

# Technische Mechanik

Statik - Kinematik - Kinetik - Schwingungen - Festigkeitslehre

Bearbeitet von  
Martin Mayr

8. Auflage 2015. Buch. XIV, 440 S. Gebunden

ISBN 978 3 446 44570 3

Format (B x L): 20,7 x 27,7 cm

Gewicht: 1091 g

[Weitere Fachgebiete > Technik > Werkstoffkunde, Mechanische Technologie > Statik, Dynamik, Kinetik, Kinematik](#)

schnell und portofrei erhältlich bei

The logo for beck-shop.de features the text 'beck-shop.de' in a bold, red, sans-serif font. Above the 'i' in 'shop' are three red dots of increasing size. Below the main text, the words 'DIE FACHBUCHHANDLUNG' are written in a smaller, red, all-caps, sans-serif font.

**beck-shop.de**  
DIE FACHBUCHHANDLUNG

Die Online-Fachbuchhandlung [beck-shop.de](http://beck-shop.de) ist spezialisiert auf Fachbücher, insbesondere Recht, Steuern und Wirtschaft. Im Sortiment finden Sie alle Medien (Bücher, Zeitschriften, CDs, eBooks, etc.) aller Verlage. Ergänzt wird das Programm durch Services wie Neuerscheinungsdienst oder Zusammenstellungen von Büchern zu Sonderpreisen. Der Shop führt mehr als 8 Millionen Produkte.



Leseprobe

Martin Mayr

Technische Mechanik

Statik - Kinematik - Kinetik - Schwingungen - Festigkeitslehre

ISBN (Buch): 978-3-446-44570-3

ISBN (E-Book): 978-3-446-44618-2

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-44570-3>

sowie im Buchhandel.

# Allgemeines Vorwort

Dieses Lehrbuch beinhaltet den Stoff der Vorlesung „Technische Mechanik“ im Studium des Maschinenbaus an Fachhochschulen. Es besteht aus drei selbständigen Teilen: Statik – Kinematik, Kinetik, Schwingungen – Festigkeitslehre. Jeder Teil kann unabhängig vom anderen benutzt werden. Einheitlicher Aufbau, Querverweise und ein gemeinsamer Anhang fügen die drei Teile jedoch zu einem Ganzen zusammen. Der umfangreiche Anhang ist zum bequemen Nachschlagen in einem Beiheft untergebracht.

Bei der Darstellung ließ ich mich vor allem von didaktischen Gesichtspunkten leiten: optische Hervorhebung der Endformeln und Merksätze, 474 Bilder, 275 Fragen zum Verständnis, 104 vollständig gelöste Beispiele, 116 themenbezogene Übungsaufgaben, 43 „Prüfungsaufgaben“ (nach vier Schwierigkeitsgraden geordnet).

Die Antworten zu den Fragen sowie die Ergebnisse der Übungs- und Prüfungsaufgaben (meist mit Lösungshinweisen und Zwischenwerten) befinden sich am Schluss des jeweiligen Buchteils. Aus Platzgründen konnten nicht die vollständigen Lösungen wiedergegeben werden. Lehrende erhalten sie auf Anfrage.

Weitere themenbezogene Beispiele und Prüfungsaufgaben sind in meinem Übungsbuch „Mechanik-Training“ zusammengestellt (mit ausführlichen Lösungen).

Der Gepflogenheit im Maschinenbau folgend sind die Bilder, falls nichts anderes vereinbart ist, in der Einheit mm bemaßt. In den Zahlenwertgleichungen wird fast ausschließlich mit kohärenten Einheiten gearbeitet, um langwierige Umrechnungen zu vermeiden. Die Berechnungen werden mit dem Taschenrechner ohne ein Zwischenrunden ausgeführt, das Endergebnis wird meist auf eine praktisch sinnvolle Stellenzahl gerundet wiedergegeben. Graphische Lösungen werden mit CAD erstellt und sind deshalb so genau wie analytische Lösungen.

Ich möchte allen, die mich bei der Arbeit zu diesem Buch unterstützt haben, ganz herzlich danken.

Hier sind in erster Linie Prof. Ulrich Thalhofer (Numerische Verfahren) und Prof. Ernst Schatz (Maschinenelemente, Thermische Strömungsmaschinen) zu nennen.

Wertvolle Unterstützung erhielt ich auch von Prof. Helmut Hiekel (Mechanik), Prof. Dr. Wolfgang Käser und Prof. Wilhelm Ruckdeschel (beide Fördertechnik, Maschinenelemente) sowie Prof. Dr. Peter Tautzenberger (Werkstofftechnik).

Korrektur lasen Prof. Dr. Werner Drexler (Mechanik, FH Kempten), Prof. Dr. Johann Fuchs (Mechanik), Prof. Dr. Frank Gießner (Feinwerktechnik, Mechanik), Dipl.-Ing. Hubert Keim (Konstruktion, Pfister GmbH Augsburg) und wiederum Prof. Ernst Schatz.

Übungsaufgaben und fachlichen Rat steuerten bei Prof. Dr. Ingo Bolling (Hydraulik-Pneumatik), Dipl.-Ing. Hubert Breyer (Unfallverhütung, GUV), Prof. Rudolf Bretzel (Mechanik, Luft- und Raumfahrt), Prof. Dr. Dieter Jannasch (Maschinenelemente), Prof. Dr. Winfried Kochem (Konstruktion, FH Köln), Prof. Klaus Martin (Verbrennungsmotoren, Maschinendynamik), StD Georg Mühlbauer (Mathematik, Physik, Max-Reger-Gymnasium Amberg), Prof. Dr. Franz Obinger (Getriebetechnik, CAD), Prof. Hans Rebinger (Verbrennungsmotoren, Maschinendynamik), Prof. Dr. Willi Rößner (Werkzeugmaschinen), Prof. Dr. Joachim Voßiek (Maschinenelemente, Mechanik), Prof. Dr. Rainer Wieler (Verbrennungsmotoren, Fahrzeugtechnik) und Prof. Dr. Rolf Ziegler (Regelungstechnik).

Dipl.-Ing. Daniel Dierig, Dipl.-Ing. Oliver Herrmann, Dipl.-Ing. Jürgen Möller, Dipl.-Ing. Marco Vasciarelli, Dipl.-Ing. Eugen Weber und Dipl.-Ing. Stefan Wolf zeichneten mit großer Sorgfalt die Bilder. Herr Otto Reiser baute die Modelle, Herr Erber machte die Fotos. Die schlimmsten sprachlichen Ausrutscher verhinderten meine Frau Lydia und meine Tochter Andrea.

Mit Informationen unterstützten mich die Firmen KUKA, LIEBHERR, MAN und VON ROLL.

Allen Genannten nochmals herzlichen Dank.

# Vorwort zur 8. Auflage

Der Inhalt der 7. Auflage wurde sorgfältig geprüft. Es konnten keine Unstimmigkeiten festgestellt werden; deshalb wurden für die 8. Auflage auch keine Änderungen vorgenommen. Es wurden lediglich ein paar Druckfehler korrigiert.

Ich danke allen Lesern für die aufmunternden Zuschriften und wertvollen Anregungen, die in kommenden Auflagen Berücksichtigung finden werden. Dem Carl Hanser Verlag danke ich für die stets gute Zusammenarbeit.

