wollen nun analysieren, was geschieht, wenn die Quelle anstatt um einen reellen um einen imaginären Betrag verschoben wird. Ohne

Einschränkung der Allgemeingültigkeit betrachten wir eine Verschiebung in  $z$ -Richtung um den Betrag  $iz_R$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ iz_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z + iz_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ q \end{pmatrix}, \quad (2-84)$$

wobei die neue  $z$ -Koordinate mit

$$q = z + iz_R \quad (2-85)$$

abgekürzt wurde. Mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  schreiben wir für die verschobene Kugelwelle

$$E_{00}(r, q, t) = E_0 \frac{A}{\sqrt{r^2 + q^2}} e^{-i(k\sqrt{r^2 + q^2} - \omega t)}. \quad (2-86)$$

Da wir in Abschnitt 2.4.6 den Gauß-Strahl als Lösung nullter Ordnung eines ganzen Satzes von transversal elektromagnetischen Moden – den sogenannten  $TEM_{mn}$  Moden – identifizieren werden, sind die modenspezifischen Größen bereits hier mit dem zusätzlichen Index 00 versehen.

Betrachtet man die Kugelwelle in Gleichung (2-86) nur im paraxialen Bereich nahe an der  $z$ -Achse ( $r \ll |q|$ ), so kann die Näherung

$$q\sqrt{1 + \frac{r^2}{q^2}} \approx q\left(1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{q^2}\right) \quad (2-87)$$

verwendet werden und man erhält

$$E_{00}(r, q, t) = E_0 \frac{A}{\sqrt{r^2 + q^2}} e^{-ik\frac{r^2}{2q}} e^{-i(kq - \omega t)} \cong E_0 \frac{A}{q} e^{-ik\frac{r^2}{2q}} e^{-i(kq - \omega t)}. \quad (2-88)$$

Die Einschränkung auf das paraxiale Gebiet ist nicht a priori zulässig, denn eine Kugelwelle breitet sich nur als Ganzes genommen mit sphärischer Phasenfront aus. Schneidet man z. B. mit einer Blende die nicht paraxialen Anteile weg, so müssten die Beugungseffekte berücksichtigt werden. Wir werden aber gleich sehen, dass bei der hier betrachteten Welle die Feldamplituden tatsächlich schon im paraxialen Bereich stark abfallen und daher die nicht paraxialen Anteile vernachlässigbar sind.

Dazu separieren wir Real- und Imaginärteil von  $1/q$  und führen zwei neue Größen  $R$  und  $w_{00}$  gemäß

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{z - iz_R}{z^2 + z_R^2} = \frac{z}{z^2 + z_R^2} - i \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} \quad (2-89)$$

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{2}{k \cdot w_{00}^2(z)} \quad (2-90)$$

ein. In Analogie zur Kugelwelle (2-81) kann  $q$  also gewissermaßen als komplexer Krümmungsradius der Welle (2-88) betrachtet werden. Setzt man (2-89) und (2-90) in (2-88) ein, so findet man für die um einen imaginären Betrag  $iz_R$  verschobene Kugelwelle den Ausdruck

$$E_{00}(r, z, t) = E_0 \frac{\underline{A}}{z + iz_R} \cdot e^{kz_R} \cdot e^{-\frac{r^2}{w_{00}^2(z)}} \cdot e^{-\frac{ikr^2}{2R(z)}} \cdot e^{-i(kz - \omega t)}. \quad (2-91)$$

Am dritten Term dieser Gleichung erkennt man, dass die Feldamplitude in der  $x, y$ -Ebene eine Gauß-förmige Verteilung aufweist. Man nennt solche Wellen deshalb auch Gauß-Strahlen.

Beim Ausdruck in (2-91) ist die Wellenamplitude bei  $z = 0$  und  $t = 0$  rein imaginär bzw. die Phase  $\varphi$  in

$$E_{00}(0, 0, 0) = E_0 \frac{\underline{A}}{iz_R} e^{kz_R} = E_0 \underline{A}_0 e^{i\varphi}, \quad (2-92)$$

wo  $\underline{A}_0$ , wie  $\underline{A}$  und  $E_0$ , reell sein sollen, hat den Wert  $-\pi/2$ . Um  $\varphi$  bei  $z = 0$  auf den Wert 0 zu setzen, kann man den Ausdruck in (2-91) mit  $i = \exp(i\pi/2)$  multiplizieren. Mit

$$\frac{i}{z + iz_R} = \frac{1}{\sqrt{z^2 + z_R^2}} e^{i \arctan(z/z_R)} \quad (2-93)$$

erhalten wir

$$E_{00}(r, z, t) = E_0 \frac{\underline{A}}{\sqrt{z^2 + z_R^2}} \cdot e^{-\frac{r^2}{w_{00}^2(z)}} \cdot e^{-\frac{ikr^2}{2R(z)}} \cdot e^{-i(kz - \omega t)} \cdot e^{i \arctan(z/z_R)} \quad (2-94)$$

als physikalisch gleichwertigen Ersatz für (2-91), wobei wir gleichzeitig  $\underline{A}e^{kz_R}$  durch eine neue Amplitude  $\underline{A}$  ersetzt haben. Wenn  $E_0$  die Feldamplitude  $E_{00}(0, 0, 0)$  im Ursprung sein soll, muss  $\underline{A} = z_R$  gesetzt werden:

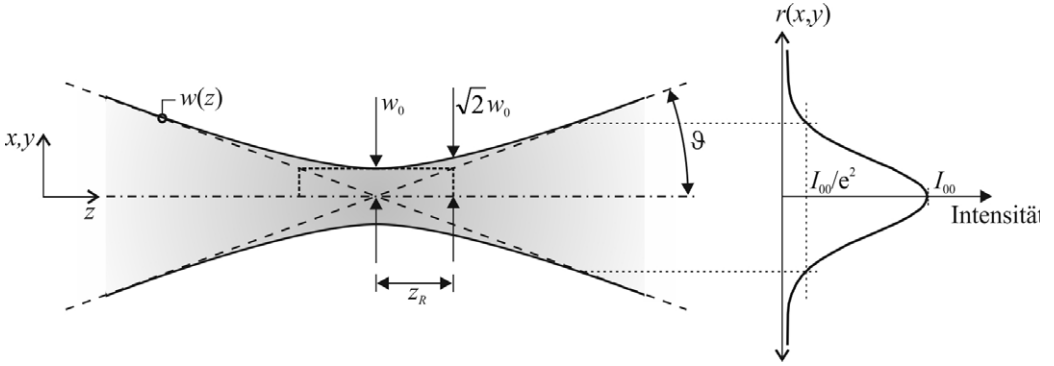
$$E_{00}(r, z, t) = E_0 \frac{z_R}{\sqrt{z^2 + z_R^2}} \cdot e^{-\frac{r^2}{w_{00}^2(z)}} \cdot e^{-\frac{ikr^2}{2R(z)}} \cdot e^{-i(kz - \omega t)} \cdot e^{i \arctan(z/z_R)}. \quad (2-95)$$

#### 2.4.5.1 Eigenschaften des Gauß-Strahles

Der erste Term in Gleichung (2-95) beschreibt die Veränderung der Amplitude entlang der  $z$ -Achse ( $z_R$  ist konstant). Die Gauß-förmige Amplitudenverteilung ist durch den zweiten Term bestimmt, wobei der Radius (bei 1/e der Amplitude) mit (2-89) und (2-90) gegeben ist durch

$$w_{00}^2(z) = w_{00,0}^2 \left( 1 + \frac{z^2}{z_R^2} \right) \text{ bzw. } w_{00}(z) = w_{00,0} \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}} \quad (2-96)$$

und sich der kleinste Wert



**Figur 2-7.** Ausbreitung eines Gauß-Strahles. Der im linken Bildteil gezeigte Verlauf gilt analog auch für die in Abschnitt 2.4.6 behandelten Moden höherer transversaler Ordnung.

$$w_{00,0} = w_{00}(z=0) = \sqrt{\frac{2z_R}{k}} \quad (2-97)$$

an der Stelle  $z = 0$  befindet. Die Größe  $w_{00,0}$  entspricht also dem Radius an der engsten Stelle – der so genannten Strahltaille – des Gauß-Strahles. Der Strahlradius nimmt mit zunehmender Distanz  $z$  von der Strahltaille gemäß (2-96) zu. An der Stelle  $z = z_R$  hat der Strahl genau die doppelte Querschnittsfläche wie am Ort der Strahltaille.

Die lokale Intensität im Strahl kann gemäß Abschnitt 2.4.2 durch das Produkt der komplexen Feldamplituden  $E$  und  $E^*$  ausgedrückt werden. Mit (2-75) folgt somit, dass die transversale Intensitätsverteilung im Gauß-Strahl die Form

$$I_{00}(r, z, t) = I_{00,z,t} \cdot e^{-\frac{r^2}{w_{00}^2(z)}} \quad (2-98)$$

aufweist. Der Strahlradius  $w_{00}(z)$  bezeichnet also in den Querdimensionen die Stelle des Gauß-Strahles, an welcher die lokale Intensität noch das  $1/e^2$ -fache der Intensität auf der Strahlachse beträgt.

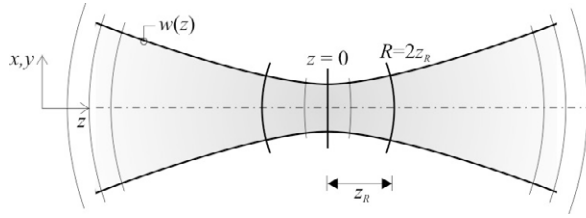
Gleichung (2-96) beschreibt eine Hyperbel, deren Asymptoten um den Winkel

$$\vartheta_{00} = \arctan\left(\frac{w_{00,0}}{z_R}\right) \quad (2-99)$$

gegenüber der  $z$ -Achse geneigt sind. Dieser Winkel entspricht somit der Divergenz des betrachteten Strahles. Die Ausbreitung der Gauß-Strahlen ist in Figur 2-7 dargestellt. Da der gezeigte Verlauf auch für die in Abschnitt 2.4.6 behandelten Moden höherer transversaler Ordnung gilt, wird im linken Bildteil auf die Notation der Modenordnung 00 verzichtet. Die Beziehung (2-99) kann, wie mit den gepunkteten Hilfslinien im Bereich der Strahltaille gezeigt, rein geometrisch aus der Figur abgelesen werden.

Der dritte Term in Gleichung (2-95) bestimmt die Phasenverteilung in der Querdimension. Die Fläche gleicher Phase ist gegeben durch





**Figur 2-8.** Die Wellenfronten eines Gauß-Strahles (gilt auch für die in Abschnitt 2.4.6 behandelten Moden höherer transversaler Ordnung).

$$z = \text{const.} - \frac{r^2}{2R(z)}, \quad (2-100)$$

was ein Rotations-Paraboloid definiert. Der Krümmungsradius dieser Phasenfront ist durch die Größe  $R$  gegeben, welche gemäß Definition (2-90)

$$R(z) = z_R \left( \frac{z}{z_R} + \frac{z_R}{z} \right) \quad (2-101)$$

beträgt. Der Gauß-Strahl hat also an seiner Strahltaile (bei  $z = 0$ ) eine ebene Wellenfront ( $R = \infty$ ). Bei  $z = z_R$  hat die Phasenfront die kleinste Krümmung  $R = 2z_R$  und für  $z \rightarrow \infty$  bildet die Wellenfront konzentrische Sphären mit Zentrum in  $z = 0$  (wie eine Kugelwelle). Dieses Verhalten ist in Figur 2-8 dargestellt.

Der Wert von  $z_R$ , der so genannten Rayleigh-Länge, ist mit (2-97) und (2-83) gegeben durch die Wellenlänge  $\lambda$  und die Größe  $w_{0,00}$  der Strahltaile des Gauß-Strahles:

$$z_R = \frac{\pi w_{0,00}^2}{\lambda}. \quad (2-102)$$

Der letzte Term in (2-95) ist die so genannte Guoy-Phase, welche bewirkt, dass bei der Ausbreitung von  $z = -\infty$  bis  $z = \infty$  zur (unendlich großen) Phasenänderung  $-kz$  vor allem im Bereich der Strahltaile ein Beitrag von  $+\pi$  hinzukommt. Da  $k$  in der Regel viel größer ist als  $z_R^{-1}$ , verändert sich die Phase  $-kz$  selbst im Bereich der Strahltaile viel schneller als die Guoy-Phase. In genügend großem Abstand von der Strahltaile ist die Guoy-Phase praktisch konstant. Außer z. B. bei interferometrischen Fragestellungen oder bei der Bestimmung der Resonanzfrequenzen in optischen Resonatoren spielt die Guoy-Phase deshalb eine untergeordnete Rolle und kann gegebenenfalls vernachlässigt werden.

Mit Gleichung (2-95), Figur 2-7 und Figur 2-8 ist die Ausbreitung eines Gauß-Strahles im freien Raum beschrieben und illustriert. In der Praxis sind meist Strahlen zu betrachten, die sich durch komplizierte optische Systeme oder optische Resonatoren ausbreiten. Dabei ist üblicherweise die Leistung eines Strahles bekannt und man interessiert sich für seine Feldverteilung an einer bestimmten Stelle (z. B. im Fokus einer Linse oder auf dem Auskoppelspiegel eines Laserresonators). Der Strahlparameter  $q$  liefert mit einer einzigen (komplexen) Zahl für eine bestimmte Stelle gemäß Definition (2-90) die volle Information über den Strahl, der

an der betrachteten Stelle in der Ebene quer zur Strahlausbreitung gemäß (2-91) oder (2-94) die Feldverteilung

$$E_{00}(r, t) = \underline{E}_{00} e^{i\omega t} \cdot e^{-\frac{r^2}{w_{00}^2}} \cdot e^{-\frac{ikr^2}{2R}} = \underline{E}_{00} e^{i\omega t} \cdot e^{-ik\frac{r^2}{2q}} \quad (2-103)$$

hat. Der Wert der Feldamplitude  $\underline{E}_{00}$  folgt direkt aus der optischen Leistung im Strahl. Der absolute Wert der Phase ( $\underline{E}_{00}$  ist eine komplexe Zahl) ist in diesem Zusammenhang meist von untergeordnetem Interesse. Durch Angabe der Wellenlänge  $\lambda$  und des komplexen Strahlparameters  $q$  an einer gegebenen Stelle ist der Gauß-Strahl somit vollständig charakterisiert. Denn aus dem Realteil

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{R} \quad (2-104)$$

folgt gemäß (2-90) der örtliche Krümmungsradius  $R$  der Phasenfront und aus dem Imaginärteil

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{q}\right) = -\frac{2}{k \cdot w_{00}^2} = -\frac{2}{nk_0 \cdot w_{00}^2} \quad (2-105)$$

erhält man zusammen mit (2-83) den örtlichen Strahlradius

$$w_{00} = \sqrt{-\frac{\lambda_0}{\operatorname{Im}(q^{-1})\pi n}}, \quad (2-106)$$

wobei hier die Wellenlänge  $\lambda$  durch die Wellenlänge  $\lambda_0$  im Vakuum geteilt durch den örtlichen Brechungsindex  $n$  ausgedrückt wurde.

