Technische Mechanik

Statik - Kinematik - Kinetik - Schwingungen - Festigkeitslehre

Bearbeitet von
Martin Mayr

8. Auflage 2015. Buch. XIV, 440 S. Gebunden
ISBN 978 3 446 44570 3
Format (B x L): 20,7 x 27,7 cm
Gewicht: 1091 g

Leseprobe

Martin Mayr

Technische Mechanik

Statik - Kinematik - Kinetik - Schwingungen - Festigkeitslehre

ISBN (Buch): 978-3-446-44570-3

ISBN (E-Book): 978-3-446-44618-2

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-44570-3

sowie im Buchhandel.

Allgemeines Vorwort

Dieses Lehrbuch beinhaltet den Stoff der Vorlesung „Technische Mechanik" im Studium des Maschinenbaus an Fachhochschulen. Es besteht aus drei selbständigen Teilen: Statik – Kinematik, Kinetik, Schwingungen – Festigkeitslehre. Jeder Teil kann unabhängig vom anderen benutzt werden. Einheitlicher Aufbau, Querverweise und ein gemeinsamer Anhang fügen die drei Teile jedoch zu einem Ganzen zusammen. Der umfangreiche Anhang ist zum bequemen Nachschlagen in einem Beiheft untergebracht.

Bei der Darstellung ließ ich mich vor allem von didaktischen Gesichtspunkten leiten: optische Hervorhebung der Endformeln und Merksätze, 474 Bilder, 275 Fragen zum Verständnis, 104 vollständig gelöste Beispiele, 116 themenbezogene Übungsaufgaben, 43 „Prüfungsaufgaben" (nach vier Schwierigkeitsgraden geordnet).

Die Antworten zu den Fragen sowie die Ergebnisse der Übungs- und Prüfungsaufgaben (meist mit Lösungshinweisen und Zwischenwerten) befinden sich am Schluss des jeweiligen Buchteils. Aus Platzgründen konnten nicht die vollständigen Lösungen wiedergegeben werden. Lehrende erhalten sie auf Anfrage.

Weitere themenbezogene Beispiele und Prüfungsaufgaben sind in meinem Übungsbuch „Mechanik-Training" zusammengestellt (mit ausführlichen Lösungen).

Der Gepflogenheit im Maschinenbau folgend sind die Bilder, falls nichts anderes vereinbart ist, in der Einheit mm bemaßt. In den Zahlenwertgleichungen wird fast ausschließlich mit kohärenten Einheiten gearbeitet, um langwierige Umrechnungen zu vermeiden. Die Berechnungen werden mit dem Taschenrechner ohne ein Zwischenrunden ausgeführt, das Endergebnis wird meist auf eine praktisch sinnvolle Stellenzahl gerundet wiedergegeben. Graphische Lösungen werden mit CAD erstellt und sind deshalb so genau wie analytische Lösungen.

Ich möchte allen, die mich bei der Arbeit zu diesem Buch unterstützt haben, ganz herzlich danken. Hier sind in erster Linie Prof. Ulrich Thalhofer (Numerische Verfahren) und Prof. Ernst Schatz (Maschinenelemente, Thermische Strömungsmaschinen) zu nennen.

Wertvolle Unterstützung erhielt ich auch von Prof. Helmut Hiekel (Mechanik), Prof. Dr. Wolfgang Käser und Prof. Wilhelm Ruckdeschel (beide Fördertechnik, Maschinenelemente) sowie Prof. Dr. Peter Tautzenberger (Werkstofftechnik).

Korrektur lasen Prof. Dr. Werner Drexler (Mechanik, FH Kempten), Prof. Dr. Johann Fuchs (Mechanik), Prof. Dr. Frank Gießner (Feinwerktechnik, Mechanik), Dipl.-Ing. Hubert Keim (Konstruktion, Pfister GmbH Augsburg) und wiederum Prof. Ernst Schatz.

Übungsaufgaben und fachlichen Rat steuerten bei Prof. Dr. Ingo Bolling (Hydraulik-Pneumatik), Dipl.-Ing. Hubert Breyer (Unfallverhütung, GUV), Prof. Rudolf Bretzel (Mechanik, Luft- und Raumfahrt), Prof. Dr. Dieter Jannasch (Maschinenelemente), Prof. Dr. Winfried Kochem (Konstruktion, FH Köln), Prof. Klaus Martin (Verbrennungsmotoren, Maschinendynamik), StD Georg Mühlbauer (Mathematik, Physik, Max-Reger-Gymnasium Amberg), Prof. Dr. Franz Obinger (Getriebetechnik, CAD), Prof. Hans Rebinger (Verbrennungsmotoren, Maschinendynamik), Prof. Dr. Willi Rößner (Werkzeugmaschinen), Prof. Dr. Joachim Voßiek (Maschinenelemente, Mechanik), Prof. Dr. Rainer Wieler (Verbrennungsmotoren, Fahrzeugtechnik) und Prof. Dr. Rolf Ziegler (Regelungstechnik).

Dipl.-Ing. Daniel Dierig, Dipl.-Ing. Oliver Herrmann, Dipl.-Ing. Jürgen Möller, Dipl.-Ing. Marco Vasciarelli, Dipl.-Ing. Eugen Weber und Dipl.-Ing. Stefan Wolf zeichneten mit großer Sorgfalt die Bilder. Herr Otto Reiser baute die Modelle, Herr Erber machte die Fotos. Die schlimmsten sprachlichen Ausrutscher verhinderten meine Frau Lydia und meine Tochter Andrea.

Mit Informationen unterstützten mich die Firmen KUKA, LIEBHERR, MAN und VON ROLL.

Allen Genannten nochmals herzlichen Dank.

Vorwort zur 8. Auflage

Der Inhalt der 7. Auflage wurde sorgfältig geprüft. Es konnten keine Unstimmigkeiten festgestellt werden; deshalb wurden für die 8. Auflage auch keine Änderungen vorgenommen. Es wurden lediglich ein paar Druckfehler korrigiert.

Ich danke allen Lesern für die aufmunternden Zuschriften und wertvollen Anregungen, die in kommenden Auflagen Berücksichtigung finden werden. Dem Carl Hanser Verlag danke ich für die stets gute Zusammenarbeit.