Augsburg, Mai 2015

Martin Mayr

# Inhaltsverzeichnis

## TEIL 1: Statik

1	Begriffe, Grundgesetze, Grundaufgaben . . . . .	1
1.1	Die Kraft . . . . .	1
1.2	Masse und Gewichtskraft . . . . .	2
1.3	Das Gleichgewichtsaxiom . . . . .	3
1.4	Das Wechselwirkungsgesetz . . . . .	4
1.5	Die Verschiebbarkeit der Kraft längs ihrer Wirkungslinie . . . . .	5
1.6	Kräfteparallelogramm und Krafteck . . . . .	5
1.7	Die Zerlegung einer Kraft nach zwei nichtparallelen Wirkungslinien . . . . .	5
1.8	Das Hebelgesetz von ARISTOTELES und ARCHIMEDES . . . . .	6
2	Die resultierende Kraft eines zentralen ebenen Kräftesystems . . . . .	8
2.1	Graphische Lösung . . . . .	8
2.2	Analytische Lösung . . . . .	8
3	Kräftepaar und Moment einer Kraft . . . . .	10
3.1	Das Kräftepaar . . . . .	10
3.2	Das Gleichgewicht zweier Kräftepaare . . . . .	11
3.3	Parallelverschiebung einer Kraft . . . . .	11
3.4	Das Moment einer Kraft bezüglich eines Punktes . . . . .	11
3.5	Darstellung und Eigenschaften des Moments . . . . .	12
3.6	Das Moment einer Kraft in Bezug auf den Koordinatenursprung . . . . .	13
4	Die resultierende Kraft eines nicht zentralen ebenen Kräftesystems . . . . .	14
4.1	Parallele Kräfte . . . . .	14
4.2	Beliebige Kräfte . . . . .	15
5	Lagerung von Körpern . . . . .	16
5.1	Freimachen eines Körpers . . . . .	16
5.2	Lagerungsarten ebener Körper . . . . .	16
6	Ebene Kräftesysteme im Gleichgewicht . . . . .	19
6.1	Drei nichtparallele Kräfte . . . . .	19
6.2	Zerlegung einer Kraft nach drei Wirkungslinien . . . . .	22
6.3	Beliebiges ebenes Kräftesystem (einschließlich Einzelmomente) . . . . .	24
7	Lagerreaktionen von typischen ebenen Tragwerken . . . . .	29
7.1	Balken auf zwei Stützen . . . . .	29
7.2	Der eingespannte Balken . . . . .	29
7.3	GERBER-Träger . . . . .	30
7.4	Dreigelenkbogen . . . . .	32
8	Das räumliche Kräftesystem . . . . .	33
8.1	Komponenten einer Kraft im kartesischen Koordinatensystem . . . . .	33
8.2	Das Moment einer Kraft und seine kartesischen Komponenten . . . . .	34
8.3	Resultierende Kraft und resultierendes Moment . . . . .	36
8.4	Lagerung räumlicher Körper . . . . .	37
8.5	Räumliche Kräftesysteme im Gleichgewicht . . . . .	37

9 Der Schwerpunkt . . . . .	46
9.1 Körperschwerpunkt . . . . .	46
9.2 Flächenschwerpunkt . . . . .	49
9.3 Die GULDINschen Regeln . . . . .	51
10 Innere Kräfte und Momente . . . . .	54
10.1 Gerader Balken auf zwei Stützen mit Belastung quer zur Balkenachse . . . . .	54
10.2 Der eingespannte Balken . . . . .	62
10.3 GERBER-Träger . . . . .	63
10.4 Bogenträger . . . . .	64
10.5 Ebene Rahmen ohne Verzweigung . . . . .	65
10.6 Ebene Rahmen mit Verzweigung . . . . .	67
10.7 Wellen . . . . .	69
10.8 Beliebige räumliche Träger . . . . .	71
11 Ebene, statisch bestimmte Fachwerke . . . . .	74
12 Reibung . . . . .	77
12.1 Haft- und Gleitreibung . . . . .	77
12.2 Seil- und Riemenreibung . . . . .	80
12.3 Rollreibung (Rollwiderstand) . . . . .	83
Prüfungsaufgaben . . . . .	85
Antworten zu den Fragen . . . . .	90
Ergebnisse der Übungsaufgaben (meist mit Lösungshinweisen und Zwischenwerten) . . . . .	92
Ergebnisse der Prüfungsaufgaben (meist mit Lösungshinweisen und Zwischenwerten) . . . . .	99

## TEIL 2: Kinematik, Kinetik, Schwingungen

1 Einleitung . . . . .	101
2 Ebene Punktbewegung . . . . .	103
2.1 Bahn, Geschwindigkeit, Beschleunigung . . . . .	103
2.2 Weg-Zeit-Diagramm . . . . .	107
2.3 Grundaufgaben der Kinematik . . . . .	108
2.4 Tangential- und Normalbeschleunigung (bzw. Bahn- und Zentripetalbeschleunigung) . . . . .	110
2.5 Drehbewegung – lineare Bewegung . . . . .	112
2.5.1 Kreisbahn . . . . .	112
2.5.2 Umwandlung einer Drehbewegung in eine lineare Bewegung . . . . .	113
2.6 Beschreibung der Bewegung in Polarkoordinaten . . . . .	116
3 Räumliche Punktbewegung . . . . .	120

Inhaltsverzeichnis	XI
4 Ebene Bewegung des starren Körpers (mit Hinweisen auf die räumliche Bewegung)	123
4.1 Translation (Parallelverschiebung)	123
4.2 Rotation (Drehung)	123
4.3 Beliebige Bewegung	123
4.3.1 Geschwindigkeit	124
4.3.2 Beschleunigung	125
4.4 Drehpol (Momentan-, Geschwindigkeitspol)	127
5 Relativbewegung	131
5.1 Translatorisch bewegtes Bezugssystem	131
5.2 Geschwindigkeit bei translatorisch und rotatorisch bewegtem Bezugssystem	132
5.3 Beschleunigung bei translatorisch und rotatorisch bewegtem Bezugssystem	134
6 Überlagerte Drehbewegungen	139
7 Arbeit, potentielle Energie, Leistung, Wirkungsgrad	141
7.1 Arbeit und potentielle Energie	141
7.2 Leistung	143
7.3 Wirkungsgrad	143
8 Die NEWTONschen Grundgesetze, D’ALEMBERTsche Trägheitskraft	145
9 Impulssatz und Schwerpunktsatz	151
10 Energiesatz	157
11 Trägheitsmomente	161
12 Kinetik der ebenen Bewegung des starren Körpers	164
12.1 Translation mit der Schwerpunktgeschwindigkeit	164
12.2 Rotation um eine Trägheitshauptachse durch den Schwerpunkt	165
12.2.1 Drehimpulssatz (Drallsatz)	165
12.2.2 Kinetische Energie	167
12.3 Analogie zwischen Translation und Rotation	168
12.4 Drehung um eine feste Achse oder um eine Achse durch den Momentanpol	170
12.5 Reduziertes Trägheitsmoment	171
12.6 Allgemeine ebene Bewegung	174
12.7 Gekoppelte Körper	177
13 Kinetik der Relativbewegung	180
14 Stoßvorgänge	183
14.1 Gerader zentraler Stoß	183
14.2 Schiefer zentraler Stoß	189
14.3 Gerader exzentrischer Stoß	190
14.4 Drehstoß	191
15 Schwingungen	192
15.1 Freie ungedämpfte Schwingung	193
15.2 Freie gedämpfte Schwingung	198

15.3	Erzwungene Schwingung . . . . .	205
15.4	Maßnahmen gegen Resonanzerscheinungen . . . . .	209
15.4.1	Verlagerung der Eigenfrequenz . . . . .	209
15.4.2	Dämpfung und Schwingungsstörung . . . . .	210
15.4.3	Schwingungsisolierung. . . . .	210
15.4.3.1	Aktive Isolierung . . . . .	210
15.4.3.2	Passive Isolierung . . . . .	213
15.4.4	Schwingungstilgung mittels Hilfsmasse . . . . .	214
	Prüfungsaufgaben . . . . .	217
	Antworten zu den Fragen . . . . .	221
	Ergebnisse der Übungsaufgaben (meist mit Lösungshinweisen und Zwischenwerten). . . . .	225
	Ergebnisse der Prüfungsaufgaben (meist mit Lösungshinweisen und Zwischenwerten). . . . .	231