Für die Praxis sei hier noch auf die aus (2-89) folgende Beziehung

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{-\operatorname{Im}(q)}{\operatorname{Re}^2(q) + \operatorname{Im}^2(q)} \quad (2-107)$$

hingewiesen.

Der Realteil

$$\operatorname{Re}(q) = z \quad (2-108)$$

kennzeichnet die Distanz zur Strahltaile (für den Fall dass sich der Strahl im freien Raum ausbreitet). Der Imaginärteil

$$\operatorname{Im}(q) = z_R \quad (2-109)$$

ist die Rayleigh-Länge  $z_R$  und daraus folgt gemäß (2-97) der Radius der Strahltaile

$$w_{00,0} = \sqrt{\frac{z_R}{\pi} \frac{\lambda_0}{n}}. \quad (2-110)$$

### 2.4.5.2 Der astigmatische Gauß-Strahl

Der oben behandelte Strahl ist zylindersymmetrisch um die Ausbreitungsachse  $z$ . Man nennt einen solchen Strahl auch *stigmatisch*. Trifft ein solcher Strahl auf eine Zylinderlinse oder ein gekipptes Element (wie Brewster-Platten, gekippte sphärische Spiegel u. ä.), so führt dies zu einer Asymmetrie des Strahles. Im allgemeinen Fall kann die Beschreibung solch *astigmatischer* Strahlen recht komplex werden. In der Praxis ist man jedoch bestrebt, eine möglichst symmetrische Situation zu gewährleisten. Wenn gekippte Elemente eingesetzt werden müssen, so wird man sich auf zwei Symmetrieebenen beschränken (Tangential- und Sagittalebene). In diesem Fall lässt sich das Feld eines elektromagnetischen Strahles als Produkt der Form

$$E_{00}(x, y, z, t) = E_0 f_x(x, z) f_y(y, z) e^{i\omega t} \quad (2-111)$$

schreiben. In den beiden transversalen Richtungen  $x$  und  $y$  gilt dann (2-91) separat (wobei auf die Normierung geachtet werden muss):

$$E_{00}(x, y, z, t) = E_0 e^{i\omega t} \cdot A_x \sqrt{\frac{e^{kz_{Rx}} e^{-ikz_x}}{z_x + iz_{Rx}}} e^{-\frac{x^2}{w_{00,x}^2(z_x)}} e^{-\frac{ikx^2}{2R_x(z_x)}} \times \quad (2-112)$$

$$\times A_y \sqrt{\frac{e^{kz_{Ry}} e^{-ikz_y}}{z_y + iz_{Ry}}} e^{-\frac{y^2}{w_{00,y}^2(z_y)}} e^{-\frac{iky^2}{2R_y(z_y)}}$$

oder kompakter wie in (2-88)

$$E_{00}(x, y, z, t) = E_0 e^{i\omega t} \cdot A_x \sqrt{\frac{e^{-ikq_x}}{q_x}} e^{-ik\frac{x^2}{2q_x}} \cdot A_y \sqrt{\frac{e^{-ikq_y}}{q_y}} e^{-ik\frac{y^2}{2q_y}}, \quad (2-113)$$

wobei

$$q_x = z_x + iz_{Rx} \quad \text{und} \quad q_y = z_y + iz_{Ry} \quad (2-114)$$

völlig unterschiedliche Werte haben können. Für  $q_x = q_y = q$  wird aus (2-113) und (2-112) wieder (2-88) und (2-91). Die Normierungsfaktoren  $A_x$  und  $A_y$  haben hier beide die Dimension  $\sqrt{\text{Länge}}$ .

Auch hier beschreiben die Gleichungen (2-112) bis (2-114) die vollständige Ausbreitung des Strahles im freien Raum. Betrachtet man den Strahl an einer gegebenen Stelle, so ist die volle Information über die Feldverteilung

$$E_{00}(x, y, t) = E_{00} e^{i\omega t} \cdot e^{-\frac{x^2}{w_{00,x}^2}} e^{-\frac{ikx^2}{2R_x}} \cdot e^{-\frac{y^2}{w_{00,y}^2}} e^{-\frac{iky^2}{2R_y}} = \quad (2-115)$$

$$= E_{00} e^{i\omega t} \cdot e^{-ik\frac{x^2}{2q_x}} e^{-ik\frac{y^2}{2q_y}}$$

analog zur Diskussion der Gleichungen (2-103) bis (2-110) in den zwei komplexen Zahlen  $q_x$  und  $q_y$  enthalten.

### 2.4.6 Paraxiale Wellen höherer transversaler Ordnung

Der eben behandelte Gauß-Strahl ist die Grundmode eines ganzen Satzes von paraxialen Moden. Die im Folgenden auf einem etwas formaleren Weg hergeleiteten Hermite-Gauß und Laguerre-Gauß Moden sind exakte und gleichzeitig mathematisch sehr praktische Lösungen der paraxialen Wellengleichung. Es sind auch sehr gute Näherungen für die in Laserresonatoren schwingenden Felder.

Wegen des endlichen Durchmessers der optischen Komponenten im Resonator weichen die tatsächlichen Lasermode geringfügig von den hier behandelten Moden ab. Die hier für den freien Raum hergeleiteten reinen Gauß-Moden fallen nach außen zwar rasch ab, haben aber gleichwohl eine unendliche Ausdehnung, welche über die endlichen Dimensionen realer Laserkomponenten hinausragen und so in realen Systemen nicht vorkommen können. Da die Abweichung der tatsächlichen Resonatormoden von den reinen Gauß-Moden aber meist vernachlässigbar klein ist, werden bei der Analyse von Laserstrahlen und deren Ausbreitung durch optische Systeme fast ausschließlich die Hermite-Gauß- und Laguerre-Gauß-Moden verwendet. Die außerordentliche Bedeutung dieser Moden äußert sich vor allem darin, dass deren Fortpflanzung selbst in komplizierten optischen Systemen mit sehr einfachen Berechnungen auf der Basis von  $2 \times 2$  Matrizen beschrieben werden kann, wie dies in Kapitel 3 gezeigt wird.

Wir beginnen vorerst mit der Herleitung der so genannten paraxialen Wellengleichung,<sup>9</sup> indem wir nach Strahlen der Form

$$E(x, y, z, t) = \underline{E}(x, y, z) e^{-ikz + i\omega t} \quad (2-116)$$

suchen, d. h. die Wellen sollen sich mit  $e^{-ikz + i\omega t}$  hauptsächlich in  $z$ -Richtung ausbreiten (also paraxial) und in transversaler Richtung eine noch zu bestimmende Amplitudenverteilung  $\underline{E}(x, y, z)$  aufweisen. Diese Amplitudenverteilung soll sich räumlich besonders im Vergleich zum schnell variierenden Term  $e^{-ikz}$  nur sehr langsam verändern. Weiter wird auch hier wieder ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit nur eine der zwei transversalen Feldkomponenten betrachtet (freie Wahl einer linearen Polarisation). Die Feldvektoren stehen gemäß (2-61) weiterhin senkrecht auf der lokalen Ausbreitungsrichtung.

Wir setzen also voraus, dass es sich bei den gesuchten Strahlen um harmonisch schwingende, paraxiale Wellen handelt, wobei die Dispersionsrelation (2-48) gelten soll. Wenn wir diesen Ansatz in die allgemeingültige Wellengleichung (2-44) einsetzen und zunächst nur die Ableitung nach der Zeit ausführen, finden wir

$$\Delta \left( \underline{E}(x, y, z) e^{-ikz + i\omega t} \right) + \mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 \omega^2 \underline{E}(x, y, z) e^{-ikz + i\omega t} = 0, \quad (2-117)$$

beziehungsweise

$$\left( \Delta + k^2 \right) \underline{E}(x, y, z) e^{-ikz + i\omega t} = 0. \quad (2-118)$$

Die Ausführung der räumlichen Ableitungen des  $\Delta$ -Operators führt dann zu

$$\left( \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial \underline{E}}{\partial z} \right) e^{-ikz+i\omega t} = 0. \quad (2-119)$$

Wie oben vorausgeschickt, suchen wir nach Strahlen, deren Amplitudenverteilung  $\underline{E}(x, y, z)$  sich in Ausbreitungsrichtung (hier  $z$ ) nur sehr langsam ändern. Denn solche Strahlen sind es schließlich, die wir mit Lasern erzeugen und in praktischen Anwendungen einsetzen wollen. Der Faktor  $2ik$  in der Gleichung (2-119) stammt von der ersten Ableitung (nach  $z$ ) des schnell variierenden Phasenterms  $e^{-ikz}$  und hat daher einen großen Betrag. Wenn wir voraussetzen, dass sich  $\underline{E}(x, y, z)$  nur sehr langsam ändert, dann gilt dies insbesondere auch für dessen Ableitung nach  $z$ , d. h. die zweite Ableitung soll ebenfalls klein sein. Klein insbesondere im Vergleich zum Term mit  $2ik$ , d. h.

$$\left| \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial z^2} \right| \ll \left| 2ik \frac{\partial \underline{E}}{\partial z} \right|. \quad (2-120)$$

Die Amplitudenverteilung  $\underline{E}(x, y, z)$  lässt Amplitudenvariationen im Strahlquerschnitt zu. Die Änderung in  $z$ -Richtung soll aber wesentlich langsamer sein als in den  $x$ - und  $y$ -Richtungen quer zum Strahl (etwas anderes würde man kaum als Strahl bezeichnen). Daraus folgt wiederum

$$\left| \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial x^2} \right| \quad \text{und} \quad \left| \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial y^2} \right|. \quad (2-121)$$

In (2-119) können wir also in guter Näherung die zweite Ableitung der Amplitudenfunktion vernachlässigen und erhalten

$$\left( \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial \underline{E}}{\partial z} \right) e^{-ikz+i\omega t} = 0. \quad (2-122)$$

Der linke Ausdruck kann nur dann immer und überall exakt gleich 0 sein, wenn

$$\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial \underline{E}}{\partial z} = 0. \quad (2-123)$$

Dies ist die paraxiale Wellengleichung für die Amplitudenverteilung eines Strahles.

#### 2.4.6.1 Die Gauß-Mode

Für die Lösung der paraxialen Wellengleichung machen wir zunächst den Ansatz

$$\underline{E}_{00}(x, y, z) = E_0 A(z) \cdot e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2q(z)}}. \quad (2-124)$$

Man beachte, dass hier nur die Amplitudenverteilung  $\underline{E}(x, y, z)$  betrachtet wird. Das tatsächliche Feld des untersuchten Strahles beinhaltet auch die Phasenterme und ist durch (2-116) gegeben.

Gesucht wird hier also ein Strahl mit einem Gauß-förmigen Strahlquerschnitt. Einsetzen der Amplitudenverteilung (2-124) in die paraxiale Wellengleichung (2-123) ergibt

$$\left( -\frac{2ik}{q(z)} A(z) - k^2 \frac{x^2 + y^2}{q(z)^2} A(z) - 2ik \frac{\partial A(z)}{\partial z} + k^2 A(z) \frac{x^2 + y^2}{q(z)^2} \frac{\partial q(z)}{\partial z} \right) \times \\ \times E_0 \cdot e^{-ik \frac{x^2 + y^2}{2q(z)}} = 0, \quad (2-125)$$

beziehungsweise

$$\left( \frac{\partial q(z)}{\partial z} - 1 \right) k^2 (x^2 + y^2) - 2ikq(z) \left( 1 + \frac{q(z)}{A(z)} \frac{\partial A(z)}{\partial z} \right) = 0. \quad (2-126)$$

Diese Gleichung kann nur dann für alle  $x$  und  $y$  erfüllt werden, wenn die beiden Differentialausdrücke in den großen Klammern je für sich verschwinden. Dies bedeutet einerseits

$$\frac{\partial q(z)}{\partial z} = 1, \quad (2-127)$$

was insbesondere durch

$$q(z) = iz_R + z \quad (2-128)$$

gelöst wird und andererseits

$$\frac{\partial A(z)}{\partial z} = -\frac{A(z)}{q(z)} \quad (2-129)$$

mit der Lösung (unter Verwendung von (2-127))

$$A(z) = \frac{A_0}{q(z)}. \quad (2-130)$$

Mit (2-116) und (2-124) folgt aus diesem Resultat die Lösung

$$\underline{E}_{00}(x, y, z) = E_0 \frac{A_0}{z + iz_R} \cdot e^{-ik \frac{x^2 + y^2}{2q(z)}} \cdot e^{-i(kz - \omega t)}, \quad (2-131)$$

was bei geeigneter Wahl der Amplitude  $\underline{A} = A_0 e^{kz_R}$  exakt dem bereits in (2-88) angetroffenen Gauß-Strahl entspricht!