Augsburg, Mai 2015 Martin Mayr

Inhaltsverzeichnis

TEIL 3: Festigkeitslehre

10 Innere Kräfte und Momente

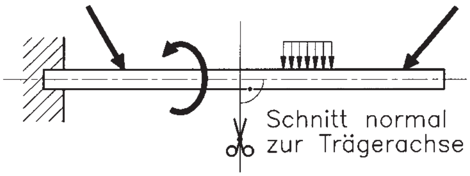

Bild 10.1 Schnitt durch den Träger

Normalkraft, Querkräfte, Biegemomente, Torsionsmoment, gerader Balken, GERBER-Träger, Bogenträger, ebene/räumliche Rahmen, Wellen

Bisher hatten wir das Bauteil immer an den Lagern freigemacht, aus der Umgebung herausgeschnitten. Auf diese Weise war es möglich, die Lagerreaktionen zu bestimmen. Nun gilt unser Interesse den inneren Beanspruchungen; folglich müssen wir den Träger selbst „auseinanderschneiden", Bild 10.1. Die inneren Kräfte und Momente stehen mit den äußeren Kräften und Momenten (einschließlich Lagerreaktionen) des abgeschnittenen Trägerteils im Gleichgewicht (Schnittprinzip).

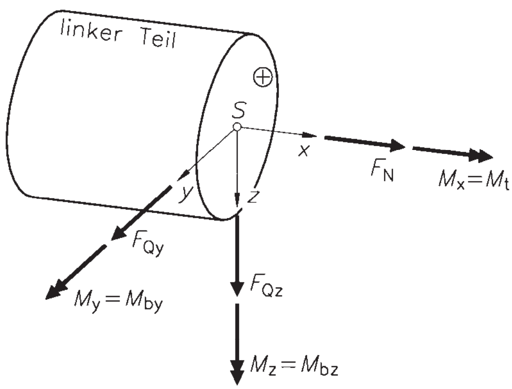

Bild 10.2 Die 6 möglichen Schnittgrößen am positiven Schnittufer

Bild 10.2 zeigt die Schnittfläche des linken Trägerteils mit dem Koordinatensystem und den möglichen Schnittgrößen am rechten (positiven) Schnittufer:

Normalkraft F_N (als Zugkraft eingezeichnet)
Querkräfte F_{Qy} und F_{Qz}
Biegemomente M_y und M_z (M_{by}, M_{bz})
Torsionsmoment M_x (M_t)

Es müssen nicht immer alle 6 Schnittgrößen auftreten.

Eine Bemerkung zum Schnittufer: Das Schnittufer ist positiv, wenn die Flächennormale in die positive Koordinatenrichtung (hier *x*-Richtung) weist. Der Pfeil der Flächennormalen zeigt von der Fläche weg.

Am rechten Teil, und zwar am linken (negativen) Schnittufer wirken die gleichen Schnittgrößen wie am linken Teil, nur sind nun die Pfeile entgegengesetzt einzuzeichnen. Das ist damit zu begründen, dass sich die Schnittgrößen paarweise aufheben müssen („actio = reactio").

Bei statisch bestimmten Lagerungen kennen wir neben der äußeren Belastung auch die Lagerreaktionen. Damit lassen sich die Schnittgrößen aus den Gleichgewichtsbedingungen am linken oder rechten Trägerteil bestimmen.

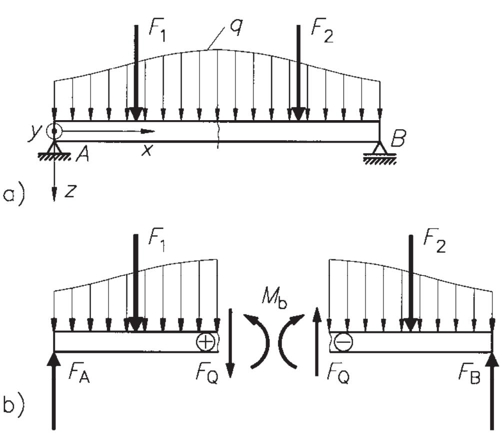

Bild 10.3 Gerader Balken auf zwei Stützen unter Vertikalbelastung
a) Anordnung mit Koordinatensystem
b) durchgeschnittene Trägerteile mit Schnittgrößen

10.1 Gerader Balken auf zwei Stützen mit Belastung quer zur Balkenachse

Bild 10.3 a zeigt den Balken mit Koordinatensystem. Für diesen Fall gibt es nur 2 Schnittgrößen, Bild 10.3 b:

Querkraft $F_{Qz} = F_Q$

Biegemoment $M_y = M_b$

Wegen „actio = reactio“ sind sie am negativen Schnittufer des rechten Teils entgegengesetzt eingezeichnet wie am positiven Schnittufer des linken Teils, jedoch beide Male als positive Größen.

Im Folgenden besprechen wir einfache Standardfälle: Balken mit Einzelkraft und Balken mit Streckenlast. Die Ergebnisse hieraus nützen uns beim Lösen komplizierterer Fälle.

Balken mit Einzelkraft (Bild 10.4 a)

Die Gleichgewichtsbedingungen für den an den Lagern freigemachten Balken liefern die Lagerreaktionen $\vec{F}_A$ und $\vec{F}_B$, Bild 10.4b. In diesem einfachen Fall erhält man sie auch mit dem Hebelgesetz.

Jetzt wird der Balken durchgeschnitten. Bild 10.4 c zeigt den linken Teil mit der Lagerreaktion $\vec{F}_A$, der Querkraft F_Q und dem Biegemoment M_b.

Vertikales Kräftegleichgewicht und Momentengleichgewicht um I liefern:

$$\downarrow \qquad -F_A + F_Q = 0 \quad\rightarrow\quad F_Q = F_A = F\cdot\frac{b}{l} = \text{konst.}$$

$$\circlearrowleft I \qquad -F_A\cdot x + M_b = 0 \quad\rightarrow\quad M_b = F_A\cdot x = F\cdot\frac{b}{l}\cdot x \quad \text{(Gerade)}$$

Einen zweiten Schnitt zeigt Bild 10.4d. Auch diesen Teil setzen wir ins Gleichgewicht:

$$\downarrow \qquad -F_A + F + F_Q = 0 \quad\rightarrow\quad F_Q = F_A - F = F\cdot\left(\frac{b}{l}-1\right) = \text{konst.}$$

$$\circlearrowleft II \qquad -F_A\cdot x + F\,(x-a) + M_b = 0 \quad\rightarrow\quad M_b = (F_A - F)\cdot x + F\cdot a$$

$$M_b = F\cdot\left(\frac{b}{l}-1\right)\cdot x + F\cdot a = -F\cdot\frac{a}{l}\cdot x + F\cdot a$$

(Gerade, andere Steigung als im ersten Abschnitt)

Spezielle Punkte der M_b-Geraden:

$$M_b\,(x=0) = 0;\quad M_b\,(x=l) = 0$$

$$M_b\,(x=a) = F\cdot\frac{b}{l}\cdot a$$

Damit lassen sich F_Q und M_b über der Balkenachse auftragen, Bild 10.4 e und f.

