

# Baustatik 3

Theorie II. Ordnung und computerorientierte Methoden der Stabtragwerke

Bearbeitet von  
Raimond Dallmann

2. Auflage 2015. Buch. 186 S. Kartoniert  
ISBN 978 3 446 44504 8  
Format (B x L): 20,8 x 27,7 cm  
Gewicht: 465 g

[Weitere Fachgebiete > Technik > Bauingenieurwesen > Konstruktiver Ingenieurbau.](#)  
[Baustatik](#)

schnell und portofrei erhältlich bei

  
DIE FACHBUCHHANDLUNG

Die Online-Fachbuchhandlung [beck-shop.de](http://beck-shop.de) ist spezialisiert auf Fachbücher, insbesondere Recht, Steuern und Wirtschaft. Im Sortiment finden Sie alle Medien (Bücher, Zeitschriften, CDs, eBooks, etc.) aller Verlage. Ergänzt wird das Programm durch Services wie Neuerscheinungsdienst oder Zusammenstellungen von Büchern zu Sonderpreisen. Der Shop führt mehr als 8 Millionen Produkte.



Leseprobe

Raimond Dallmann

Baustatik 3

Theorie II. Ordnung und computerorientierte Methoden der Stabtragwerke

ISBN (Buch): 978-3-446-44504-8

ISBN (E-Book): 978-3-446-44508-6

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-44504-8>

sowie im Buchhandel.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Berechnung von Stabtragwerken nach Theorie II. Ordnung</b>	<b>9</b>
1.1	Einführung	9
1.2	Differenzialgleichung der Theorie II. Ordnung	10
1.3	Spannungs- und Stabilitätsproblem	14
1.4	Geometrische Imperfektionen	22
1.5	Iterative Annäherung der Biegelinie	26
1.6	Berechnung nach dem Drehwinkelverfahren	30
1.7	Balken auf elastischer Bettung	53
<b>2</b>	<b>Allgemeines Weggrößenverfahren</b>	<b>59</b>
2.1	Einführung	59
2.2	Matrizendarstellung	60
2.2.1	Steifigkeitsmatrix des Stabes	60
2.2.2	Aufbau des Gesamtgleichungssystems	65
2.2.3	Starre Rand- und Zwischenbedingungen	66
2.2.4	Elastische Lagerungen	67
2.2.5	Schnittgrößenermittlung	68
2.2.6	Struktur der Systemmatrix	68
2.2.7	Berücksichtigung von Theorie II. Ordnung und Bettung	69
2.2.7.1	Exakte Steifigkeitsmatrix nach Theorie II. Ordnung	69
2.2.7.2	Steifigkeitsmatrix nach Theorie II. Ordnung und Bettung aus Näherungsansatz	70
2.2.8	Berücksichtigung von Gelenken	70
2.3	Beispiele nach Theorie I. Ordnung	74
2.4	Beispiele nach Theorie II. Ordnung	82
<b>3</b>	<b>Näherungsverfahren der Baustatik</b>	<b>88</b>
3.1	Prinzip der virtuellen Verschiebungen	88
3.1.1	Arbeitsgleichung	88
3.1.2	Ansätze über das Gesamtgebiet	90
3.1.3	Ansätze über Teilbereiche	98
3.1.3.1	Ansatzfunktionen	98
3.1.3.2	Aufbau des Gleichungssystems	100
3.1.3.3	Ermittlung der Schnittgrößen	101
3.1.3.4	Schematischer Aufbau des Gleichungssystems	110

3.2	Gemischtes Verfahren .....	112
3.2.1	Herleitung der Arbeitsgleichungen .....	112
3.2.2	Ansätze über das Gesamtgebiet .....	114
3.2.3	Ansätze über Teilbereiche des Systems .....	118
3.2.3.1	Lineare Ansätze .....	118
3.2.3.2	Quadratische Ansätze .....	124
3.3	Numerische Integration .....	135
<b>4</b>	<b>Das Reduktionsverfahren der Übertragungsmatrizen .....</b>	<b>143</b>
4.1	Einführung .....	143
4.2	Übertragungsmatrix des Balkens nach Theorie I. Ordnung .....	143
4.2.1	Mechanische Interpretation der Elemente der Übertragungsmatrix .....	144
4.2.2	Erweiterung der Übertragungsmatrix .....	145
4.3	Randbedingungen .....	146
4.4	Übertragungsverfahren .....	148
4.4.1	Elastische Zwischenbedingungen .....	149
4.4.2	Starre Zwischenbedingungen .....	157
4.5	Theorie II. Ordnung .....	163
4.6	Ermittlung der Übertragungsmatrix aus dem Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung .....	166
4.7	Ermittlung der Steifigkeitsmatrix aus der Übertragungsmatrix .....	169
<b>Lösungen</b> .....		<b>172</b>
<b>Anhang: Tafeln</b> .....		<b>180</b>
<b>Literaturverzeichnis</b> .....		<b>184</b>
<b>Sachwortverzeichnis</b> .....		<b>185</b>

# Vorwort

Der dritte Band dieser Lehrbuchreihe vermittelt die grundlegenden Kenntnisse der Theorie II. Ordnung und von computerorientierten Verfahren der Baustatik. Ein großer Teil des Inhalts entspricht den von mir an der Hochschule Wismar gehaltenen Lehrveranstaltungen.

Das Buch richtet sich an Studierende eines Masterstudiengangs Bauingenieurwesen. Vorausgesetzt werden Kenntnisse der Berechnung statisch bestimmter und unbestimmter Tragwerke, die in Band 1 und 2 behandelt wurden. Insbesondere sollte das Drehwinkelverfahren für die Berechnung von Stabtragwerken bekannt sein. Weiterhin sind Grundkenntnisse der höheren Mathematik notwendig.

Der qualifizierte Einsatz des Computers bei der Berechnung von Baukonstruktionen erfordert das Verständnis der den Berechnungsverfahren zugrunde liegenden Methoden. Es ist ein Ziel dieses Buches, das Verständnis der Theorie II. Ordnung zu vermitteln und einen ersten Zugang zu den abstrakteren Verfahren der Baustatik zu ermöglichen.

Es werden in Kapitel 1 zunächst die Grundlagen der Berechnung nach Theorie II. Ordnung dargestellt. Nach der Herleitung der Grundgleichungen erfolgt für einfache Systeme eine Berechnung durch Lösung der Differenzialgleichung, die einen Einblick in das Wesen der Lösung ermöglicht. Am Beispiel einfacher statisch bestimmter Tragwerke wird die Iteration über die Verformungen dargestellt, da diese Methode sehr anschaulich ist. Das Drehwinkelverfahren als klassische Methode der Baustatik wird auf die Anwendung der Theorie II. Ordnung erweitert. Abschließend erfolgt die Erweiterung der Differenzialgleichung des Balkens zur Berücksichtigung einer elastischen Bettung.

Das Allgemeine Weggrößenverfahren in matrizieller Darstellung wird in Kapitel 2 behandelt, wobei auf einen möglichst anschaulichen Zugang Wert gelegt wird. Das

Verfahren wird auf Beispiele nach Theorie I. und II. Ordnung angewandt.

Kapitel 3 ist den Näherungsverfahren der Baustatik gewidmet. Auf Grundlage des Prinzips der virtuellen Arbeiten wird das grundlegende Konzept der Finite Element Methode für Probleme der Balkenbiegung in einer Weggrößen- und einer gemischten Formulierung dargestellt. Anhand einfacher Beispiele wird gezeigt, welchen Einfluss unterschiedliche Näherungsansätze auf die erzielten Ergebnisse haben.

Das 4. Kapitel behandelt das Reduktionsverfahren der Übertragungsmatrizen, das eine wertvolle Ergänzung zum Weggrößenverfahren darstellt.

In jedem Kapitel wird die Anwendung der theoretischen Grundlagen anhand zahlreicher vollständig durchgerechneter Beispiele erläutert.

Auch in diesem Buch sind Übungsaufgaben enthalten, um das eigenständige Üben des Lehrstoffes zu ermöglichen. Die Lösungen sind am Ende des Buches angegeben. Die vollständigen Lösungswege sind im Internet unter <http://www.bau.hs-wismar.de/Dallmann> zu finden.

