

# Drehstrommaschinen im Inselbetrieb

Modellbildung - Parametrierung - Simulation

Bearbeitet von  
Hartmut Mrugowsky

2., überarbeitete und erweiterte Auflage 2015. Buch. XVIII, 250 S. Kartoniert

ISBN 978 3 658 08989 4

Format (B x L): 16,8 x 24 cm

Gewicht: 448 g

[Weitere Fachgebiete > Technik > Energietechnik, Elektrotechnik > Elektromotoren](#)

Zu [Inhaltsverzeichnis](#)

schnell und portofrei erhältlich bei

**beck-shop.de**  
DIE FACHBUCHHANDLUNG

Die Online-Fachbuchhandlung beck-shop.de ist spezialisiert auf Fachbücher, insbesondere Recht, Steuern und Wirtschaft. Im Sortiment finden Sie alle Medien (Bücher, Zeitschriften, CDs, eBooks, etc.) aller Verlage. Ergänzt wird das Programm durch Services wie Neuerscheinungsdienst oder Zusammenstellungen von Büchern zu Sonderpreisen. Der Shop führt mehr als 8 Millionen Produkte.

## Zusammenfassung

Betrachtet wird eine Drehstrom-Synchronmaschine mit einer Drehstromwicklung im Ständer und einem achsensymmetrischen Rotor, der sowohl in der Längs- als auch in der Querachse je eine kurzgeschlossene Dämpfer- und eine von außen zugängliche Erregerwicklung besitzt. Es gelten die üblichen Annahmen und Voraussetzungen (keine Sättigung, keine Stromverdrängung, keine Hysterese, Grundwellenverkettung). Für diese verallgemeinerte, lineare Drehstrommaschine wird das mathematische Modell mit den Flussverkettungen als Zustandsgrößen in Zwei-Achsen-Darstellung und bezogenen Größen abgeleitet. Durch Übergang zu den Strömen als Zustandsgrößen sowie die Trennung in Ständer- und Läufergleichungen erhält man ein für die effektive Berechnung besser geeignetes mathematisches Modell. Mit diesem Modell lassen sich durch gleiche Rotorparameter in Längs- und Querachse auch Drehstrom-Asynchronmaschinen mit Einfach- oder Doppelkäfig im Rotor oder mit Schleifringläufer nachbilden. Das Modell der üblichen Drehstrom-Synchronmaschine mit nur einer Erregerwicklung in der Längsachse erhält man durch Grenzübergang bei den Parametern der Quer-Eerregerwicklung.

## 2.1 Voraussetzungen und Annahmen

Betrachtet wird eine Drehstrom-Schenkelpolmaschine mit einer dreisträngigen Ankerwicklung im Stator und dem Polsystem im Rotor, also eine Innenpolmaschine nach Abb. 1.1, 1.2 und 1.3. Das ist bezüglich der Außenpolmaschinen nach Abb. 1.5 keine Einschränkung, da für die Funktion und das Betriebsverhalten nur die Relativbewegung zwischen Stator und Rotor von Bedeutung ist. Stator und Rotor sollen rotationssymmetrisch und jedes Polpaar auch gleichartig und achsensymmetrisch bezüglich Polachse und Pollücke ausgeführt sein. Da das Ankerblechpaket im Stator (bei Außenpolmaschinen im

Rotor) und wenigstens auch die Polschuhe des Polsystems aus dünnen, gegeneinander isolierten, nicht kornorientierten Elektroblechen mit geringen spezifischen Ummagnetisierungsverlusten bestehen, sollen bei den hier betrachteten üblichen Frequenzen und Aussteuerungen die Hysterese- und Wirbelstromverluste im Eisen vernachlässigt werden. Auch die vom Aussteuerungszustand abhängige magnetische Sättigung bleibt vorerst unberücksichtigt, worauf der Begriff „linear“ hindeuten soll.

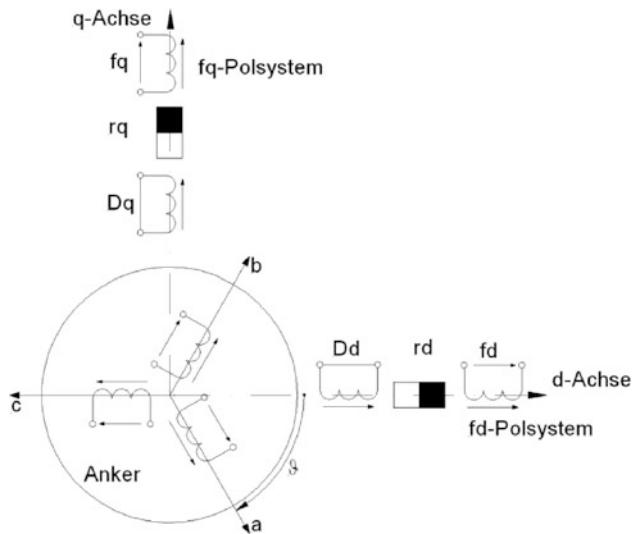
Die drei Wicklungsstränge des Ankers mit ihren  $z_p$  Teilsträngen sind gleich aufgebaut und innerhalb eines Polpaars um jeweils  $120^\circ$  versetzt am Umfang der Ankeroberfläche angeordnet (Drehstromwicklung). Das Polsystem besitzt  $2z_p$  ausgeprägte Pole, auf denen die Erregerwicklung untergebracht ist. In den Polschuhen befinden sich meist über Laschen verbundene Dämpferstäbe, die einen mehr oder weniger vollständigen Dämpferkäfig bilden. Durch die Form der Polschuhe sowie eine geeignete Nutzuordnung (ZW,  $q_1 > 1$ , Sehnung) sowie Reihen- und/oder Parallelschaltung der Teilspulen der Ankerwicklung wird einerseits vom Polsystem ein weitgehend sinusförmiges,  $z_p$ -welliges Luftspaltfeld und andererseits eine bezüglich der Ankerstränge weitgehend sinusförmige induzierte Spannung und bei Belastung auch eine weitgehend sinusförmige Ankerrückwirkung erreicht. Die verbleibenden Oberwellen der Durchflutungs- und der Induktionsverteilung im Luftspalt sowie die dadurch in den Wicklungen beiderseits des Luftspaltes induzierten Spannungen werden vernachlässigt. Als magnetische Kopplung zwischen der Ankerwicklung und den Wicklungen des Polsystems wird also lediglich die mit der synchronen Drehzahl  $n_0$  nach Gl. 1.1 umlaufende Grundwelle der Induktionsverteilung wirksam (Prinzip der Grundwellenverkettung [1]), ihr mit den Wicklungen beiderseits des Luftspaltes verketteter Fluss stellt den Hauptfluss dar. Alle anderen mit einer Wicklung verketteten Flüsse derselben Luftspaltseite sind von der Stellung und Bewegung von Anker und Polsystem zueinander unabhängig und werden zu ihrem Streufluss gerechnet.

Da sich bei Maschinen mit höherer Polpaarzahl die Anordnung der Pole und der Nuten mit ihren Wicklungen längs des Umfanges in guter Näherung und für sogenannte Ganzlochwicklungen auch exakt  $z_p$ -mal wiederholt und die elektromagnetischen Vorgänge im Luftspalt, im Eisen und in den Wicklungen infolge des symmetrischen Aufbaus und der Anwendung des Prinzips der Grundwellenverkettung pro Polpaar gleich sind, genügt es, nachfolgend nur ein Polpaar, oder anders ausgedrückt, eine zweipolare Modellmaschine zu betrachten, dargestellt in Abb. 2.1 als idealisierte Außenpolmaschine. Die Lage des Ankers relativ zum Polsystem wird durch den Drehwinkel  $\vartheta = \vartheta_m$  zwischen der positiven d-Achse und dem Ankerstrang a charakterisiert.

Die dreisträngige Ankerwicklung wird bei der Modellmaschine als in Stern geschaltet vorausgesetzt. Das ist jedoch keine Einschränkung, da sich bei Zugrundelegung des Prinzips der Grundwellenverkettung symmetrische Dreieckschaltungen exakt in äquivalente Sternschaltungen umwandeln lassen.