#### 2.4.6.2 Die Hermite-Gauß- und Laguerre-Gauß-Moden

Wie bereits vorweggenommen, ist der Gauß-Strahl die Grundmode einer ganzen Klasse von Moden höherer Ordnung. Um diese zu finden, machen wir einen etwas allgemeineren Ansatz, schränken die Suche aber auf Amplitudenverteilungen der Form

$$\underline{E}_{mn}(x, y, z) = E_0 \cdot A_m(x, z) \cdot A_n(y, z) \quad (2-132)$$

ein (das ist nur erlaubt, weil in der paraxialen Gleichung (2-123) keine Mischterme vorkommen), wobei  $m$  und  $n$  im Index ganze Zahlen sind, welche die transversale Ordnung der

Mode festlegen. Dies bedeutet, dass wir in (2-123) das Verhalten in den beiden transversalen Richtungen separat behandeln können und nur die Gleichung

$$\frac{\partial^2 A_m}{\partial x^2} - 2ik \frac{\partial A_m}{\partial z} = 0 \quad (2-133)$$

zu lösen haben. Als Lösungsansatz wählen wir nun

$$A_m(x, z) = \underline{A}_m(q(z)) \cdot h_m\left(\frac{x}{p(x)}\right) \cdot e^{-ik \frac{x^2}{2q(z)}}, \quad (2-134)$$

wo  $q$  nach wie vor durch (2-128) gegeben sein soll. Durch Einsetzen dieses Ansatzes in (2-133) unter Verwendung von  $dq/dz = 1$  findet man die Differentialgleichung

$$h_m'' - 2ik \left( \frac{p}{q} - p' \right) x h_m' - ik \frac{p^2}{q} \left( 1 + \frac{2q}{\underline{A}_m} \frac{d\underline{A}_m}{dq} \right) h_m = 0 \quad (2-135)$$

für die Funktionen  $h_m$ ,  $p$  und  $\underline{A}_m$ , wo  $h_m'$  und  $h_m''$  für die erste beziehungsweise die zweite Ableitung nach dem ganzen Argument (also z. B.  $h' = dh(y)/dy$ ) stehen (dito für  $p$ ). Wenn man die verschiedenen Ableitungen von  $h_m$  betrachtet, so hat diese Gleichung gewisse Ähnlichkeiten mit der wohlbekannten Differentialgleichung

$$H_m'' - 2 \frac{x}{p} H_m' + 2m H_m = 0, \quad (2-136)$$

welche durch die Hermite-Polynome  $H_m(x/p)$  gelöst wird. In der Tat stimmen die beiden Gleichungen überein, wenn  $p$  und  $\underline{A}_m$  die Bedingungen

$$2ik \left( \frac{p}{q} - \frac{dp}{dz} \right) = \frac{2}{p} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dp}{dz} = \frac{p}{q} - \frac{1}{ikp} \quad (2-137)$$

und

$$-ik \frac{p^2}{q} \left( 1 + \frac{2q}{\underline{A}_m} \frac{d\underline{A}_m}{dq} \right) = 2m \quad \text{bzw.} \quad \frac{2q}{\underline{A}_m} \frac{d\underline{A}_m}{dq} = -\frac{2m}{ik} \frac{q}{p^2} - 1 \quad (2-138)$$

erfüllen. Dies kann beispielsweise erreicht werden mit

$$p(z) = \frac{w_{00}(z)}{\sqrt{2}}, \quad (2-139)$$

wobei  $w_{00}(z)$  durch (2-96) gegeben ist. Für  $\underline{A}$  findet man nach einigen Umformungen (Ref. 9, Kapitel 16.4 und 17.4) die Lösung

$$\underline{A}_m(q(z)) = \underline{A}_{0,m} \sqrt{\frac{w_{00,0}}{w_{00}(z)}} \cdot e^{i(m+1/2)\arctan(z/z_R)}. \quad (2-140)$$

Da nun die Bedingungen (2-137) und (2-138) erfüllt sind, entsprechen die Funktionen  $h_n$  den Hermite-Polynomen  $H_m$ . Diese sind in den meisten Formelsammlungen tabelliert. In nicht normierter Form lauten die ersten Polynome

$$\begin{aligned}
 H_0(x) &= 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = -2 + 4x^2, \\
 H_3(x) &= -12x + 8x^3, \quad H_4(x) = 12 - 48x^2 + 16x^4, \text{ etc.}
 \end{aligned}
 \tag{2-141}$$

Die hier gefundene Lösung (2-140) gilt wie oben begründet je für die  $x$ -Richtung und die  $y$ -Richtung separat. Wenn wir nun dieses Resultat in (2-134), dann in (2-132) und weiter in (2-116) einsetzen und mit  $A_{0,m}$  die Hermite-Polynome geeignet normieren (siehe unten), erhalten wir im astigmatischen Fall

$$\begin{aligned}
 E_{mn}(x, y, z, t) &= \sqrt{\frac{w_{00,0,x}}{w_{00,x}(z)}} H_m\left(\frac{x\sqrt{2}}{w_{00,x}(z)}\right) e^{-\frac{x^2}{w_{00,x}^2(z)}} e^{-i\frac{k}{2} \frac{x^2}{R_x(z)}} \times \\
 &\times \sqrt{\frac{w_{00,0,y}}{w_{00,y}(z)}} H_n\left(\frac{y\sqrt{2}}{w_{00,y}(z)}\right) e^{-\frac{y^2}{w_{00,y}^2(z)}} e^{-i\frac{k}{2} \frac{y^2}{R_y(z)}} \times \\
 &\times E_0 \sqrt{\frac{1}{2^{m+n} m! n! \pi}} \times \\
 &\times e^{-i(kz - \omega t)} e^{i(m+1/2)\arctan(z/z_{Rx})} e^{i(n+1/2)\arctan(z/z_{Ry})}
 \end{aligned}
 \tag{2-142}$$

für das Feld der so genannten Hermite-Gauß Moden, wobei die Radien  $w_{00,0}$ ,  $w_{00}$  und  $R$  auch hier durch die Definitionen in Abschnitt 2.4.5 gegeben sind.

Für den nicht astigmatischen Fall ( $w_{00,x} = w_{00,y} = w_{00}$  und  $R_x = R_y = R$  und  $z_{Rx} = z_{Ry} = z_R$ ) vereinfacht sich der Ausdruck zu

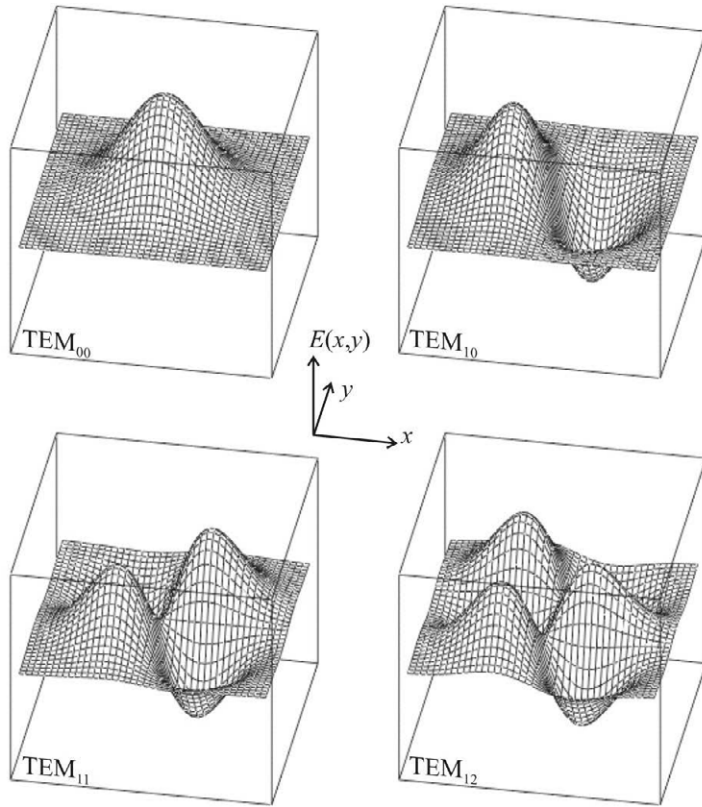
$$\begin{aligned}
 E_{mn}(x, y, z, t) &= E_0 \sqrt{\frac{1}{2^{m+n} m! n! \pi}} \frac{w_{00,0}}{w_{00}(z)} H_m\left(\frac{x\sqrt{2}}{w_{00}(z)}\right) H_n\left(\frac{y\sqrt{2}}{w_{00}(z)}\right) \times \\
 &\times e^{-\frac{x^2+y^2}{w_{00}^2(z)}} e^{-i\frac{k}{2} \frac{(x^2+y^2)}{R(z)}} \cdot e^{-i(kz - \omega t)} e^{i(m+n+1)\arctan(z/z_R)}.
 \end{aligned}
 \tag{2-143}$$

Die Feldverteilungen einiger TEM<sub>mn</sub> Moden sind in Figur 2-9 dargestellt. Mit  $m = n = 0$  erhalten wir für die TEM<sub>00</sub> Mode den eingangs bereits diskutierten Gauß-Strahl (2-94).

Man nennt die so definierten Moden auch transversale elektromagnetische Moden TEM<sub>mn</sub>. Der Name verdeutlicht, dass es sich bei den elektromagnetischen Wellen um transversale Wellen handelt. Wie anhand der ebenen Wellen bereits dargestellt, stehen sowohl der elektrische als auch der magnetische Feldvektor senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $\vec{k}$  der Welle. Da gemäß Fourier-Transformation<sup>6</sup> jede real existierende Welle als Linearkombination von ebenen Wellen aufgefasst werden kann, müssen diese Beziehungen an jeder Stelle auch für TEM-Strahlen gelten. Auch bei den Hermite-Gauß-Moden (und den unten erwähnten Laguerre-Gauß-Moden) stehen also die  $\vec{k}$ -Vektoren lokal senkrecht auf den sphärischen Wellenfronten und die Feldvektoren gemäß (2-62) senkrecht dazu, wobei die Polarisationsrichtung frei wählbar ist.

Die Normierung der Amplitude wurde hier so gewählt, dass die Amplitude  $E_{00,0}(0,0,0)$  im Zentrum der Strahltaile für die TEM<sub>00</sub> Mode durch  $E_0$  gegeben ist. Zudem wurden die Her-





**Figur 2-9.** Feldverteilung einiger  $TEM_{mn}$  Moden (alle Graphiken sind gleich skaliert).

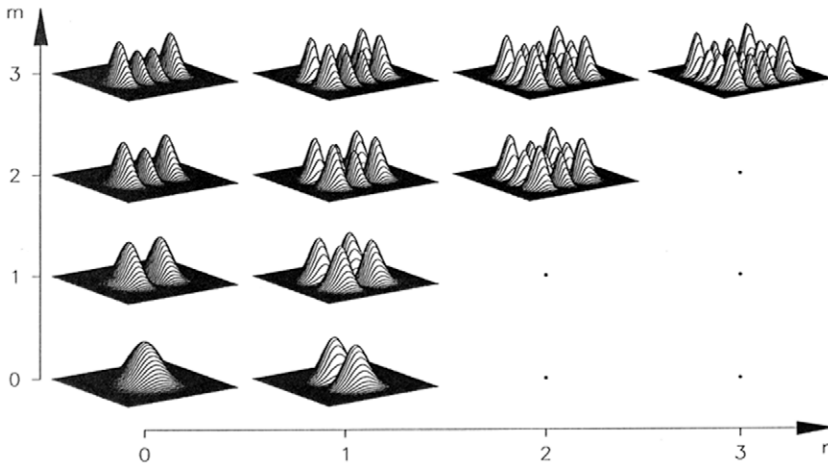
mite-Polynome so normiert, dass die totale Leistung im Strahl bei der Integration der Intensitätsverteilung (gemäß (2-73) oder (2-75) proportional zur Feldamplitude im Quadrat) über den Strahlquerschnitt weder vom Strahlradius  $w_{00}(z)$  (Gesamtleistung im Strahl ändert z. B. bei Fokussierung nicht) noch von den transversalen Ordnungen  $m$  und  $n$  abhängt. Da für die Hermite-Polynome

$$\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (H_n(x))^2 e^{-x^2} dx = 1 \quad (2-144)$$

gilt, sind diese physikalisch begründeten Normierungsforderungen durch

$$\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{2}}{w_{00}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( H_n \left( x \frac{\sqrt{2}}{w_{00}} \right) \right)^2 e^{-2 \frac{x^2}{w_{00}^2}} dx = 1 \quad (2-145)$$

tatsächlich erfüllt.

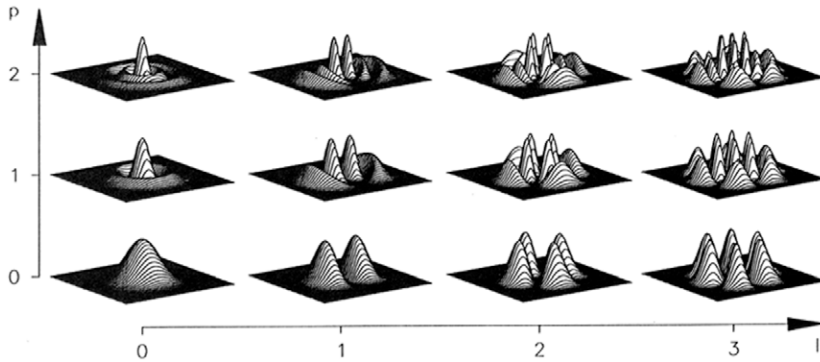


**Figur 2-10.** Intensitätsverteilungen der Hermite-Gauß-Moden.

Die Größen  $w_{00}(z)$  und  $R(z)$  in den Feldverteilungen (2-142) und (2-143) sind der Strahlradius der zugrunde liegenden  $TEM_{00}$  Gauß-Mode und die lokale Phasenkrümmung und bilden gemäß (2-90) den komplexen  $q$ -Parameter des Gauß-Strahles. Auch die höheren transversalen Moden werden also mit dem komplexen  $q$  Parameter des zugrunde liegenden Gauß-Strahles unter zusätzlicher Angabe der Ordnungen  $m$  und  $n$  charakterisiert, denn eine  $TEM_{mn}$  Mode ist nichts anderes als eine  $TEM_{00}$  Gauß-Mode, welche mit entsprechend normierten Hermite-Polynomen multipliziert wird. Für die Ausbreitung von Laserstrahlen durch komplexe optische Systeme genügt also die Betrachtung der  $TEM_{00}$  Mode. Die Ausbreitung der höheren transversalen Moden folgt dann direkt durch Multiplikation mit den normierten Hermite-Polynomen.

Aus Figur 2-9 ist erkennbar, dass wegen der Modulation durch die Hermite-Polynome die  $TEM_{mn}$  Moden mit zunehmender transversaler Ordnung breiter werden. Da dies für jede Stelle  $z$  entlang des Strahles gilt, nimmt damit auch die Divergenz der Moden zu. Ausgehend von der  $TEM_{00}$  Mode nimmt somit das Produkt aus dem Radius der Strahltaile und der Strahldivergenz, das sogenannte Strahlparameterprodukt, mit zunehmender transversaler Ordnung  $m$  und  $n$  der Moden zu. Ein Maß für die Radian und die Divergenz von Moden mit höherer transversaler Ordnung sowie die Beugungsmaßzahl  $M^2$  wird mittels der zweiten Momente der Intensitätsverteilung in den Abschnitten 5.2.1 und 5.3 behandelt.

Die Divergenz eines Strahles ist die direkte Konsequenz der Wellenbeugung. Mathematisch lässt sich dieser Zusammenhang mit der Fourier-Transformation beschreiben. Weil der Satz der Hermite-Gauß-Funktionen  $E_{mn}(x, y, z, t)$  im mathematischen Sinne vollständig ist, kann es keine Mode mit einem kleineren Strahlparameterprodukt geben als die  $TEM_{00}$  Mode. In Anlehnung an den physikalischen Hintergrund für diese Tatsache wird die  $TEM_{00}$  Mode daher auch als beugungsbegrenzter Strahl bezeichnet.