Ich hoffe, dass dieses Buch den Lesern Verständnis für die dargestellten Inhalte vermitteln kann und zu einer weitergehenden Auseinandersetzung mit dem Lehrstoff motiviert. Verbesserungsvorschläge zum Inhalt des Buches sind jederzeit willkommen.

Frau Christine Fritsch und Frau Franziska Kaufmann vom Carl Hanser Verlag danke ich sehr herzlich für die sehr freundliche und angenehme Zusammenarbeit.

Mein ganz besonderer Dank gilt Frau Bianca Hennings für die vielen wichtigen Hinweise und Anregungen bei der Kontrolle des Manuskripts.

Die vorliegende zweite Auflage dieses Buches ist inhaltlich unverändert, es wurden jedoch bekannt gewordene Fehler korrigiert.

# 1 Berechnung von Stabtragwerken nach Theorie II. Ordnung

1

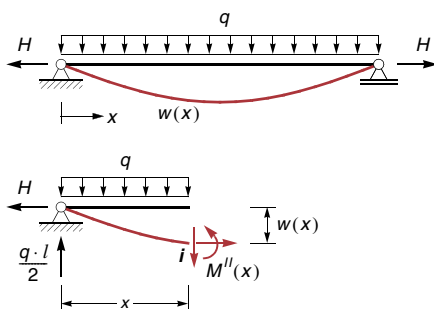
## 1.1 Einführung

Jedes Tragwerk verformt sich infolge seiner Belastung. Wir sind in **Baustatik 1** und **Baustatik 2** davon ausgegangen, dass die Verformungen bei der Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen vernachlässigt werden können. Man nennt dies eine Berechnung nach *Theorie I. Ordnung*.

Bei vielen Problemstellungen der Baustatik ist diese Annahme jedoch nicht gerechtfertigt. Selbst wenn die Verformungen des Tragwerks im Verhältnis zu seinen Abmessungen sehr klein sind, muss bei großen Druck- oder Zugkräften der Einfluss der Verformungen auf das Gleichgewicht berücksichtigt werden.

Diese Berücksichtigung der Verformungen bei der Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen wird als *Theorie II. Ordnung* bezeichnet. Zusammengefasst ergibt sich die folgende Unterscheidung:

- Theorie I. Ordnung: Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen am **unverformten** System.
- Theorie II. Ordnung: Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen am **verformten** System.



**Bild 1.1** Balken mit Längskraft unter Querbelastung

Der Balken in *Bild 1.1* wird durch eine konstante Streckenlast sowie eine Horizontalkraft beansprucht. Für die Berechnung des Biegemomentes an einer beliebigen Stelle  $x$  bilden wir die Momentensumme bezüglich des

Punktes  $i$ . Aufgrund der Durchbiegung des Balkens hat die horizontale Auflagerkraft den Abstand  $w(x)$  zur Balkenachse und geht mit in die Momentensumme ein. Damit folgt:

$$M''(x) = \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} - H \cdot w(x)$$

$$M''(x) = M_q' - H \cdot w(x) \quad (1.1)$$

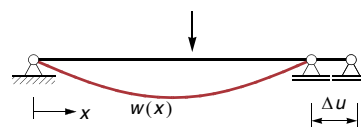
Der Anteil am Biegemoment ohne den Einfluss der Horizontalkraft ist in vorheriger Gleichung mit  $M_q'$  bezeichnet.

Die Theorie II. Ordnung berücksichtigt zwar die Verformungen bei der Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen, ist aber eine **geometrisch lineare** Theorie, da wir weiterhin die Linearisierung der kinematischen (geometrischen) Beziehung beibehalten, also von kleinen Verformungen ausgehen.

Die exakte Beziehung zwischen Krümmung des Balkens und der 2. Ableitung der Biegelinie lautet:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{-w''}{(1 + w'^2)^{3/2}}$$

Für kleine Verformungen ist  $w'^2 \ll 1$  und kann gegenüber eins vernachlässigt werden. Es gilt also weiterhin die lineare Beziehung  $\kappa = -w''$ .

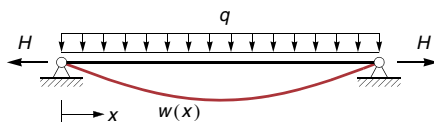


**Bild 1.2** Berücksichtigung der horizontalen Auflagerverschiebung bei Theorie III. Ordnung

*Bild 1.2* zeigt einen unter der Wirkung einer Kraft verformten Balken. Da die Balkenachse nicht gedehnt wird, also nicht länger wird, muss sich das rechte Auflager nach links verschieben. Dieser Effekt lässt sich nur durch eine geometrisch nichtlineare Theorie erfassen. Man spricht von einer Theorie III. Ordnung. Für kleine Verfor-

mungen ist die Verschiebung  $\Delta u$  gegenüber der Durchbiegung  $w$  vernachlässigbar klein.

Entsprechendes gilt für das Beispiel in *Bild 1.3*. Der Balken ist an beiden Enden horizontal gehalten, sodass infolge der Balkendurchbiegung eigentlich horizontale Auflagerkräfte entstehen, die nur durch Theorie III. Ordnung erfasst werden können.



**Bild 1.3** Berücksichtigung der Membranwirkung bei Theorie III. Ordnung

## 1.2 Differenzialgleichung der Theorie II. Ordnung

Wir gehen zunächst von Gl. (1.1) aus und bilden die zweifache Ableitung nach  $x$ . Unter der Voraussetzung, dass  $H$  konstant ist, folgt:

$$M = M^I(q) - H \cdot w(x)$$

$$M'' = (M^I)'' - H \cdot w''(x) \quad (1.2)$$

Auf den hochgestellten Index II wird verzichtet, unter  $M$  ist also das Moment nach Theorie II. Ordnung zu verstehen. Für den Zusammenhang zwischen Moment und Biegelinie gilt unverändert die Beziehung:

$$EIw'' = -M \quad (1.3)$$

da der Einfluss der Theorie II. Ordnung nur in die Gleichgewichtsbedingungen eingeht. Durch zweimaliges Ableiten von Gl. (1.3) und Einsetzen von Gl. (1.2) folgt:

$$(EIw'')'' = -M'' = -(M^I)'' + H \cdot w''(x)$$

Mit der Beziehung

$$(M^I)'' = -q$$

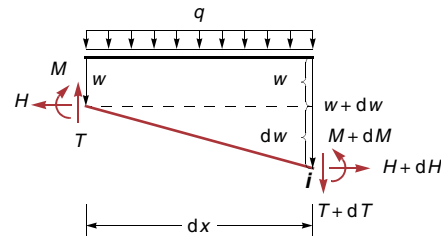
folgt die Differenzialgleichung 4. Ordnung:

$$(EIw'')'' = q + H \cdot w'' \text{ bzw. } (EIw'')'' - H \cdot w'' = q$$

### Herleitung am differentiellen Element

Zur Herleitung der Differenzialgleichungen am differentiellen Element betrachten wir das infinitesimale Balken-

element der Länge  $dx$  in *Bild 1.4*. Die Zerlegung der resultierenden Schnittkraft erfolgt dabei bezüglich der unverformten Balkenachse.