Im F_Q-Diagramm laufen wir vom linken Ende aus entlang der Balkenachse und hängen die Kraftpfeile aneinander. Im Angriffspunkt der Einzelkraft hat F_Q einen Nulldurchgang, kurz links davon hat F_Q den

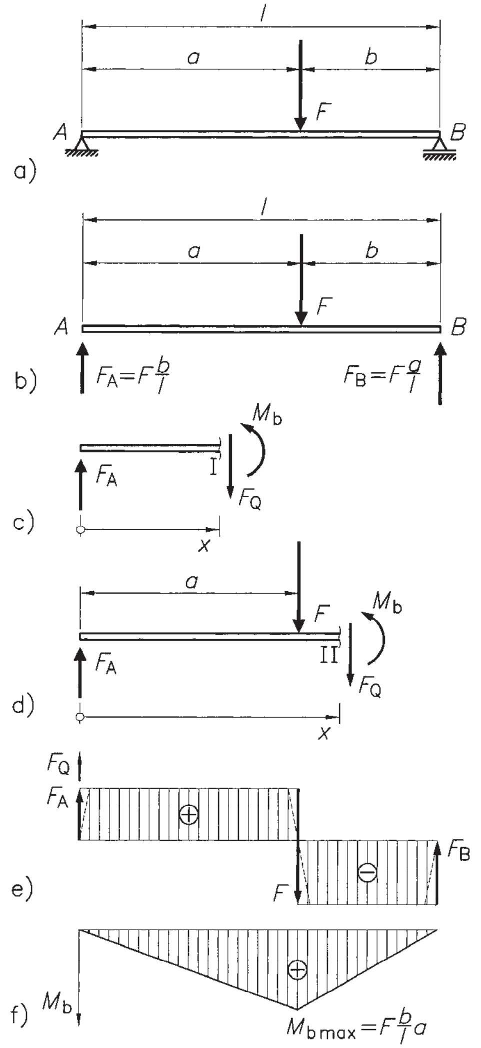

Bild 10.4 Balken mit Einzelkraft
a) Anordnung
b) freigemacht, mit Lagerreaktionen
c) Schnitt vor $\vec{F}$
d) Schnitt nach $\vec{F}$
e) F_Q-Diagramm (F_Q-Schaubild, F_Q-Fläche, F_Q-Verlauf)
f) M_b-Diagramm (M_b-Schaubild, M_b-Fläche, M_b-Verlauf)

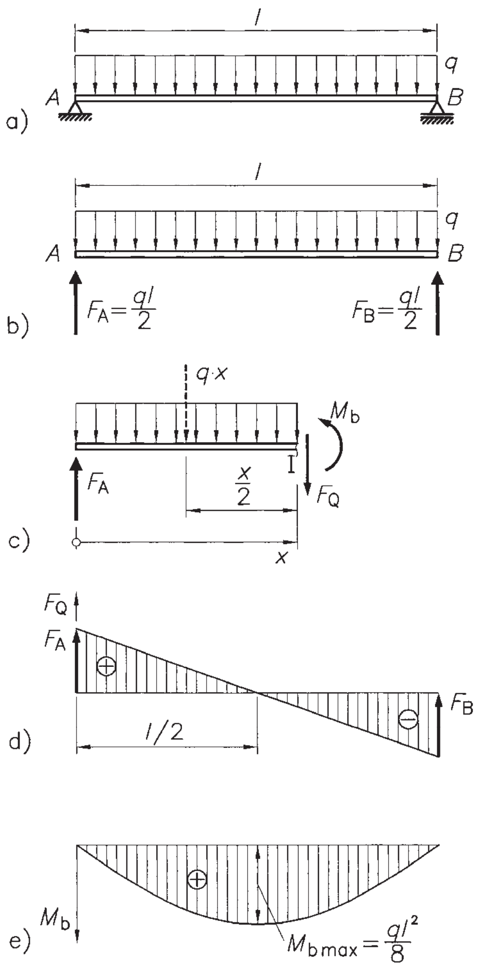

Bild 10.5 Balken mit konstanter Streckenlast
a) Anordnung
b) freigemacht, mit Lagerreaktionen
c) linker Balkenteil
d) F_Q-Diagramm
e) M_b-Diagramm

Wert F_A, kurz rechts davon den Wert F_B. Für die Beanspruchung an der Stelle $x = a$ ist somit die größere Kraft F_B maßgebend.

Das leuchtet besser ein, wenn wir bedenken, dass Einzelkräfte in der Praxis nicht punktförmig, sondern auf einer endlichen Breite eingeleitet werden (gestrichelte Linien in Bild 10.4e).

Das M_b-Diagramm setzt sich aus zwei Geraden zusammen. Traditionell werden die positiven Werte nach unten aufgetragen.

> Erkenntnisse zu F_Q- und M_b-Verlauf:
> - F_Q und M_b sind null an den freien Enden.
> - Zwischen zwei Einzelkräften ist F_Q konstant und M_b linear.
> - Am Angriffspunkt der Einzelkraft hat der F_Q-Verlauf einen Sprung und der M_b-Verlauf einen Knick.
> - Am Nulldurchgang von F_Q erreicht M_b einen Extremwert.

Balken mit konstanter Streckenlast (Bild 10.5 a)

Die Lagerreaktionen $\vec{F}_A$ und $\vec{F}_B$ sind wegen der Symmetrie gleich groß, Bild 10.5b. Wir setzen den abgeschnittenen linken Teil ins Gleichgewicht, Bild 10.5c. Dabei ist es einfacher, mit der Resultierenden $q \cdot x$ aus der Teilstreckenlast zu arbeiten.

$$\downarrow \quad -F_A + q \cdot x + F_Q = 0 \;\rightarrow\; F_Q = F_A - q \cdot x = \frac{q}{2}(l - 2x) \quad \text{(Gerade)}$$

$$\curvearrowleft \mathrm{I} \quad -F_A \cdot x + q \cdot x \cdot \frac{x}{2} + M_b = 0 \;\rightarrow\; M_b = F_A \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{q}{2}\left(l \cdot x - x^2\right)$$

(quadratische Parabel)

$$M_b\,(x = 0) = M_b\,(x = l) = 0$$

$$M_b\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{4}\right) = \frac{q \cdot l^2}{8}$$

Bild 10.5 d und e zeigen die Verläufe.