### TEIL 3: Festigkeitslehre

1	Aufgaben der Festigkeitslehre . . . . .	233
2	Beanspruchungsarten . . . . .	236
3	Spannungen . . . . .	239
3.1	Normalspannung und Schubspannung. . . . .	239
3.2	Zugstab – einachsiger Spannungszustand . . . . .	240
3.3	Räumlicher (dreiachsiger) Spannungszustand . . . . .	242
3.4	Ebener (zweiachsiger) Spannungszustand (ESZ) . . . . .	244
3.4.1	Spannungen für gedrehte Schnittflächen . . . . .	245
3.4.2	Größe und kleinste Normalspannung sowie größte Schubspannung. . . . .	247
3.4.3	MOHRscher Spannungskreis . . . . .	253
3.5	Spannungsoptik . . . . .	256
4	Verformungen und Verzerrungen . . . . .	262
4.1	Dehnung und Querdehnung . . . . .	262
4.2	Schubverzerrung . . . . .	263
4.3	Allgemeiner Verzerrungszustand. . . . .	263
5	Stoffgesetze . . . . .	264
5.1	Zugversuch, Spannungs-Dehnungs-Diagramm, HOOKEsches Gesetz . . . . .	264
5.2	Schubspannung und Schubwinkel . . . . .	267
5.3	Elastizitätsgesetz für den ebenen Spannungszustand . . . . .	267
5.4	Wärmedehnungen und Wärmespannungen. . . . .	269
5.5	Anwendung der einachsigen Stoffgesetze auf statisch bestimmte und statisch unbestimmte Stabwerke . . . . .	271
5.5.1	Spannungen und Verformungen in einem statisch bestimmten Stabwerk . . . . .	271
5.5.2	Spannungen und Verformungen in einem statisch unbestimmten Stabwerk . . . . .	273
6	Arbeit und elastische Energie. . . . .	276



7	Einfache Beanspruchungsfälle und Festigkeitsbedingungen . . . . .	279
7.1	Zug und Druck . . . . .	279
7.2	Flächenpressung. . . . .	281
7.3	Schub . . . . .	281
8	Dünnwandige Ringe . . . . .	285
8.1	Spannung unter Innen- oder Außendruck . . . . .	285
8.2	Radiusänderung und Dehnung infolge Spannung und Temperaturänderung . . . . .	286
8.3	Rotierender Ring . . . . .	289
9	Dünnwandige Behälter . . . . .	293
9.1	Kreiszyklindrischer Behälter unter Innen- oder Außendruck . . . . .	293
9.2	Kugelbehälter unter Innen- oder Außendruck. . . . .	294
10	Flächenmomente . . . . .	297
10.1	Flächenmoment 1. Grades (statisches Moment der Fläche) . . . . .	297
10.2	Flächenmomente 2. Grades . . . . .	298
10.2.1	Definitionen und Beispiele . . . . .	298
10.2.2	Parallelverschiebung der Bezugsachsen . . . . .	301
10.2.3	Drehung der Bezugsachsen . . . . .	301
10.2.4	Flächenmomente zusammengesetzter Flächen . . . . .	302
11	Biegung. . . . .	308
11.1	Reine Biegung . . . . .	308
11.1.1	Gerade Biegung . . . . .	308
11.1.2	Schiefe Biegung . . . . .	312
11.2	Biegung mit Querkraft und weitere Näherungen (Technische Biegelehre) . . . . .	315
11.3	Durchbiegung und Biegewinkel . . . . .	321
11.4	Formänderungsarbeit. . . . .	327
12	Torsion . . . . .	331
12.1	Kreiszyklindrische Stäbe . . . . .	331
12.2	Formänderungsarbeit. . . . .	336
12.3	Dünnwandige einfach geschlossene Profile . . . . .	337
12.3.1	Schubspannung . . . . .	337
12.3.2	Torsionswinkel . . . . .	338
12.4	Dünnwandige offene Profile. . . . .	342
12.5	Sonstige Querschnittsformen . . . . .	343
13	Schub bei Querkraftbiegung . . . . .	346
14	Knickung . . . . .	353
14.1	Elastische Knickung nach EULER . . . . .	353
14.2	Spannungsabsicherung bei Druckstäben . . . . .	356
15	Dauer-, Zeit- und Betriebsfestigkeit . . . . .	361
16	Festigkeitshypothesen . . . . .	364
16.1	Die drei wichtigsten Hypothesen . . . . .	365
16.2	Anstrengungsverhältnis . . . . .	367
17	Zusammengesetzte Beanspruchung von Stäben . . . . .	369

17.1 Biegung mit Normalkraft . . . . .	369
17.2 Biegung und Torsion . . . . .	372
17.3 Beliebige Lastkombination . . . . .	377
18 Bauteilfestigkeit . . . . .	380
18.1 Plastische Stützwirkung. . . . .	380
18.2 Kerbwirkung . . . . .	381
18.3 Oberflächeneinfluss, Randschichtverfestigung, Umgebungseinfluss . . . . .	384
18.4 Größeneinfluss . . . . .	385
19 <b>Dehnungsmessstreifen-Methode (DMS-Methode)</b> . . . . .	391
20 Satz von CASTIGLIANO . . . . .	398
20.1 Statisch bestimmte Systeme . . . . .	400
20.2 Statisch unbestimmte Systeme . . . . .	401
Prüfungsaufgaben . . . . .	406
Antworten zu den Fragen . . . . .	415
Ergebnisse der Übungsaufgaben (meist mit Lösungshinweisen und Zwischenwerten). . . . .	421
Ergebnisse der Prüfungsaufgaben (meist mit Lösungshinweisen und Zwischenwerten). . . . .	426
Literaturverzeichnis (im Text zitierte und ergänzende Literatur) . . . . .	429
Verwendete Symbole (mit den vorzugsweise verwendeten Einheiten). . . . .	431
Sachwortverzeichnis . . . . .	435

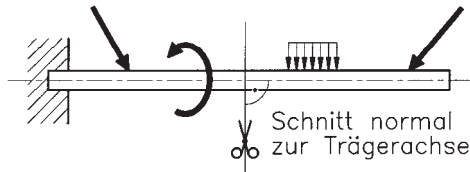


Bild 10.1 Schnitt durch den Träger

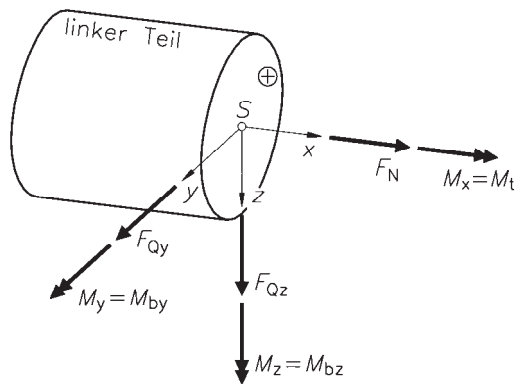


Bild 10.2 Die 6 möglichen Schnittgrößen am positiven Schnittufer

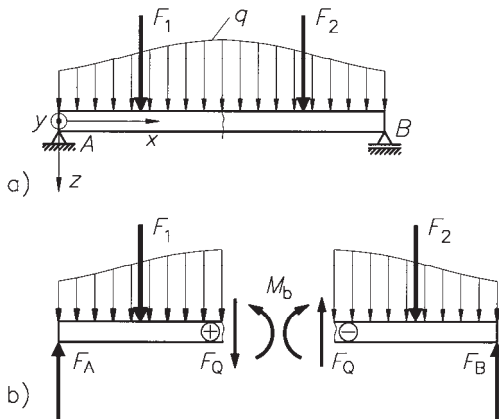


Bild 10.3 Gerader Balken auf zwei Stützen unter Vertikalbelastung  
 a) Anordnung mit Koordinatensystem  
 b) durchgeschnittene Trägereile mit Schnittgrößen

## 10 Innere Kräfte und Momente

Normalkraft, Querkräfte, Biegemomente, Torsionsmoment, gerader Balken, GERBER-Träger, Bogenträger, ebene/räumliche Rahmen, Wellen

Bisher hatten wir das Bauteil immer an den Lagern freigemacht, aus der Umgebung herausgeschnitten. Auf diese Weise war es möglich, die Lagerreaktionen zu bestimmen. Nun gilt unser Interesse den inneren Beanspruchungen; folglich müssen wir den Träger selbst „auseinanderschneiden“, Bild 10.1. Die inneren Kräfte und Momente stehen mit den äußeren Kräften und Momenten (einschließlich Lagerreaktionen) des abgeschnittenen Trägereils im Gleichgewicht (Schnittprinzip).

Bild 10.2 zeigt die Schnittfläche des linken Trägereils mit dem Koordinatensystem und den möglichen Schnittgrößen am rechten (positiven) Schnittufer:

Normalkraft  $F_N$  (als Zugkraft eingezeichnet)

Querkräfte  $F_{Qy}$  und  $F_{Qz}$

Biegemomente  $M_y$  und  $M_z$  ( $M_{by}$ ,  $M_{bz}$ )

Torsionsmoment  $M_x$  ( $M_t$ )

Es müssen nicht immer alle 6 Schnittgrößen auftreten.