**Figur 2-11.** Intensitätsverteilungen der Laguerre-Gauß-Moden.

Die hier behandelten Hermite-Gauß-Moden sind die Lösungen der paraxialen Wellengleichung in kartesischen Koordinaten. Schreibt man die paraxiale Wellengleichung in Zylinderkoordinaten um, so folgen analog die so genannten Laguerre-Gauß-Moden

$$E_{pl}(r, \theta, z, t) = \sqrt{\frac{2p!}{(1 + \delta_{0l})\pi(l+p)!}} \frac{w_{00,0}}{w_{00}(z)} \left( \frac{\sqrt{2}r}{w_{00}(z)} \right)^l L_p^l \left( \frac{2r^2}{w_{00}^2(z)} \right) \times \quad (2-146)$$

$$\times E_0 e^{-i\frac{k}{2} \frac{r^2}{q(z)} + i l \theta} e^{-i(kz - \omega t)} e^{i(2p+l+1) \arctan(z/z_R)}$$

als vollständiger Lösungssatz.<sup>9</sup>

Die Gleichungen (2-142) bzw. (2-143) und (2-146) beschreiben die Feldamplitude der Hermite-Gauß- und der Laguerre-Gauß-Moden. Die entsprechenden Intensitätsverteilungen erhält man durch Anwendung von (2-73) bzw. (2-75) und sind in Figur 2-10 und Figur 2-11 dargestellt.

Da die hergeleiteten Hermite-Gauß- und Laguerre-Gauß-Moden einen mathematisch vollständigen Lösungssatz der paraxialen Wellengleichung bilden, kann jeder beliebige paraxiale Strahl (jede beliebige Mode) als Linearkombination der Funktionen  $E_{mn}(x, y, z, t)$  bzw.  $E_{pl}(x, y, z, t)$  geschrieben werden. Oft wird in diesem Zusammenhang fälschlicherweise von einer Überlagerung von TEM Moden gesprochen und diese Situation mit einem inkohärenten Multi-Mode-Strahl verwechselt (siehe dazu Abschnitt 2.4.3). Jede Linearkombination aus den Funktionen  $E_{mn}(x, y, z, t)$  bzw.  $E_{pl}(x, y, z, t)$  bildet wieder eine eigenständige Mode und ist nach physikalischer Definition vollständig kohärent! Die Intensität ergibt sich aus dem Quadrat der Summe der elektrischen Feldstärken. Anders ist die Situation, wenn ein gegebener Strahl aus mehreren, unabhängig schwingenden Moden besteht. Dieser inkohärente Strahl lässt sich mathematisch nicht als Linearkombination aus Amplitudenfunktionen  $E_{mn}(x, y, z, t)$  beschreiben. Die Intensität des Gesamtstrahls entspricht dann der Summe der Intensitäten der einzelnen Moden.

Bereits bei der Lösung der ursprünglichen Wellengleichung (2-44) bzw. (2-45) wurde darauf hingewiesen, dass diese nur eine notwendige aber nicht eine hinreichende Bedingung zur

gleichzeitigen Erfüllung der zugrunde liegenden Maxwellgleichungen ist. Zur Herleitung der Hermite-Gauß- und Laguerre-Gauß-Moden wurde die Wellengleichung zudem in eine paraxial genäherte Form gebracht. Wegen den dabei gemachten Vernachlässigungen können die Lösungen der paraxialen Wellengleichung keine exakten Lösungen der Maxwellgleichungen sein. Insbesondere sind die Felder (2-142), (2-143) und (2-146) nicht divergenzfrei. Trotzdem erweisen sich die durch diese Felder beschriebenen TEM Moden als außerordentlich nützlich, da die Abweichungen von den experimentell tatsächlich realisierten Strahlungsfeldern vernachlässigbar gering sind.

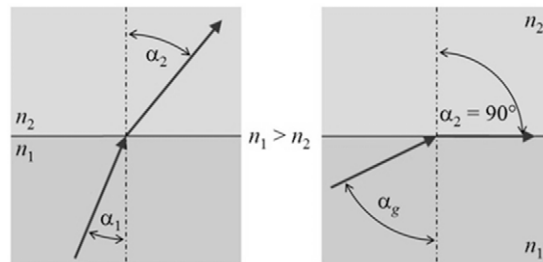
### 2.4.7 Wellen in optischen Fasern

Die in den vorangehenden Abschnitten behandelten elektromagnetischen Wellen sind Strahlungsmoden des freien Raumes mit homogener Brechungsindexverteilung, wie sie sich beispielsweise zwischen sphärischen Spiegeln eines Laserresonators ausbilden (siehe Abschnitt 5.2). Bei der Wellenleitung in optischen Fasern werden die Moden durch die Brechungsindexverteilung der Faser bestimmt, wie dies für zylindersymmetrische Fasern im Abschnitt 2.4.7.2 beschrieben ist. Aufgrund der Bedeutung für die Laserstrahlführung in der Praxis wird im Folgenden aber zuerst auf die geometrische Betrachtung der Lichtleitung in Fasern eingegangen.

Optische Glasfasern wurden anfänglich überwiegend für die Signalübertragung in der Telekommunikation eingesetzt. Mit dem Aufkommen von Festkörperlaser hatte die Strahlführung in optischen Glasfasern bald eine weitere wichtige Bedeutung erlangt. Die so genannten Lichtleitkabel brachten ein enormer Flexibilitätsgewinn und eine wesentlich geringere Störungsanfälligkeit bei der Strahlführung zwischen Strahlquelle und Laserbearbeitungsstation.<sup>10</sup>

#### 2.4.7.1 Geometrische Lichtstrahlen in optischen Fasern

Im einfachsten Falle besteht eine optische Faser aus einem runden Kern mit einem Durchmesser von wenigen  $\mu\text{m}$  bis einige hundert  $\mu\text{m}$  und einem Mantel mit einem leicht niedrigeren Brechungsindex. In der Betrachtungsweise der geometrischen Optik – also unter Vernachlässigung der Wellennatur des Lichtes, siehe Abschnitt 2.6.2 – kann die Strahlführung in Glasfasern mit der Totalreflexion am Übergang des höherbrechenden Faserkerns mit Brechungsindex  $n_1$  zum Mantel mit dem niedrigeren Brechungsindex  $n_2 < n_1$  erklärt werden. Wie in Figur 2-12 gezeigt, besagt das Brechungsgesetz von Snellius



**Figur 2-12.** Brechung eines geometrischen Lichtstrahles. Rechts: Grenzwinkel für Totalreflexion.

$$n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2) , \quad (2-147)$$

dass der in das Medium mit dem niedrigeren Brechungsindex eindringende Strahl vom Lot weg gebrochen wird. Dies geht allerdings nur bis zu einem maximalen Einfallswinkel  $\alpha_g$ , bei dem der gebrochene Strahl genau in der Grenzfläche der beiden Medien verläuft, also  $\alpha_2 = 90^\circ$ , wie rechts in Figur 2-12 dargestellt. Ist der Einfallswinkel  $\alpha_1$  größer als der Grenzwinkel  $\alpha_g$ , so gelangt der Strahl nicht mehr in das Medium mit dem niedrigeren Brechungsindex, sondern wird an der Grenzfläche vollständig reflektiert – es erfolgt die so genannte Totalreflexion.

Der Grenzwinkel  $\alpha_g$  für Totalreflexion lässt sich sehr einfach aus der genannten Bedingung  $\alpha_2 = 90^\circ$  berechnen. Damit gilt nämlich  $\sin(\alpha_2) = 1$  und aus (2-147) folgt

$$\sin(\alpha_g) = \frac{n_2}{n_1} . \quad (2-148)$$

Wie in Figur 2-13 dargestellt, kann diese Totalreflexion zur Führung von Lichtstrahlen in optischen Glasfasern genutzt werden. Die Strahlführung erfolgt im Kern (engl. *core*), der von einem Mantel (engl. *cladding*) mit einem niedrigeren Brechungsindex umgeben ist.

Aus der Bedingung für die Totalreflexion zwischen Kern und Mantel folgt, dass nur Lichtstrahlen bis zu einem maximalen Einfallswinkel  $\alpha_{\max}$  in die Faser eingekoppelt und dort auch geführt werden können. Durch Anwendung des Brechungsgesetzes (2-147) auf die Brechung des gestrichelt gezeichneten Strahles an der Eintrittsfläche links in Figur 2-13,

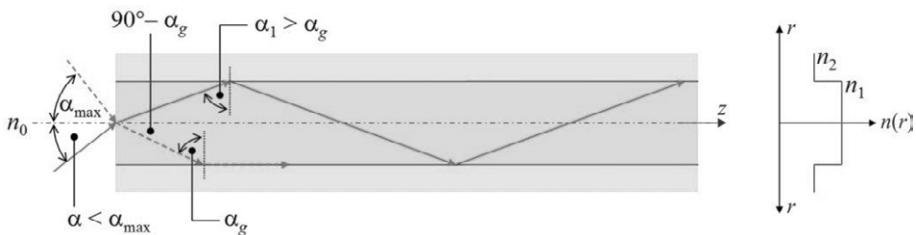
$$n_0 \sin(\alpha_{\max}) = n_1 \sin(90^\circ - \alpha_g) , \quad (2-149)$$

lässt sich der maximal zulässige Einkoppelwinkel einer Faser bestimmen. Zunächst gilt

$$n_0 \sin(\alpha_{\max}) = n_1 \sin(90^\circ - \alpha_g) = n_1 \cos(\alpha_g) = n_1 \sqrt{1 - \sin^2(\alpha_g)} . \quad (2-150)$$

Mit (2-148) folgt schließlich

$$n_0 \sin(\alpha_{\max}) = n_1 \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} . \quad (2-151)$$



**Figur 2-13.** Strahlführung durch Totalreflexion in einer optischen Faser. Bei zylindersymmetrischen Fasern ist der Brechungsindex eine Funktion  $n(r)$  des Abstandes  $r$  von der Faserachse.

Wenn wir davon ausgehen, dass die Umgebung einen Brechungsindex von  $n_0 = 1$  hat, folgt für den maximal zulässigen Einkoppelwinkel

$$\sin(\alpha_{\max}) = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \triangleq NA, \text{ (für } n_0 = 1\text{).} \quad (2-152)$$

Man nennt diesen Ausdruck die *numerische Apertur* (NA) des optischen Wellenleiters.

Bereits aus Figur 2-13 wird ersichtlich, dass die z-Komponente  $k_z$  des Wellenzahlvektors nicht gleich  $k = k_0 n_1 = 2\pi n_1 / \lambda_0 = 2\pi / \lambda$  (in der Ausbreitungsrichtung des einzelnen Teilstrahles) ist, sondern in dieser Darstellung durch die Projektion  $k_z = k \cdot \cos(90^\circ - \alpha_1)$  auf die z-Achse gegeben ist. Für die Bestimmung des effektiv geltenden Werts von  $k_z$  müsste aber zusätzlich der bei der Totalreflexion auftretende Goose-Hähnchen-Effekt<sup>11</sup> (Phasenschiebung und Versatz des reflektierten Strahls) berücksichtigt werden. An dieser Stelle wird als Hinweis für den nächsten Abschnitt aber lediglich festgehalten, dass die Propagationskonstante in z-Richtung, welche im Folgenden mit  $\beta = k_0 \cdot n_{\text{eff}}$  mittels eines effektiven Brechungsindex  $n_{\text{eff}}$  ausgedrückt wird, von der Wellenzahl  $k = k_0 \cdot n_1$  abweicht.

Die soeben beschriebenen Betrachtungen vernachlässigen die Wellennatur des Lichtes. Sollen die in der Faser sich ausbreitenden elektromagnetischen Felder berechnet werden, ist eine rigorose Behandlung auf der Grundlage der Maxwell-Gleichungen erforderlich, wie dies im Folgenden skizziert ist.

#### 2.4.7.2 Exakte Moden in zylindersymmetrischen Fasern

Da die mathematische Behandlung nicht weniger aufwendig ist als bei den Hermite-Gauß- und Laguerre-Gauß-Moden in Abschnitt 2.4.6, wird hier die Betrachtung auf zylindersymmetrische Fasern eingeschränkt und lediglich auf die wichtigsten Gedankengänge und Resultate eingegangen. Das Ziel dabei ist, die Systematik und die Nomenklatur der Fasernmoden einzuführen. Für eine detailliertere Herleitung wird auf das Buch von Okamoto<sup>12</sup> verwiesen, woher auch die im Folgenden wiedergegebenen Ausführungen stammen.

Für die Behandlung zylindersymmetrischer Glasfasern ist es angebracht, die Maxwellgleichungen (2-18) bis (2-21) in Zylinderkoordinaten auszudrücken und für die Felder die Ansätze

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r, \varphi, t) &= \underline{\mathbf{E}}(r, \varphi) e^{-i\beta z + i\omega t} \\ \mathbf{B}(r, \varphi, t) &= \underline{\mathbf{B}}(r, \varphi) e^{-i\beta z + i\omega t} \end{aligned} \quad (2-153)$$

zu wählen. Mit der Verwendung der Propagationskonstante  $\beta = k_0 \cdot n_{\text{eff}}$  in der Ausbreitungsrichtung  $z$  wird ermöglicht, dass diese von  $k = k_0 n_1 = 2\pi n_1 / \lambda_0 = 2\pi / \lambda$  verschieden sein kann (siehe letzter Abschnitt). Die folgenden Berechnungen werden ergeben, dass der Wert des effektiven Brechungsindex  $n_{\text{eff}}$  für in der Faser geführte Moden zwischen den Werten der Brechungsindizes von Mantel und Kern der Faser liegt.

Im Folgenden werden nur noch die transversalen Verteilungen der Amplituden  $\underline{\mathbf{E}}(r, \varphi)$  und  $\underline{\mathbf{B}}(r, \varphi)$  betrachtet. Durch Einsetzen der Felder (2-153) in die Maxwellgleichungen erhält man für die longitudinalen Komponenten die Wellengleichungen

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial \varphi^2} + \left( k_0^2 n^2(r, \varphi) - \beta^2 \right) \underline{E}_z = 0, \quad (\text{analog für } \underline{B}_z). \quad (2-154)$$

Die transversalen Feldkomponenten folgen mit entsprechenden Gleichungen aus den longitudinalen Feldkomponenten  $\underline{E}_z$  und  $\underline{B}_z$  unter Berücksichtigung der Voraussetzung, dass der Brechungsindex  $n = n(r)$  in zylindersymmetrischen Fasern nicht von  $\varphi$  abhängt.

Der wesentliche Punkt bei der Lösung dieses Gleichungssystems – und damit auch der springende Unterschied zur Herleitung der Laguerre-Gauß-Moden im freien Raum – ist die Berücksichtigung der elektrodynamischen Anforderung, dass die tangentialen Feldkomponenten von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}/\mu$  am Übergang zwischen Faserkern und Fasermantel stetig sein müssen.