> Zusätzliche Erkenntnis:
> - Für q = konstant verläuft F_Q linear und M_b parabelförmig.

Wir vergleichen die Ergebnisse aus den beiden Standardfällen:

	Einzelkraft		Streckenlast
	links	rechts	
F_Q	$F \cdot \frac{b}{l}$	$F \cdot \left(\frac{b}{l} - 1\right)$	$\frac{q}{2} \cdot (l - 2x)$
M_b	$F \cdot \frac{b}{l} \cdot x$	$F \cdot \left(\frac{b}{l} - 1\right) \cdot x + F \cdot a$	$\frac{q}{2} \cdot \left(l \cdot x - x^2\right)$

Es zeigt sich: F_Q ist die Ableitung von M_b, bzw. M_b das Integral von F_Q! Gilt das allgemein?

Um dies zu klären, schneiden wir aus dem Balken in Bild 10.6 a ein infinitesimal kurzes Stück heraus, Bild 10.6 b. Die eingezeichneten Schnittgrößen sind an beiden Schnittflächen positiv eingezeichnet; am rechten Schnittufer sind sie infinitesimal größer als am linken. Die Streckenlast fassen wir zur Resultierenden $q \cdot \mathrm{d}x$ zusammen.

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\downarrow \qquad \underbrace{-F_Q}_{\text{links}} + q \cdot \mathrm{d}x + \underbrace{F_Q + \mathrm{d}F_Q}_{\text{rechts}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}F_Q}{\mathrm{d}x} = -q$$

$$\circlearrowleft \mathrm{I} \qquad \underbrace{-M_b - F_Q \cdot \frac{\mathrm{d}x}{2}}_{\text{links}} \underbrace{- \left(F_Q + \mathrm{d}F_Q\right) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{2} + M_b + \mathrm{d}M_b}_{\text{rechts}} = 0$$

$$\rightarrow \quad -F_Q \cdot \mathrm{d}x - \underbrace{\mathrm{d}F_Q \cdot \frac{\mathrm{d}x}{2}}_{=0} + \mathrm{d}M_b = 0$$

Der zweite Term darf null gesetzt werden, da er gegenüber den anderen beiden Termen um eine Ordnung kleiner ist. Wir erhalten:

$$\frac{\mathrm{d}M_b}{\mathrm{d}x} = F_Q$$

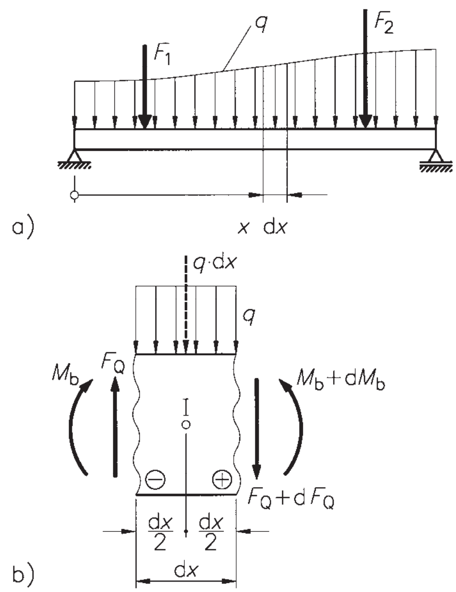

Bild 10.6 Zusammenhang zwischen q, F_Q und M_b
a) Gesambalken
b) herausgeschnittenes Stück

Zusammenhang zwischen q, F_Q und M_b:

$$\frac{\mathrm{d}F_Q}{\mathrm{d}x} = -q \tag{10.1 a}$$

$$\frac{\mathrm{d}M_b}{\mathrm{d}x} = F_Q \tag{10.1 b}$$

bzw.

$$F_Q = -\int q \cdot \mathrm{d}x + C \tag{10.2 a}$$

$$M_b = \int_{x=0}^{x} F_Q \cdot \mathrm{d}x \tag{10.2 b}$$

Der M_b-Verlauf lässt sich mit (10.2 b) auch über die Integration des F_Q-Verlaufs finden. Diese Methode ist in vielen Fällen einfacher als die Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen.

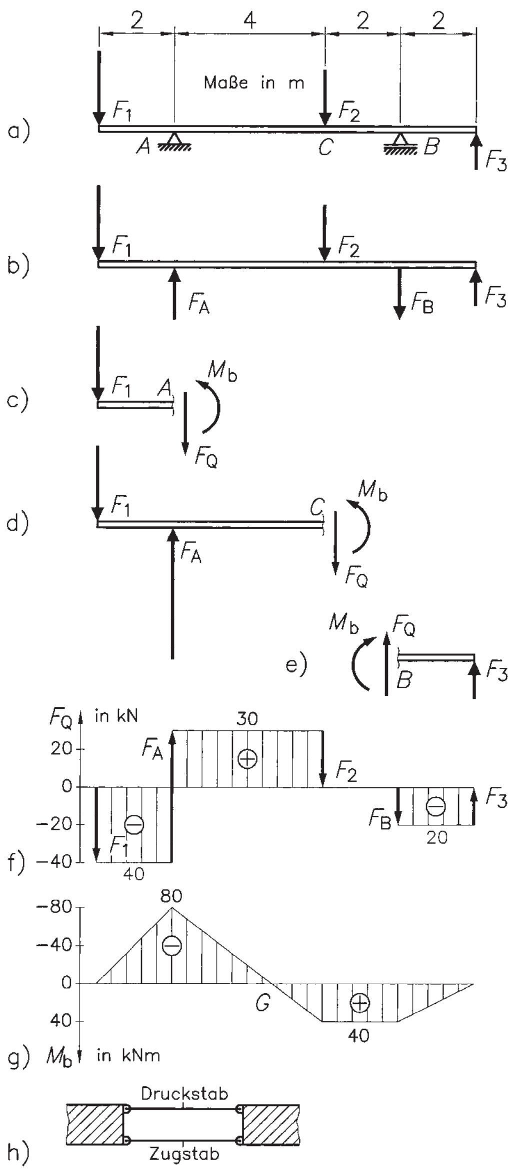

Bild 10.7 Balken aus Beispiel 10.1
a) Anordnung
b) freigemacht, mit Lagerreaktionen
c) Schnitt unmittelbar links von A
d) Schnitt unmittelbar links von C
e) Schnitt unmittelbar rechts von B
f) F_Q-Diagramm
g) M_b-Diagramm
h) mögliche Balkenverbindung im Abschnitt C-B

Beispiel 10.1

Für den Träger gemäß Bild 10.7a sind das F_Q- und M_b-Diagramm zu erstellen. Zahlenwerte: $F_1 = 40$ kN; $F_2 = 30$ kN; $F_3 = 20$ kN.