**Bild 1.4** Differentielles Element mit Verformung

$$\sum V = 0: -T(x) + T(x) + dT + q(x)dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dx} = T' = -q(x)$$

$$\begin{aligned} \sum M_{(i)} = 0: & -M(x) + M(x) + dM - T(x)dx \\ & + H(x)dw - q(x)dx \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned}$$

Unter Vernachlässigung der Produkte differentieller Größen als von „höherer Ordnung klein“ folgt:

$$dM - T(x)dx + H(x)dw = 0$$

$$\frac{dM}{dx} - T(x) + H(x) \frac{dw}{dx} = 0$$

$$M' = T - Hw' \quad (1.4)$$

$$M'' = T' - (Hw')' \quad (1.5)$$

mit  $EIw'' = -M$  bzw.  $(EIw'')' = -M'$  folgt:

$$(EIw'')' = -T' + (Hw')'$$

mit  $T' = -q$  ergibt sich die Differenzialgleichung 4. Ordnung:

$$(EIw'')' - (Hw')' = q \quad (1.6)$$

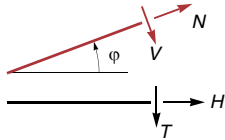
Aus Gl. (1.4) folgt:

$$T = M' + Hw' = -EIw''' + Hw' \quad (1.7)$$

Der Zusammenhang zwischen den Schnittkräften  $N$  und  $V$  bezüglich der verformten Achse und den Schnittkräften  $H$  und  $T$  bezüglich der unverformten Achse ist in *Bild 1.5* abzulesen.

$$V = T \cdot \cos \varphi + H \cdot \sin \varphi$$

$$N = -T \cdot \sin \varphi + H \cdot \cos \varphi$$

**Bild 1.5** Zerlegung der Schnittkräfte

Für kleine Verformungen gilt:  $\cos \varphi \approx 1$ ,  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Damit ergibt sich in linearisierter Form:

$$V = T + H \cdot \varphi$$

$$N = -T \cdot \varphi + H$$

Mit der Beziehung  $\varphi = -w'$  folgt:

$$V = T - H \cdot w'$$

$$N = T \cdot w' + H \quad (1.8)$$

Da wir kleine Verformungen voraussetzen, ist die Verdrehung  $w' = -\varphi$  sehr klein und das Produkt  $T \cdot w'$  ist vernachlässigbar, wenn die Horizontalkraft  $H$  viel größer ist als die Transversalkraft. Dann gilt näherungsweise:

$$N \approx H \quad (1.9)$$

Aus Gl. (1.4) folgt:

$$M' = T - Hw' = V = -EIw''$$

Die Differenzialgleichungen des Balkens nach Theorie II. Ordnung sind in *Tabelle 1.1* zusammengestellt.

**Tabelle 1.1** Differenzialgleichungen des Balkens nach Theorie II. Ordnung

Differenzialgleichung	Gleichgewicht	Stoffgesetz	Kinematik
1. Ordnung	$T' = -q$ $M' = T - Hw'$	$\varphi' = \frac{M}{EI} + \alpha_T \frac{\Delta T}{h}$	$w' = \gamma - \varphi$
2. Ordnung	$M'' = -q - (Hw')'$	$\kappa = \frac{M}{EI} + \alpha_T \frac{\Delta T}{h}$ $w'' = -\frac{M}{EI} - \alpha_T \frac{\Delta T}{h}$	$\kappa = -w''$
4. Ordnung	$(EIw'')'' - (Hw')' = q$		

Die Änderung gegenüber Theorie I. Ordnung betrifft nur die Spalte des Gleichgewichts.

**Lösung der Differenzialgleichung**

Wir gehen davon aus, dass die Biegesteifigkeit  $EI$  und die Horizontalkraft  $H$  bereichsweise konstant sind. Damit folgt die Differenzialgleichung:

$$EIw'''' - Hw'' = q$$

Dies ist eine lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Allgemein ergibt sich die Lösung aus der Summe von homogener Lösung  $w_h$  und Partikularlösung  $w_p$ :

$$w = w_h + w_p$$

• **Homogene Lösung**

Die homogene Differenzialgleichung lautet:

$$EIw'''' - Hw'' = 0 \quad (1.10)$$

Mit dem Ansatz:

$$w = c \cdot e^{\lambda x}$$

$$w'' = \lambda^2 \cdot c \cdot e^{\lambda x}$$

$$w'''' = \lambda^4 \cdot c \cdot e^{\lambda x}$$

folgt durch Einsetzen in Gl. (1.10):

$$EI \cdot \lambda^4 \cdot c \cdot e^{\lambda x} - H \cdot \lambda^2 \cdot c \cdot e^{\lambda x} = 0$$

$$(EI \cdot \lambda^4 - H \cdot \lambda^2) \cdot c \cdot e^{\lambda x} = 0$$

Da  $c \cdot e^{\lambda x}$  ungleich null ist, folgt nach Division der Gleichung durch  $EI$  die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^4 - \mu^2 \lambda^2 = 0 \quad \text{mit} \quad \mu^2 = \frac{H}{EI}$$

Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung sind:

$$\lambda_{1,2} = 0$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\mu^2}$$

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

**1.  $H > 0$  (Zug)**

$$\lambda_{1,2} = 0, \lambda_{3,4} = \pm \mu \quad \text{mit} \quad \mu = \sqrt{\frac{H}{EI}}$$

$$w_h = c_1 + c_2 x + \tilde{c}_3 e^{\mu x} + \tilde{c}_4 e^{-\mu x}$$

Die Terme  $c_1$  und  $c_2 x$  folgen aus der doppelten Nullstelle  $\lambda_{1,2} = 0$ .



Mit den Beziehungen:

$$e^{\mu x} = \cosh \mu x + \sinh \mu x$$

$$e^{-\mu x} = \cosh \mu x - \sinh \mu x$$

ergibt sich:

$$w_h = c_1 + c_2 x + \tilde{c}_3 (\cosh \mu x + \sinh \mu x) + \tilde{c}_4 (\cosh \mu x - \sinh \mu x)$$

$$w_h = c_1 + c_2 x + (\tilde{c}_3 + \tilde{c}_4) \cosh \mu x + (\tilde{c}_3 - \tilde{c}_4) \sinh \mu x$$

Die Integrationskonstanten werden umbenannt:

$$c_3 = \tilde{c}_3 + \tilde{c}_4$$

$$c_4 = \tilde{c}_3 - \tilde{c}_4$$

Damit folgt:

$$w_h = c_1 + c_2 x + c_3 \cosh \mu x + c_4 \sinh \mu x$$

## 2. $H < 0$ (Druck)

$$\lambda_{1,2} = 0, \lambda_{3,4} = \pm i\mu \text{ mit } \mu = \sqrt{\frac{|H|}{EI}}$$

$$w_h = c_1 + c_2 x + \tilde{c}_3 e^{i\mu x} + \tilde{c}_4 e^{-i\mu x}$$

Nach Euler/Moivre gilt:

$$e^{i\mu x} = \cos \mu x + i \sin \mu x$$

$$e^{-i\mu x} = \cos \mu x - i \sin \mu x$$

Durch Einsetzen und Umbenennen der Integrationskonstanten folgt:

$$w_h = c_1 + c_2 x + c_3 \cos \mu x + c_4 \sin \mu x \quad (1.11)$$

### • Partikularlösung

Für eine konstante Streckenlast folgt die Partikularlösung aus dem Ansatz:

$$w_p = c_5 x^2$$

Einsetzen in die Differenzialgleichung (1.6) ergibt:

$$-H \cdot c_5 \cdot 2 = q \Rightarrow c_5 = -\frac{q}{2H}$$

Damit lautet die Partikularlösung:

$$w_p = -\frac{q}{2H} x^2$$

Für weitere Belastungen kann die Partikularlösung durch Variation der Konstanten ermittelt werden.

Für den Fall einer Druckkraft ( $H < 0$ ) ergibt sich die Gesamtlösung  $w = w_h + w_p$  zu:

$$w = c_1 + c_2 x + c_3 \cos \mu x + c_4 \sin \mu x - \frac{q}{2H} x^2 \quad (1.12)$$

Für eine Zugkraft gilt entsprechend:

$$w = c_1 + c_2 x + c_3 \cosh \mu x + c_4 \sinh \mu x - \frac{q}{2H} x^2 \quad (1.13)$$

Die Integrationskonstanten werden durch Anpassen der Gesamtlösung an die Randbedingungen der jeweiligen Problemstellung ermittelt, wie in den nachfolgenden Beispielen gezeigt wird.

### Beispiel 1.1

Für den in Bild 1.6 dargestellten Balken sind die Zustandsgrößen nach Theorie II. Ordnung durch Lösung der Differenzialgleichung zu ermitteln.