Eine Bemerkung zum Schnittufer: Das Schnittufer ist positiv, wenn die Flächennormale in die positive Koordinatenrichtung (hier x-Richtung) weist. Der Pfeil der Flächennormalen zeigt von der Fläche weg.

Am rechten Teil, und zwar am linken (negativen) Schnittufer wirken die gleichen Schnittgrößen wie am linken Teil, nur sind nun die Pfeile entgegengesetzt einzuzeichnen. Das ist damit zu begründen, dass sich die Schnittgrößen paarweise aufheben müssen („actio = reactio“).

Bei statisch bestimmten Lagerungen kennen wir neben der äußeren Belastung auch die Lagerreaktionen. Damit lassen sich die Schnittgrößen aus den Gleichgewichtsbedingungen am linken oder rechten Trägereil bestimmen.

### 10.1 Gerader Balken auf zwei Stützen mit Belastung quer zur Balkenachse

Bild 10.3a zeigt den Balken mit Koordinatensystem. Für diesen Fall gibt es nur 2 Schnittgrößen, Bild 10.3b:

Querkraft  $F_{Qz} = F_Q$

Biegemoment  $M_y = M_b$

Wegen „actio = reactio“ sind sie am negativen Schnittufer des rechten Teils entgegengesetzt eingezeichnet wie am positiven Schnittufer des linken Teils, jedoch beide Male als positive Größen.

Im Folgenden besprechen wir einfache Standardfälle: Balken mit Einzelkraft und Balken mit Streckenlast. Die Ergebnisse hieraus nützen uns beim Lösen komplizierterer Fälle.

### Balken mit Einzelkraft (Bild 10.4a)

Die Gleichgewichtsbedingungen für den an den Lagern freigemachten Balken liefern die Lagerreaktionen  $\vec{F}_A$  und  $\vec{F}_B$ , Bild 10.4b. In diesem einfachen Fall erhält man sie auch mit dem Hebelgesetz.

Jetzt wird der Balken durchgeschnitten. Bild 10.4c zeigt den linken Teil mit der Lagerreaktion  $\vec{F}_A$ , der Querkraft  $F_Q$  und dem Biegemoment  $M_b$ .

Vertikales Kräftegleichgewicht und Momentengleichgewicht um  $I$  liefern:

$$\downarrow \quad -F_A + F_Q = 0 \rightarrow F_Q = F_A = F \cdot \frac{b}{l} = \text{konst.}$$

$$\curvearrowright \quad -F_A \cdot x + M_b = 0 \rightarrow M_b = F_A \cdot x = F \cdot \frac{b}{l} \cdot x \quad (\text{Gerade})$$

Einen zweiten Schnitt zeigt Bild 10.4d. Auch diesen Teil setzen wir ins Gleichgewicht:

$$\downarrow \quad -F_A + F + F_Q = 0 \rightarrow F_Q = F_A - F = F \cdot \left( \frac{b}{l} - 1 \right) = \text{konst.}$$

$$\curvearrowright \quad -F_A \cdot x + F(x - a) + M_b = 0 \rightarrow M_b = (F_A - F) \cdot x + F \cdot a$$

$$M_b = F \cdot \left( \frac{b}{l} - 1 \right) \cdot x + F \cdot a = -F \cdot \frac{a}{l} \cdot x + F \cdot a$$

(Gerade, andere Steigung als im ersten Abschnitt)

Spezielle Punkte der  $M_b$ -Geraden:

$$M_b(x=0) = 0; \quad M_b(x=l) = 0$$

$$M_b(x=a) = F \cdot \frac{b}{l} \cdot a$$

Damit lassen sich  $F_Q$  und  $M_b$  über der Balkenachse auftragen, Bild 10.4e und f.

Im  $F_Q$ -Diagramm laufen wir vom linken Ende aus entlang der Balkenachse und hängen die Kraftpfeile aneinander. Im Angriffspunkt der Einzelkraft hat  $F_Q$  einen Nulldurchgang, kurz links davon hat  $F_Q$  den

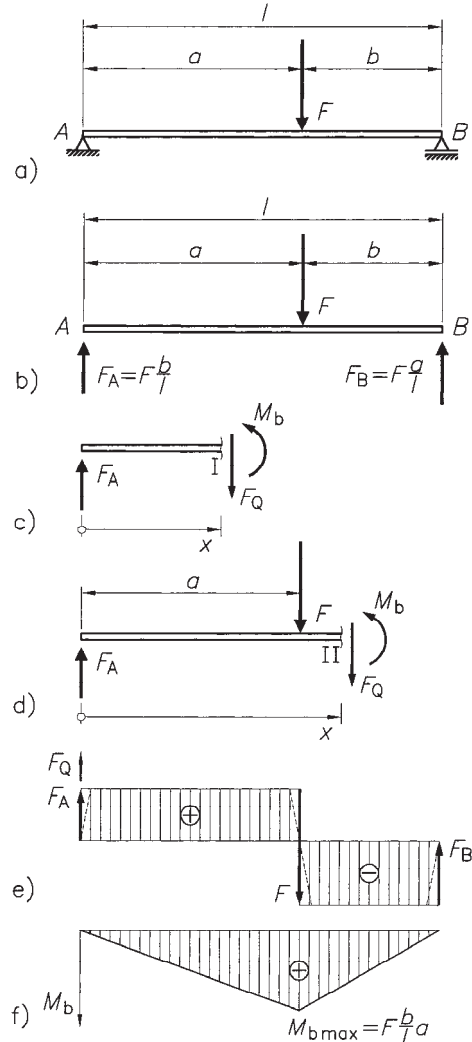


Bild 10.4 Balken mit Einzelkraft

- Anordnung
- freigemacht, mit Lagerreaktionen
- Schnitt vor  $\vec{F}$
- Schnitt nach  $\vec{F}$
- $F_Q$ -Diagramm ( $F_Q$ -Schaubild,  $F_Q$ -Fläche,  $F_Q$ -Verlauf)
- $M_b$ -Diagramm ( $M_b$ -Schaubild,  $M_b$ -Fläche,  $M_b$ -Verlauf)

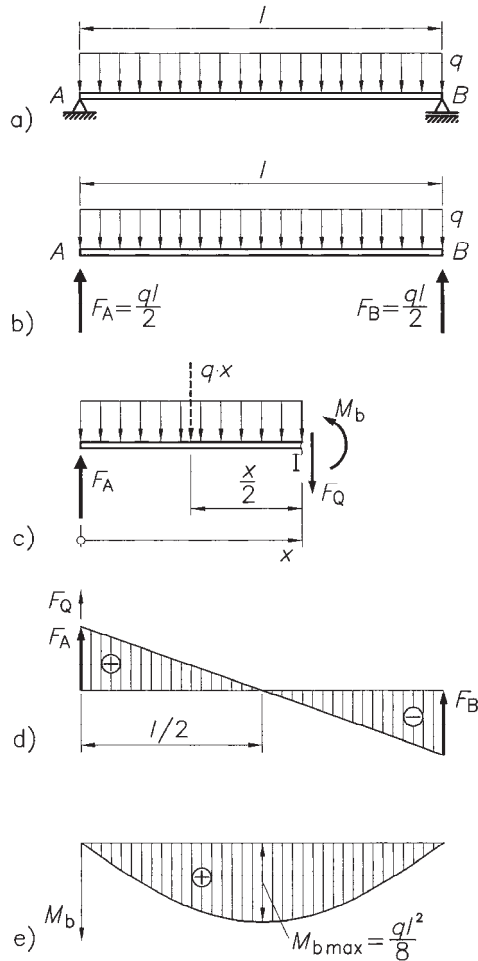


Bild 10.5 Balken mit konstanter Streckenlast  
a) Anordnung  
b) freigemacht, mit Lagerreaktionen  
c) linker Balkenteil  
d)  $F_Q$ -Diagramm  
e)  $M_b$ -Diagramm

Wert  $F_A$ , kurz rechts davon den Wert  $F_B$ . Für die Beanspruchung an der Stelle  $x = a$  ist somit die größere Kraft  $F_B$  maßgebend.

Das leuchtet besser ein, wenn wir bedenken, dass Einzelkräfte in der Praxis nicht punktförmig, sondern auf einer endlichen Breite eingeleitet werden (gestrichelte Linien in Bild 10.4e).