Lösung:
Wir führen nacheinander folgende Schritte aus:

1. Lagerreaktionen berechnen.
2. F_Q-Diagramm zeichnen, indem wir von links nach rechts laufend die Kräfte aneinanderhängen.
3. M_b-Diagramm erstellen
   a) mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen am abgeschnittenen Teilbalken,
   b) über die Integration des F_Q-Verlaufs.

Lagerreaktionen

Die Lagerreaktionen kann man mit beliebigem Richtungssinn einzeichnen. Ich trage sie hier jedoch so auf, wie sie vermutlich wirken werden, Bild 10.7b.

$$\circlearrowleft B \quad (F_1 \cdot 8 - F_A \cdot 6 + F_2 \cdot 2 + F_3 \cdot 2)\ \text{m} = 0$$

$$\rightarrow \quad F_A = \frac{1}{6}(F_1 \cdot 8 + F_2 \cdot 2 + F_3 \cdot 2)\ \text{kN} = 70\ \text{kN}$$

$$\circlearrowleft A \quad (F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot 4 - F_B \cdot 6 + F_3 \cdot 8)\ \text{m} = 0$$

$$\rightarrow \quad F_B = \frac{1}{6}(F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot 4 + F_3 \cdot 8)\ \text{kN} = 20\ \text{kN}$$

Kontrolle:

$$\uparrow \quad (-40 + 70 - 30 - 20 + 20)\ \text{kN} = 0$$

F_Q-Diagramm

Wir tragen die Kräfte gemäß Bild 10.7f auf.

M_b-Diagramm

An den freien Balkenenden ist M_b null; zwischen zwei Einzelkräften verläuft M_b linear. Zum Zeichnen genügen somit die M_b-Werte an den Angriffspunkten der Kräfte.

a) Mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen:
   Schnitt unmittelbar links von A, Bild 10.7c:

$$\circlearrowleft A \quad F_1 \cdot 2\ \text{m} + M_b = 0 \quad \rightarrow \quad M_b = -80\ \text{kNm}$$

Schnitt unmittelbar links von C, Bild 10.7d:

$$\circlearrowleft C \qquad F_1 \cdot 6\text{ m} - F_\text{A} \cdot 4\text{ m} + M_\text{b} = 0 \quad \rightarrow \quad M_\text{b} = 40\text{ kNm}$$

Schnitt unmittelbar rechts von B, Bild 10.7e:

In diesem Fall ist es einfacher, den rechten Balkenteil zu nehmen. Die Schnittgrößen sind mit umgedrehten Richtungen gegenüber dem linken Teil einzutragen.

$$\circlearrowleft B \qquad -M_\text{b} + F_3 \cdot 2\text{ m} = 0 \quad \rightarrow \quad M_\text{b} = 40\text{ kNm}$$

Bild 10.7g zeigt den M_b-Verlauf.

b) Über die Integration des F_Q-Verlaufs, Gleichung (10.2 b):

$$M_\text{b} = \int_{x=0}^{x} F_\text{Q} \cdot \text{d}x$$

Die Integration entspricht der Flächenberechnung im F_Q-Diagramm. Wir fangen am linken Ende an und berechnen die Flächen jeweils vom linken Ende bis zum Kraftangriffspunkt. Bei Einzelkräften kommen nur Rechteckflächen vor.

Moment bei A:

$$M_\text{b} = -40\text{ kN} \cdot 2\text{ m} = -80\text{ kNm}$$

Moment bei C:

$$M_\text{b} = -80\text{ kNm} + 30\text{ kN} \cdot 4\text{ m} = 40\text{ kNm}$$

Von C bis B kommt keine Fläche hinzu, das Moment ist auf diesem Abschnitt konstant.

Kontrollliste:
1. F_Q beginnt am linken freien Balkenende mit null und geht am rechten freien Balkenende wieder auf null zurück.
2. M_b ist an den freien Balkenenden null.
3. An den Stellen M_b = konst. gilt $F_\text{Q} = \text{d}M/\text{d}x = 0$ (zwischen C und B).
4. An jedem Nulldurchgang von F_Q besitzt M_b ein Extremum (bei A und zwischen C und B).
5. Beim geraden Balken mit freien Balkenenden und Querbelastung sind positive und negative F_Q-Fläche gleich groß.

Hinweis: Es würde die Kraftübertragung nicht beeinflussen, wenn wir bei G ein Gelenk, Bild 10.7g, und im Abschnitt C-B eine Verbindung gemäß Bild 10.7h einbauen würden.

Beispiel 10.2

Für den Träger gemäß Bild 10.8 a sind das F_Q- und M_b-Diagramm allgemein in Abhängigkeit von q und l zu erstellen.

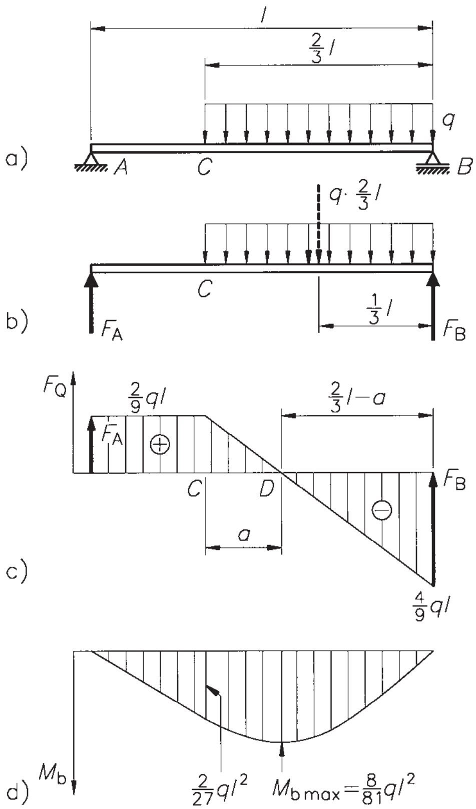

Bild 10.8 Balken aus Beispiel 10.2
a) Anordnung
b) Balken mit Lagerreaktionen und resultierender Streckenlast
c) F_Q-Diagramm
d) M_b-Diagramm