Der Dämpferkäfig wird durch je eine kurzgeschlossene Ersatzwicklung pro Achse, gekennzeichnet durch  $D_d$  bzw.  $D_q$ , die zusammen das gleiche Grundwellenverhalten wie der Käfig aufweisen sollen, ersetzt. Auch wenn ein Dämpfer- oder Anlaufkäfig real nicht ausgeführt ist, besteht doch bei Flussänderungen in massiven Eisenteilen des Polsystems

**Abb. 2.1** Idealisierte Darstellung der verallgemeinerten Drehstrom-Synchronmaschine in Außenpolbauform mit je einer Erreger- und Dämpferwicklung in Längs- und Querachse



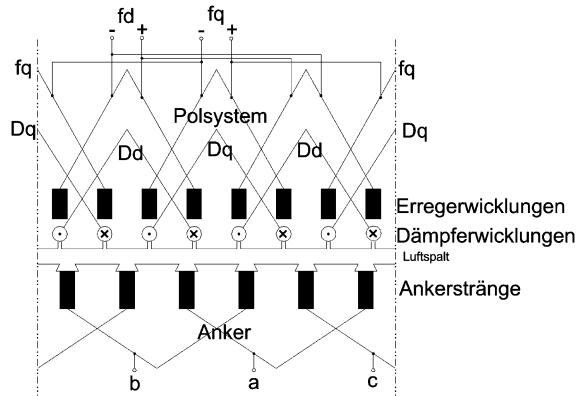
infolge der dann auftretenden Wirbelströme ein mehr oder weniger deutliches Dämpfungsverhalten, das sich durch die Ersatz-Dämpferkreise ebenfalls näherungsweise berücksichtigen lässt.

Die mit  $rd$  und  $rq$  bezeichneten Ersatzmagnete charakterisieren achsenbezogen eine Remanenzdurchflutung  $\Theta_{rd}$  bzw.  $\Theta_{rq}$ , verursacht durch dauernde einseitige Magnetisierung oder durch im Polsystem speziell eingebaute Permanentmagnete, etwa bei PM-erregten Synchronmaschinen.

Elektrisch erregte Synchronmaschinen besitzen üblicherweise nur die in der Längs- oder d-Achse den Polen zugeordnete Erregerwicklung  $fd$ . Zur Verallgemeinerung und weil es einfacher ist, eine Wicklung im mathematischen Modell durch Grenzübergang unwirksam zu machen als später eine zusätzliche Wicklung einzuführen, wird hier auch in der Quer- oder q-Achse eine von außen zugängliche  $fq$ -Erregerwicklung berücksichtigt. Besonders gut vorstellbar ist diese Erweiterung, auf den sich der Begriff „verallgemeinerte“ lineare Drehstrommaschine bezieht, für eine Synchronmaschine mit Vollpolläufer analog Abb. 1.3 mit einer verteilten  $fd$ -Erregerwicklung, bei der die beiden Seiten der  $fq$ -Erregerwicklung in die Lücke der  $fd$ -Polmitten eingefügt sind. Abbildung 2.2 zeigt schematisch eine solche Ersatzanordnung für die Drehstrommaschine mit dreisträngiger Ankerwicklung sowie mit je einer Erreger- und Ersatz-Dämpferwicklung in Längs- und Querachse als Abwicklung längs des Luftpaltes. Die verteilten Wicklungen sind jeweils auf je eine Spule mit nur einer Nut je Spulenseite vereinfacht; durch Kreuze (×) sind die Anfangs- und durch Punkte (●) die Endseiten der Spulen gekennzeichnet.

Diese idealisierte verallgemeinerte Modellmaschine eignet sich sowohl zur Beschreibung des Betriebsverhaltens einer Drehstrom-Synchronmaschine als auch ohne Einschränkungen einer Drehstrom-Asynchronmaschine mit Schleifring- oder Käfigläufer.

**Abb. 2.2** Verallgemeinerte Drehstrommaschine als Abwicklung längs des Luftpaltes



Dreisträngige Schleifringläuferwicklungen und Rotorkäfige können dafür in zweisträngig-achsenbezogene äquivalente Ersatzwicklungen umgerechnet werden. Mitunter ist es aber bei Asynchronmaschinen vorteilhafter, die Rotorwicklungen in dreisträngige Ersatzwicklungen zu überführen. Auf diese und andere Besonderheiten der Asynchronmaschine gegenüber der Synchronmaschine, die für die Modellerstellung und -handhabung wichtig sind, wird an den betreffenden Stellen und speziell in Kap. 6 eingegangen.

## 2.2 Spannungsgleichungen für die Ankerstränge

Die Spannungsgleichungen für die drei in Stern geschalteten, gleich ausgeführten Ankerstränge a, b und c lauten im Verbraucher-Zählpfeilsystem mit den in den drei Strängen gleichen Strangwiderständen  $R_a$

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} = R_a \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Bei der Ermittlung der Flussverkettungen ist wegen der im Polsystem möglichen magnetischen Asymmetrie („Schenkeligkeit“) und der den magnetischen Symmetrieachsen d und q zugeordneten Wicklungen die relative Lage zwischen Polsystem und Anker zu berücksichtigen. Dazu wird unter Beachtung des Prinzips der Grundwellenverkettung und des Verdrehwinkels  $\vartheta = \vartheta_m$  zwischen positiver d-Achse und Ankerstrang a die Grundwelle der Ankerdurchflutungsverteilung in eine Längs- und eine Querkomponente zerlegt, dargestellt als fiktive Achsenströme  $i_d$  und  $i_q$ :

$$\begin{aligned} i_d &= \frac{2}{3} \left( i_a \cos \vartheta + i_b \cos \left( \vartheta - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \cos \left( \vartheta - \frac{4\pi}{3} \right) \right) \\ i_q &= \frac{2}{3} \left( -i_a \sin \vartheta - i_b \sin \left( \vartheta - \frac{2\pi}{3} \right) - i_c \sin \left( \vartheta - \frac{4\pi}{3} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Aus den auf die Stränge bezogenen Summen der achsenbezogenen Flusskomponenten von Anker-, Ersatz-Dämpfer- und Erregerwicklungen sowie ergänzt durch den gleichphasigen Streufluss des Nullstromes

$$i_0 = \frac{1}{3}(i_a + i_b + i_c) \quad (2.3)$$

erhält man die Flussverkettungen der drei Ankerstränge zu

$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} = [L_d i_d + L_{aDd} i_{Dd} + L_{afd} i_{fd} + L_{hd} i_{rd}] \begin{bmatrix} \cos \vartheta \\ \cos(\vartheta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\vartheta - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix} - [L_q i_q + L_{aDq} i_{Dq} + L_{afq} i_{fq} + L_{hd} i_{rq}] \begin{bmatrix} \sin \vartheta \\ \sin(\vartheta - \frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\vartheta - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix} + L_0 \begin{bmatrix} i_0 \\ i_0 \\ i_0 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Die in Gl. 2.4 auftretenden Induktivitäten  $L_d$  und  $L_q$  stellen die Selbstinduktivitäten der Ankerwicklung bezüglich der beiden Achsen dar. Sie werden als synchrone Längs- bzw. synchrone Querinduktivität bezeichnet und setzen sich jeweils aus der ständerbezogenen Gegen- oder Hauptinduktivität der Achse  $L_{hd}$  und  $L_{hq}$  und der von der Lage des Polsystems unabhängigen Streuinduktivität der Ständerwicklung  $L_{\sigma a}$  zusammen

$$L_d = L_{hd} + L_{\sigma a} \quad \text{und} \quad L_q = L_{hq} + L_{\sigma a}. \quad (2.5)$$

Die Gegeninduktivitäten  $L_{hd}$ ,  $L_{aDd}$ ,  $L_{afd}$  und  $L_{hq}$ ,  $L_{aDq}$ ,  $L_{afq}$  charakterisieren den magnetischen Kreis für die Hauptflusskomponenten und den Anteil, den die Ströme in der Anker- sowie der Ersatz-Dämpfer- und der Erregerwicklung von d- und q-Achse zur Flussverkettung jedes Ankerstranges beitragen. Der Index a kennzeichnet den Bezug der Größe zur Ankerwicklung, bei den Ankergrößen selbst wird der Index meist weggelassen. Die Wirkung von Permanentmagneten oder eines Remanenzflusses  $\Phi_{rd}$  bzw.  $\Phi_{rq}$  aus dem Polsystem heraus auf die Ankerwicklungen wird durch zeitlich konstante, der jeweiligen Achse zugeordnete Remanenzdurchflutungen  $\Theta_{rd}$  bzw.  $\Theta_{rq}$  mit den fiktiven Remanenz- Erregerströmen  $i_{rd}$  und  $i_{rq}$  berücksichtigt.