Das  $M_b$ -Diagramm setzt sich aus zwei Geraden zusammen. Traditionell werden die positiven Werte nach unten aufgetragen.

Erkenntnisse zu  $F_Q$ - und  $M_b$ -Verlauf:

- $F_Q$  und  $M_b$  sind null an den freien Enden.
- Zwischen zwei Einzelkräften ist  $F_Q$  konstant und  $M_b$  linear.
- Am Angriffspunkt der Einzelkraft hat der  $F_Q$ -Verlauf einen Sprung und der  $M_b$ -Verlauf einen Knick.
- Am Nulldurchgang von  $F_Q$  erreicht  $M_b$  einen Extremwert.

### Balken mit konstanter Streckenlast (Bild 10.5 a)

Die Lagerreaktionen  $\vec{F}_A$  und  $\vec{F}_B$  sind wegen der Symmetrie gleich groß, Bild 10.5b. Wir setzen den abgeschnittenen linken Teil ins Gleichgewicht, Bild 10.5c. Dabei ist es einfacher, mit der Resultierenden  $q \cdot x$  aus der Teilstreckenlast zu arbeiten.

$$\downarrow \quad -F_A + q \cdot x + F_Q = 0 \rightarrow F_Q = F_A - q \cdot x = \frac{q}{2}(l - 2x) \quad (\text{Gerade})$$

$$\curvearrowright \quad -F_A \cdot x + q \cdot x \cdot \frac{x}{2} + M_b = 0 \rightarrow M_b = F_A \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{q}{2}(l \cdot x - x^2)$$

(quadratische Parabel)

$$M_b(x=0) = M_b(x=l) = 0$$

$$M_b\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{4}\right) = \frac{q \cdot l^2}{8}$$

Bild 10.5d und e zeigen die Verläufe.

Zusätzliche Erkenntnis:

- Für  $q = \text{konstant}$  verläuft  $F_Q$  linear und  $M_b$  parabelförmig.

Wir vergleichen die Ergebnisse aus den beiden Standardfällen:

	Einzelkraft		Streckenlast
	links	rechts	
$F_Q$	$F \cdot \frac{b}{l}$	$F \cdot \left(\frac{b}{l} - 1\right)$	$\frac{q}{2} \cdot (l - 2x)$
$M_b$	$F \cdot \frac{b}{l} \cdot x$	$F \cdot \left(\frac{b}{l} - 1\right) \cdot x + F \cdot a$	$\frac{q}{2} \cdot (l \cdot x - x^2)$

Es zeigt sich:  $F_Q$  ist die Ableitung von  $M_b$ , bzw.  $M_b$  das Integral von  $F_Q$ ! Gilt das allgemein?

Um dies zu klären, schneiden wir aus dem Balken in Bild 10.6a ein infinitesimal kurzes Stück heraus, Bild 10.6b. Die eingezeichneten Schnittgrößen sind an beiden Schnittflächen positiv eingezeichnet; am rechten Schnittufer sind sie infinitesimal größer als am linken. Die Streckenlast fassen wir zur Resultierenden  $q \cdot dx$  zusammen.

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned} \downarrow \quad & \underbrace{-F_Q}_{\text{links}} + q \cdot dx + \underbrace{F_Q + dF_Q}_{\text{rechts}} = 0 \rightarrow \frac{dF_Q}{dx} = -q \\ \curvearrowright \quad & \underbrace{-M_b - F_Q \cdot \frac{dx}{2}}_{\text{links}} - \underbrace{\left(F_Q + dF_Q\right) \cdot \frac{dx}{2} + M_b + dM_b}_{\text{rechts}} = 0 \\ & \rightarrow -F_Q \cdot dx - \underbrace{dF_Q \cdot \frac{dx}{2}}_{=0} + dM_b = 0 \end{aligned}$$

Der zweite Term darf null gesetzt werden, da er gegenüber den anderen beiden Termen um eine Ordnung kleiner ist. Wir erhalten:

$$\frac{dM_b}{dx} = F_Q$$

Zusammenhang zwischen  $q$ ,  $F_Q$  und  $M_b$ :

$$\frac{dF_Q}{dx} = -q \quad (10.1a)$$

$$\frac{dM_b}{dx} = F_Q \quad (10.1b)$$

bzw.

$$F_Q = -\int q \cdot dx + C \quad (10.2a)$$

$$M_b = \int_{x=0}^x F_Q \cdot dx \quad (10.2b)$$

Der  $M_b$ -Verlauf lässt sich mit (10.2b) auch über die Integration des  $F_Q$ -Verlaufs finden. Diese Methode ist in vielen Fällen einfacher als die Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen.

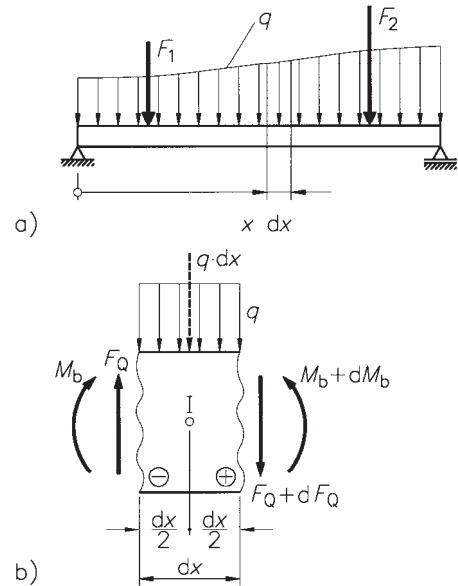


Bild 10.6 Zusammenhang zwischen  $q$ ,  $F_Q$  und  $M_b$

a) Gesamtbalken

b) herausgeschnittenes Stück

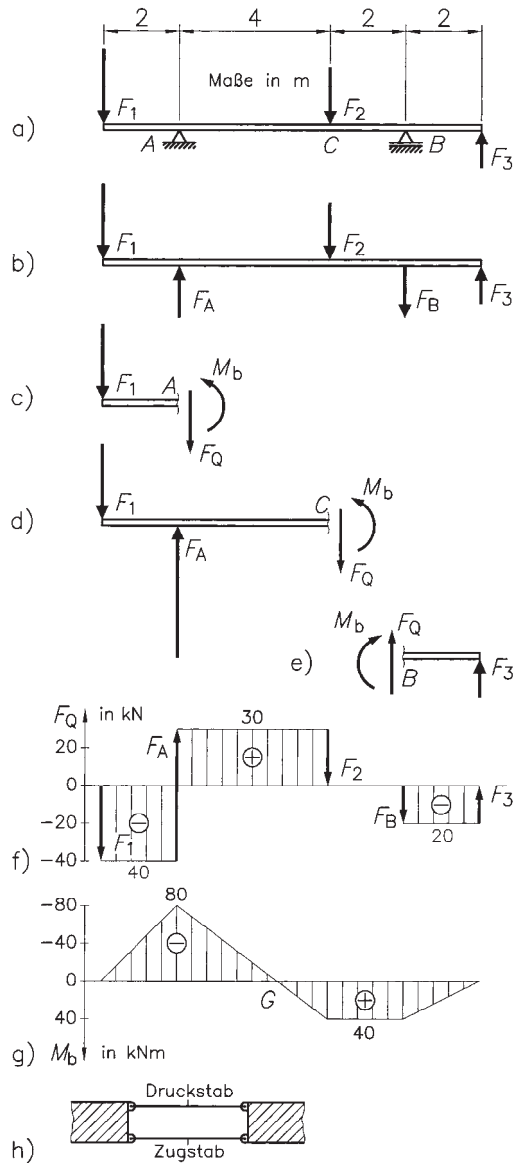


Bild 10.7 Balken aus Beispiel 10.1

- Anordnung
- freigemacht, mit Lagerreaktionen
- Schnitt unmittelbar links von A
- Schnitt unmittelbar links von C
- Schnitt unmittelbar rechts von B
- $F_Q$ -Diagramm
- $M_b$ -Diagramm
- mögliche Balkenverbindung im Abschnitt C-B

**Beispiel 10.1**

Für den Träger gemäß Bild 10.7a sind das  $F_Q$ - und  $M_b$ -Diagramm zu erstellen. Zahlenwerte:  $F_1 = 40 \text{ kN}$ ;  $F_2 = 30 \text{ kN}$ ;  $F_3 = 20 \text{ kN}$ .