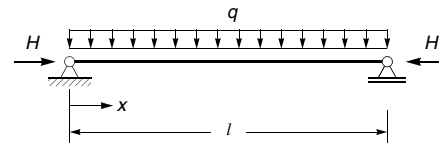


Bild 1.6 System mit Randbedingungen

Aufgrund der beidseitig gelenkigen Lagerung des Balkens sind am Anfangs- und Endpunkt des Balkens die Durchbiegung und das Moment gleich null. Die vier Integrationskonstanten in Gl. (1.12) sind so zu bestimmen, dass diese Randbedingungen erfüllt sind. Die vier Randbedingungen für das vorliegende Problem lauten:

$$1. \quad w(0) = 0$$

$$2. \quad M(0) = 0$$

$$3. \quad w(l) = 0$$

$$4. \quad M(l) = 0$$

Es ergeben sich vier Gleichungen für vier Unbekannte. Die Randbedingungen für das Moment werden mit der Beziehung  $EI w'' = -M$  durch die 2. Ableitung der Biegelinie ausgedrückt. Sie ergibt sich zu:

$$w' = c_2 - c_3 \mu \sin \mu x + c_4 \mu \cos \mu x - \frac{q}{H} x$$

$$w'' = -c_3 \mu^2 \cos \mu x - c_4 \mu^2 \sin \mu x - \frac{q}{H}$$

Damit lauten die vier Randbedingungen:

$$w(0) = c_1 + c_3 = 0$$

$$w''(0) = -c_3\mu^2 - \frac{q}{H} = 0$$

$$w(l) = c_1 + c_2 l + c_3 \cos \mu l + c_4 \sin \mu l - \frac{q}{2H} l^2 = 0$$

$$w''(l) = -c_3\mu^2 \cos \mu l - c_4\mu^2 \sin \mu l - \frac{q}{H} = 0$$

In Matrizendarstellung lautet das Gleichungssystem zur Bestimmung der Integrationskonstanten:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu^2 & 0 \\ 1 & l & \cos \mu l & \sin \mu l \\ 0 & 0 & -\mu^2 \cos \mu l & -\mu^2 \sin \mu l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \frac{q}{2H} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ l^2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Mit der Lösung:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \frac{q}{\mu^2 H} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{l}{2} \mu^2 \\ -1 \\ \frac{\cos \mu l - 1}{\sin \mu l} \end{bmatrix}$$

Mit der Beziehung:

$$\frac{\cos \mu l - 1}{\sin \mu l} = -\tan \mu \frac{l}{2}$$

folgt:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \frac{q}{\mu^2 H} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{l}{2} \mu^2 \\ -1 \\ -\tan \mu \frac{l}{2} \end{bmatrix}$$

Damit ergibt sich für die Biegelinie und ihre Ableitungen:

$$w(x) = \frac{q}{\mu^2 H} \left( 1 + \frac{l}{2} \mu^2 x - \cos \mu x - \tan \mu \frac{l}{2} \sin \mu x - \frac{\mu^2}{2} x^2 \right)$$

$$w'(x) = \frac{q}{\mu^2 H} \left( \frac{l}{2} \mu^2 + \mu \sin \mu x - \mu \tan \mu \frac{l}{2} \cos \mu x - \mu^2 x \right)$$

$$w''(x) = \frac{q}{H} (\cos \mu x + \tan \mu \frac{l}{2} \sin \mu x - 1)$$

$$w'''(x) = \frac{q}{H} (-\mu \sin \mu x + \mu \tan \mu \frac{l}{2} \cos \mu x)$$

$$M(x) = -EI w'' = -EI \frac{q}{H} (\cos \mu x + \tan \mu \frac{l}{2} \sin \mu x - 1)$$

$$M_{\max} = M\left(\frac{l}{2}\right) = -EI \frac{q}{H} \left( \cos \mu \frac{l}{2} + \tan \mu \frac{l}{2} \sin \mu \frac{l}{2} - 1 \right)$$

$$= -EI \frac{q}{H} \left( \frac{\cos^2 \mu \frac{l}{2} + \sin^2 \mu \frac{l}{2}}{\cos \mu \frac{l}{2}} - 1 \right)$$

$$M_{\max} = EI \frac{q}{H} \left( 1 - \frac{1}{\cos \mu \frac{l}{2}} \right) \quad (1.15)$$

Aus Gl. (1.15) ist zu erkennen, dass der Betrag des maximalen Momentes unendlich groß wird, wenn der Nenner des Bruchs in der Klammer gleich null ist. Damit folgt:

$$\cos \mu \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow \mu \frac{l}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \mu = \sqrt{\frac{H}{EI}} = \frac{\pi}{l} \Rightarrow H = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Dies ist die aus der Festigkeitslehre bekannte *Eulersche Knicklast* für den beidseitig gelenkig gelagerten Balken. Im Falle einer Zugkraft erhält man analog:

$$M_{\max} = M\left(\frac{l}{2}\right) = EI \frac{q}{H} \left( 1 - \frac{1}{\cosh \mu \frac{l}{2}} \right)$$

In diesem Fall ist  $M_{\max}$  immer endlich, da gilt:

$$\frac{1}{\cosh \mu \frac{l}{2}} \leq 1$$

Wie aus Gl. (1.15) deutlich wird, ist bei einer konstanten Horizontalkraft das Moment proportional zur Streckenlast  $q$ , es besteht also ein linearer Zusammenhang.

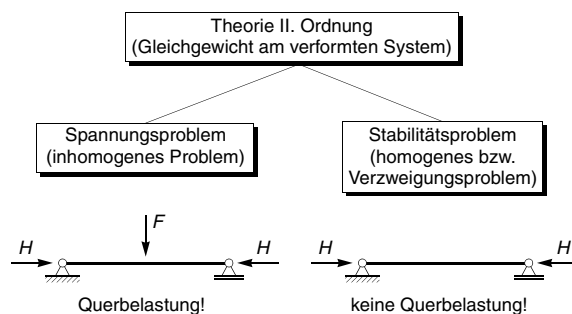
Bei einer *gleichzeitigen* Steigerung von  $q$  und  $H$  ergibt sich jedoch ein nichtlinearer Zusammenhang, da  $H$  durch den Parameter  $\mu$  als Argument in die Kosinusfunktion eingeht.

### 1.3 Spannungs- und Stabilitätsproblem

Ist bei einem Tragwerk eine Einwirkung vorhanden, die schon bei geringer Intensität eine Verformung erzeugt, so wird diese Verformung durch den Einfluss einer vorhandenen Druckkraft vergrößert. Dieser Fall wird als *Spannungsproblem* bezeichnet. Fehlt eine solche Einwirkung, so liegt ein *Stabilitätsproblem* vor. Die beiden Fälle sind in *Bild 1.7* am Beispiel eines Einfeldbalkens dargestellt.

Links im Bild ist der Balken durch eine Einzelkraft quer zur Balkenachse beansprucht. Diese Einzelkraft erzeugt von Anfang an eine Durchbiegung, die infolge der Druckkraft  $H$  vergrößert wird. Es liegt ein Spannungsproblem vor.

Rechts im Bild ist zunächst eine reine Normalkraftbeanspruchung vorhanden, der Balken wird bei idealer Geometrie nicht gebogen. Wird nun die Druckkraft  $H$  gesteigert, so erfolgt ein plötzliches seitliches Ausweichen des Balkens, wenn die Kraft eine bestimmte Größe erreicht. Dieses Phänomen wird als Knicken bezeichnet, es liegt ein Stabilitätsproblem vor.



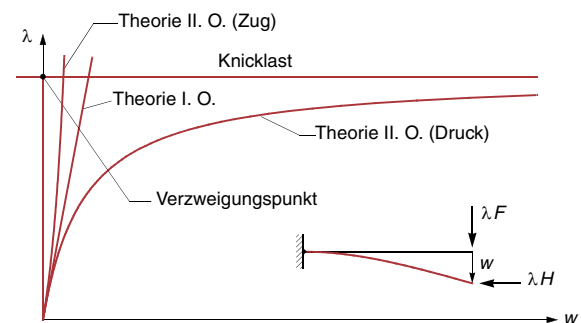
**Bild 1.7** Spannungs- und Stabilitätsproblem

Mathematisch ist das Stabilitätsproblem dadurch charakterisiert, dass die Differenzialgleichung homogen ist.