Bei Vernachlässigung der magnetischen Spannungsabfälle im Eisen gelten für die Gegeninduktivitäten einer verallgemeinerten Schenkelpolmaschine mit je einer Ersatz-

Dämpfer- und einer konzentrierten Erregerwicklung pro Achse die Beziehungen

$$\begin{aligned}
 L_{hd} &= \frac{3}{2} \frac{\mu_0}{\delta_{i0}} \frac{4}{\pi} \frac{2}{\pi} \tau_p l_i \frac{(w\xi_1)_a^2}{2z_p} C_{ad,1} & L_{hq} &= \frac{3}{2} \frac{\mu_0}{\delta_{i0}} \frac{4}{\pi} \frac{2}{\pi} \tau_p l_i \frac{(w\xi_1)_a^2}{2z_p} C_{aq,1} \\
 L_{aDd} &= \frac{\mu_0}{\delta_{i0}} \frac{2}{\pi} \tau_p l_i \frac{(w\xi_1)_a w_{Dd} C_{Dd,1}}{2z_p} \xi_{schr} & L_{aDq} &= \frac{\mu_0}{\delta_{i0}} \frac{2}{\pi} \tau_p l_i \frac{(w\xi_1)_a w_{Dq} C_{Dq,1}}{2z_p} \xi_{schr} \quad (2.6) \\
 L_{afd} &= \frac{\mu_0}{\delta_{i0}} \frac{2}{\pi} \tau_p l_i \frac{(w\xi_1)_a w_{fd} C_{fd,1}}{2z_p} \xi_{schr} & L_{afq} &= \frac{\mu_0}{\delta_{i0}} \frac{2}{\pi} \tau_p l_i \frac{(w\xi_1)_a w_{fq} C_{fq,1}}{2z_p} \xi_{schr}.
 \end{aligned}$$

Hierin bedeuten  $\delta_{i0}$  die „ideelle“ Luftspaltlänge in Polmitte,  $l_i$  die „ideelle“ Blechpaketlänge unter Beachtung der Feldstörungen durch Kühlkanäle und Endbereiche,  $\tau_p$  die Polteilung (Abstand zweier Pole längs des Luftspaltes) sowie  $C_{ad,1}$ ,  $C_{Dd,1}$ ,  $C_{fd,1}$ ,  $C_{aq,1}$ ,  $C_{Dq,1}$  und  $C_{fq,1}$  die Polformkoeffizienten zur Berücksichtigung des unterschiedlichen Luftspaltes in Längs- und Querachse, der speziellen Polschuhform und der Beschränkung auf die Grundwelle der Induktionsverteilung.  $\xi_{schr}$  stellt in diesen Beziehungen den Schrägfaktor dar, der die Schrägstellung der Stator- oder Rotornuten und damit die verminderte Kopplung zwischen den Wicklungen beiderseits des Luftspaltes berücksichtigt; für Wicklungen auf derselben Seite des Luftspaltes ist die Schräglung wirkungslos. Der Faktor  $3/2$  bei  $L_{hd}$  und  $L_{hq}$  steht für die Umrechnung der dreisträngigen Stranggrößen in zweisträngige Achsengrößen. Die Ankerwindungszahl  $w_a$  bezieht sich dabei auf einen Strang mit  $z_p$  am Umfang verteilten Teilsträngen, die Windungszahlen der Erreger- und der Ersatz-Dämpferwicklungen in Längs- und Querachse auf alle einer Achse zugeordneten Windungen der  $z_p$  Polpaare. Bei der verteilten Ankerwicklung tritt an die Stelle der tatsächlichen Windungszahl  $w_a$  die effektive Windungszahl  $(w\xi_1)_a$ ; der Wicklungsfaktor  $\xi_1$  steht dabei für die Minderung der in einer Wicklung mit  $q_1 > 1$  durch die Induktionsgrundwelle induzierten Spannung bzw. der durch den Wicklungsstrom hervorgerufenen Induktionsgrundwelle infolge der Phasenverschiebungen der Spannungen und Ströme in den auf mehrere Nuten verteilten Wicklungsteilen einer Spulenseite.

Bei Synchronmaschinen mit Vollpolläufer wie auch bei Asynchronmaschinen wird längs des Umfanges überall mit dem „ideellen“ Luftspalt  $\delta_i$  gerechnet. Diese Maschinen haben auch im Rotor (Systeme D und f) verteilten Wicklungen, so dass hier ebenfalls die effektiven Windungszahlen  $(w\xi_1)$  zu verwenden und eigentlich alle Polformkoeffizienten gleich Eins zu setzen sind. Für die Gegeninduktivitäten der Ersatz-Dämpfer- und Erregerwicklungen ergibt das die Beziehungen

$$\begin{aligned}
 L_{aDd} &= \frac{\mu_0}{\delta_i} \frac{4}{\pi} \frac{2}{\pi} \tau_p l_i \frac{(w\xi_1)_a (w\xi_1)_{Dd}}{2z_p} \xi_{schr} & L_{aDq} &= \frac{\mu_0}{\delta_i} \frac{4}{\pi} \frac{2}{\pi} \tau_p l_i \frac{(w\xi_1)_a (w\xi_1)_{Dq}}{2z_p} \xi_{schr} \\
 L_{afd} &= \frac{\mu_0}{\delta_i} \frac{4}{\pi} \frac{2}{\pi} \tau_p l_i \frac{(w\xi_1)_a (w\xi_1)_{fd}}{2z_p} \xi_{schr} & L_{afq} &= \frac{\mu_0}{\delta_i} \frac{4}{\pi} \frac{2}{\pi} \tau_p l_i \frac{(w\xi_1)_a (w\xi_1)_{fq}}{2z_p} \xi_{schr}. \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

Da aber die Nutzung in Polmitte und Pollücke bei Synchronmaschinen mit Vollpolläufer mitunter doch recht unterschiedlich ausgeführt ist oder nicht alle Nuten gleichmäßig

belegt sind, muss insbesondere für  $L_{hd}$  und  $L_{hq}$  eine Anpassung durch die Polformkoeffizienten  $C_{ad,1}$  und  $C_{aq,1}$  an die realen Verhältnisse vorgenommen werden.

Für einen vollständigen Dämpferkäfig berechnet man die effektive Ersatz-Windungszahl der achsenbezogenen Ersatzwicklungen aus der Nutzahl  $N_D$  zu

$$(w\xi_1)_D = \frac{N_D}{4}. \quad (2.8)$$

Bei Asynchronmaschinen mit Käfigläufer wird der Käfig dagegen häufig in eine äquivalente dreisträngige Ersatz-Strangwicklung mit der Strang-Windungszahl

$$(w\xi_1)_D = \frac{N_D}{6} \quad (2.9)$$

überführt, so dass wie beim Schleifringläufer alle magnetischen Kopplungen zur dreisträngigen Ankerwicklung mit den Strang-Windungszahlen bestimmt werden. Deshalb entfallen dann bei den rotationssymmetrischen Asynchronmaschinen mit dreisträngigen (Ersatz-)Rotorwicklungen die Umrechnungsfaktoren  $3/2$  in Gl. 2.6 für  $L_{hd} = L_{hq}$ .

Mit den Flussverkettungen der Ankerstränge und den Strangströmen folgt das Luftspalt-Drehmoment der Maschine aus der allgemeinen Energiebilanz zu [1]

$$m_s = \frac{z_p}{\sqrt{3}} [(\psi_a i_b - \psi_b i_a) + (\psi_b i_c - \psi_c i_b) + (\psi_c i_a - \psi_a i_c)]. \quad (2.10)$$

Im Verbraucher-Zählpfeilsystem werden alle elektrisch zugeführten Leistungen und alle mechanisch abgeführten Leistungen positiv gerechnet, das Luftspaltmoment eines Generators ist bei positiver Winkelgeschwindigkeit also negativ.

---

## 2.3 Spannungsgleichungen des Polsystems

Im Gegensatz zum rotationssymmetrischen Anker mit seinen drei Wicklungssträngen sind im Polsystem die Wicklungen den beiden Symmetrieachsen, der Längs- und der Querachse, zugeordnet. In beiden Achsen liegen gleichartige Wicklungen mit gleichartigen Verkettungsmechanismen vor, alle Gleichungen haben gleiches Aussehen mit dem einzigen Unterschied, dass für alle Parameter und Variablen die Größen der betrachteten Achse, gekennzeichnet durch den Index d bzw. q, einzusetzen sind. In jeder dieser Gleichungen treten nur Größen einer Achse, der d- oder der q-Achse, auf. Um die Gleichartigkeit besonders hervorzuheben und unnötige Dopplungen zu vermeiden, werden nachfolgend für gleichartige Ausdrücke beider Achsen, wenn keine Missverständnisse möglich sind, diese nur einmal geschrieben mit dem verallgemeinerten Index x, für den bei der Zuordnung der Gleichung zu einer Achsen dann der entsprechende Achsenindex d bzw. q einzusetzen ist. Die Spannungsgleichungen für die kurzgeschlossenen Ersatz-Dämpferwicklungen

und die Erregerwicklungen lauten damit

$$\begin{bmatrix} 0 \\ u_{fx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{Dx} & 0 \\ 0 & R_{fx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{Dx} \\ i_{fx} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{Dx} \\ \psi_{fx} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

mit den ebenfalls allgemein indizierten Flussverkettungen

$$\begin{aligned} \psi_{Dx} &= \frac{3}{2} L_{Dax}(i_x + i_{rx}) + L_{DDx}i_{Dx} + L_{Dfx}i_{fx} \\ \psi_{fx} &= \frac{3}{2} L_{fax}(i_x + i_{rx}) + L_{fDx}i_{Dx} + L_{ffx}i_{fx}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Hierin bedeuten  $L_{DDx}$  und  $L_{ffx}$  die Selbstinduktivitäten der beiden Polsystemkreise beider Achsen, während mit  $L_{Dax} = L_{aDx}$  und  $L_{fax} = L_{afx}$  die Gegeninduktivitäten zum Ankersystem sowie mit  $L_{Dfx} = L_{fDx}$  die Gegeninduktivitäten der beiden Wicklungen einer Achse untereinander gekennzeichnet sind. Für Asynchronmaschinen mit dreisträngiger (Ersatz-) Rotorwicklung entfallen die Faktoren 3/2.