**Lösung:**

Wir führen nacheinander folgende Schritte aus:

- Lagerreaktionen berechnen.
- $F_Q$ -Diagramm zeichnen, indem wir von links nach rechts laufend die Kräfte aneinanderhängen.
- $M_b$ -Diagramm erstellen
  - mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen am abgeschnittenen Teilbalken,
  - über die Integration des  $F_Q$ -Verlaufs.

**Lagerreaktionen**

Die Lagerreaktionen kann man mit beliebigem Richtungssinn einzeichnen. Ich trage sie hier jedoch so auf, wie sie vermutlich wirken werden, Bild 10.7b.

$$\curvearrowright (F_1 \cdot 8 - F_A \cdot 6 + F_2 \cdot 2 + F_3 \cdot 2) \text{ m} = 0$$

$$\rightarrow F_A = \frac{1}{6} (F_1 \cdot 8 + F_2 \cdot 2 + F_3 \cdot 2) \text{ kN} = 70 \text{ kN}$$

$$\curvearrowleft (F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot 4 - F_B \cdot 6 + F_3 \cdot 8) \text{ m} = 0$$

$$\rightarrow F_B = \frac{1}{6} (F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot 4 + F_3 \cdot 8) \text{ kN} = 20 \text{ kN}$$

Kontrolle:

$$\uparrow (-40 + 70 - 30 - 20 + 20) \text{ kN} = 0$$

 **$F_Q$ -Diagramm**

Wir tragen die Kräfte gemäß Bild 10.7f auf.

 **$M_b$ -Diagramm**

An den freien Balkenenden ist  $M_b$  null; zwischen zwei Einzelkräften verläuft  $M_b$  linear. Zum Zeichnen genügen somit die  $M_b$ -Werte an den Angriffspunkten der Kräfte.

- Mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen:  
Schnitt unmittelbar links von A, Bild 10.7c:

$$\curvearrowleft F_1 \cdot 2 \text{ m} + M_b = 0 \rightarrow M_b = -80 \text{ kNm}$$

Schnitt unmittelbar links von C, Bild 10.7d:

$$\curvearrowleft (C) \quad F_1 \cdot 6 \text{ m} - F_A \cdot 4 \text{ m} + M_b = 0 \quad \rightarrow \quad M_b = 40 \text{ kNm}$$

Schnitt unmittelbar rechts von B, Bild 10.7e:

In diesem Fall ist es einfacher, den rechten Balkenteil zu nehmen. Die Schnittgrößen sind mit umgedrehten Richtungen gegenüber dem linken Teil einzutragen.

$$\curvearrowright (B) \quad -M_b + F_3 \cdot 2 \text{ m} = 0 \quad \rightarrow \quad M_b = 40 \text{ kNm}$$

Bild 10.7g zeigt den  $M_b$ -Verlauf.

b) Über die Integration des  $F_Q$ -Verlaufs, Gleichung (10.2b):

$$M_b = \int_{x=0}^x F_Q \cdot dx$$

Die Integration entspricht der Flächenberechnung im  $F_Q$ -Diagramm. Wir fangen am linken Ende an und berechnen die Flächen jeweils vom linken Ende bis zum Kraftangriffspunkt. Bei Einzelkräften kommen nur Rechteckflächen vor.

Moment bei A:

$$M_b = -40 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} = -80 \text{ kNm}$$

Moment bei C:

$$M_b = -80 \text{ kNm} + 30 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} = 40 \text{ kNm}$$

Von C bis B kommt keine Fläche hinzu, das Moment ist auf diesem Abschnitt konstant.

Kontrollliste:

1.  $F_Q$  beginnt am linken freien Balkenende mit null und geht am rechten freien Balkenende wieder auf null zurück.
2.  $M_b$  ist an den freien Balkenenden null.
3. An den Stellen  $M_b = \text{konst.}$  gilt  $F_Q = dM/dx = 0$  (zwischen C und B).
4. An jedem Nulldurchgang von  $F_Q$  besitzt  $M_b$  ein Extremum (bei A und zwischen C und B).
5. Beim geraden Balken mit freien Balkenenden und Querbelastung sind positive und negative  $F_Q$ -Fläche gleich groß.

Hinweis: Es würde die Kraftübertragung nicht beeinflussen, wenn wir bei G ein Gelenk, Bild 10.7g, und im Abschnitt C-B eine Verbindung gemäß Bild 10.7h einbauen würden.

## Beispiel 10.2

Für den Träger gemäß Bild 10.8a sind das  $F_Q$ - und  $M_b$ -Diagramm allgemein in Abhängigkeit von  $q$  und  $l$  zu erstellen.



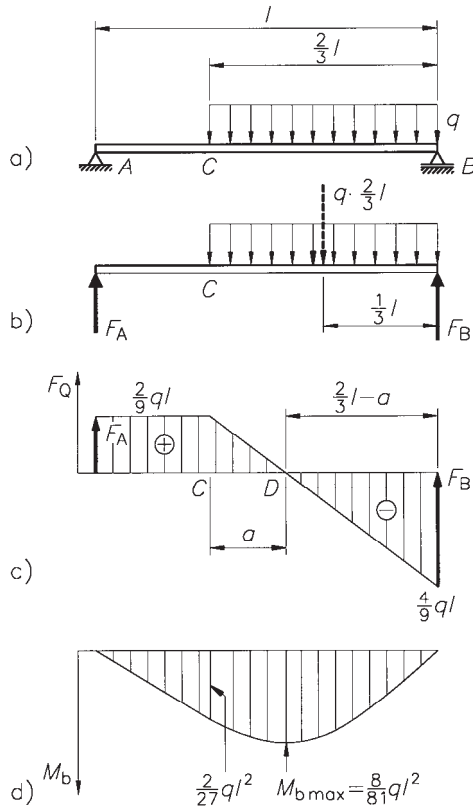


Bild 10.8 Balken aus Beispiel 10.2

- Anordnung
- Balken mit Lagerreaktionen und resultierender Streckenlast
- $F_Q$ -Diagramm
- $M_b$ -Diagramm

**Lösung:****Lagerreaktionen**

Zur Berechnung der Lagerreaktionen darf die Streckenlast durch ihre Resultierende  $q \cdot \frac{2}{3}l$ , mittig wirkend, ersetzt werden, Bild 10.8b.

$$\curvearrowright B) \quad -F_A \cdot l + q \cdot \frac{2}{3}l \cdot \frac{l}{3} = 0 \rightarrow F_A = \frac{2}{9}ql$$

$$\curvearrowright A) \quad F_B \cdot l - q \cdot \frac{2}{3}l \cdot \frac{2}{3}l = 0 \rightarrow F_B = \frac{4}{9}ql$$

 **$F_Q$ -Diagramm, Bild 10.8c**

Wir beginnen wieder am linken Ende mit der Lagerreaktion  $\vec{F}_A$ . Bei C beginnt die Querkraft linear abzunehmen. Den zweiten Punkt auf dieser Geraden erhalten wir bei B: Hier muss die Lagerreaktion  $\vec{F}_B$  auf null zurückführen.

Der Nulldurchgang folgt aus dem Streckenverhältnis:

$$\frac{a}{\frac{2}{3}l - a} = \frac{F_A}{F_B} = \frac{1}{2} \rightarrow 2a = \frac{2}{3}l - a \rightarrow a = \frac{2}{3}l$$

 **$M_b$ -Diagramm, Bild 10.8d**

An den Balkenenden ist  $M_b$  null. Weitere Werte berechnen wir mit Hilfe der  $F_Q$ -Fläche.

Moment bei C:

$$M_b = \frac{2}{9}ql \cdot \frac{l}{3} = \frac{2}{27}ql^2$$

Moment bei D (maximales Moment, wegen  $F_Q = 0$ ):

$$M_{b \max} = \frac{2}{27}ql^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9}ql \cdot a = \frac{2}{27}ql^2 + \frac{ql}{9} \cdot \frac{2}{3}l$$

$$M_{b \max} = \frac{8}{81}ql^2$$

Weil die  $F_Q$ -Fläche insgesamt null ist, kommen wir zum selben Ergebnis auch vom rechten Balkenende her; nur das Vorzeichen müssen wir umpolen:

$$M_{bl} + M_{br} = 0 \rightarrow M_{br} = -M_{bl}$$

Konkret für dieses Beispiel heißt das:

$$M_{br} = \frac{1}{2} \cdot (-F_B) \cdot \left( \frac{2}{3}l - a \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}ql \left( \frac{2}{3}l - \frac{2}{9}l \right)$$

$$M_{br} = -\frac{8}{81}ql^2$$

Mit den  $M_b$ -Werten bei  $C$ ,  $D$  und  $B$  lässt sich die quadratische Parabel zeichnen. Der Übergang bei  $C$  von der Geraden in die Parabel ist knickfrei.