*Bild 1.8* zeigt den grundsätzlichen Verlauf des Last-Verformungsdiagramms für Druck- und Zugbeanspruchung. Dargestellt ist die Durchbiegung  $w$  der Kragarmspitze in Abhängigkeit des Faktors  $\lambda$ , mit dem sowohl die Horizontalkraft  $H$ , als auch die Vertikalkraft  $F$  gesteigert werden. Ist die Vertikalkraft  $F$  ungleich null, liegt ein

Spannungsproblem vor, und es ergeben sich die beiden gekrümmten Verläufe. Im Falle einer Druckkraft nehmen die Verformungen überproportional zu, im Fall einer Zugkraft ist die Verformungszunahme unterproportional.

Im Fall des Stabilitätsproblems ist keine Vertikalkraft vorhanden, und es entsteht zunächst keine Verformung  $w$ . Bei einer Steigerung der Horizontalkraft bis zur Größe der Knicklast versagt der Kragarm schlagartig, und es ist kein Gleichgewichtszustand möglich. Wie in *Bild 1.8* eingetragen ist, wird dieser Punkt als *Verzweigungspunkt* bezeichnet, da eine Verzweigung von einem stabilen zu einem instabilen Gleichgewichtszustand erfolgt. Die Last-Verformungskurve für das Spannungsproblem bei einer Druckkraft nähert sich asymptotisch der Knicklast, während bei einer Zugkraft keine Grenzlast existiert. Beide Kurven haben im Ursprung die Steigung der Geraden nach Theorie I. Ordnung.



**Bild 1.8** Last- Verformungsdiagramm für Theorie I. und II. Ordnung

Die mechanische Bedeutung der Steigung ist die einer Steifigkeit. Eine Steifigkeit ist die Kraftgröße, die sich infolge einer Verformung der Größe eins ergibt. Da der auf der Ordinate aufgetragene Wert  $\gamma$  die Größe der Kraft darstellt, hat demnach die Ableitung  $d\gamma/dw$  die Bedeutung einer Steifigkeit. Daraus folgt, dass eine Druckkraft das System weicher macht, eine Zugkraft hingegen versteifend wirkt.

Wie wir bereits in *Beispiel 1.1* gesehen haben, besteht bei einer *gleichzeitigen* Steigerung von Querlast und Horizontalkraft ein nichtlinearer Zusammenhang, sodass das Superpositionsprinzip nicht mehr gilt. Dies hat zur

Folge, dass eine Berechnung nach Theorie II. Ordnung für jede Lastkombination durchzuführen ist!

In *Beispiel 1.1* hatten wir aus der Lösung für  $M_{\max}$  in Gl. (1.15) gesehen, dass das Moment unendlich groß wird, wenn der Wert  $\mu$  eine bestimmte Größe hat. Wir betrachten nun dieses Beispiel nochmals unter dem Aspekt des Stabilitätsproblems.

In diesem Fall ist keine Streckenlast vorhanden, die Differenzialgleichung ist also homogen. Das Gleichungssystem (1.14) zur Bestimmung der Integrationskonstanten lautet daher:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu^2 & 0 \\ 1 & l & \cos \mu l & \sin \mu l \\ 0 & 0 & -\mu^2 \cos \mu l & -\mu^2 \sin \mu l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da wir voraussetzen, dass die Druckkraft ungleich null ist, kann die zweite und vierte Zeile des homogenen Gleichungssystems durch  $-\mu^2$  dividiert werden.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & l & \cos \mu l & \sin \mu l \\ 0 & 0 & \cos \mu l & \sin \mu l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

**$A\mathbf{c} = 0$**

Dies ist ein lineares, homogenes Gleichungssystem. Nichttriviale Lösungen existieren nur dann, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix gleich null ist.

Aus der Bedingung  $\det \mathbf{A} = 0$  erhält man eine Gleichung für den Parameter  $\mu$ . Die Lösungen dieser Gleichung sind die Eigenwerte des Problems.

Die Determinante ergibt sich z.B. durch Entwicklung nach der zweiten Zeile:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & l & \cos \mu l & \sin \mu l \\ 0 & 0 & \cos \mu l & \sin \mu l \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & \sin \mu l \\ 0 & 0 & \sin \mu l \end{vmatrix} \\ &= -1 \cdot \begin{vmatrix} l & \sin \mu l \\ 0 & \sin \mu l \end{vmatrix} = -l \sin \mu l \end{aligned}$$

$$\sin \mu l = 0 \rightarrow \mu l = n\pi \quad n = 1, 2, \dots$$

Es gibt also unendlich viele Eigenwerte, von denen allerdings nur der kleinste Eigenwert ( $n = 1$ ) von Interesse ist, da daraus die kleinste kritische Knicklast folgt. Für  $n = 1$  ergibt sich:

$$\mu l = \pi$$

$$\sqrt{\frac{H}{EI}} l = \pi \rightarrow H_{\text{krit}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Wir setzen nun die Lösung  $\mu = n\frac{\pi}{l}$  in das Gleichungssystem (1.16) ein und erhalten:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & l & \cos n\frac{\pi}{l}l & \sin n\frac{\pi}{l}l \\ 0 & 0 & \cos n\frac{\pi}{l}l & \sin n\frac{\pi}{l}l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & l & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da die vierte Spalte nur aus Nullen besteht, ist die Lösung unabhängig von der Unbekannten  $c_4$ . Das Gleichungssystem ist für beliebige Werte  $c_4$  erfüllt. Aus der zweiten bzw. vierten Zeile folgt sofort  $c_3 = 0$ . Damit verbleibt das folgende Gleichungssystem für die Unbekannten  $c_1$  und  $c_2$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da die Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich null ist, ist auch  $c_1 = c_2 = 0$ . Damit folgt für die homogene Lösung Gl. (1.11):

$$w = c_4 \sin \frac{n\pi}{l} x$$

Diese Funktionen sind die Eigenformen oder mechanisch formuliert, die Knickfiguren des Systems. Die ersten vier dieser unendlich vielen Eigenformen sind in *Bild 1.9* dargestellt. Da die Konstante  $c_4$  beliebig ist, ist die Knickfigur nur qualitativ bestimmt.

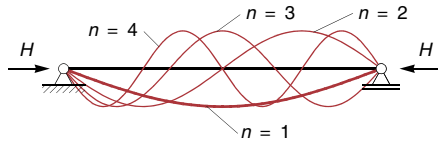


Bild 1.9 Eigenformen des beidseitig gelenkigen Balkens

Zur weiteren Verdeutlichung der Zusammenhänge betrachten wir nun den starren Stab in *Bild 1.10*, der im Punkt *a* drehelastisch gelagert ist. Dieser Stab hat einen Freiheitsgrad, nämlich den Drehwinkel  $\varphi$ . Die am rechten Rand angreifenden Kräfte enthalten den Faktor  $\lambda$ , mit dem beide Kräfte gleichzeitig gesteigert werden. Im verformten Zustand ergeben sich die angegebenen Abmessungen, wenn wir von beliebig großen Verformungen ausgehen.

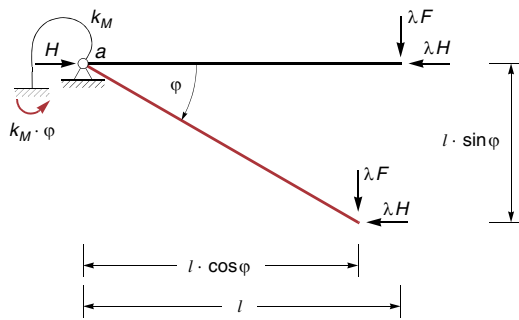


Bild 1.10 Drehelastisch gelagerter starrer Stab

Die Gleichgewichtsbedingung  $\sum M_{(a)} = 0$  ergibt unter Berücksichtigung der Verformungen:

$$k_M \cdot \varphi - \lambda F \cdot l \cdot \cos \varphi - \lambda H \cdot l \cdot \sin \varphi = 0 \quad (1.17)$$

$$\lambda = \frac{k_M \cdot \varphi}{F \cdot l \cdot \cos \varphi + H \cdot l \cdot \sin \varphi}$$

Durch Einführen der Parameter:

$$\alpha = \frac{F}{H} \text{ und } \beta = \frac{k_M}{H \cdot l} \text{ folgt:}$$

$$\begin{aligned} \lambda(\varphi) &= \frac{\beta \cdot H \cdot l \cdot \varphi}{\alpha \cdot H \cdot l \cdot \cos \varphi + H \cdot l \cdot \sin \varphi} \\ &= \frac{\beta \cdot \varphi}{\alpha \cdot \cos \varphi + \sin \varphi} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Werden kleine Verformungen vorausgesetzt, gilt:

$$\sin \varphi \approx \varphi \text{ und } \cos \varphi \approx 1$$

und Gl. (1.17) vereinfacht sich zu:

$$k_M \cdot \varphi - \lambda F \cdot l - \lambda H \cdot l \cdot \varphi = 0 \quad (1.19)$$

Entsprechend folgt aus Gl. (1.18)

$$\lambda(\varphi) = \frac{\beta \cdot \varphi}{\alpha + \varphi} \text{ bzw. } \varphi(\lambda) = \frac{\lambda \alpha}{\beta - \lambda} \quad (1.20)$$

Die Gleichungen (1.17) und (1.18) stellen Beziehungen nach Theorie III. Ordnung dar, da keine geometrische Linearisierung durchgeführt wurde. Die linearisierten Gleichungen (1.19) und (1.20) entsprechen der Theorie II. Ordnung.