## 2.4 Übersetzungsverhältnisse

Die gemeinsame Handhabung der Gleichungen für Ständer und Läufer wird vereinfacht, wenn alle Größen des Polsystems bzw. des Asynchronmaschinen-Läufers auf den Anker umgerechnet werden. Diese Transformation darf die Leistungsbeziehungen natürlich nicht verändern. Bewährt hat sich, die Polradkreise durch Einführung von Übersetzungsverhältnissen so auf die Ankerkreise umzurechnen, dass gleiche bezogene Ströme im Rotor wie im Anker einer Achse den gleichen Anteil zur Hauptflussverkettung dieser Achse beitragen und die bezogenen Gegeninduktivitäten der Polradkreise den Hauptinduktivitäten der achsengleichen Ankerwicklung entsprechen [1]

$$L'_{aDx} = L'_{Dax} = L'_{afx} = L'_{fax} = L'_{hx}. \quad (2.13)$$

Diese auf den Anker bezogenen Größen werden dabei vorerst mit „'“ gekennzeichnet.

Man erhält für eine verallgemeinerte Drehstrommaschine mit ausgeprägten Polen

$$\ddot{u}_{aDx} = \frac{4}{\pi} \frac{(w\xi_1)_a C_{ax,1}}{w_{Dx} C_{Dx,1} \xi_{schr}} \quad \ddot{u}_{afx} = \frac{4}{\pi} \frac{(w\xi_1)_a C_{ax,1}}{w_{fx} C_{fx,1} \xi_{schr}} \quad (2.14)$$

und für eine mit rotationssymmetrischem Läufer

$$\ddot{u}_{aDx} = \frac{(w\xi_1)_a C_{ax,1}}{(w\xi_1)_{Dx} \xi_{schr}} \quad \ddot{u}_{afx} = \frac{(w\xi_1)_a C_{ax,1}}{(w\xi_1)_{fx} \xi_{schr}}. \quad (2.15)$$

Die Transformation der Ströme, Spannungen und Flussverkettungen sowie der Widerstände der f-Rotorwicklungen erfolgt nach den Beziehungen

$$i'_{\text{fx}} = \frac{2}{3} \frac{i_{\text{fx}}}{\ddot{u}_{\text{afx}}}, \quad u'_{\text{fx}} = \ddot{u}_{\text{afx}} u_{\text{fx}}, \quad \psi'_{\text{fx}} = \ddot{u}_{\text{afx}} \psi_{\text{fx}}, \quad R'_{\text{fx}} = \frac{3}{2} \ddot{u}_{\text{afx}}^2 R_{\text{fx}}. \quad (2.16)$$

Die Umrechnung der Widerstände und Variablen der D-Wicklungen kann analog vorgenommen werden, interessiert jedoch meist nicht.

Für die auf die Ankerwicklungen bezogenen Gegen- und Selbstinduktivitäten der Rotorwicklungen erhält man, wieder mit dem allgemeinen Index x statt d und q, die Transformationsrelationen

$$\begin{aligned} L'_{\text{aDx}} &= L'_{\text{Dax}} = \frac{3}{2} \ddot{u}_{\text{aDx}} L_{\text{aDx}} = \frac{3}{2} \ddot{u}_{\text{aDx}} L_{\text{Dax}} = L_{\text{hx}} \\ L'_{\text{afx}} &= L'_{\text{fax}} = \frac{3}{2} \ddot{u}_{\text{afx}} L_{\text{afx}} = \frac{3}{2} \ddot{u}_{\text{afx}} L_{\text{fax}} = L_{\text{hx}} \\ L'_{\text{Dfx}} &= \frac{3}{2} \ddot{u}_{\text{aDx}} \ddot{u}_{\text{afx}} L_{\text{Dfx}} = \frac{3}{2} \ddot{u}_{\text{afx}} \ddot{u}_{\text{aDx}} L_{\text{fDx}} \\ L'_{\text{Dx}} &= \frac{3}{2} \ddot{u}_{\text{aDx}}^2 L_{\text{DDx}} \\ L'_{\text{fx}} &= \frac{3}{2} \ddot{u}_{\text{afx}}^2 L_{\text{ffx}}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Die Doppelindizes DD bzw. ff bei den Selbstinduktivitäten wurden dabei zu D bzw. f vereinfacht.

Für Drehstrom-Asynchronmaschinen mit dreisträngigen (Ersatz-)Rotorwicklungen gelten die vorstehenden Beziehungen ebenfalls, jedoch entfallen die Umrechnungsfaktoren 3/2, da die Achsenwicklungen für Anker und Rotor gleichermaßen aus dreisträngigen Wicklungen umgerechnet werden.

---

## 2.5 Zwei-Achsen-Transformation

Durch die Beziehungen (Gl. 2.2) wurden die von den Ankerströmen hervorgerufene Durchflutungsverteilung in zwei achsenbezogene Komponenten zerlegt und dafür die fiktiven Achsenströme  $i_d$  und  $i_q$  eingeführt. Das brachte eine deutliche Vereinfachung in der Darstellung der Flussverkettungen, Gl. 2.4. Die Achsengrößen können so auch als Real- und Imaginärteil eines Stromzeigers in der komplexen Ebene mit der reellen Achse in der Längs- oder d-Achse gedeutet werden. Dieses Vorgehen zur Umrechnung von Strang- auf Achsengrößen lässt sich auch umkehren und damit als allgemeine Transformation nutzen. Für die Transformation der allgemeinen Stranggrößen  $g_a$ ,  $g_b$ ,  $g_c$  in ein um den Fortschrittswinkel  $\vartheta$  verdrehtes d-q-Achsensystem gelten unter Berücksichtigung der

gleichphasigen 0-Komponente also die Transformationsbeziehungen [1]

$$\begin{bmatrix} g_d \\ g_q \\ g_0 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{dq} \begin{bmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}_{dq} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \cos(\vartheta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\vartheta - \frac{4\pi}{3}) \\ -\sin \vartheta & -\sin(\vartheta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\vartheta - \frac{4\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Für die Rücktransformation gilt

$$\begin{bmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{dq}^{-1} \begin{bmatrix} g_d \\ g_q \\ g_0 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}_{dq}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 1 \\ \cos(\vartheta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\vartheta - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\vartheta - \frac{4\pi}{3}) & -\sin(\vartheta - \frac{4\pi}{3}) & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Tritt kein Nullsystem auf ( $g_0 = 0$ ), können allgemein die Achsengrößen  $g_d$  und  $g_q$  aus den Stranggrößen  $g_a$  und  $g_b$  bzw. die Stranggrößen  $g_a$  und  $g_b$  aus den Achsengrößen  $g_d$  und  $g_q$  berechnet werden zu

$$\begin{bmatrix} g_d \\ g_q \end{bmatrix} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} \sin(\vartheta + \frac{\pi}{3}) & \sin \vartheta \\ \cos(\vartheta + \frac{\pi}{3}) & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_a \\ g_b \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad g_a + g_b + g_c = 0 \quad (2.20)$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} g_a \\ g_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \cos(\vartheta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\vartheta - \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_d \\ g_q \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad g_c = -(g_a + g_b). \quad (2.21)$$

Oft ist auch die Transformation eines dreisträngigen Systems in ein feststehendes zweiachsiges Koordinatensystem vorteilhaft. Bei Bindung dessen reellen Achse an den Strang a erhält man die  $\alpha$ - $\beta$ -0-Komponenten mit den Transformationsbeziehungen

$$\begin{bmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \\ g_0 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{\alpha\beta} \begin{bmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}_{\alpha\beta} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

und

$$\begin{bmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{\alpha\beta}^{-1} \begin{bmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \\ g_0 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}_{\alpha\beta}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Die  $\alpha$ - $\beta$ -0-Komponenten charakterisieren den sogenannten Raumzeiger der Stranggrößen in der komplexen Ebene mit am Strang a orientierter reeller Achse

$$\vec{g} = g_\alpha + jg_\beta = \frac{2}{3} [g_a + g_b \mathbf{a} + g_c \mathbf{a}^2] \quad \text{mit} \quad \mathbf{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}}. \quad (2.24)$$

Der Zusammenhang zwischen d-q- und  $\alpha$ - $\beta$ -Komponenten sowie deren Raumzeigern ist bei sich gegeneinander um den Winkel  $\vartheta$  drehenden Koordinatensystemen gegeben durch die Beziehungen

$$\begin{bmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_d \\ g_q \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} g_d \\ g_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

sowie

$$\bar{g} = g_\alpha + jg_\beta = (g_d + jg_q)e^{j\vartheta}. \quad (2.26)$$

Ist  $\vartheta \equiv 0$ , stimmt einerseits die d- mit der  $\alpha$ -Komponente und andererseits die q- mit der  $\beta$ -Komponente überein.