### Beispiel 10.3

Bild 10.9a gibt einen Balken mit Dreieck-Streckenlast wieder. Dreht man das Bild um  $90^\circ$ , sodass die Spitze nach oben zeigt, stellt es z. B. die Belastung eines Schleusentores oder einer Staumauer infolge Wasserdrucks dar.

Es sind wieder das  $F_Q$ - und  $M_b$ -Diagramm zu zeichnen ( $l$  und  $q_0$  sind gegeben).

### Lösung:

#### Lagerreaktionen, Bild 10.9b

Die Resultierende der Streckenlast beträgt

$$F_R = \frac{1}{2} \cdot q_0 \cdot l.$$

Sie wirkt im Schwerpunkt des Dreiecks, also im Abstand  $l/3$  von  $B$ .

$$\curvearrowright B) \quad -F_A \cdot l + \frac{q_0 \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{3} = 0 \rightarrow F_A = \frac{q_0 \cdot l}{6}$$

$$\curvearrowright A) \quad F_B \cdot l - \frac{q_0 \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3}l = 0 \rightarrow F_B = \frac{q_0 \cdot l}{3} = 2F_A$$

#### Schnittgrößen

Wir berechnen die Schnittgrößen mit (10.2), ausgehend von

$$q = q(x) = \frac{q_0}{l} \cdot x \quad (\text{Gerade, Bild 10.9c}).$$

$$F_Q = -\int q \cdot dx + C = -\int \frac{q_0}{l} \cdot x \cdot dx + C = -\frac{q_0 \cdot x^2}{2l} + C$$

Bei  $x = 0$  fängt  $F_Q$  mit  $F_A = q_0 \cdot l/6$  an. Diese Information setzen wir in die Gleichung für  $F_Q$  ein und erhalten

$$C = F_A = \frac{q_0 \cdot l}{6}.$$

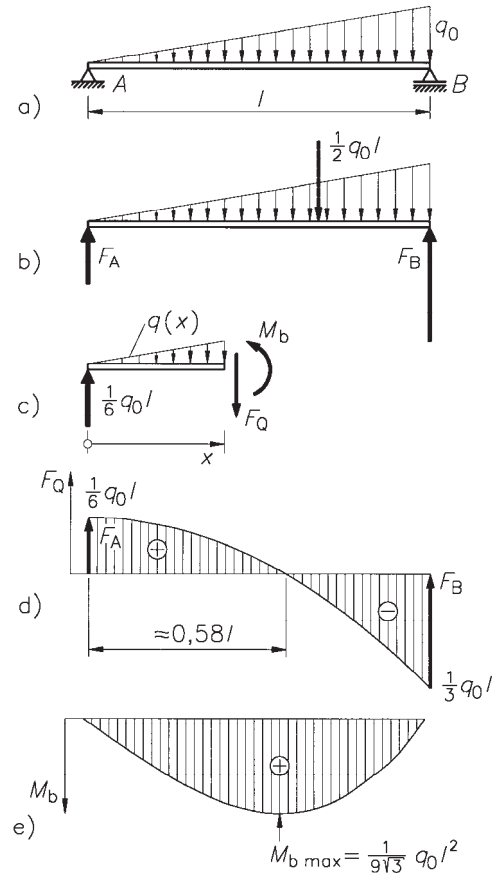


Bild 10.9 Balken aus Beispiel 10.3

- a) Anordnung
- b) Balken mit Lagerreaktionen und resultierender Streckenlast
- c) Schnitt bei  $x$
- d)  $F_Q$ -Diagramm
- e)  $M_b$ -Diagramm

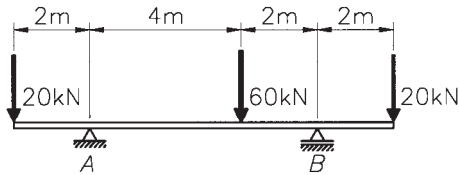


Bild 10.10 Träger aus Übung 10.1

Somit lautet der  $F_Q$ -Verlauf zwischen den Lagern:

$$F_Q = \frac{q_0 \cdot l}{6} - \frac{q_0}{2l} \cdot x^2 = \frac{q_0 \cdot l}{6} \left[ 1 - 3 \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad (\text{quadratische Parabel, Bild 10.9d})$$

Am rechten Ende führt die Lagerreaktion  $\vec{F}_B$  wieder auf null zurück.

Der Nulldurchgang liegt bei

$$1 - 3 \left( \frac{x}{l} \right)^2 = 0 \rightarrow x = \frac{l}{\sqrt{3}} \approx 0,58l$$

$M_b$ -Verlauf:

$$M_b = \int_{x=0}^x F_Q \cdot dx = \frac{q_0 \cdot l}{6} \int_{x=0}^x \left[ 1 - 3 \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right] dx$$

$$M_b = \frac{q_0 \cdot l}{6} \left[ x - l \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right] \Big|_0^x$$

$$M_b = \frac{q_0 \cdot l}{6} \cdot x \cdot \left[ 1 - \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad (\text{kubische Parabel, Bild 10.9e})$$

$$M_{b \max} = M_b \left( x = \frac{l}{\sqrt{3}} \right) = \frac{q_0 \cdot l}{6} \cdot \frac{l}{\sqrt{3}} \left[ 1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{q_0 \cdot l^2}{9\sqrt{3}}$$

### Übung 10.1

Zeichnen Sie für den Träger gemäß Bild 10.10 das  $F_Q$ - und  $M_b$ -Diagramm.

### Übung 10.2

Bestimmen Sie für den Träger gemäß Bild 10.11:

1. das  $F_Q$ -Diagramm
2. die Biegemomente in den Nulldurchgängen von  $F_Q$  sowie das Betragsmaximum von  $M_b$ .

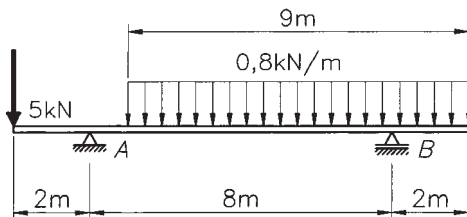


Bild 10.11 Träger aus Übung 10.2

## 10.2 Der eingespannte Balken

Die Unterschiede zum Balken auf zwei Stützen werden am folgenden Zahlenbeispiel deutlich.

**Beispiel 10.4**

Für den Balken in Bild 10.12a wollen wir das  $F_Q$ - und  $M_b$ -Diagramm erstellen. An der Vorzeichendefinition ändert sich gegenüber dem Balken auf zwei Stützen nichts, Bild 10.12b.

**Lösung:**

Wir fangen am freien Ende an, dann erübrigt sich die Berechnung der Lagerreaktionen. Diese ergeben sich vielmehr automatisch im  $F_Q$ - und  $M_b$ -Diagramm.

Das  $F_Q$ -Diagramm entsteht wie bisher durch das Aneinanderhängen der Kräfte, Bild 10.12c. An der Einspannung A führt die Lagerreaktion  $F_A$  wieder auf null zurück.

Das  $M_b$ -Diagramm in Bild 10.12d ergibt sich über die  $F_Q$ -Fläche oder mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen am linken abgeschnittenen Balkenteil. Prüfen Sie die Zahlenwerte zur Übung nach.

Es fällt auf:

Beim eingespannten Balken sind positive und negative  $F_Q$ -Fläche im Allgemeinen nicht gleich groß. Dementsprechend ist  $M_b$  am eingespannten Balkenende im Allgemeinen nicht null, sondern gleich dem Einspannmoment.

Die bisher behandelten Standardfälle und viele weitere finden Sie im Anhang A3.1.

Statisch unbestimmte Fälle sind in A14.2 aufgelistet.

## 10.3 GERBER-Träger

Die analytische Lösung läuft wie bisher ab. Beim  $M_b$ -Verlauf ist darauf zu achten, dass die Momente in den Gelenken null sind.