Das Ergebnis sind drei unterschiedliche Arten von Moden: transversal elektrische (TE), transversal magnetische (TM) und hybride Moden. Um deren Darstellung zu vereinfachen, werden eine Reihe neuer Größen eingeführt. Als erstes wird der Radius des Faserkerns mit  $a$  bezeichnet. Die normierten transversalen Wellenzahlen sind dann durch

$$u = a\sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2} \quad \text{und} \quad w = a\sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_2^2} \quad (2-155)$$

definiert. Da  $u$  und  $w$  zur Lösung der Differentialgleichungen reell sein müssen, ist hieraus bereits ersichtlich, dass mit  $\beta = k_0 \cdot n_{eff}$  der Betrag des effektiven Brechungsindex der in der Faser geführten Moden zwischen den Werten der Brechungsindizes von Kern und Mantel liegt. Die normierte Frequenz  $v$  ist durch

$$v = \sqrt{u^2 + w^2} = a\sqrt{k_0^2 (n_1^2 - n_2^2)} \quad (2-156)$$

gegeben. Zudem werden mit  $J_n(x)$  die Besselfunktion  $n$ -ter Ordnung und mit  $K_n(x)$  die modifizierte Besselfunktion der zweiten Gattung  $n$ -ter Ordnung verwendet.  $A$  ist im Folgenden eine Konstante zur Normierung der Felder auf die Leistung  $P$  im Strahl.

### Die TE Moden

Die transversal elektrischen Moden sind dadurch gekennzeichnet, dass die longitudinale Komponente des elektrischen Feldes verschwindet,  $E_z = 0$ . Darüber hinaus sind auch  $E_r = 0$  (es handelt sich also um eine rein tangentiale Polarisationsverteilung) und  $B_\varphi = 0$ .

Innerhalb des Faserkerns mit  $0 \leq r \leq a$  sind die restlichen Feldkomponenten durch

$$\underline{E}_\varphi = -i\omega\mu \frac{a}{u} A J_1\left(\frac{u}{a} r\right) \quad (0 \leq r \leq a) \quad (2-157)$$

$$\underline{B}_r = i\beta\mu \frac{a}{u} A J_1\left(\frac{u}{a} r\right) \quad (0 \leq r \leq a) \quad (2-158)$$

$$\underline{B}_z = \mu A J_0\left(\frac{u}{a} r\right) \quad (0 \leq r \leq a) \quad (2-159)$$

gegeben. Im Fasermantel mit  $r > a$  fallen die Felder hingegen gemäss

$$\underline{E}_\varphi = i\omega\mu \frac{a}{w} \frac{J_0(u)}{K_0(w)} AK_1\left(\frac{w}{a}r\right) \quad (r > a) \quad (2-160)$$

$$\underline{B}_r = -i\beta\mu \frac{a}{w} \frac{J_0(u)}{K_0(w)} AK_1\left(\frac{w}{a}r\right) \quad (r > a) \quad (2-161)$$

$$\underline{B}_z = \mu \frac{J_0(u)}{K_0(w)} AK_0\left(\frac{w}{a}r\right) \quad (r > a) \quad (2-162)$$

mit zunehmendem Abstand  $r$  ab.

Um die Stetigkeitsbedingung der tangentialen Feldkomponenten an der Grenze zwischen Kern und Mantel einzuhalten, müssen die Werte der in (2-157) bis (2-162) einzusetzenden normierten transversalen Wellenzahlen  $u$  und  $w$  die Dispersionsrelation

$$\frac{J_1(u)}{uJ_0(u)} = -\frac{K_1(w)}{wK_0(w)} \quad (2-163)$$

erfüllen, wobei weiterhin (2-156) zu berücksichtigen ist. Die Dispersionsrelation ist somit die eigentliche Eigenwertgleichung der Faser. Die Lösung der beiden Gleichungen (2-163) und (2-156) zur Bestimmung von  $u$  und  $w$  erfolgt numerisch (oder graphisch als Schnittpunkt(e) zwischen dem in den Koordinaten  $u$  und  $w$  beschriebenen Kreis (2-156) und dem durch (2-163) beschriebenen Kurvenverlauf, siehe z. B. Figur 2-17).

Ist eine Faser durch den Radius  $a$  des Kerns und die Brechungsindizes  $n_1$  des Kerns und  $n_2$  des Mantels vorgegeben, so folgt also für die Strahlung einer bestimmten Wellenlänge  $\lambda_0$  aus (2-156) mit  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  zunächst die normierte Frequenz  $v$ . Die Lösung der Dispersionsgleichung (2-163) liefert dann unter Berücksichtigung von (2-156) die Eigenwerte  $u$  und  $w$ , welche für die Berechnung der Felder in (2-157) bis (2-162) einzusetzen sind. Man beachte, dass mit den Werten für  $u$  oder  $w$  wegen (2-155) auch die Propagationskonstante  $\beta = k_0 \cdot n_{eff}$  der gefundenen Lösung festgelegt ist.

Je nach Wert der normierten Frequenz  $v$  in (2-156) hat die Eigenwertgleichung (2-163) eine oder mehrere Lösungen für  $u$  und  $w$  (man bedenke den oszillierenden Verlauf der Besselfunktionen). Die Moden der unterschiedlichen Lösungen unterscheiden sich in der Anzahl  $l$  der Intensitätsmaxima in radialer Richtung  $r$ . Die ganze Zahl  $l$  wird daher als radiale Modenordnung bezeichnet und die verschiedenen Lösungen einfach mit  $TE_l$  und  $l = 1, 2, 3, \dots$  durchnummeriert.

Im Unterschied zu der rein geometrischen Betrachtung in Abschnitt 2.4.7.1, wonach die Strahlung ausschließlich im Faserkern geführt wird, zeigt die Lösung der Maxwellgleichung mit den Ausdrücken (2-160) bis (2-162), dass die Felder der geführten Moden in den Fasermantel hinausragen. Dasselbe trifft für die im Folgenden behandelten Moden zu. Die Wellenleitung in einer optischen Faser findet also nicht alleine im Kern statt, sondern auch darum herum, was sich entsprechend im Wert des effektiven Brechungsindex zwischen den Werten  $n_1$  und  $n_2$  widerspiegelt. Weil die Felder in den Mantel hineinragen, ist es wichtig, dass der Fasermantel eine ausreichende Dicke aufweist, damit die Moden nicht durch das gegebenenfalls verlustbehaftete Material außerhalb des Mantels beeinträchtigt werden. Wie bei der



Totalreflexion werden die über den Kern hinaus in den Bereich des Fasermantels hineinragenden Feldanteile *evaneszent* genannt.

### Die TM Moden

Die transversal magnetischen Moden sind dadurch gekennzeichnet, dass die longitudinale Komponente des Magnetfeldes verschwindet,  $B_z = 0$ . Darüber hinaus sind auch  $B_r = 0$  und  $E_\varphi = 0$  (es handelt sich also um eine rein radiale Polarisationsverteilung).

Als Eigenwertgleichung für die TM Moden findet man die Dispersionsrelation

$$\frac{J_1(u)}{uJ_0(u)} = -\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{K_1(w)}{wK_0(w)}. \quad (2-164)$$

Innerhalb des Faserkerns mit  $0 \leq r \leq a$  sind die restlichen Feldkomponenten durch

$$E_r = i\beta \frac{a}{u} AJ_1\left(\frac{u}{a}r\right) \quad (0 \leq r \leq a) \quad (2-165)$$

$$E_z = AJ_0\left(\frac{u}{a}r\right) \quad (0 \leq r \leq a) \quad (2-166)$$

$$B_\varphi = i\omega\epsilon_0 n_1^2 \mu AJ_1\left(\frac{u}{a}r\right) \quad (0 \leq r \leq a) \quad (2-167)$$

gegeben. Im Fasermantel mit  $r > a$  fallen die Felder gemäss

$$E_r = -i\beta \frac{a}{w} \frac{J_0(u)}{K_0(w)} AK_1\left(\frac{w}{a}r\right) \quad (r > a) \quad (2-168)$$

$$E_z = \frac{J_0(u)}{K_0(w)} AK_0\left(\frac{w}{a}r\right) \quad (r > a) \quad (2-169)$$

$$B_\varphi = -i\omega\epsilon_0 n_2^2 \mu \frac{J_0(u)}{K_0(w)} AK_1\left(\frac{w}{a}r\right) \quad (r > a) \quad (2-170)$$

mit zunehmendem Abstand  $r$  ab.

Bei gegebener Faserstruktur und Strahlungswellenlänge erfolgt die Berechnung der Moden wieder wie bei den TE Moden beschrieben zunächst durch Bestimmung der normierten Frequenz  $v$  und dann durch (numerisches) Lösen der Dispersionsrelation (2-164) unter Berücksichtigung von (2-156), um die so erhaltenen Eigenwerte  $u$  und  $w$  in die Felder (2-165) bis (2-170) einzusetzen. Wie bei den TE Moden gibt es auch hier je nach Wert von  $v$  mehrere Lösungen, die sich in der radialen Modenordnung  $l = 1, 2, 3, \dots$  unterscheiden (TM<sub>*l*</sub>).

### Die hybriden Moden

Bei den hybriden Moden verschwindet keine der axialen Feldkomponenten  $E_z$  und  $B_z$ . Die Lösungen der Wellengleichung (2-154) sind Produkte von Besselfunktionen  $n$ -ter Ordnung über  $r$  mit den azimutalen Funktionen  $\cos(n\varphi + \varphi_0)$  oder  $\sin(n\varphi + \varphi_0)$ , wobei  $\varphi_0$  eine Konstante ist, welche die Orientierung der Felder im Raum bestimmt.

Als Eigenwertgleichung für die hybriden Moden findet man die Dispersionsrelation

$$\begin{aligned} & \left( \frac{J'_n(u)}{uJ_n(u)} + \frac{K'_n(w)}{wK_n(w)} \right) \left[ \frac{J'_n(u)}{uJ_n(u)} + \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 \frac{K'_n(w)}{wK_n(w)} \right] = \\ & = n^2 \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \left[ \frac{1}{u^2} + \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 \frac{1}{w^2} \right], \end{aligned} \quad (2-171)$$

wobei die gestrichenen Größen für die erste Ableitung der Funktionen stehen.

Innerhalb des Faserkerns mit  $0 \leq r \leq a$  sind die Feldkomponenten durch

$$\underline{E}_r = -iA\beta \frac{a}{u} \left[ \frac{(1-\xi)}{2} J_{n-1} \left( \frac{u}{a} r \right) - \frac{(1+\xi)}{2} J_{n+1} \left( \frac{u}{a} r \right) \right] \cos(n\varphi + \varphi_0) \quad (2-172)$$

$$\underline{E}_\varphi = iA\beta \frac{a}{u} \left[ \frac{(1-\xi)}{2} J_{n-1} \left( \frac{u}{a} r \right) + \frac{(1+\xi)}{2} J_{n+1} \left( \frac{u}{a} r \right) \right] \sin(n\varphi + \varphi_0) \quad (2-173)$$

$$\underline{E}_z = AJ_n \left( \frac{u}{a} r \right) \cos(n\varphi + \varphi_0) \quad (2-174)$$

$$\underline{H}_r = -iA\omega\epsilon_0 n_1^2 \mu \frac{a}{u} \left[ \frac{(1-\xi_1)}{2} J_{n-1} \left( \frac{u}{a} r \right) + \frac{(1+\xi_1)}{2} J_{n+1} \left( \frac{u}{a} r \right) \right] \sin(n\varphi + \varphi_0) \quad (2-175)$$

$$\underline{H}_\varphi = -iA\omega\epsilon_0 n_1^2 \mu \frac{a}{u} \left[ \frac{(1-\xi_1)}{2} J_{n-1} \left( \frac{u}{a} r \right) - \frac{(1+\xi_1)}{2} J_{n+1} \left( \frac{u}{a} r \right) \right] \cos(n\varphi + \varphi_0) \quad (2-176)$$

$$\underline{B}_z = -A \frac{\beta}{\omega\mu_0} \mu \xi J_n \left( \frac{u}{a} r \right) \sin(n\varphi + \varphi_0) \quad (2-177)$$

gegeben. Im Fasermantel mit  $r > a$  fallen die Felder gemäss

$$\underline{E}_r = -iA\beta \frac{aJ_n(u)}{wK_n(w)} \left[ \frac{(1-\xi)}{2} K_{n-1} \left( \frac{w}{a} r \right) + \frac{(1+\xi)}{2} K_{n+1} \left( \frac{w}{a} r \right) \right] \cos(n\varphi + \varphi_0) \quad (2-178)$$

$$\underline{E}_\varphi = iA\beta \frac{aJ_n(u)}{wK_n(w)} \left[ \frac{(1-\xi)}{2} K_{n-1} \left( \frac{w}{a} r \right) - \frac{(1+\xi)}{2} K_{n+1} \left( \frac{w}{a} r \right) \right] \sin(n\varphi + \varphi_0) \quad (2-179)$$

$$\underline{E}_z = A \frac{J_n(u)}{K_n(w)} K_n \left( \frac{w}{a} r \right) \cos(n\varphi + \varphi_0) \quad (2-180)$$

$$\begin{aligned} \underline{H}_r = & -iA\omega\epsilon_0 n_2^2 \mu \frac{aJ_n(u)}{wK_n(w)} \left[ \frac{(1-\xi_2)}{2} K_{n-1} \left( \frac{w}{a} r \right) + \frac{(1+\xi_2)}{2} K_{n+1} \left( \frac{w}{a} r \right) \right] \times \\ & \times \cos(n\varphi + \varphi_0) \end{aligned} \quad (2-181)$$

$$\begin{aligned} H_\varphi = & -iA\omega\epsilon_0 n_2^2 \mu \frac{aJ_n(u)}{wK_n(w)} \left[ \frac{(1-\xi_2)}{2} K_{n-1}\left(\frac{w}{a}r\right) - \frac{(1+\xi_2)}{2} K_{n+1}\left(\frac{w}{a}r\right) \right] \times \\ & \times \sin(n\varphi + \varphi_0) \end{aligned} \quad (2-182)$$

$$B_z = -A \frac{\beta}{\omega\mu_0} \mu_s \frac{J_n(u)}{K_n(w)} K_n\left(\frac{w}{a}r\right) \sin(n\varphi + \varphi_0) \quad (2-183)$$

mit zunehmendem Abstand  $r$  ab, wobei

$$\xi = \frac{n \cdot \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right)}{\frac{J'_1(u)}{uJ_0(u)} + \frac{K'_1(w)}{wK_0(w)}} \quad (2-184)$$

$$\xi_1 = \frac{\beta^2}{k_0^2 n_1^2} \xi \quad (2-185)$$

$$\xi_2 = \frac{\beta^2}{k_0^2 n_2^2} \xi. \quad (2-186)$$

Bei gegebener Faserstruktur und Strahlungswellenlänge erfolgt die Berechnung der Moden wieder analog zu dem bei den TE und TM Moden beschriebenen Vorgehen, wobei auch hier gegebenenfalls mehrere Lösungen mit unterschiedlicher radialer Modenordnung  $l$  gefunden werden. Zusammen mit der azimuthalen Modenordnung  $n$  werden die hybriden Moden also mit dem Parametersatz  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  und  $l = 1, 2, 3, \dots$  durchnummeriert.