Sind bei der d-q-0-Transformation zeitliche Ableitungen zu transformieren, ist die Produktenregel anzuwenden, man erhält die Relationen

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} g_d \\ g_q \\ g_0 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{dq} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} g_q \\ -g_d \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

oder

$$\mathbf{C}_{dq} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} g_d \\ g_q \\ g_0 \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -g_q \\ +g_d \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

und

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{dq}^{-1} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} g_d \\ g_q \\ g_0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{3} \omega \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

oder

$$\mathbf{C}_{dq}^{-1} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} g_d \\ g_q \\ g_0 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{3} \omega \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

mit

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}. \quad (2.31)$$

---

## 2.6 Zwei-Achsen-Modell der linearen Drehstrommaschine

Um die Spannungsgleichungen der dreisträngigen Ankerwicklung in d-q-0-Komponenten zu überführen, werden in den drei Gleichungen die Strangspannungen und die Strangstrome für sich in Achsengrößen transformiert. Die Transformation der Ableitung der Strang-

flussverkettungen erhält man direkt nach Gl. 2.28. Damit lauten die Anker-Spannungsgleichungen in d-q-0-Komponenten

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_0 \end{bmatrix} = R_a \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_0 \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -\psi_q \\ \psi_d \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

während die Spannungsgleichungen der Polsysteme aus Gl. 2.11 direkt in der auf den Anker umgerechneten Form mit verallgemeinerten Indizes aufgeschrieben werden können:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ u'_{fx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R'_{Dx} & 0 \\ 0 & R'_{fx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_{Dx} \\ i'_{fx} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi'_{Dx} \\ \psi'_{fx} \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Abbildung 2.3 zeigt die Drehstrommaschine in Achsendarstellung.

In Abb. 2.4 ist die Aufteilung der Flussverkettungen der drei magnetisch gekoppelten Wicklungen einer Achse in Haupt- und Streuflussverkettungen schematisch dargestellt.

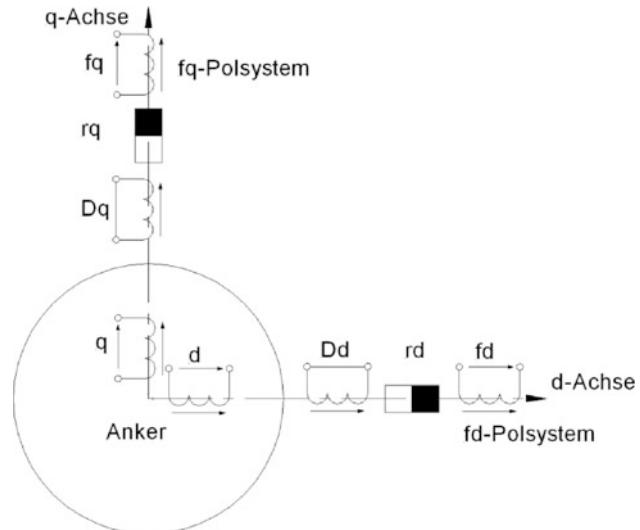
Durch formale Einführung der transformierten Gegeninduktivitäten und Polsystemströme erhält man die Flussverkettungsgleichungen des Ankers in d-q-0-Komponenten zu

$$\begin{aligned} \psi_x &= L_x i_x + L_{hx} (i'_{Dx} + i'_{fx} + i_{rx}) \\ \psi_0 &= L_0 i_0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

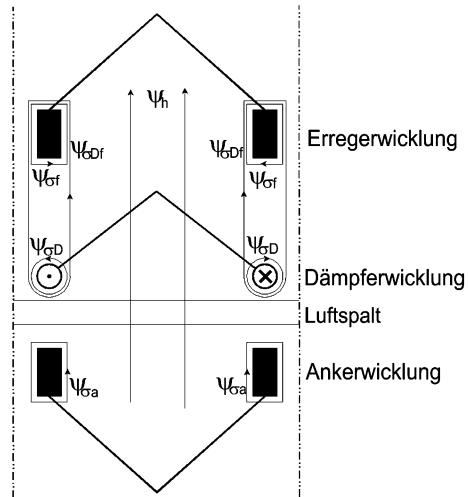
und die Flussverkettungsgleichungen der Polsysteme zu

$$\begin{aligned} \psi'_{Dx} &= L_{hx} (i_x + i_{rx}) + L'_{Dx} i'_{Dx} + L'_{Dfx} i'_{fx} \\ \psi'_{fx} &= L_{hx} (i_x + i_{rx}) + L'_{Dfx} i'_{Dx} + L'_{fx} i'_{fx}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

**Abb. 2.3** Verallgemeinerte Drehstrommaschine in Achsendarstellung



**Abb. 2.4** Haupt- und Streuflussverkettungen der Längsachsenwicklungen



Sowohl die Selbstinduktivitäten der Polsystemkreise als auch deren Gegeninduktivität lassen sich jetzt zerlegen in eine Summe aus der Hauptinduktivität und den Streuanteilen der Achse

$$\begin{aligned}
 L'_{\sigma Dx} &= L'_{Dx} - L'_{Dfx} \\
 L'_{\sigma fx} &= L'_{fx} - L'_{Dfx} \\
 L'_{\sigma Dfx} &= L'_{Dfx} - L_{hx}.
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

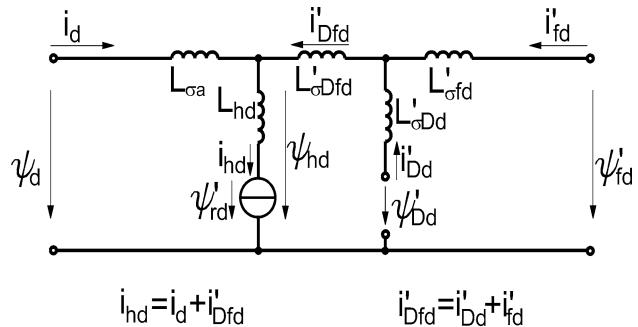
Die Streuinduktivitäten  $L'_{\sigma Dfx}$  charakterisieren die Streufeldkopplung der beiden Polsystemwicklungen einer Achse (vgl. Abb. 2.4) und sollen im Folgenden als gemeinsame Streuinduktivität der Längs- bzw. der Querachse bezeichnet werden, sie können insbesondere für Schenkelpolmaschinen durch die Differenzbildung in Gl. 2.36 auch negativ werden. Führt man nun für die dynamischen Hauptfeld- und die Streufeldkopplungen die Magnetisierungsströme, also die durch die jeweils effektive Ankerwindungszahl geteilten dynamisch wirksamen resultierenden Achsendurchflutungen

$$\begin{aligned}
 i_{hx} &= i_x + i'_{Dx} + i'_{fx} \\
 i'_{Dfx} &= i'_{Dx} + i'_{fx}
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

ein und bezeichnet mit

$$\psi'_{rx} = L_{hx} i_{rx} \tag{2.38}$$

**Abb. 2.5** Schematische Darstellung der Flussverkettungen in der d-Achse



die von den Wicklungsströmen unabhängigen, zeitlich konstanten remanenten Flusskomponenten, erhält man für die Flussverkettungen

$$\begin{aligned}\psi_{hx} &= \psi_{hx}(i_{hx}) = L_{hx}i_{hx} + \psi'_{rx} \\ \psi_x &= \psi_{hx}(i_{hd}) + L_{\sigma a}i_x \\ \psi'_{Dx} &= \psi_{hx}(i_{hx}) + L'_{\sigma Dfx}i'_{Dfx} + L'_{\sigma Dx}i'_{Dx} \\ \psi'_{fx} &= \psi_{hx}(i_{hx}) + L'_{\sigma Dfx}i'_{Dfx} + L'_{\sigma fx}i'_{fx}.\end{aligned}\tag{2.39}$$

Abgesehen von PM-erregten Synchronmaschinen, bei denen  $\psi_{rd}$  die alleinige Leerlauf-erregung darstellt, sind beide remanenten Flusskomponenten meist klein; zumindest  $\psi_{rq}$  wird normalerweise vernachlässigt. Abbildung 2.5 zeigt das Schema der Flussverkettungen für die d-Achse, für die q-Achse der verallgemeinerten Drehstrommaschine ist nur der Achsenindex d in q zu ändern.