Lösung:

Lagerreaktionen

Zur Berechnung der Lagerreaktionen darf die Streckenlast durch ihre Resultierende $q \cdot 2l/3$, mittig wirkend, ersetzt werden, Bild 10.8 b.

$$\circlearrowleft B \qquad -F_A \cdot l + q \cdot \frac{2}{3} l \cdot \frac{l}{3} = 0 \quad \rightarrow \quad F_A = \frac{2}{9} ql$$

$$\circlearrowleft A \qquad F_B \cdot l - q \cdot \frac{2}{3} l \cdot \frac{2}{3} l = 0 \quad \rightarrow \quad F_B = \frac{4}{9} ql$$

F_Q-Diagramm, Bild 10.8c

Wir beginnen wieder am linken Ende mit der Lagerreaktion $\vec{F}_A$. Bei C beginnt die Querkraft linear abzunehmen. Den zweiten Punkt auf dieser Geraden erhalten wir bei B: Hier muss die Lagerreaktion $\vec{F}_B$ auf null zurückführen.

Der Nulldurchgang folgt aus dem Streckenverhältnis:

$$\frac{a}{\frac{2}{3}l - a} = \frac{F_A}{F_B} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad 2a = \frac{2}{3} l - a \quad \rightarrow \quad a = \frac{2}{9} l$$

M_b-Diagramm, Bild 10.8 d

An den Balkenenden ist M_b null. Weitere Werte berechnen wir mit Hilfe der F_Q-Fläche.

Moment bei C:

$$M_b = \frac{2}{9}\, ql \cdot \frac{l}{3} = \frac{2}{27}\, ql^2$$

Moment bei D (maximales Moment, wegen $F_Q = 0$):

$$M_{b\,max} = \frac{2}{27} ql^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} ql \cdot a = \frac{2}{27} ql^2 + \frac{ql}{9} \cdot \frac{2}{9} l$$

$$M_{b\,max} = \frac{8}{81} ql^2$$

Weil die F_Q-Fläche insgesamt null ist, kommen wir zum selben Ergebnis auch vom rechten Balkenende her; nur das Vorzeichen müssen wir umpolen:

$$M_{bl} + M_{br} = 0 \quad \rightarrow \quad M_{br} = -M_{bl}$$

Konkret für dieses Beispiel heißt das:

$$M_{\mathrm{br}} = \frac{1}{2} \cdot \left(-F_{\mathrm{B}}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\,l - a\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}\,ql \left(\frac{2}{3}\,l - \frac{2}{9}\,l\right)$$

$$M_{\mathrm{br}} = -\frac{8}{81}\,ql^2$$

Mit den M_{b}-Werten bei C, D und B lässt sich die quadratische Parabel zeichnen. Der Übergang bei C von der Geraden in die Parabel ist knickfrei.

Beispiel 10.3

Bild 10.9 a gibt einen Balken mit Dreieck-Streckenlast wieder. Dreht man das Bild um 90°, sodass die Spitze nach oben zeigt, stellt es z. B. die Belastung eines Schleusentores oder einer Staumauer infolge Wasserdrucks dar.

Es sind wieder das F_{Q}- und M_{b}-Diagramm zu zeichnen (l und q_0 sind gegeben).

Lösung:

Lagerreaktionen, Bild 10.9 b

Die Resultierende der Streckenlast beträgt

$$F_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2} \cdot q_0 \cdot l\,.$$

Sie wirkt im Schwerpunkt des Dreiecks, also im Abstand $l/3$ von B.

$$\text{(B)} \quad -F_{\mathrm{A}} \cdot l + \frac{q_0 \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{3} = 0 \quad \rightarrow \quad F_{\mathrm{A}} = \frac{q_0 \cdot l}{6}$$

$$\text{(A)} \quad F_{\mathrm{B}} \cdot l - \frac{q_0 \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3}\,l = 0 \quad \rightarrow \quad F_{\mathrm{B}} = \frac{q_0 \cdot l}{3} = 2F_{\mathrm{A}}$$

Schnittgrößen

Wir berechnen die Schnittgrößen mit (10.2), ausgehend von

$$q = q(x) = \frac{q_0}{l} \cdot x \qquad \text{(Gerade, Bild 10.9 c).}$$

$$F_{\mathrm{Q}} = -\int q \cdot \mathrm{d}x + C = -\int \frac{q_0}{l} \cdot x \cdot \mathrm{d}x + C = -\frac{q_0 \cdot x^2}{2l} + C$$

Bei $x = 0$ fängt F_{Q} mit $F_{\mathrm{A}} = q_0 \cdot l/6$ an. Diese Information setzen wir in die Gleichung für F_{Q} ein und erhalten

$$C = F_{\mathrm{A}} = \frac{q_0 \cdot l}{6}\,.$$

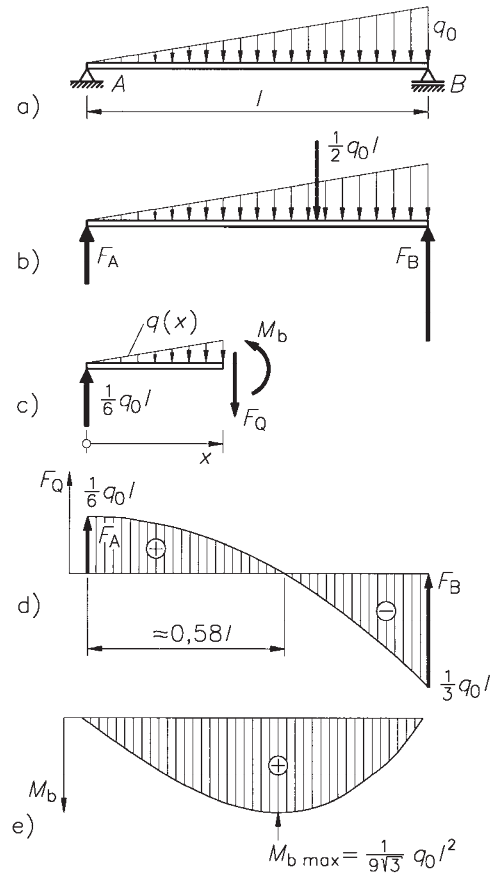

Bild 10.9 Balken aus Beispiel 10.3
a) Anordnung
b) Balken mit Lagerreaktionen und resultierender Streckenlast
c) Schnitt bei x
d) F_{Q}-Diagramm
e) M_{b}-Diagramm