Betrachten wir nun das Stabilitätsproblem. In diesem Fall ist die Kraft  $F$  bzw.  $\alpha$  gleich null und aus Gl. (1.18) folgt:

$$\lambda = \frac{\beta \cdot \varphi}{\sin \varphi} \quad (1.21)$$

Aus Gl. (1.20) folgt für  $\alpha = 0$ :

$$\lambda(\varphi) = \frac{\beta \cdot \varphi}{\sin \varphi} = \beta \quad (1.22)$$

Die Last-Verformungskurven für die vorherigen Beziehungen sind in *Bild 1.11* dargestellt. Die Drehfedersteifigkeit ist durch den Parameter  $\beta = 20$  festgelegt. Für das Spannungsproblem sind zwei Kurven mit  $\alpha = 0,1$  und  $\alpha = 0,2$  eingetragen.

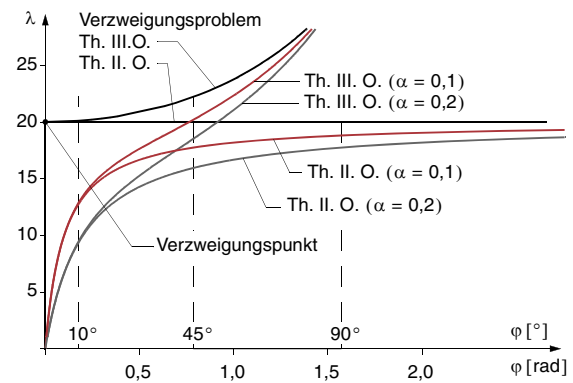


Bild 1.11 Theorie II. und III. Ordnung

Die gewählten Parameter entsprechen z. B. folgenden konkreten Zahlenwerten:

$$\begin{aligned} k_M &= 10000 \text{ kNm} & H &= 100 \text{ kN} \\ l &= 5 \text{ m} & F &= 10 \text{ kN} (\alpha = 0,1) \\ & & F &= 20 \text{ kN} (\alpha = 0,2) \end{aligned}$$

Wie in *Bild 1.11* erkennbar ist, sind die Unterschiede zwischen Theorie II. und III. Ordnung für kleine Werte von  $\varphi$  gering. Für einen Winkel von  $10^\circ$  folgt nach Theorie III. Ordnung aus Gl. (1.18) mit  $\varphi = \frac{\pi}{180} 10 = 0,1745$ :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\beta \cdot \varphi}{\alpha \cdot \cos \varphi + \sin \varphi} \\ &= \frac{20 \cdot 0,1745}{0,1 \cdot \cos 0,1745 + \sin 0,1745} = 12,827 \end{aligned}$$

Nach Theorie II. Ordnung aus Gl. (1.20):

$$\lambda = \frac{\beta \cdot \varphi}{\alpha + \varphi} = \frac{20 \cdot 0,1745}{0,1 + 0,1745} = 12,715$$

Dies entspricht einer Differenz von

$$\frac{12,827 - 12,715}{12,827} 100 = 0,876 \%$$

Obwohl bei einem Winkel von  $10^\circ$  die Auslenkung am rechten Stabende 0,87 m beträgt, beträgt der Unterschied zwischen Theorie II. und III. Ordnung weniger als ein Prozent.

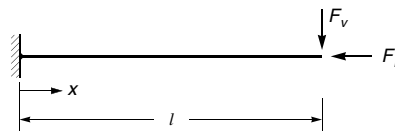
Erst bei größeren Verformungen sind signifikante Unterschiede sichtbar. Während sich die Kurven nach Theorie II. Ordnung asymptotisch der horizontalen Grenzlinie der Knicklast nähern, kann die Belastung bei Berücksichtigung der Theorie III. Ordnung noch erheblich gesteigert werden.

Ein grundsätzlicher Unterschied zwischen beiden Theorien ist auch beim Stabilitätsproblem erkennbar. Zwar ist in beiden Fällen derselbe Verzweigungspunkt vorhanden, jedoch existiert nach Theorie III. Ordnung bei Überschreiten dieses Punktes eine stabile Gleichgewichtslage mit einem definierten Verformungszustand.

Weiterhin wird in *Bild 1.11* der Einfluss des Parameters  $\alpha$  sichtbar, der das Verhältnis von Querlast zu Horizontalkraft angibt. Je größer die Querlast ist, desto größer ist die anfängliche Verformung.

### Beispiel 1.2

Für den in *Bild 1.12* dargestellten Kragträger sind die Zustandsgrößen nach Theorie II. Ordnung durch Lösung der Differenzialgleichung zu ermitteln.



**Bild 1.12** Kragträger mit Belastung

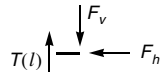
Da die angreifende Vertikalkraft am Ende des Balkens wirkt, ergibt sich die Lösung nur aus dem homogenen Anteil. Grundsätzlich gehen Einzelkräfte nur durch die Rand- oder Übergangsbedingungen in die Lösung ein. Die homogene Lösung Gl. (1.11) sowie die Ableitungen sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} w &= c_1 + c_2 x + c_3 \cos \mu x + c_4 \sin \mu x \\ w' &= c_2 - c_3 \mu \sin \mu x + c_4 \mu \cos \mu x \\ w'' &= -c_3 \mu^2 \cos \mu x - c_4 \mu^2 \sin \mu x \\ w''' &= c_3 \mu^3 \sin \mu x - c_4 \mu^3 \cos \mu x \end{aligned} \quad (1.23)$$

Die Bestimmung der Integrationskonstanten erfolgt durch Anpassung der Lösung an die Randbedingungen. Die Randbedingungen zur Bestimmung der Integrationskonstanten lauten für das vorliegende Problem:

1.  $w(0) = 0$   
 $c_1 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cos \mu \cdot 0 + c_4 \sin \mu \cdot 0 = c_1 + c_3 = 0$
2.  $w'(0) = 0$   
 $c_2 - c_3 \mu \sin \mu \cdot 0 + c_4 \mu \cos \mu \cdot 0 = c_2 + c_4 \mu = 0$
3.  $M(l) = 0$ , bzw.  $w''(l) = 0$   
 $-c_3 \mu^2 \cos \mu l - c_4 \mu^2 \sin \mu l = 0$   
 Da  $\mu^2$  ungleich null ist, kann die Gleichung durch  $-\mu^2$  dividiert werden.  
 $c_3 \cos \mu l + c_4 \sin \mu l = 0$
4.  $T(l) = F_v$

Diese Randbedingung ergibt sich nach *Bild 1.13* aus der Gleichgewichtsbedingung  $\sum V = 0$  am Kragarmende.