Der Drehstrommaschinen-Rotor ist im Allgemeinen als starre Drehmasse anzusehen, an der das Luftspaltmoment  $m_\delta$  und das Kupplungsmoment  $m_K$  bzw. das Antriebs- oder Arbeitsmaschinendrehmoment  $m_A$  angreifen. Das Luftspaltmoment wird aus Gl. 2.10 gewonnen, indem man die Stranggrößen in d-q-0-Komponenten transformiert und einsetzt, man erhält

$$m_\delta = z_p \frac{3}{2} (\psi_d i_q - \psi_q i_d).\tag{2.40}$$

In  $m_A$  sollen alle äußeren Drehmomente (Antriebsmoment, Arbeitsmaschinen-Lastmoment, Luft- und Lagerreibung u. a.) zusammengefasst sein. Mit dem Massenträgheitsmoment  $J$  der Drehmasse erhält man für die Drehzahl  $n$ , die Rotorwinkelgeschwindigkeit  $\omega_m$  und den Rotordrehwinkel  $\vartheta_m$  die Bewegungsgleichungen

$$2\pi J \frac{dn}{dt} = J \frac{d\omega_m}{dt} = m_\delta + m_A \quad \text{und} \quad \frac{d\vartheta_m}{dt} = \omega_m = 2\pi n.\tag{2.41}$$

Die für die elektromagnetischen Vorgänge relevanten Größen  $\vartheta$  und  $\omega$  folgen aus den Relationen (Gln. 1.3 bis 1.5) zu

$$\omega = z_p \omega_m \quad \text{und} \quad \vartheta = z_p \vartheta_m.\tag{2.42}$$

Die Parameter und Variablen sind einheitenbehaftet, die auf den Anker umgerechneten Größen durch „/“ gekennzeichnet.

Im allgemeinen Fall sind  $\omega$  und  $\omega_m$  unter Wirkung der Bewegungsgleichungen (Gl. 2.41) Zeitfunktionen, so dass ein nichtlineares Differentialgleichungssystem vorliegt; der Begriff „linear“ in der Überschrift bezieht sich auch hier also lediglich auf die magnetischen Verhältnisse in der Maschine, den linearen Zusammenhang zwischen Strömen und Flussverkettungen infolge der vorerst noch vernachlässigten magnetischen Sättigung.

---

## 2.7 Per-Unit-Bezugssystem

Die bisherigen Beziehungen sind einheitenbehaftet und ihre Größen stark von der konkreten Maschine, insbesondere von ihren Bemessungs- bzw. Nenndaten abhängig. Meist stimmen die Nenndaten mit den Bemessungsdaten überein. Mitunter ist es jedoch zweckmäßig, für eine spezielle Verwendung der Maschine auch andere Nenndaten zuzuordnen.

Die Bemessungsdaten normal ausgelegter Drehstrommaschinen, insbesondere die Bemessungsleistung, die -spannung und der -strom, überstreichen bis zu sechs Zehnerpotenzen, so dass die charakteristischen Widerstände und Induktivitäten ebenfalls einen großen Wertebereich umfassen. Ein Vergleich der Modellparameter, die Bewertung von Simulationsergebnissen und die Übertragung der an einer Maschine gewonnenen Erkenntnisse auf eine andere Maschine selbst desselben Typs sind bei unterschiedlichen Bemessungs- bzw. Nenndaten schwierig. Deshalb hat sich bei der Parametrierung und für umfangreichere Simulationsuntersuchungen der Übergang auf bezogene Größen bewährt. Da ggf. abweichende Bemessungsdaten dem Betreiber kaum zur Kenntnis gelangen, werden als Bezugsgrößen die Nenndaten verwendet. Ausgegangen wird dabei vom Zwei-Achsen-Modell mit den auf den Anker umgerechneten Polsystemgrößen. Als Grundbezugsgrößen gelten die Nennscheinleistung  $S_N$ , die verkettete Nennspannung  $U_N$  und die Nennkreisfrequenz  $\omega_N = 2\pi f_N$  der in Sternschaltung vorausgesetzten Ankerwicklung, aus denen die anderen Bezugsgrößen abgeleitet werden:

$$S_0 = S_N \quad \text{für alle Leistungsanteile,}$$

$$U_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} U_N \quad \text{für alle Strang- und Achsenspannungen,}$$

$$I_0 = \sqrt{2} I_N = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{S_N}{U_N} \quad \text{für alle Strang- und Achsenströme,}$$

$$Z_0 = U_0/I_0 \quad \text{für alle Widerstände und Impedanzen,}$$

$$T_0 = 1/\omega_N = 1/(2\pi f_N) \quad \text{für die Zeit,}$$

$$\Psi_0 = U_0 T_0 \quad \text{für alle Flussverkettungen,}$$

$$L_0 = Z_0 T_0 \quad \text{für alle Induktivitäten,}$$

$$\Omega_0 = \omega_N/z_p \quad \text{für alle Winkelgeschwindigkeiten } \omega_m = 2\pi n,$$

$$M_0 = S_0/\Omega_0 \quad \text{für alle Drehmomentanteile.}$$

Durch Bezug aller Parameter und Variablen des Zwei-Achsen-Modells auf die vorstehenden Bezugsgrößen erhält man das Per-Unit-Modell der „linearen“, also sättigungslosen Drehstrommaschine. Üblicherweise wird dieses Modell auch mit der auf  $T_0$  bezogenen Zeit  $\tau$  dargestellt. Um aber später unnötige Umrechnungen zu vermeiden, wird nachfolgend in den Modellgleichungen die bezogene Zeit  $\tau$  durch  $t/T_0$  ersetzt, und auch die Zeitkonstanten werden in Sekunden angegeben und verwendet. Alle anderen Parameter und Variablen sind jedoch nun bezogene Größen und werden mit ihren Kleinbuchstaben bezeichnet. Die besondere Kennzeichnung für die Umrechnung der Rotorgrößen auf den Anker mit „“ entfällt, und auch eine Unterscheidung zwischen Rotordrehwinkel und elektrischem Fortschrittwinkel einerseits und Rotordrehzahl, Rotorwinkelgeschwindigkeit und elektrischer Kreisfrequenz andererseits ist explizit nicht mehr erforderlich. Treten einheitenbehaftete Größen und Per-Unit-Größen nebeneinander auf, werden zu ihrer Kennzeichnung die SI-Einheiten bzw. bei den bezogenen Größen die Pseudoeinheit p.u. verwendet.

---

## 2.8 Mathematisches Modell der linearen Drehstrommaschine in d-q-0-Komponenten und bezogenen Größen

Durch das gewählte Bezugssystem erhält man als bezogene Größen für Ankerfrequenz und Kreisfrequenz gleiche Zahlenwerte und im Nennpunkt ebenso wie für die Amplituden von Ankerspannung und -strom jeweils den Wert Eins. Bei Nennfrequenz stimmen damit zahlenmäßig auch die Induktivitäten mit den ihnen entsprechenden Reaktanzen überein, denn für  $\omega = 1$  gilt

$$x = \omega l = l. \quad (2.43)$$

Trotzdem sollte man auch bei  $\omega = 1$  deutlich zwischen bezogenen Induktivitäten und bezogenen Reaktanzen unterscheiden, um sich so die Möglichkeit der (Pseudo-)Einheitenprobe zu erhalten. Im Gegensatz zur Kennwertbestimmung (Kap. 3 und 7), wo bezogene Induktivitäten in der Regel als Reaktanzen angegeben werden, wird bei der mathematischen Modellierung besser mit bezogenen Induktivitäten gearbeitet.

Die Spannungsgleichungen des Ankers lauten damit in bezogener Form

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_0 \end{bmatrix} = r_a \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} + T_0 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_0 \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -\psi_q \\ \psi_d \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Verwendet man wieder für die gleichartigen Beziehungen der Polsystemkreise in Längs- und Querachse statt d und q den allgemeinen Achsenindex x, folgt für deren Spannungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} 0 \\ u_{fx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{Dx} & 0 \\ 0 & r_{fx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{Dx} \\ i_{fx} \end{bmatrix} + T_0 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_{Dx} \\ \psi_{fx} \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

für die Magnetisierungsströme

$$i_{hx} = i_x + i_{Dx} + i_{fx} \quad \text{und} \quad i_{Dfx} = i_{Dx} + i_{fx} \quad (2.46)$$

und für die Flussverkettungen

$$\begin{aligned} \psi_x &= \psi_{hx}(i_{hx}) + l_{\sigma a}i_x \quad \text{mit} \quad \psi_{hx}(i_{hx}) = l_{hx}(i_{hx} + i_{rx}) \\ \psi_{Dx} &= \psi_{hx}(i_{hx}) + l_{\sigma Dfx}i_{Dfx} + l_{\sigma Dx}i_{Dx} \\ \psi_{fx} &= \psi_{hx}(i_{hx}) + l_{\sigma Dfx}i_{Dfx} + l_{\sigma fx}i_{fx} \end{aligned} \quad (2.47)$$

sowie

$$\psi_0 = l_0i_0. \quad (2.48)$$

Das Luftspaltmoment vereinfacht sich weiter zu

$$m_\delta = \psi_d i_q - \psi_q i_d. \quad (2.49)$$

Mit der elektromechanischen Zeitkonstante  $T_m$  bzw. der Trägheitskonstante  $H$

$$T_m = 2H = J \frac{\Omega_0^2}{S_0}. \quad (2.50)$$

und dem auf  $M_0$  bezogenen Antriebs- oder Arbeitsmaschinenmoment  $m_A$  erhält man die Bewegungsgleichung

$$T_m \frac{d\omega}{dt} = m_\delta + m_A \quad (2.51)$$

zur Bestimmung der bezogenen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , wertgleich mit der bezogenen Drehzahl und der bezogenen elektrischen Kreisfrequenz. Der tatsächliche Rotordrehwinkel  $\vartheta_m$  der  $z_p$ -poligen Maschine und der Rotordrehwinkel  $\vartheta$  der zweipoligen Modellmaschine, wertgleich mit dem elektrischen Drehwinkel, folgen dann zu

$$\frac{d\vartheta_m}{dt} = \Omega_0 \omega \quad \text{und} \quad \vartheta = z_p \vartheta_m. \quad (2.52)$$