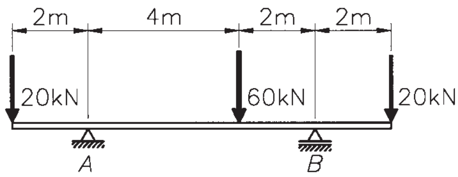

Bild 10.10 Träger aus Übung 10.1

Somit lautet der F_Q-Verlauf zwischen den Lagern:

$$F_Q = \frac{q_0 \cdot l}{6} - \frac{q_0}{2l} \cdot x^2 = \frac{q_0 \cdot l}{6} \left[1 - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad \text{(quadratische Parabel, Bild 10.9d)}$$

Am rechten Ende führt die Lagerreaktion $\vec{F}_B$ wieder auf null zurück.

Der Nulldurchgang liegt bei

$$1 - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{l}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58l$$

M_b-Verlauf:

$$M_b = \int_{x=0}^{x} F_Q \cdot \mathrm{d}x = \frac{q_0 \cdot l}{6} \int_{x=0}^{x} \left[1 - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \mathrm{d}x$$

$$M_b = \frac{q_0 \cdot l}{6} \left[x - l \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right] \Bigg|_0^x$$

$$M_b = \frac{q_0 \cdot l}{6} \cdot x \cdot \left[1 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad \text{(kubische Parabel, Bild 10.9e)}$$

$$M_{b\,\max} = M_b \left(x = \frac{l}{\sqrt{3}} \right) = \frac{q_0 \cdot l}{6} \cdot \frac{l}{\sqrt{3}} \left[1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{q_0 \cdot l^2}{9\sqrt{3}}$$

Übung 10.1

Zeichnen Sie für den Träger gemäß Bild 10.10 das F_Q- und M_b-Diagramm.

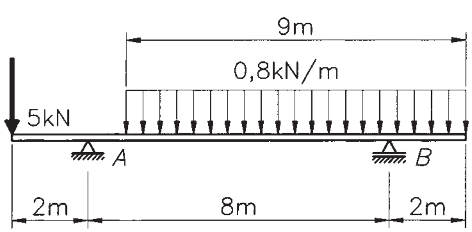

Bild 10.11 Träger aus Übung 10.2

Übung 10.2

Bestimmen Sie für den Träger gemäß Bild 10.11:

1. das F_Q-Diagramm
2. die Biegemomente in den Nulldurchgängen von F_Q sowie das Betragsmaximum von M_b.

10.2 Der eingespannte Balken

Die Unterschiede zum Balken auf zwei Stützen werden am folgenden Zahlenbeispiel deutlich.

Beispiel 10.4

Für den Balken in Bild 10.12 a wollen wir das F_Q- und M_b-Diagramm erstellen. An der Vorzeichendefinition ändert sich gegenüber dem Balken auf zwei Stützen nichts, Bild 10.12 b.

Lösung:

Wir fangen am freien Ende an, dann erübrigt sich die Berechnung der Lagerreaktionen. Diese ergeben sich vielmehr automatisch im F_Q- und M_b-Diagramm.

Das F_Q-Diagramm entsteht wie bisher durch das Aneinanderhängen der Kräfte, Bild 10.12 c. An der Einspannung A führt die Lagerreaktion $\vec{F}_A$ wieder auf null zurück.

Das M_b-Diagramm in Bild 10.12 d ergibt sich über die F_Q-Fläche oder mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen am linken abgeschnittenen Balkenteil. Prüfen Sie die Zahlenwerte zur Übung nach.

Es fällt auf:

Beim eingespannten Balken sind positive und negative F_Q-Fläche im Allgemeinen nicht gleich groß. Dementsprechend ist M_b am eingespannten Balkenende im Allgemeinen nicht null, sondern gleich dem Einspannmoment.

Die bisher behandelten Standardfälle und viele weitere finden Sie im Anhang A3.1.

Statisch unbestimmte Fälle sind in A14.2 aufgelistet.

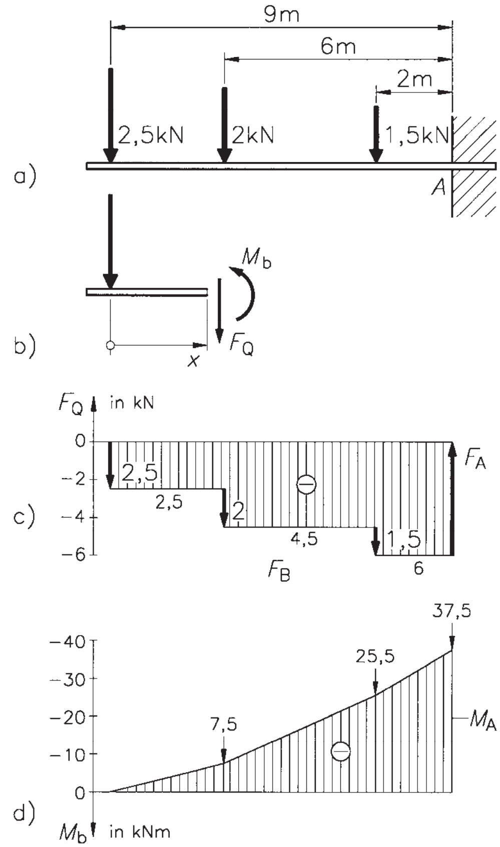

Bild 10.12 Eingespannter Balken, Beispiel 10.4
a) Anordnung
b) Definition von x-Achse und Schnittgrößen
c) F_Q-Diagramm
d) M_b-Diagramm

10.3 GERBER-Träger

Die analytische Lösung läuft wie bisher ab. Beim M_b-Verlauf ist darauf zu achten, dass die Momente in den Gelenken null sind.

Beispiel 10.5

Für den Träger gemäß Bild 10.13 a zeichne man das F_Q- und M_b-Diagramm. Zahlenwerte: $F_1 = 1$ kN; $F_2 = 2$ kN; $F_3 = 3$ kN; $F_4 = 2$ kN.