**Bild 1.13** Freigeschnittenes Kragarmende

Mit Gl. (1.7) kann die Transversalkraft durch Ableitungen der Biegelinie ausgedrückt werden:

$$T(l) = -EIw'''(l) + Hw'(l)$$

Mit  $H = -F_h$  und  $T(l) = F_v$  ergibt sich:

$$-EIw'''(l) - F_h w'(l) = F_v$$

$$w'''(l) + \frac{F_h}{EI} w'(l) = -\frac{F_v}{EI}$$

$$w'''(l) + \mu^2 w'(l) = -\frac{F_v}{EI}$$

Durch Einsetzen des Ansatzes für  $w'''$  und  $w'$  folgt:

$$c_3 \mu^3 \sin \mu l - c_4 \mu^3 \cos \mu l + \mu^2 (c_2 - c_3 \mu \sin \mu l + c_4 \mu \cos \mu l) = -\frac{F_v}{EI}$$

und es verbleibt:

$$c_2 \mu^2 = -\frac{F_v}{EI}$$

Aus dieser Randbedingung ergibt sich durch die Transversalkraft ein Term ungleich null auf der rechten Seite der Gleichung, wodurch das Gleichungssystem nicht homogen ist.

Aus den vier Gleichungen folgt das Gleichungssystem zur Ermittlung der Integrationskonstanten:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & \cos \mu l & \sin \mu l \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = -\frac{F_v}{\mu^2 EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mit der Lösung:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \frac{F_v}{\mu^3 EI} \begin{bmatrix} \tan \mu l \\ -\mu \\ -\tan \mu l \\ 1 \end{bmatrix}$$

Damit sind die Integrationskonstanten bekannt und die Funktion der Biegelinie und ihre Ableitungen ergeben sich zu:

$$w = \frac{F_v}{\mu^3 EI} (\tan \mu l - \mu x - \tan \mu l \cos \mu x + \sin \mu x)$$

$$w' = \frac{F_v}{\mu^2 EI} (-1 + \tan \mu l \sin \mu x + \cos \mu x)$$

$$w'' = \frac{F_v}{\mu EI} (\tan \mu l \cos \mu x - \sin \mu x) = -\frac{M}{EI}$$

$$w''' = \frac{F_v}{EI} (-\tan \mu l \sin \mu x - \cos \mu x) = -\frac{V}{EI}$$

Die Durchbiegung ist am freien Rand des Kragträgers maximal, sie folgt aus:

$$w_{\max} = w(l) = \frac{F_v}{\mu^3 EI} (\tan \mu l - \mu l - \tan \mu l \cos \mu l + \sin \mu l) = \frac{F_v}{\mu^3 EI} (\tan \mu l - \mu l)$$

Das Moment an der Einspannung ergibt sich aus:

$$M_{\max} = M(0) = -EIw''(0) = -EI \frac{F_v}{\mu EI} (\tan \mu l \cos \mu 0 - \sin \mu 0) = -\frac{F_v}{\mu} (\tan \mu l)$$

#### • Ermittlung der Knicklast

Die Knicklast folgt wiederum aus der Bedingung, dass die Determinante der Koeffizientenmatrix zur Bestimmung der Integrationskonstanten gleich null sein muss.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & \cos \mu l & \sin \mu l \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \cos \mu l & \sin \mu l \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \cos \mu l & \sin \mu l \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & \mu \\ \cos \mu l & \sin \mu l \end{vmatrix} = \mu \cos \mu l$$

$$\cos \mu l = 0 \rightarrow \mu l = n \frac{\pi}{2} \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Die kritische Knicklast folgt aus:

$$\mu l = \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{\frac{|H|}{EI}} l = \frac{\pi}{2} \rightarrow H_{\text{krit}} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

Zur Ermittlung der Knickbiegeline setzen wir den ermittelten Wert in das homogene Gleichungssystem ein, es folgt:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 & \cos \frac{\pi}{2} & \sin \frac{\pi}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aus der dritten bzw. der vierten Zeile folgt unmittelbar  $c_2 = 0$  bzw.  $c_4 = 0$ . Damit verbleibt nur die erste Zeile, die für beliebige Werte von  $c = c_1 = -c_3$  erfüllt wird. Aus der homogenen Lösung:

$$w = c_1 + c_2 x + c_3 \cos \mu x + c_4 \sin \mu x$$

folgt damit die in *Bild 1.14* dargestellte Knickbiegeline mit:

$$w = c - c \cos \alpha x = c(1 - \cos \alpha x)$$



**Bild 1.14** Knickfigur des Kragträgers

• Fall Zug

$$w = c_1 + c_2 x + c_3 \cosh \mu x + c_4 \sinh \mu x$$

$$w' = c_2 + c_3 \mu \sinh \mu x + c_4 \mu \cosh \mu x$$

$$w'' = c_3 \mu^2 \cosh \mu x + c_4 \mu^2 \sinh \mu x$$

$$w''' = c_3 \mu^3 \sinh \mu x + c_4 \mu^3 \cosh \mu x$$

$$1. \quad w(0) = 0$$

$$w(0) = c_1 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cosh \mu \cdot 0 + c_4 \sinh \mu \cdot 0 = c_1 + c_3 = 0$$

$$2. \quad w'(0) = 0$$

$$w'(0) = c_2 + c_3 \mu \sinh \mu \cdot 0 + c_4 \mu \cosh \mu \cdot 0 = c_2 + c_4 \mu = 0$$

$$3. \quad M(l) = 0, \text{ bzw. } w''(l) = 0$$

$$w''(l) = c_3 \mu^2 \cosh \mu l + c_4 \mu^2 \sinh \mu l = 0$$

$$c_3 \cosh \mu l + c_4 \sinh \mu l = 0$$

$$4. \quad T(l) = F_v$$

Aus Gl. (1.7) folgt:

$$T(l) = -EI w'''(l) + H w'(l)$$

$$-EI w'''(l) + F_h w'(l) = F_v$$

$$w'''(l) - \frac{F_h}{EI} w'(l) = -\frac{F_v}{EI}$$

$$w'''(l) - \mu^2 w'(l) = -\frac{F_v}{EI}$$

$$c_3 \mu^3 \sinh \mu l + c_4 \mu^3 \cosh \mu l$$

$$-\mu^2 (c_2 + c_3 \mu \sinh \mu l + c_4 \mu \cosh \mu l) = -\frac{F_v}{EI}$$

$$\mu^2 c_2 = \frac{F_v}{EI} \Rightarrow c_2 = \frac{F_v}{\mu^2 EI}$$

Das Gleichungssystem zur Ermittlung der Integrationskonstanten lautet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & \cosh \mu l & \sinh \mu l \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F_v}{\mu^2 EI} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \frac{F_v}{\mu^3 EI} \begin{bmatrix} -\tanh \mu l \\ \mu \\ \tanh \mu l \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$w = \frac{F_v}{\mu^3 EI} (-\tanh \mu l + \mu x + \tanh \mu l \cosh \mu x - \sinh \mu x)$$



Die maximale Durchbiegung am Kragarmende folgt mit:

$$\begin{aligned} w_{\max} &= w(l) \\ &= \frac{F_v}{\mu^3 EI} (-\tanh \mu l + \mu l + \tanh \mu l \cosh \mu l - \sinh \mu l) \\ &= \frac{F_v}{\mu^3 EI} (\mu l - \tanh \mu l) \end{aligned}$$

### Beispiel 1.3

Für den in Bild 1.15 dargestellten beidseitig eingespannten Balken sind die Zustandsgrößen infolge einer eingepprägten Auflagerdrehung nach Theorie II. Ordnung durch Lösung der Differenzialgleichung zu ermitteln.

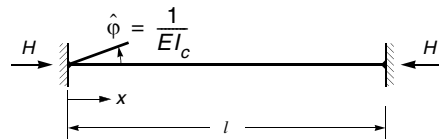


Bild 1.15 Beidseitig eingespannter Balken mit eingepprägter Auflagerdrehung

Da keine Stabbelastung vorhanden ist, ist die Partikularlösung gleich null und die Gesamtlösung entspricht der homogenen Lösung in Gl. (1.23).