Die in diesem Abschnitt exakt berechneten Moden beschreiben die Wellenleitung in nicht gekrümmten optischen Fasern. Zur Analyse von Verlusten und Veränderungen der Modenstruktur, welche durch Biegung einer Faser verursacht werden, wird heute in der Regel auf numerische Berechnungen zurückgegriffen.<sup>13</sup> Im Folgenden wird gezeigt, wie die analytischen Ausdrücke für die Moden stark vereinfacht werden können, wenn gerade Fasern mit einem geringen Brechungsunterschied zwischen Kern und Mantel betrachtet werden.

#### 2.4.7.3 Linear polarisierte (LP) Moden in zylindersymmetrischen Fasern

Die im vorangehenden Abschnitt betrachteten Moden sind die exakten Lösungen der Maxwellgleichungen unter Berücksichtigung einer zylindersymmetrischen Brechungsindexverteilung als Randbedingung.<sup>12</sup> In den meisten praktischen Anwendungen ist der relative Brechungsindexunterschied  $(n_1 - n_2)/n_1 \ll 1$  aber sehr klein. Unter der entsprechenden Annahme  $n_2 \approx n_1$  können die oben beschriebenen Dispersionsrelationen und die Ausdrücke für die Felder der Moden daher wesentlich vereinfacht werden. Das im Folgenden diskutierte Ergebnis sind Moden, welche zur Bildung von linear polarisierten LP Moden addiert werden können. Da ein geringer Brechungsindexunterschied zwischen Kern und Mantel einer Faser eine schwache Strahlungsführung bedeutet, wird diese Näherung auch als „weakly guiding approximation“ bezeichnet.

Natürlich würde, wenn in der Faser  $n_2 = n_1$  exakt gälte, gar keine Wellenleitung stattfinden. Die *weakly guiding* Näherung geht also nicht davon aus, dass sich die Brechungsindizes von Kern und Mantel nicht unterscheiden, sondern beginnt mit den bei  $n_2 > n_1$  exakt hergeleiteten Moden und vereinfacht diese unter der Annahme, dass sich die Brechungsindizes  $n_2 \approx n_1$  annähern.

Wir folgen weiterhin den Ausführungen von Okamoto<sup>12</sup> und stellen zunächst fest, dass sich mit der Näherung  $n_2 \approx n_1$  bei den TE Moden weder die Eigenwertgleichung (2-163) noch die zugehörigen Feldverteilungen ändern. Hingegen wird wegen  $n_1/n_2 \approx 1$  unter der *weakly guiding* Näherung die Eigenwertgleichung (2-164) der TM Moden identisch zur Dispersionsrelation (2-163) der TE Moden.

Bei den hybriden Moden vereinfachen sich die Ausdrücke für die Felder (2-172) bis (2-183), weil aus  $n_2 \approx n_1$  auch  $s_1 \approx s_2 \approx s$  folgt. Auch die Dispersionsrelation (2-171) vereinfacht sich deutlich und es zeigt sich, dass  $s \approx \pm 1$  gilt, mit je einer entsprechenden Dispersionsrelation. Die Moden mit  $s \approx 1$  werden als EH Moden bezeichnet, jene mit  $s \approx -1$  als HE Moden. Diese Bezeichnung ist historisch bedingt. Es sei aber darauf hingewiesen, dass bei EH Moden die axiale Komponente  $B_z$  des Magnetfeldes relativ stark und bei den HE Moden die axiale Komponente  $E_z$  des elektrischen Feldes vergleichsweise stark ist.

Durch Einführung des neuen Parameters

$$m = \begin{cases} 1 & \text{für TE und TM Moden} \\ n+1 & \text{für EH Moden} \\ n-1 & \text{für HE Moden} \end{cases} \quad (2-187)$$

können die verschiedenen Dispersionsrelationen der unterschiedlichen Modenarten geschickt in einem einzigen Ausdruck

$$\frac{J_m(u)}{uJ_{m-1}(u)} = -\frac{K_m(w)}{wK_{m-1}(w)} \quad (2-188)$$

zusammengefasst werden, wobei die Beziehungen  $J_{-1}(u) = -J_1(u)$  und  $K_{-1}(w) = -K_1(w)$  anzuwenden sind.

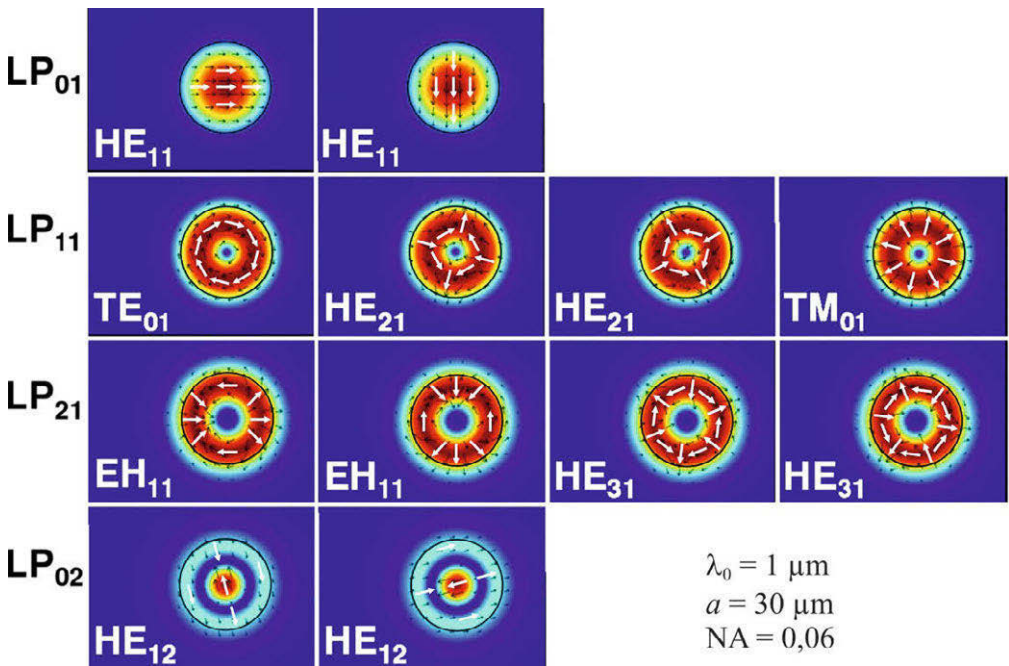
Daraus wird ersichtlich, dass Moden, die nach (2-187) denselben Parameter  $m$  haben, Lösungen derselben Eigenwertgleichung sind – mit derselben radialen Modenordnung  $l$  sogar zum selben Eigenwert. Moden mit demselben Parametersatz  $m$  und  $l$  haben im hier betrachteten Fall der *weakly guiding* Näherung also identische Eigenwerte und sind somit entartet. Identische Eigenwerte zu haben bedeutet mit (2-155), dass die entsprechenden Moden dieselbe Propagationskonstante  $\beta = k_0 \cdot n_{eff}$  aufweisen.

Diese entarteten Moden eines Parametersatzes  $ml$  haben alle die gleiche Intensitätsverteilung und werden mit der Bezeichnung  $LP_{ml}$  zusammengefasst. LP deshalb, weil die entarteten Moden des jeweiligen Parametersatzes  $ml$  zu linear polarisierten Moden kombiniert werden können. Tabelle 2.1 zeigt eine Gegenüberstellung der  $LP_{ml}$  Moden mit den dazu entsprechenden  $TE_l$ ,  $TM_l$ ,  $EH_{nl}$  und  $HE_{nl}$  Moden. Weil die TE und TM Moden keine azimutale Abhängigkeit ( $\cos(n\phi + \phi_0)$  oder  $\sin(n\phi + \phi_0)$ ) aufweisen, ist dies gleichbedeutend mit einer azimutalen Modenordnung von  $n = 0$ , weshalb auch für diese Moden die Schreibweise  $TE_{0l}$  und  $TM_{0l}$  verwendet wird.

**Tabelle 2.1** Gegenüberstellung der LP Moden mit den TE, TM und den hybriden Moden.

LP <sub>ml</sub> Moden	TE <sub>nl</sub> , TM <sub>nl</sub> und hybride <sub>nl</sub> Moden (in der <i>weakly guiding</i> Näherung)
LP <sub>0l</sub>	HE <sub>1l</sub> (zwei Polarisationszustände)
LP <sub>1l</sub>	TE <sub>0l</sub>
	TM <sub>0l</sub>
LP <sub>1l</sub>	HE <sub>2l</sub> (zwei Polarisationszustände)
	EH <sub>m-1,l</sub> (zwei Polarisationszustände)
LP <sub>ml</sub>	HE <sub>m+1,l</sub> (zwei Polarisationszustände)

Einige der Moden sind in Figur 2-14 abgebildet. Die Orientierung der Feldverteilungen wird durch  $\psi$  beeinflusst. Die linear polarisierte HE<sub>11</sub> Mode entspricht der LP<sub>01</sub> Mode und ist (mit zwei möglichen orthogonalen Polarisationsrichtungen) die Grundmode zylindersymmetrischer Fasern. Alle LP<sub>0l</sub> Moden können zwei orthogonale Polarisationsrichtungen aufweisen

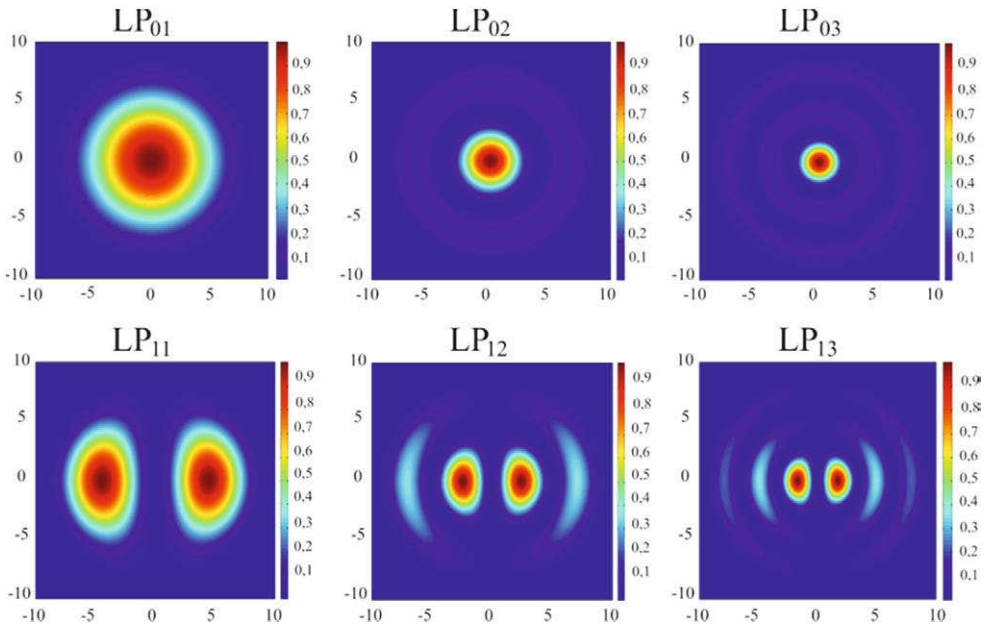


**Figur 2-14.** Intensitätsverteilung (Farbe) und angedeutete Polarisationsverteilung (Pfeile) einiger Fasermoden nach Ref. 13. Die TE und TM Moden sind bereits orthogonal zueinander polarisiert (keine weitere Polarisationsentartung). Alle anderen Moden können zwei zueinander orthogonale Polarisationszustände einnehmen ( $\varphi_0$  und  $\varphi_0 + \pi/2$ ) und sind daher zweimal mit unterschiedlicher Polarisation abgebildet. Die schwarzen Kreise zeigen die Grenze zwischen Kern und Mantel der Faser.

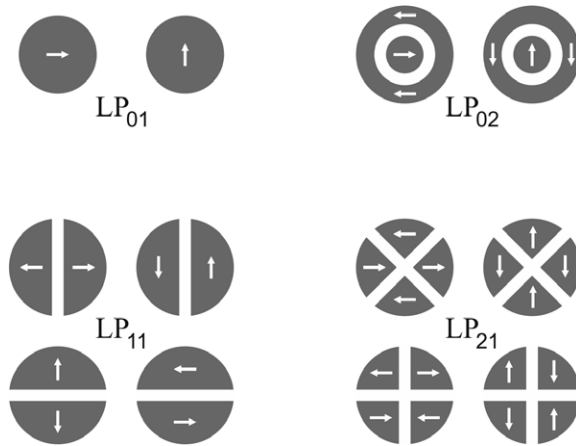
und sind damit zweifach entartet. Die  $LP_{1l}$  Moden setzen sich (für jeden Wert von  $l$ ) aus den Moden  $TE_{0l}$ ,  $TM_{0l}$  und  $HE_{2l}$  zusammen. Die Polarisationsverteilung der  $TE_{0l}$  Moden (azimutal polarisiert) und der  $TM_{0l}$  Moden (radial polarisiert) sind bereits zueinander orthogonal (es besteht also keine weitere Polarisationsentartung). Die  $HE_{2l}$  Moden können hingegen wieder zwei orthogonale Polarisationsformen annehmen. Insgesamt liegt bei den  $LP_{1l}$  Moden damit eine vierfache Entartung vor. Dasselbe gilt für die  $LP_{ml}$  Moden, weil jede der  $EH_{ml}$  und  $HE_{ml}$  Moden zwei orthogonale Polarisationszustände einnehmen kann. Zusammenfassend gilt also, dass  $LP_{ml}$  Moden für  $m = 0$  zweifach und für  $m \geq 1$  vierfach entartet sind.

Wie bereits erwähnt, besteht der Vorteil der LP Moden darin, dass diese linear polarisiert sein können (durch geeignete Kombination der entarteten Moden innerhalb des Satzes  $ml$ ). Die Intensitätsverteilungen einiger solcher linear polarisierten LP Moden sind in Figur 2-15 abgebildet. Bei der Betrachtung der Entartung ist zu beachten, dass es neben einer Drehung der Polarisation um  $90^\circ$  für  $m \geq 1$  auch jeweils zwei Orientierungen der Intensitätsverteilung gibt, wie dies schematisch in Figur 2-16 dargestellt ist. Es zeigt sich auch, dass die Felder in den über eine Knotenlinie benachbarten Maxima in Gegenphase oszillieren.