Das vorstehende Gleichungssystem (Gln. 2.44 bis 2.52) beschreibt die stationären Zustände und das dynamische Verhalten der verallgemeinerten linearen Drehstrommaschine im d-q-0-System vollständig. Zustandsgrößen sind hier die Flussverkettungen  $\psi_d$ ,  $\psi_q$ ,  $\psi_0$ ,  $\psi_{Dd}$ ,  $\psi_{fd}$ ,  $\psi_{Dq}$  und  $\psi_{fq}$ , die Rotorwinkelgeschwindigkeit  $\omega$  und der Modellmaschinen-Rotordrehwinkel  $\vartheta$ . Eingangsgrößen sind die Ankerspannungskomponenten  $u_d$ ,  $u_q$  und  $u_0$ , die Rotorspannungen  $u_{fd}$  und  $u_{fq}$  sowie das Antriebs- oder Arbeitsmaschinendrehmoment  $m_A$ .

Die Polsystemgrößen wurden vereinbarungsgemäß sowohl auf den Anker umgerechnet als auch dem eingeführten Bezugssystem unterworfen. Daher erhält man für Drehstrom-Synchronmaschinen den Per-Unit-Wert des Widerstandes der fd-Erregerwicklung

aus dem an den Klemmen messbaren Widerstand  $R_{fd}$  in  $\Omega$  zu

$$r_{fd}/\text{p.u.} = \frac{3}{2} \ddot{u}_{\text{afd}}^2 \frac{R_{fd}/\Omega}{Z_0/\Omega}, \quad (2.53)$$

und für Erregerspannung und -strom gelten die speziellen Bezugsgrößen

$$U_{fd0} = \frac{1}{\ddot{u}_{\text{afd}}} U_0 \quad \text{und} \quad I_{fd0} = \frac{3}{2} \ddot{u}_{\text{afd}} I_0. \quad (2.54)$$

Bei Drehstrom-Synchronmaschinen rechnet man meist mit je einer Ersatz-Dämpferwicklung je Achse und nur der fd-Erregerwicklung, die fq-Gleichungen bzw. fq-Gleichungsanteile entfallen dann. Prinzipiell kann die fq-Wicklung aber auch als zweite kurzgeschlossene Ersatz-Dämpferwicklung in der Querachse verwendet werden, wodurch auch Stromverdrängungerscheinungen in der Querachsen, z. B. im massiven Polbereich bei Vollpolläufern, näherungsweise erfasst werden können. Die remanenten Flussverkettungen  $\psi_{rd}$  und insbesondere  $\psi_{rq}$  werden meist null gesetzt. Da bei Drehstrom-Synchronmaschinen mit Vollpolläufer der physikalische Luftspalt konstant ist, gilt für diese im Idealfall  $l_{hq} = l_{hd}$ ; bei realen Maschinen ist  $l_{hq}$  jedoch wegen der unterschiedlichen Nutzung und Nuttausführung in Längs- und Querachse meist kleiner als  $l_{hd}$ , bei PM-erregten Synchronmaschinen wegen der geringen Permeabilität der Permanentmagnete dagegen sogar teilweise größer als  $l_{hd}$ .

Drehstrom-Asynchronmaschinen besitzen einen rotationssymmetrischen Läufer, der effektive Luftspalt ist überall gleich, remanente Flussverkettungen  $\psi_{rd}$  und  $\psi_{rq}$  treten nicht auf. Da sowohl die Anker- als auch die Läuferwicklungen gleichmäßig am Umfang verteilt angeordnet sind, sind bei der linear betrachteten Asynchronmaschine gleichartige Parameter der fiktiven Wicklungen in Längs- und Querachse gleich groß, so dass die Achsenindizes entfallen können. Außerdem werden bei Asynchronmaschinen statt der Wicklungsindizes a, D und f meist die Systembezeichnungen 1, 2 und 3 verwendet, es gelten damit folgende Relationen:

$$\begin{array}{llll} r_1 = r_a & l_{\sigma 1} = l_{\sigma a} & l_0 = l_0 & l_1 = l_d = l_q \\ r_2 = r_{Dd} = r_{Dq} & l_{\sigma 2} = l_{\sigma Dd} = l_{\sigma Dq} & l_h = l_{h1} = l_{hd} = l_{hq} & l_2 = l_{Dd} = l_{Dq} \\ r_3 = r_{fd} = r_{fq} & l_{\sigma 3} = l_{\sigma fd} = l_{\sigma fq} & l_{\sigma 23} = l_{\sigma Dfd} = l_{\sigma Dfq} & l_3 = l_{fd} = l_{fq}. \end{array} \quad (2.55)$$

Bei den Variablen, die ebenfalls statt der Wicklungsindizes a, D, und f die Systembezeichnungen 1, 2 und 3 erhalten, ist natürlich weiterhin zwischen den achsenbezogenen Komponenten zu unterscheiden. Wegen der in beiden Achsen übereinstimmenden Werte gleichartiger Parameter (und nur dann!) kann bei Asynchronmaschinen vorteilhaft auf die

Raumzeigerschreibweise übergegangen werden:

$$\begin{bmatrix} \vec{u}_1 \\ 0 \\ \vec{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{i}_2 \\ \vec{i}_3 \end{bmatrix} + T_0 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \vec{\psi}_1 \\ \vec{\psi}_2 \\ \vec{\psi}_3 \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} j\vec{\psi}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

mit der Flussverkettungen

$$\begin{bmatrix} \vec{\psi}_1 \\ \vec{\psi}_2 \\ \vec{\psi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_h + l_{\sigma 1} & l_h & l_h \\ l_h & l_h + l_{\sigma 23} + l_{\sigma 2} & l_h + l_{\sigma 23} \\ l_h & l_h + l_{\sigma 23} & l_h + l_{\sigma 23} + l_{\sigma 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{i}_2 \\ \vec{i}_3 \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

Drehstrom-Asynchronmaschinen mit Schleifringläufer besitzen keinen separaten Dämpferkäfig, und auch die Dämpferwirkung des geblecht ausgeführten Rotors ist meist vernachlässigbar. Deshalb entfällt hier das kurzgeschlossene D-System bzw. das System 2 mit seinen Parametern und Variablen. Die dreisträngige Läuferwicklung wird dann durch das fd-fq-System charakterisiert. Außerdem sei darauf hingewiesen, dass die d-q-Komponenten der Rotorwicklung identisch sind mit den  $\alpha$ - $\beta$ -Komponenten eines  $\alpha$ - $\beta$ -0-Systems, wenn die d- und die  $\alpha$ -Achse gleichermaßen an den Rotorstrang a gebunden sind; das vereinfacht wesentlich die Kopplung mit einer dreisträngigen Außenbeschaltung, z. B. mit einem Umrichter bei doppeltgespeisten Asynchronmaschinen. Das Rotor-Nullsystem entfällt bei isoliertem Sternpunkt der Rotorwicklung.