Die Integrationskonstanten werden wieder durch Anpassen der Lösung an die Randbedingungen bestimmt. Die Randbedingungen für das vorliegende Problem lauten:

1.  $w(0) = 0$

$$w(0) = c_1 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cos \mu \cdot 0 + c_4 \sin \mu \cdot 0 = c_1 + c_3 = 0$$

2.  $w'(0) = -\hat{\phi}$

$$w'(0) = c_2 - c_3 \mu \sin \mu \cdot 0 + c_4 \mu \cos \mu \cdot 0 = c_2 + c_4 \mu = -\hat{\phi}$$

3.  $w(l) = 0$

$$w(l) = c_1 + c_2 l + c_3 \cos \mu l + c_4 \sin \mu l = 0$$

4.  $w'(l) = 0$

$$w'(l) = c_2 - c_3 \mu \sin \mu l + c_4 \mu \cos \mu l = 0$$

Es ergibt sich das folgende Gleichungssystem zur Ermittlung der Integrationskonstanten:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mu \\ 1 & l & \cos \mu l & \sin \mu l \\ 0 & 1 & -\mu \sin \mu l & \mu \cos \mu l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mit der Lösung:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \frac{\hat{\phi}}{2\mu(\cos \mu l - 1) + \mu^2 l \sin \mu l} \begin{bmatrix} -(\sin \mu l - \mu l \cos \mu l) \\ -\mu(\cos \mu l - 1) \\ \sin \mu l - \mu l \cos \mu l \\ 1 - \cos \mu l - \mu l \sin \mu l \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} w''(0) &= -c_3 \mu^2 = -\frac{\sin \mu l - \mu l \cos \mu l}{(2(\cos \mu l - 1) + \mu l \sin \mu l)} \hat{\phi} \mu^2 \\ &= \frac{\sin \mu l - \mu l \cos \mu l}{2(1 - \cos \mu l) - \mu l \sin \mu l} \hat{\phi} \mu \end{aligned}$$

$$M(0) = -EI w''(0) = -EI \frac{\sin \mu l - \mu l \cos \mu l}{2(1 - \cos \mu l) - \mu l \sin \mu l} \hat{\phi} \mu$$

Mit  $\mu l = \varepsilon$  und  $\hat{\phi} = \frac{1}{EI_c}$  folgt:

$$\begin{aligned} M(0) &= -EI \frac{\sin \varepsilon - \varepsilon \cos \varepsilon}{2(1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon} \frac{1}{EI_c} \frac{\varepsilon}{l} \\ &= -\frac{\sin \varepsilon - \varepsilon \cos \varepsilon}{2(1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon} \frac{l}{EI_c} \frac{\varepsilon}{l} \\ &= -\frac{\varepsilon \sin \varepsilon - \varepsilon^2 \cos \varepsilon}{2(1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon} \frac{1}{l} = -\frac{\alpha}{l} \end{aligned}$$

$$\text{Mit } \alpha = \frac{\varepsilon \sin \varepsilon - \varepsilon^2 \cos \varepsilon}{2(1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon}$$

$$\begin{aligned} w''(l) &= -c_3 \mu^2 \cos \mu l - c_4 \mu^2 \sin \mu l \\ &= -\frac{\hat{\phi}(\sin \mu l - \mu l \cos \mu l)}{2\mu(\cos \mu l - 1) + \mu^2 l \sin \mu l} \mu^2 \cos \mu l \\ &\quad - \frac{\hat{\phi}(1 - \cos \mu l - \mu l \sin \mu l)}{2\mu(\cos \mu l - 1) + \mu^2 l \sin \mu l} \mu^2 \sin \mu l \\ &= \mu \hat{\phi} \frac{\mu l \cos^2 \mu l + \mu l \sin^2 \mu l - \sin \mu l}{2(\cos \mu l - 1) + \mu l \sin \mu l} \\ &= \mu \hat{\phi} \frac{\mu l - \sin \mu l}{2(\cos \mu l - 1) + \mu l \sin \mu l} \end{aligned}$$

$$M(l) = -EI w''(l) = -EI \frac{\mu l - \sin \mu l}{2(\cos \mu l - 1) + \mu l \sin \mu l} \hat{\phi} \mu$$

# Sachwortverzeichnis

## A

Ablösen der Unbekannten 157  
Anfangswertproblem 146  
Ansatzfunktion 90  
Äquivalentes Kräftepaar 25  
Auflagerknoten 73

## B

Bettung 69  
Bettungszahl 54  
Bettungsziffer 54, 70  
Biegeformkoeffizienten 31  
Bisektionsverfahren 35

## C

Charakteristische Gleichung 11

## D

Deformationsmethode 59  
Dehnstarrheit 59  
Determinante 15  
Differenzialgleichungssystem 1. Ordnung 166  
Diskretisierung 90  
Drehwinkelverfahren 30

## E

Eigenform 15, 23  
Eigenwert 15  
Elastisch gebetteter Balken 133  
Elastische Bettung 53  
Elastische Lagerung 67  
Elastischer Halbraum 54  
Elementmatrizen 68  
Elimination des Mittelknotens 128  
Ersatzimperfektion 23  
Ersatzkräftepaar 32, 33  
Eulersche Knicklast 13  
Exponentialfunktion 167

## F

Federkraft 68  
Federmoment 68  
Federsteifigkeit 67, 68  
Feldmatrix 144  
Formänderungsmethode 59  
Formfunktion 99

## G

Gauß-Integration 139  
Gauß-Quadratur 135, 137, 138, 139  
Gelenke 70

Geometrische Imperfektion 22  
Geometrische Reihe 28  
Gesamtsteifigkeitsmatrix 66, 68  
Gleichgewichtsbedingungen 65, 66  
Gleichgewichtsbeziehungen 145  
Große Verformungen 16  
Grundelement 61

## H

Hermite-Polynom 99  
Homogene Lösung 11

## I

Instabiler Gleichgewichtszustand 14  
Integrationsintervall 136  
Integrationskonstante 12, 15  
Intervallhalbierung 35  
Inzidenzmatrix 65  
Iterative Annäherung der Biegelinie 26

## K

Kinematische Beziehungen 144  
Kleine Verformungen 16  
Knicken 14  
Knickfigur 15, 23  
Knicklast 14, 15, 130  
Knotenlasten 66  
Knotenlastvektor 65  
Kondensation 129  
Krümmung 9

## L

Lagrange-Polynom 124  
Lastvektor 66, 67  
Last-Verformungsdiagramm 14  
Last-Verformungskurve 14  
Leitmatrix 151  
Linearisierung 9

## M

Methode der Finiten Elemente 88  
Mitführen der Unbekannten 157  
Modifikation der Elementsteifigkeitsmatrix 71

## N

Nachgiebigkeiten 144  
Näherungsansatz 70  
Numerische Integration 135, 139  
Numerische Quadratur 135

## P

Partikularlösung 12  
Partitionierung 128  
Prinzip der virtuellen Kräfte 138  
Punktmatrix 150

## R

Randbedingung 66  
Randbedingungen 146  
Randmatrix 146  
Randwertproblem 146  
Reduktion des Gleichungssystems 66  
Reduktionsverfahren 143  
Reihenentwicklung 167

## S

Schiefstellung 23, 25  
Schnittgrößenermittlung 68  
Setzungsmulde 54  
Spannungsproblem 14  
Stabendschnittgrößen 60, 61, 62, 64, 65, 66  
Stabendverformungen 61, 62, 64  
Stabiler Gleichgewichtszustand 14  
Stabilitätsnachweis 23  
Stabilitätsproblem 14  
Stablasten 66  
Steifezifferverfahren 54  
Steifigkeit 14, 62  
Steifigkeiten 145  
Steifigkeitsmatrix 60, 62, 64, 68, 70, 71  
Steifigkeitsmatrix nach Theorie II. Ordnung 69, 70  
Stützstelle 136  
Superpositionsprinzip 14  
Systemmatrix 68

## T

Theorie II. Ordnung 9, 69, 128, 163  
Theorie III. Ordnung 9  
Transformation 63, 64  
Transformationsmatrix 64  
Transversalkraft 11, 33

## U

Übertragungsmatrix 143  
Übertragungsverfahren 143, 148

## V

Veränderliche Biegesteifigkeit 139  
Verformungsbedingungen 65

Verzweigungslast 34  
Verzweigungspunkt 14  
Virtuelle Funktion 90  
Vorkrümmung 23, 24  
Vorverformungen 23

**W**  
Weggrößenverfahren 59  
Wichtungsfaktor 136

**Z**  
Zeilen- und  
    Spaltenmodifizierung 67  
Zustandsgrößen 144  
Zwischenbedingung 66, 157