Wie viele Moden in einer Faser geführt werden, wird durch die Anzahl der Lösungen der Eigenwertgleichung (2-188) bestimmt und hängt vom Wert der normierten Frequenz  $v$  (2-156) und damit vom Radius  $a$  des Faserkerns sowie von den Brechungsindizes von Mantel und Kern ab. Für den Fall mit  $v = 5$  ist dies beispielhaft in Figur 2-17 dargestellt, wobei der oben geschilderten Theorie zufolge die möglichen Moden durch die Schnittpunkte zwischen dem durch (2-156) definierten Kreis und den durch (2-188) definierten Kurven gegeben sind. All-

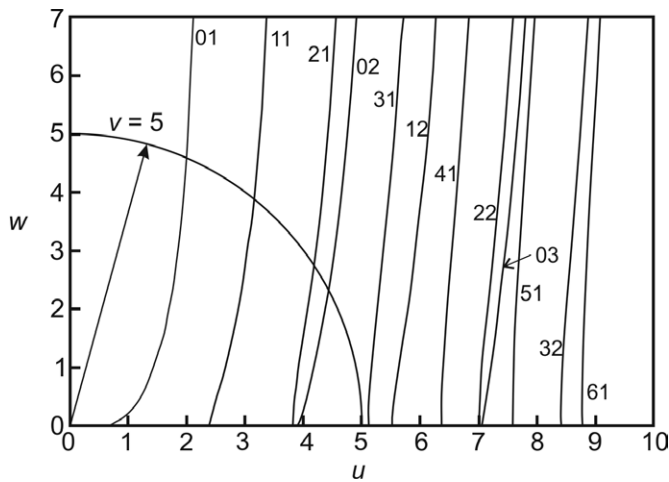


**Figur 2-15.** Intensitätsverteilung einiger  $LP_{ml}$  Moden nach Ref. 14;  $2a = 17 \mu\text{m}$ ,  $NA = 0,12$ ,  $\lambda_0 = 1,0 \mu\text{m}$ .



**Figur 2-16.** Schematische Darstellung der Entartung einiger LP -Moden mit der Anordnung der Intensitätsverteilung (grau) und der Polarisation des Feldes (Pfeile).

gemein existiert für  $v \leq 2.4048$  nur die  $LP_{01}$  Mode,<sup>12</sup> solche Fasern sind also transversal monomodig oder englisch *single transversal mode*, was im allgemeinen Sprachgebrauch aber oft einfach mit *single mode* abgekürzt wird, obwohl gleichzeitig viele longitudinale Moden unterschiedlicher Frequenz (siehe Abschnitte 5.5 und 5.5.2) vorliegen können.



**Figur 2-17.** Illustration zur Lösung der Eigenwertgleichungen. Die Moden einer Faser ergeben sich aus den Schnittpunkten zwischen dem durch (2-156) definierten Kreis (hier beispielhaft mit  $v = 5$  gezeichnet) und den durch die Dispersionsrelation (2-188) definierten Kurven  $ml$ ; nach Ref. 12.

## 2.5 Die Ausbreitung von Wellen

In Kapitel 3 wird eine elegante und selbst für komplexe optische Systeme sehr einfache Methode zur Berechnung der Ausbreitung von Gauß-Strahlen beschrieben. Die Methode kann mit einer Reihe von Vereinfachungen aus der allgemeinen Beugungstheorie der Wellenausbreitung gewonnen werden. Der Vollständigkeit zuliebe wird hier deshalb kurz das bekannte Beugungsintegral von Kirchhoff eingeführt (siehe auch Referenz 7).

Dazu zeigen wir zunächst, dass der Wert der Feldamplitude  $E$  (gilt analog auch für  $B$ ) in irgendeinem Punkt  $\vec{p}$  innerhalb eines Volumens  $V$  durch die Randwerte  $E$  und  $\nabla E$  auf dem Rand  $\Sigma(V)$  des Gebietes gegeben ist durch

$$E(\vec{p}) = \oint_{\Sigma(V)} (G(r)\nabla E(\vec{x}) - \nabla G(r)E(\vec{x}))d\vec{\sigma}, \quad (2-189)$$

wobei

$$G(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r}, \text{ mit } r = |\vec{x} - \vec{p}| \quad (2-190)$$

die Differentialgleichung

$$-\Delta G - k^2 G = \delta^3(\vec{x} - \vec{p}) \quad (2-191)$$

löst und wo  $\delta$  die Dirac'sche Deltafunktion ist. Außer an der Stelle  $r = 0$  ist diese Gleichung identisch mit der Wellengleichung (2-118) in zeitunabhängiger Form, wo wir bereits wissen, dass Kugelwellen der Form (2-190) zu den Lösungen gehören.

In (2-189) wenden wir den Satz von Gauß (2-6) an und schreiben

$$E(\vec{p}) = \oint_{\Sigma(V)} (G(r)\nabla E(\vec{x}) - \nabla G(r)E(\vec{x}))d\vec{\sigma} = \int_V \nabla(G\nabla E - \nabla G E) dV. \quad (2-192)$$

Mit (2-191) und der Wellengleichung (2-118) in der zeitunabhängigen Form (zeitabhängiger Term kann aus (2-118) gekürzt werden),

$$\Delta E + k^2 E = 0, \quad (2-193)$$

findet man

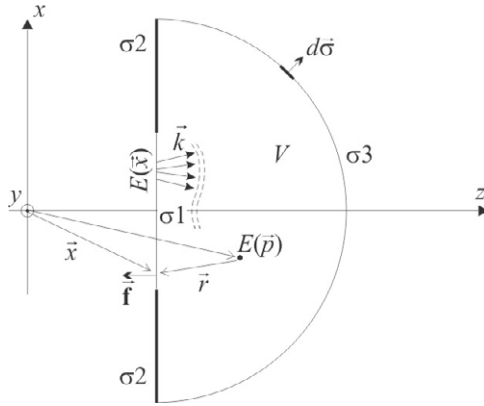
$$\nabla(G\nabla E - \nabla G E) = G\Delta E - \Delta G E = -Gk^2 E + E\delta^3(\vec{x} - \vec{p}) + k^2 G E = E\delta^3(\vec{x} - \vec{p}). \quad (2-194)$$

Somit ist

$$\begin{aligned} E(\vec{p}) &= \oint_{\Sigma(V)} (G(r)\nabla E(\vec{x}) - \nabla G(r)E(\vec{x}))d\vec{\sigma} = \int_V \nabla(G\nabla E - \nabla G E) dV \\ &= \int_V E\delta^3(\vec{x} - \vec{p})dV = E(\vec{p}), \end{aligned} \quad (2-195)$$

was die Behauptung (2-189) beweist.





**Figur 2-18.** Illustration zum Oberflächenintegral von Kirchhoff. In der paraxialen Näherung nehmen wir an, dass die Phasenfront (gestrichelt) lokal durch eine ebene Welle approximiert werden kann, und dass die  $\vec{k}$ -Vektoren nur um kleine Winkel von der z-Richtung abweichen.

Mit dem Skalarprodukt in (2-189) werden die Gradienten von  $E$  und  $G$  auf die Flächennormale  $\vec{f} = d\vec{\sigma}/|d\vec{\sigma}|$  von  $d\vec{\sigma}$  projiziert. D. h., man kann die Gleichung auch als

$$E(\vec{p}) = \oint_{E(V)} \frac{e^{-ikr}}{r} \left( \frac{\partial E}{\partial f} + ik \left[ 1 - \frac{i}{kr} \right] \cos(\vec{f}, \vec{r}) E \right) \frac{d\sigma}{4\pi} \quad (2-196)$$

schreiben, wobei die Notation

$$\frac{\partial E}{\partial f} \equiv \vec{f} \cdot \nabla E \quad \text{und} \quad d\sigma = |d\vec{\sigma}| \quad (2-197)$$

sowie die Beziehung

$$\vec{f} \cdot \nabla r = \vec{f} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \cos(\vec{f}, \vec{r}) \quad (2-198)$$

und (2-190) verwendet wurden.

Für die Näherung von Kirchhoff führen wir das Integral (2-196) über die in Figur 2-18 dargestellten Oberflächen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  aus. Das Gebiet  $\sigma_1$  bezeichne den Bereich, wo die Amplitude  $E$  wesentlich von 0 verschieden ist. Den Radius von  $\sigma_3$  können wir beliebig groß wählen, so dass von dort keine wesentlichen Beiträge kommen und die Integration über  $\sigma_3$  weggelassen werden kann (sowohl  $G$  als auch  $E$  werden als Kugelwellen von Quellen auf  $\sigma_1$  proportional zu  $1/r$  und in  $G\nabla E - \nabla G E$  bleibt kein Beitrag der Ordnung  $1/r^2$  übrig). Wenn nur von  $\sigma_1$  wesentliche Beiträge kommen, kann auch die Integration über  $\sigma_2$  weggelassen werden. In genügend großem Abstand (mehrere Wellenlängen) vom Rand  $\sigma_1$  (und  $\sigma_2$ ) ist  $1/kr$  klein gegenüber 1 und somit vernachlässigbar. In der Näherung von Kirchhoff lautet die Gleichung (2-196) damit

$$E(\vec{p}) = \int_{\sigma_1} \frac{e^{ikr}}{r} \left( \frac{\partial E}{\partial n} + ik \cos(\vec{f}, \vec{r}) E \right) \frac{d\sigma}{4\pi}. \quad (2-199)$$

Im paraxialen Fall ist auf  $\sigma_1$  der Winkel zwischen der Flächennormalen  $\vec{f}$  und dem Vektor  $\vec{k}$  immer klein und wir können den Kosinus durch 1 ersetzen. Im paraxialen Fall kann dies noch weiter vereinfacht werden. Wir können nämlich die elektromagnetische Welle, deren Phasenfront in Figur 2-18 gestrichelt symbolisiert ist, auf  $\sigma_1$  lokal durch eine ebene Welle

$$E = E_0 e^{-i\vec{k}\vec{x}} \quad (2-200)$$

nähern, wobei  $\vec{k}$  im paraxialen Fall nur um kleine Winkel gegenüber der  $z$ -Achse geneigt ist. Mit dem Gradienten

$$\nabla E = -i\vec{k}E_0 e^{-i\vec{k}\vec{x}} = -i\vec{k}E \quad (2-201)$$

resultiert für  $\partial E / \partial f$  aus (2-197) der Ausdruck

$$\frac{\partial E}{\partial f} \equiv -\vec{f} \cdot i\vec{k}E = -ikE \cos(\vec{f}, \vec{k}) \approx ikE \quad (2-202)$$

(beachte, dass  $\vec{f}$  in Richtung  $-z$  und  $\vec{k}$  in  $z$ -Richtung zeigt) und wir können (2-199) durch

$$\begin{aligned} E(\vec{p}) &= \int_{\sigma_1} \frac{e^{-ikr}}{r} (ikE + ikE) \frac{d\sigma}{4\pi} = \int_{\sigma_1} ik \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{d\sigma}{2\pi} E \\ &= \int_{\sigma_1} \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikr}}{r} E d\sigma = \iint_{\sigma_1} \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikr}}{r} E dx dy \end{aligned} \quad (2-203)$$

nähern. Das Integral

$$E(\vec{p}) = \iint_{\sigma_1} \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikr}}{r} E(\vec{x}) dx dy \quad (2-204)$$

folgt also aus dem Integral von Kirchhoff (2-199) unter der Voraussetzung, dass sich die elektromagnetische Welle paraxial ausbreitet. Was insbesondere dann zutrifft, wenn der paraxiale Strahl nicht durch harte Blenden gestört wird oder keine scharfen Phasensprünge aufweist (z. B. nach diffraktiven optischen Elementen). Die Näherung von Kirchhoff ihrerseits setzte nur voraus, dass der Punkt  $\vec{p}$  mehrere Wellenlängen von der Integrationsoberfläche  $\sigma$  entfernt ist.

Das Beugungsintegral (2-204) entspricht einer einfachen Formulierung des Prinzips von Huygens, wonach jeder Teil einer optischen Wellenfläche im Raum als Quelle einer sphärischen Teilwelle wirkt.<sup>7</sup> In der Tat werden hier über  $\sigma_1$  Kugelwellen aufintegriert, welche mit den lokalen Amplituden  $E(\vec{x})$  gewichtet sind (die komplexen Amplituden beinhalten auch die Phaseninformation).

## 2.6 Die Ausbreitung von Lichtstrahlen

Die im vorangehenden Abschnitt hergeleiteten Integrale von Kirchhoff und Huygens werden hauptsächlich dort benötigt, wo Beugungs- und Interferenzeffekte eine wichtige Rolle spielen (z. B. Beugung am Spalt, Beugung an einer Lochblende etc.). Es sind dies Situationen, wo die Wellennatur des Lichtes zum tragen kommt. In vielen klassischen Situationen sind diese Effekte aber von untergeordneter Relevanz und die Lichtausbreitung kann mit einfachen geometrischen Strahlen beschrieben werden. In diesem Falle folgen die Lichtstrahlen sehr einfachen geometrischen Gesetzen, wie der geradlinigen Ausbreitung im homogenen Raum, dem Reflexionsgesetz (Einfallswinkel = Ausfallswinkel) und dem Brechungsgesetz von *Snellius*. Diese Gesetze folgen alle aus dem Grundgesetz der geometrischen Optik, der so genannten Eikonalgleichung, die zur späteren Verwendung im Folgenden kurz hergeleitet wird.<sup>1,9</sup>

### 2.6.1 Die Eikonalgleichung

Wenn wir die Diskussion auf monochromatische Lichtwellen mit einer scharf definierten Frequenz

$$\omega = \frac{c_0}{\lambda_0} 2\pi \quad (2-205)$$

beschränken, kann der mit der Zeit  $t$  oszillierende Phasenterm  $e^{i\omega t}$  abgespalten werden und die Felder erhalten die Form

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{x}) e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}(\vec{x}) e^{i\omega t}. \quad (2-206)$$

Wir betrachten nach wie vor nur Wellen in Gebieten ohne freie Ladungsträger ( $\rho = 0 = \vec{j}$ ), setzen diese Felder in die Maxwellgleichungen (2-20) und (2-21) ein und erhalten daraus

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}) + i\omega \vec{B}(\vec{x}) = 0 \quad (2-207)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) - i\omega \frac{n^2}{c_0^2} \vec{E}(\vec{x}) = 0, \quad (2-208)$$

wobei (2-55) und (2-57) verwendet wurden.