Lösung:

Als Erstes benötigen wir die Lagerreaktionen gemäß Bild 10.13 b. Hierzu Kap. 7.3. Die Gelenkkräfte brauchen wir nicht zu bestimmen; sie können direkt aus dem F_Q-Diagramm herausgelesen werden.

Wir schneiden den linken Teil bei G_1 ab und setzen ihn ins Gleichgewicht:

$$\circlearrowleft G_1 \quad -F_A \cdot 3\text{ m} + F_1 \cdot 1{,}5\text{ m} = 0 \quad \rightarrow \quad F_A = \frac{F_1 \cdot 1{,}5\text{ m}}{3\text{ m}} = 0{,}5\text{ kN}$$

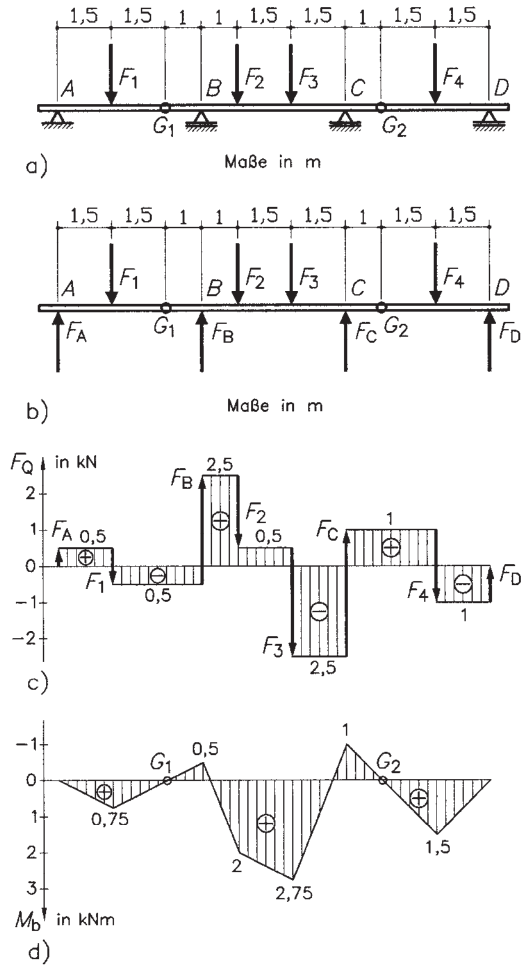

Bild 10.13 GERBER-Träger aus Beispiel 10.5
a) Anordnung
b) freigemacht
c) F_Q-Diagramm
d) M_b-Diagramm

Jetzt schneiden wir den rechten Teil bei G_2 ab und setzen ihn ins Gleichgewicht:

$$\circlearrowleft G_2 \quad F_D \cdot 3\,\text{m} - F_4 \cdot 1{,}5\,\text{m} = 0 \quad \rightarrow \quad F_D = \frac{F_4 \cdot 1{,}5\,\text{m}}{3\,\text{m}} = 1\,\text{kN}$$

Im dritten Schritt wenden wir die Gleichgewichtsbedingungen auf den kompletten Träger an:

$$\circlearrowleft C$$

$$(-F_A \cdot 8 + F_1 \cdot 6{,}5 - F_B \cdot 4 + F_2 \cdot 3 + F_3 \cdot 1{,}5 - F_4 \cdot 2{,}5 + F_D \cdot 4)\,\text{m} = 0$$

$$\rightarrow F_B = \tfrac{1}{4}(-F_A \cdot 8 + F_1 \cdot 6{,}5 + F_2 \cdot 3 + F_3 \cdot 1{,}5 - F_4 \cdot 2{,}5 + F_D \cdot 4) = 3\,\text{kN}$$

$$\circlearrowleft B$$

$$(-F_A \cdot 4 + F_1 \cdot 2{,}5 - F_2 \cdot 1 - F_3 \cdot 2{,}5 + F_C \cdot 4 - F_4 \cdot 6{,}5 + F_D \cdot 8)\,\text{m} = 0$$

$$\rightarrow F_C = \tfrac{1}{4}(F_A \cdot 4 - F_1 \cdot 2{,}5 + F_2 \cdot 1 + F_3 \cdot 2{,}5 + F_4 \cdot 6{,}5 - F_D \cdot 8) = 3{,}5\,\text{kN}$$

Kontrolle: $\uparrow \quad (0{,}5 - 1 + 3 - 2 - 3 + 3{,}5 - 2 + 1)\,\text{kN} = 0$

Im F_Q-Diagramm hängen wir in gewohnter Weise die Pfeile aneinander, Bild 10.13 c. Die Gelenkkräfte entnehmen wir zu $F_{G1} = 0{,}5$ kN und $F_{G2} = 1$ kN.

Das M_b-Diagramm, Bild 10.13 d, ergibt sich am einfachsten dadurch, dass wir die F_Q-Flächen vom linken Ende bis zur jeweiligen Kraft berechnen und die Stützpunkte geradlinig verbinden. Prüfen Sie die Zahlenwerte nach.

Wir halten fest:
– An den Gelenken sind die Momente null.
– Die Gelenkkräfte ergeben sich unmittelbar aus dem F_Q-Diagramm.

Übung 10.3

Bestimmen Sie für den GERBER-Träger mit Einspannung, Bild 10.14:

1. Lagerreaktion $\vec{F}_A$
2. F_Q-Diagramm
3. M_b-Diagramm
4. Lagerreaktionen in der Einspannung ($\vec{F}_B$ und $\vec{M}_B$) sowie die Kraft im Gelenk G

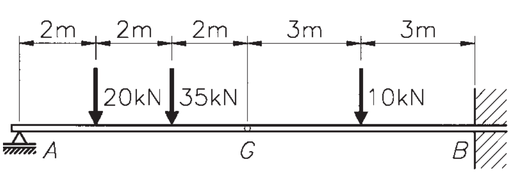

Bild 10.14 GERBER-Träger mit Einspannung, Übung 10.3

10.4 Bogenträger

Bild 10.15 zeigt als einfachsten Fall den Kreisbogenträger mit symmetrischer Einzelkraft. Der prinzipielle Lösungsweg bleibt auch bei komplizierteren Fällen derselbe.

Bei Kreisbogenträgern eignet sich als Koordinate der Winkel φ. Die Schnittgrößen hängen dann von φ ab.