**Beispiel 10.5**

Für den Träger gemäß Bild 10.13a zeichne man das  $F_Q$ - und  $M_b$ -Diagramm. Zahlenwerte:  $F_1 = 1 \text{ kN}$ ;  $F_2 = 2 \text{ kN}$ ;  $F_3 = 3 \text{ kN}$ ;  $F_4 = 2 \text{ kN}$ .

**Lösung:**

Als Erstes benötigen wir die Lagerreaktionen gemäß Bild 10.13b. Hierzu Kap. 7.3. Die Gelenkkräfte brauchen wir nicht zu bestimmen; sie können direkt aus dem  $F_Q$ -Diagramm herausgelesen werden.

Wir schneiden den linken Teil bei  $G_1$  ab und setzen ihn ins Gleichgewicht:

$$\curvearrowleft \quad -F_A \cdot 3 \text{ m} + F_1 \cdot 1,5 \text{ m} = 0 \quad \rightarrow \quad F_A = \frac{F_1 \cdot 1,5 \text{ m}}{3 \text{ m}} = 0,5 \text{ kN}$$

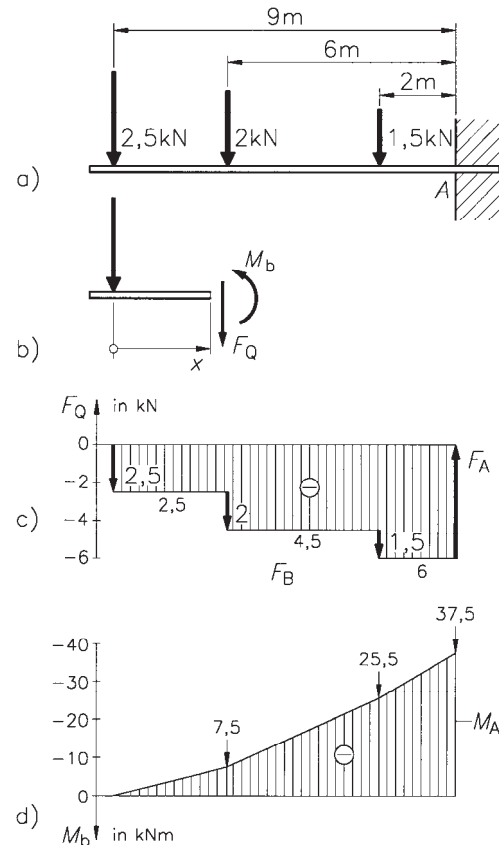


Bild 10.12 Eingespannter Balken, Beispiel 10.4

- a) Anordnung
- b) Definition von  $x$ -Achse und Schnittgrößen
- c)  $F_Q$ -Diagramm
- d)  $M_b$ -Diagramm

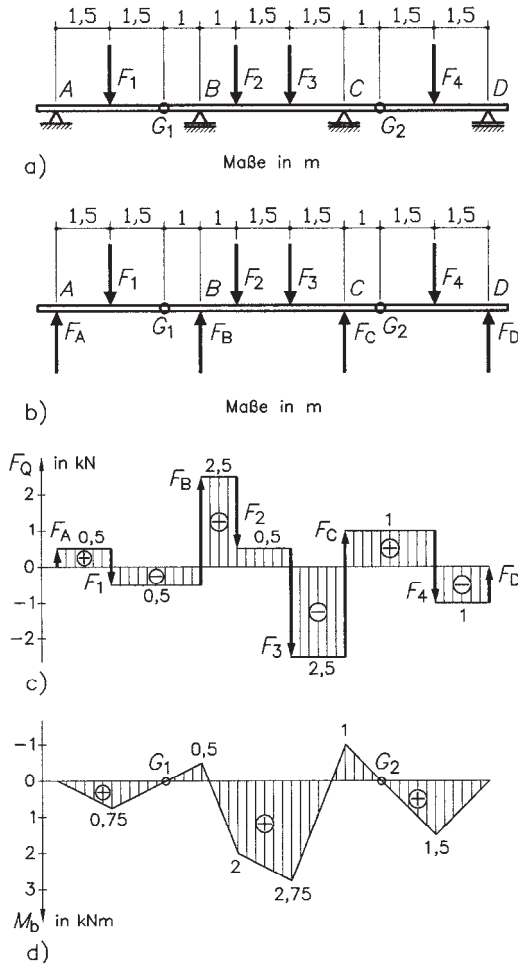


Bild 10.13 GERBER-Träger aus Beispiel 10.5

- Anordnung
- freigemacht
- $F_Q$ -Diagramm
- $M_b$ -Diagramm

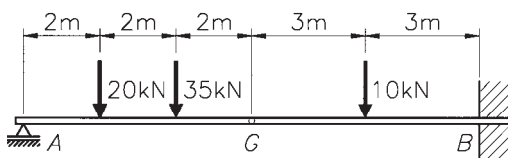


Bild 10.14 GERBER-Träger mit Einspannung, Übung 10.3

Jetzt schneiden wir den rechten Teil bei  $G_2$  ab und setzen ihn ins Gleichgewicht:

$$\curvearrowleft_{G_2} \quad F_D \cdot 3 \text{ m} - F_4 \cdot 1,5 \text{ m} = 0 \rightarrow F_D = \frac{F_4 \cdot 1,5 \text{ m}}{3 \text{ m}} = 1 \text{ kN}$$

Im dritten Schritt wenden wir die Gleichgewichtsbedingungen auf den kompletten Träger an:



$$(-F_A \cdot 8 + F_1 \cdot 6,5 - F_B \cdot 4 + F_2 \cdot 3 + F_3 \cdot 1,5 - F_4 \cdot 2,5 + F_D \cdot 4) \text{ m} = 0$$

$$\rightarrow F_B = \frac{1}{4}(-F_A \cdot 8 + F_1 \cdot 6,5 + F_2 \cdot 3 + F_3 \cdot 1,5 - F_4 \cdot 2,5 + F_D \cdot 4) = 3 \text{ kN}$$



$$(-F_A \cdot 4 + F_1 \cdot 2,5 - F_2 \cdot 1 - F_3 \cdot 2,5 + F_C \cdot 4 - F_4 \cdot 6,5 + F_D \cdot 8) \text{ m} = 0$$

$$\rightarrow F_C = \frac{1}{4}(F_A \cdot 4 - F_1 \cdot 2,5 + F_2 \cdot 1 + F_3 \cdot 2,5 + F_4 \cdot 6,5 - F_D \cdot 8) = 3,5 \text{ kN}$$

Kontrolle:  $\uparrow (0,5 - 1 + 3 - 2 - 3 + 3,5 - 2 + 1) \text{ kN} = 0$

Im  $F_Q$ -Diagramm hängen wir in gewohnter Weise die Pfeile aneinander, Bild 10.13 c. Die Gelenkkräfte entnehmen wir zu  $F_{G1} = 0,5 \text{ kN}$  und  $F_{G2} = 1 \text{ kN}$ .

Das  $M_b$ -Diagramm, Bild 10.13 d, ergibt sich am einfachsten dadurch, dass wir die  $F_Q$ -Flächen vom linken Ende bis zur jeweiligen Kraft berechnen und die Stützpunkte geradlinig verbinden. Prüfen Sie die Zahlenwerte nach.

Wir halten fest:

- An den Gelenken sind die Momente null.
- Die Gelenkkräfte ergeben sich unmittelbar aus dem  $F_Q$ -Diagramm.

### Übung 10.3

Bestimmen Sie für den GERBER-Träger mit Einspannung, Bild 10.14:

- Lagerreaktion  $\vec{F}_A$
- $F_Q$ -Diagramm
- $M_b$ -Diagramm
- Lagerreaktionen in der Einspannung ( $\vec{F}_B$  und  $\vec{M}_B$ ) sowie die Kraft im Gelenk  $G$

## 10.4 Bogenträger

Bild 10.15 zeigt als einfachsten Fall den Kreisbogenträger mit symmetrischer Einzellast. Der prinzipielle Lösungsweg bleibt auch bei komplizierteren Fällen derselbe.

Bei Kreisbogenträgern eignet sich als Koordinate der Winkel  $\varphi$ . Die Schnittgrößen hängen dann von  $\varphi$  ab.