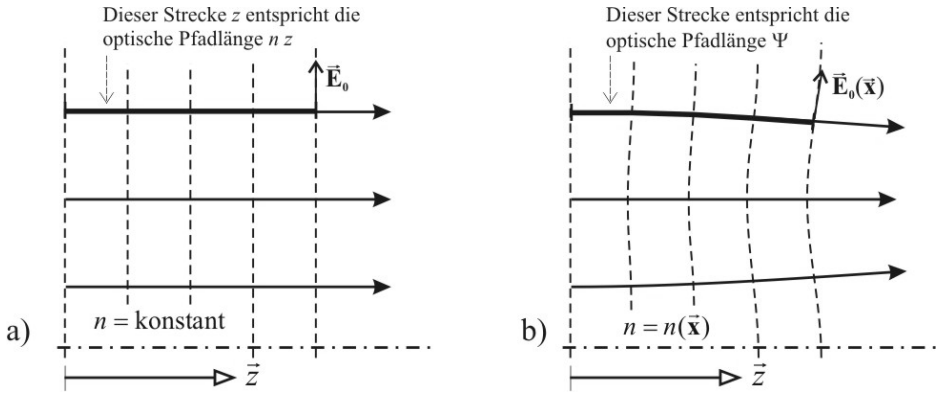
Betrachten wir eine ebene, monochromatische Welle, die sich in einem homogenen Medium mit Brechungsindex  $n$  ausbreitet, so wissen wir aus Abschnitt 2.4.1, dass die Ortsabhängigkeit der Felder gegeben ist durch

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\vec{x}} \quad \text{und} \quad \vec{B}(\vec{x}) = \vec{B}_0 e^{-i\vec{k}\vec{x}}, \quad (2-209)$$

wobei die Feldamplituden  $\vec{E}_0$  und  $\vec{B}_0$  konstant sind. Breitet sich die Welle in  $z$ - bzw.  $x_3$ -Richtung aus, so vereinfachen sich diese Ausdrücke mit

$$k_3 = |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda_0} n = \frac{\omega}{c_0} n \quad (2-210)$$

zu



**Figur 2-19.** Ausbreitung einer Lichtwelle. Die gestrichelten Linien symbolisieren die Phasenfront.

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_0 e^{-i \frac{\omega}{c_0} n z} \quad \text{und} \quad \vec{B}(z) = \vec{B}_0 e^{-i \frac{\omega}{c_0} n z} . \quad (2-211)$$

Wie in Figur 2-19a skizziert, entspricht die Größe  $nz$  der von der Lichtwelle zurückgelegten *optischen* Pfadlänge (die *geometrische* Pfadlänge ist  $z$ ).

Wenn das Medium nicht homogen ist ( $n = n(\vec{x})$ ), kann sich das Licht zwar nicht über das ganze Gebiet als ebene Welle ausbreiten, in einem genügend kleinen Gebiet des Raumes können wir aber  $n(\vec{x})$  als konstant ansehen und das Licht lokal mit einer ebenen Welle approximieren. Wir können also lokal die Form von (2-211) beibehalten, müssen aber für die korrekte Berücksichtigung der Phase die veränderte Pfadlänge bis zu diesem Punkt beachten und eine geringfügige Änderung der Feldamplituden (Richtung) zulassen, wie dies in Figur 2-19b skizziert ist. Als leicht verallgemeinerte Form für (2-211) machen wir deshalb den Ansatz

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_0(\vec{x}) e^{-i \frac{\omega}{c_0} \Psi(\vec{x})} \quad \text{und} \quad \vec{B}(\vec{x}) = \vec{B}_0(\vec{x}) e^{-i \frac{\omega}{c_0} \Psi(\vec{x})} . \quad (2-212)$$

Die bis zum Ort  $\vec{x}$  zurückgelegte optische Pfadlänge  $\Psi$  wird Eikonal genannt. Für eine ebene Welle in  $z$ -Richtung eines homogenen Mediums hat das Eikonal die Form  $\Psi = nz$ .

Die Feldamplituden  $\vec{E}_0(\vec{x})$  und  $\vec{B}_0(\vec{x})$  ändern sich wesentlich langsamer (bei einer exakt ebenen Welle sind diese sogar konstant) als der abgespaltene Phasenterm und das Eikonal. Setzt man (2-212) in (2-207) und (2-208) ein, so erhält man vorerst

$$-i \frac{\omega}{c_0} \vec{\nabla} \Psi \times \vec{E}_0 + \vec{\nabla} \times \vec{E}_0 + i \omega \vec{B}_0 = 0 \quad (2-213)$$

und

$$-i \frac{\omega}{c_0} \vec{\nabla} \Psi \times \vec{B}_0 + \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 - i \frac{\omega}{c_0^2} n^2(\vec{x}) \vec{E}_0 = 0 , \quad (2-214)$$

wobei aus Gründen der Übersicht auf die Notierung des Arguments ( $\vec{x}$ ) verzichtet wurde. Unter der Voraussetzung dass  $\omega/c_0$  beziehungsweise  $\omega$  sehr große Werte annehmen, können die Terme  $\vec{\nabla} \times \vec{E}_0$  und  $\vec{\nabla} \times \vec{B}_0$  vernachlässigt werden. Wegen der Beziehung (2-205) ist dies gleichbedeutend mit der Aussage, dass die Wellenlänge sehr klein ist, d. h.  $\lambda \rightarrow 0$ . Zudem verändern sich  $\vec{E}_0$  und  $\vec{B}_0$  im Vergleich zum Eikonal örtlich wesentlich langsamer (annähernd ebene Welle), infolgedessen die Rotation von  $\vec{E}_0$  und  $\vec{B}_0$  klein ist gegenüber dem Gradienten des Eikonals. In der Tat ändert sich das Eikonal linear mit dem zurückgelegten Weg, die Feldamplituden hingegen sind nahezu konstant. Mit diesen Überlegungen folgt aus (2-213)

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{c_0} \vec{\nabla} \Psi \times \vec{E}_0 \quad (2-215)$$

und aus (2-214) folgt

$$\vec{\nabla} \Psi \times \vec{B}_0 = -\frac{1}{c_0} n^2(\vec{x}) \vec{E}_0. \quad (2-216)$$

Aus diesen beiden Gleichungen ist ersichtlich, dass sowohl  $\vec{E}_0$  als auch  $\vec{B}_0$  senkrecht auf  $\vec{\nabla} \Psi$  stehen, d. h.

$$(\vec{\nabla} \Psi) \cdot \vec{E}_0 = 0 = (\vec{\nabla} \Psi) \cdot \vec{B}_0. \quad (2-217)$$

Durch Einsetzen von (2-215) in (2-216) erhalten wir durch Anwendung von (2-41)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \Psi \times (\vec{\nabla} \Psi \times \vec{E}_0) &= -n^2(\vec{x}) \vec{E}_0 \\ (\vec{\nabla} \Psi \cdot \vec{E}_0) \vec{\nabla} \Psi - (\vec{\nabla} \Psi)^2 \vec{E}_0 &= -n^2(\vec{x}) \vec{E}_0 \end{aligned} \quad (2-218)$$

und mit (2-217) folgt die Eikonalgleichung

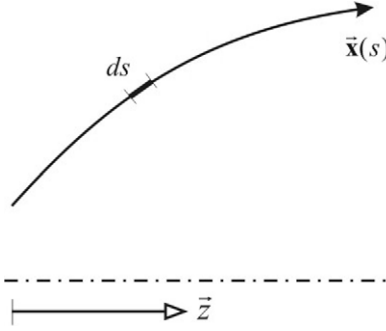
$$(\vec{\nabla} \Psi)^2 = n^2(\vec{x}). \quad (2-219)$$

Aus dieser Grundgleichung der geometrischen Optik lässt sich nun eine Differentialgleichung für die Ausbreitung von Lichtstrahlen herleiten.

## 2.6.2 Geometrische Lichtstrahlen

In diesem Abschnitt soll nun berechnet werden, auf welchen Bahnen sich das Licht durch ein inhomogenes Medium mit gegebener Brechungsindexverteilung bewegt. Da der zeitliche Verlauf hier nicht von Interesse ist (es sind nur Bahnkurven gesucht), wird die Bahn durch die Bogenlänge  $s$  mit  $\vec{x} = \vec{x}(s)$  parametrisiert; siehe Figur 2-20. Bei dieser Wahl des Parameters  $s$  ist die erste Ableitung  $d\vec{x}(s)/ds$  ein Vektor der Länge Eins, der in Richtung der Bahnkurve zeigt. Aus (2-216) folgte, dass  $\vec{\nabla} \Psi$  wie der Poyntingvektor senkrecht zu den Feldern  $\vec{E}_0$  und  $\vec{B}_0$  steht. D. h., die Richtung des Gradienten des Eikonals entspricht (wie  $d\vec{x}/ds$ ) der lokalen Richtung eines Lichtstrahles. Zudem ist der Betrag dieses Gradienten laut Eikonalgleichung (2-219) gerade der lokale Brechungsindex. Demzufolge ist  $\vec{\nabla} \Psi/n$  ebenfalls ein Einheitsvektor in Richtung des Lichtstrahles:

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{\vec{\nabla} \Psi}{n}. \quad (2-220)$$



**Figur 2-20.** Parametrisierung des Lichtstrahles.

Leitet man die einzelnen Ortskomponenten des Ausdrucks  $n d\vec{x} / ds$  nochmals nach  $ds$  ab, so folgt unter Verwendung von (2-220)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds} \left( n \frac{dx_i}{ds} \right) &= \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \right) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial x_j}{\partial s} \\
 &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_j \partial x_i} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \right)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{\nabla} \Psi)^2
 \end{aligned} \tag{2-221}$$

(wo  $i = 1, 2, 3$  für die drei Ortskoordinaten)

und mit der Eikonalgleichung (2-219) folgt

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{dx_i}{ds} \right) = \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{\nabla} \Psi)^2 = \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial x_i} (n^2) = \frac{\partial n}{\partial x_i}. \tag{2-222}$$

Damit haben wir die Differentialgleichung

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\vec{x}}{ds} \right) = \vec{\nabla} n(\vec{x}) \tag{2-223}$$

für die Ausbreitung von Lichtstrahlen hergeleitet.

Setzt man in diese Gleichung  $n$  als konstant ein, so folgt  $d^2 \vec{x} / ds^2 = 0$ , was zur Lösung  $\vec{x}(s) = \vec{a} + \vec{b} \cdot s$  führt. Dies beweist, dass sich Lichtstrahlen in homogenen Medien geradlinig ausbreiten.

### 2.6.3 Das Prinzip von Fermat

Dass Lichtstrahlen in homogenen Medien auf einer Geraden von einem Punkt zu einem anderen Punkt gelangen, entspricht dem Prinzip von Fermat, welches etwas allgemeiner besagt, dass die optische Pfadlänge

$$\int_{P_1}^{P_2} n ds = \text{Extremum} \quad (2-224)$$

des tatsächlichen Lichtstrahles zwischen den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  kürzer ist als die optische Pfadlänge jeder anderen Verbindung zwischen den beiden Punkten.<sup>g</sup> Denn mit

$$ds = |\dot{\vec{x}}| dt \quad (2-225)$$

folgt für (2-224)

$$\int_{P_1}^{P_2} n(\vec{x}) ds = \int_{P_1}^{P_2} |\dot{\vec{x}}| n(\vec{x}) dt = \int_{P_1}^{P_2} L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) dt = \text{Extremum} \quad (2-226)$$

und gemäß Variationsrechnung aus den Euler-Lagrange-Gleichungen<sup>h</sup>

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) = 0 \quad (\text{wo } j = 1, 2, 3 \text{ für die drei Ortskoordinaten}) \quad (2-227)$$

für die Erfüllung der Extremalbedingung in (2-226) die Beziehung

$$|\dot{\vec{x}}| \frac{\partial n}{\partial x_j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}_j}{|\dot{\vec{x}}|} n \right). \quad (2-228)$$

Aus (2-225) folgt

$$\frac{d}{dt} = |\dot{\vec{x}}| \frac{d}{ds}, \quad (2-229)$$

was mit (2-228) vorerst

$$\frac{\partial n}{\partial x_j} = \frac{d}{ds} \left( \frac{\dot{x}_j}{|\dot{\vec{x}}|} n \right) = \frac{d}{ds} \left( n \frac{dx_j}{|\dot{\vec{x}}| dt} \right) = \frac{d}{ds} \left( n \frac{dx_j}{ds} \right) \quad (2-230)$$

und vektoriell geschrieben tatsächlich wieder die Differentialgleichung

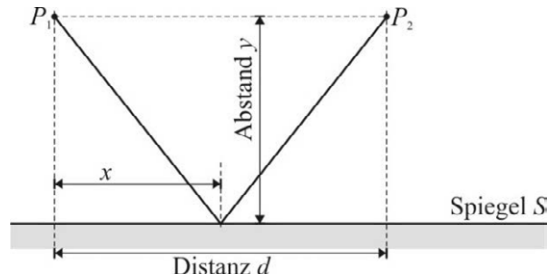
$$\vec{\nabla} n = \frac{d}{ds} \left( n \frac{d\vec{x}}{ds} \right) \quad (2-231)$$

für die Lichtstrahlen (2-223) ergibt, womit das Prinzip von Fermat bewiesen ist.

Aus dem Prinzip von Fermat folgt auch, dass wenn zwei oder mehrere unterschiedliche Lichtstrahlen von  $P_1$  nach  $P_2$  gelangen (z. B. zwischen Objekt und Bild bei der Abbildung mittels einer Linse), die optischen Pfade aller Lichtstrahlen gleich lang sein müssen, denn andernfalls wäre nur der Strahl mit dem kürzesten Pfad erlaubt.

<sup>g</sup> Nur wenn das Medium dispersionsfrei ist, folgt daraus, dass dies auch der zeitlich schnellste Weg ist. Andernfalls kommt hier die Gruppengeschwindigkeit bzw. der Gruppenbrechungsindex zum tragen.

<sup>h</sup> Siehe dazu Kapitel 9 in Referenz 6 oder auch Appendix I.11 in Referenz 2.



**Figur 2-21.** Reflexion an einem Spiegel.

Weiter lassen sich aus dem Prinzip von Fermat alle Gesetze der geometrischen Optik herleiten. Betrachten wir beispielsweise einen Strahl der im Vakuum ( $n = 1$ ) ausgehend von  $P_1$  in Figur 2-21 nach der Reflexion am Spiegel  $S$  nach  $P_2$  gelangt, beträgt die Pfadlänge in Abhängigkeit des Reflexionsortes  $x$

$$L = \sqrt{y^2 + x^2} + \sqrt{y^2 + (d - x)^2} . \quad (2-232)$$

Gemäß Prinzip von Fermat suchen wir nun den kürzesten dieser Pfade und setzen dazu

$$\frac{dL}{dx} = \frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}} - \frac{d - x}{\sqrt{y^2 + (d - x)^2}} = 0 , \quad (2-233)$$

was für

$$x = \frac{d}{2} \quad (2-234)$$

erfüllt ist. Dieses Resultat stimmt mit dem allgemeinen Reflexionsgesetz *Einfallswinkel* = *Ausfallswinkel* überein.

### Übung

Man leite das Reflexionsgesetz *Einfallswinkel* = *Ausfallswinkel* für den allgemeingültigen Fall her, dass die beiden Punkte in Figur 2-21 nicht denselben Abstand vom Spiegel haben.

### Übung

Man leite aus dem Prinzip von Fermat das Brechungsgesetz  $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$  her.



Laser

Grundlagen der Laserstrahlerzeugung

Graf, Th.

2015, IX, 283 S. 119 Abb., 9 Abb. in Farbe. Mit  
zahlreichen Übungen., Softcover

ISBN: 978-3-658-07953-6