---

## 2.9 Aufbereitung des Gleichungssystems für eine effektive Berechnung

Für die Beschreibung des elektromagnetischen Verhaltens interessieren vorzugsweise die sich einstellenden Spannungen und Ströme, insbesondere die der von außen zugänglichen Wicklungen. Deshalb ist es sinnvoll, statt der Flussverkettungen  $\psi_d$ ,  $\psi_q$ ,  $\psi_0$ ,  $\psi_{Dd}$ ,  $\psi_{fd}$ ,  $\psi_{Dq}$  und  $\psi_{fq}$  die Ströme  $i_d$ ,  $i_q$ ,  $i_0$ ,  $i_{Dd}$ ,  $i_{Dq}$ ,  $i_{fd}$  und  $i_{fq}$  als Zustandsgrößen zu verwenden. Außerdem interessieren für die Netzkopplung einer Maschine primär nur die Ankerströme, so dass es zweckmäßig erscheint, die Berechnung der Ankerstrom-Differentialquotienten von der Rotorstrom-Differentialquotienten zu trennen. Dadurch gehen später in das Gleichungssystem für die Netzkopplung (Kap. 8) nur die 3 Ankerstrom-Differentialgleichungen ein, was den Lösungsaufwand deutlich verringert. Weiter ist darauf zu achten, dass die Zustandsgrößen  $i_d$ ,  $i_q$ ,  $i_0$ ,  $i_{Dd}$ ,  $i_{Dq}$ ,  $i_{fd}$  und  $i_{fq}$  sowie  $\omega$  und  $\vartheta$ , die Eingangsgrößen  $u_d$ ,  $u_q$ ,  $u_0$ ,  $u_{fd}$ ,  $u_{fq}$  und  $m_A$  sowie ggf. weitere zeit- und arbeitspunktabhängigen Größen in möglichst wenigen, übersichtlichen, leicht handhabbaren Ausdrücken auftreten. Diese Ausdrücke haben ebenso wie die aus Parametern gebildeten, vorerst noch konstanten Abkürzungen für beide Achsen weitgehend identischen Aufbau, so dass sie nachfolgend wieder mit dem Index x, der bei der Verwendung durch den aktuellen Index d bzw. q zu ersetzen ist, aufgeschrieben werden. Sie gelten in der allgemeinen Form gleichermaßen für

Synchron- und Asynchronmaschinen, bei letzteren sind lediglich die Wicklungsindizes a, D und f durch die Systemindizes 1, 2 und 3 zu ersetzen.

Für die Anker-Zustandsgrößen erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_d'' & 0 & 0 \\ 0 & l_q'' & 0 \\ 0 & 0 & l_0 \end{bmatrix} T_0 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{dd} + (a_{Dd}e_{Dd} + a_{fd}e_{fd})/a_{dd} \\ e_{qq} + (a_{Dq}e_{Dq} + a_{fq}e_{fq})/a_{qq} \\ r_a i_0 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

mit den variablen Abkürzungen

$$e_{dd} = r_a i_d - \omega \psi_q \quad \text{mit} \quad \psi_q = l_{hq}(i_q + i_{Dq} + i_{fq} + i_{rq}) + l_{\sigma a} i_q, \quad (2.59)$$

$$e_{qq} = r_a i_q + \omega \psi_d \quad \text{mit} \quad \psi_d = l_{hd}(i_d + i_{Dd} + i_{fd} + i_{rd}) + l_{\sigma a} i_d, \quad (2.60)$$

$$e_{Dx} = r_{Dx} i_{Dx} \quad \text{und} \quad e_{fx} = r_{fx} i_{fx} - u_{fx}, \quad (2.61)$$

den nur parameterabhängigen, jedoch vorerst nicht arbeitspunktabhängigen Abkürzungen

$$a_x = l_{hx} [l_{\sigma Dx} l_{\sigma fx} + (l_{\sigma a} + l_{\sigma Dfx})(l_{\sigma Dx} + l_{\sigma fx})] + l_{\sigma a} [l_{\sigma Dx} l_{\sigma fx} + l_{\sigma Dfx} (l_{\sigma Dx} + l_{\sigma fx})], \quad (2.62)$$

$$a_{xx} = (l_{hx} + l_{\sigma Dfx})(l_{\sigma Dx} + l_{\sigma fx}) + l_{\sigma Dx} l_{\sigma fx}, \quad (2.63)$$

$$a_{Dx} = -l_{hx} l_{\sigma fx} \quad \text{und} \quad a_{fx} = -l_{hx} l_{\sigma Dx} \quad (2.64)$$

sowie

$$l_x'' = \frac{a_x}{a_{xx}} = l_{\sigma a} + l_{hx} \frac{l_{\sigma Dfx}(l_{\sigma Dx} + l_{\sigma fx}) + l_{\sigma Dx} l_{\sigma fx}}{(l_{hx} + l_{\sigma Dfx})(l_{\sigma Dx} + l_{\sigma fx}) + l_{\sigma Dx} l_{\sigma fx}} = l_x - \frac{l_{hx}^2 (l_{\sigma Dx} + l_{\sigma fx})}{l_{Dx} l_{fx} - l_{Dfx}^2}. \quad (2.65)$$

$l_d''$  und  $l_q''$  werden als subtransiente Längs- bzw. subtransiente Querinduktivität bezeichnet, da sie insbesondere das hochdynamische Zeitverhalten im ersten Augenblick nach einer Störung bestimmen.

Die Beziehungen für die Zustandsgrößen der Polsystemkreise sind für beide Achsen analog aufgebaut, so dass sie mit dem allgemeinen Achsenindex x aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{di_{Dx}}{dt} &= -\frac{1}{l_{Dx}'' T_0} \left[ e_{Dx} + \frac{a_{Dx}(e_{xx} - u_x) - a_{Dfx}e_{fx}}{a_{DDx}} \right] \\ \frac{di_{fx}}{dt} &= -\frac{1}{l_{fx}'' T_0} \left[ e_{fx} + \frac{a_{fx}(e_{xx} - u_x) - a_{fDx}e_{Dx}}{a_{ffx}} \right]. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Die Abkürzungen entsprechen denen in den Gl. 2.59 und 2.60, hinzu kommen die ebenfalls nur parameterabhängigen Abkürzungen

$$a_{DDx} = l_x (l_{\sigma Dfx} + l_{\sigma fx}) + l_{hx} l_{\sigma a}, \quad l_{Dx}'' = \frac{a_x}{a_{DDx}} = l_{\sigma Dx} + l_{\sigma fx} \frac{a_{Dfx}}{a_{DDx}}, \quad (2.67)$$

$$a_{\text{ffx}} = l_x(l_{\sigma\text{Dfx}} + l_{\sigma\text{Dx}}) + l_{\text{hx}}l_{\sigma a}, \quad l''_{\text{fx}} = \frac{a_x}{a_{\text{ffx}}} = l_{\sigma\text{fx}} + l_{\sigma\text{Dx}} \frac{a_{\text{fDx}}}{a_{\text{ffx}}}, \quad (2.68)$$

$$a_{\text{Dfx}} = a_{\text{fDx}} = l_xl_{\sigma\text{Dfx}} + l_{\text{hx}}l_{\sigma a}. \quad (2.69)$$

Für eine Synchronmaschine ohne fq-Wicklung entfallen bei den variablen Abkürzungen  $i_{\text{fq}}$  und  $e_{\text{fq}}$ . Außerdem vereinfachen sich die parameterabhängigen Abkürzungen der Querachse durch den Grenzübergang  $(r_{\text{fq}}, l_{\sigma\text{fq}}) \rightarrow \infty$  und Nullsetzen von  $l_{\sigma\text{Dfq}}$  zu

$$a_q = l_{\text{hq}}(l_{\sigma\text{Dq}} + l_{\sigma a}) + l_{\sigma\text{Dq}}l_{\sigma a}, \quad a_{qq} = l_{\text{hq}} + l_{\sigma\text{Dq}}, \quad a_{Dq} = -l_{\text{hq}} \quad \text{und} \quad a_{fq} = 0 \quad (2.70)$$

sowie

$$l''_q = \frac{a_q}{a_{qq}} = l_{\sigma a} + l_{\text{hq}} \frac{l_{\sigma\text{Dq}}}{l_{\text{hq}} + l_{\sigma\text{Dq}}} = l_q - \frac{l_{\text{hq}}^2}{l_{\text{Dq}}}. \quad (2.71)$$

Die Beziehungen für den Querdämpferstrom der Synchronmaschine ohne fq-System lauten damit

$$\frac{di_{\text{Dq}}}{dt} = -\frac{1}{l''_{\text{Dq}} T_0} \left[ e_{\text{Dq}} + \frac{a_{\text{Dq}}(e_{\text{qq}} - u_q)}{a_{\text{DDq}}} \right] \quad (2.72)$$

mit

$$a_{\text{DDq}} = l_q = l_{\text{hq}} + l_{\sigma a} \quad \text{und} \quad l''_{\text{Dq}} = l_{\sigma\text{Dq}} + l_{\text{hq}} \frac{l_{\sigma a}}{l_{\text{hq}} + l_{\sigma a}}. \quad (2.73)$$

---

## Literatur

1. Müller, G., Ponick, B.: Theorie elektrischer Maschinen, 6. Aufl. Wiley-VCH, Weinheim (2009)

Drehstrommaschinen im Inselbetrieb  
Modellbildung – Parametrierung – Simulation  
Mrugowsky, H.  
2015, XVIII, 250 S. 104 Abb., Softcover  
ISBN: 978-3-658-08989-4