Technische Mathematik Kältetechnik

Bearbeitet von
Dieter Schmidt

Neuerscheinung 2015. Taschenbuch. 235 S. Paperback
ISBN 978 3 8007 3667 6
Format (B x L): 14,8 x 21 cm
Gewicht: 362 g

Weitere Fachgebiete > Technik > Werkstoffkunde, Mechanische Technologie > Technische Thermodynamik

16 Wärmeübertragung

16.1 Arten der Wärmeübertragung

Bei der Wärmeübertragung, die gemäß dem 2. Hauptsatz der Wärmelehre nur bei Vorliegen einer Temperaturdifferenz stattfindet, sind drei Arten zu unterscheiden:

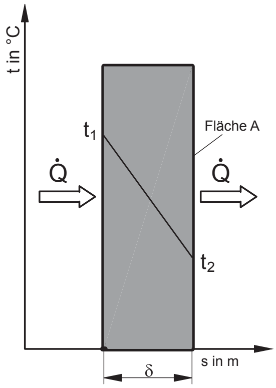
1. Wärmeleitung
   Sie findet statt in festen oder unbewegten flüssigen oder gasförmigen Stoffen, z. B. Wärmeleitung durch die Wandung eines Kupferrohrs, durch eine Kühlraumwand.
2. Konvektion
   Mitführen von Wärme innerhalb bewegter Flüssigkeiten oder Gase (= Fluide), z. B. durch die Kühlraumluft, und zwar entweder als freie Konvektion – die Bewegung erfolgt allein durch die aufgrund Wärmedehnung verursachten Dichteunterschiede (so genannte stille Kühlung) – oder durch erzwungene Konvektion (Ventilator, Pumpe).
3. Wärmestrahlung
   Die Wärmeenergie wird durch elektromagnetische Strahlung übertragen, z. B. Wärme, die durch Sonnenstrahlen oder von einem Heizstrahler übertragen wird.

16.2 Wärmeleitung durch eine ebene Wand

Liegt eine konstante Temperaturdifferenz zwischen Außen- und Innenseite einer Wand vor, fließt ein gleichmäßiger (stationärer) Wärmestrom. Dieser ist

- proportional zur Temperaturdifferenz ΔT,
- proportional zur Wandfläche A,
- abhängig vom Material der Wand,
- umgekehrt proportional zur Wanddicke δ:

$$\dot{Q} \sim \frac{1}{\delta} \cdot A \cdot \Delta T$$



Als Proportionalitätsfaktor wird der Wärmeleitfähigkeitskoeffizient λ („Lambda“) eingeführt, der eine Stoffkenngröße darstellt (auch Wärmeleitzahl). Die Wärmeleitfähigkeit der Stoffe ist temperaturabhängig, wird experimentell ermittelt und ist in Tabellen dokumentiert.

Die Tabelle zeigt den Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten einiger Stoffe bei 20 °C:

Stoff	λ in W/mK	Stoff	λ in W/mK
Aluminium	204	Luft	0,0216
Beton	0,75 – 0,95	Putz/Mörtel	0,8
Glas	0,58 – 1,05	Reif	0,09
Gummi	0,17	Stahl (unlegiert)	58
Kalkstein	0,87	Styropor	0,033
Kork	0,037	Wasser	0,62
Kupfer	395	Ziegelstein	0,87

Mit der Wärmeleitzahl λ in W/mk ergibt sich eine Gleichung zur Bestimmung des Wärmestroms $\dot{Q}$ in Watt durch eine ebene Wand:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{\delta} \cdot A \cdot \Delta T \qquad (16.1)$$

δ Wanddicke (Delta) in m
A Wärmeübertragungsfläche in m^2
ΔT Temperaturdifferenz in K

Analogie mit dem elektrischen Strom

Bei Betrachtung dieser Zusammenhänge fällt eine Analogie zwischen Wärmestrom und elektrischem Strom auf: Der Wärmestrom entspricht dem elektrischen Strom, die treibende Temperaturdifferenz entspricht der angelegten Spannung. Für beide Fälle gilt: Je größer die Spannung (bzw. die Temperaturdifferenz ΔT) desto größer der Strom (Wärmestrom oder elektrischer Strom) und je größer der Widerstand, desto kleiner der Strom. Die zu Gleichung 16.1 analoge Gleichung für den elektrischen Strom lautet $I = \frac{U}{R} = \frac{1}{R} \cdot U$. Dem folgend entspricht der Ausdruck $\frac{\lambda}{\delta} \cdot A$ also $\frac{1}{R}$. Somit ergibt sich der Wärmeleitwiderstand zu $R_\lambda = \frac{\delta}{\lambda \cdot A}$ mit der Einheit Kelvin pro Watt und der spezifische Wärmeleitwiderstand zu $r_\lambda = \frac{\delta}{\lambda}$ mit der Einheit Quadratmeter mal Kelvin pro Watt.

Beispiel 16.1

In einem Labor wird die Wärmeleitfähigkeit neuer Werkstoffe geprüft. Durch eine ebene Dämmstoffplatte von 1 cm Dicke mit den Maßen 50 cm × 50 cm fließt bei einer Temperaturdifferenz von 90 K eine Wärmemenge von 150 kJ in 25 Minuten. Berechnen Sie

a) den Wärmestrom in Watt
b) die Wärmeleitzahl λ in W/mK

Lösung:

a) Geg.: Q = 150 kJ, τ = 25 min = 1500 s

$$\dot{Q} = \frac{Q}{\tau} = \frac{150\,\text{kJ}}{1500\,\text{s}} = 0{,}1\,\text{kW} = \underline{\underline{100\,\text{W}}}$$

b) Geg.: $\dot{Q} = 100\,W$, $\delta = 1\,cm = 0{,}01\,m$, $\Delta T = 90\,K$

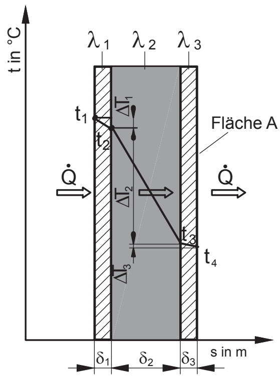
$A = l \cdot b = 0{,}5\,m \cdot 0{,}5\,m = 0{,}25\,m^2$

Für die Berechnung von λ ist Gleichung (16.1) umzustellen:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{\delta} \cdot A \cdot \Delta T \Rightarrow \lambda = \frac{\dot{Q} \cdot \delta}{A \cdot \Delta T} = \frac{100\,W \cdot 0{,}01\,m}{0{,}25\,m^2 \cdot 90\,K} = \underline{\underline{0{,}044\,\frac{W}{m \cdot K}}}$$

16.3 Wärmeleitung durch eine mehrfach geschichtete ebene Wand

In einer mehrfach geschichteten ebenen Wand ist der Wärmestrom in jeder Schicht gleich groß, die Temperatur fällt linear in Richtung des Wärmestroms und die einzelnen Temperaturdifferenzen der Schichten addieren sich. Für die dargestellte dreischichtige Wand gilt also:



$$\dot{Q} = \frac{\lambda_1}{\delta_1} \cdot A \cdot \Delta T_1 = \frac{\lambda_2}{\delta_2} \cdot A \cdot \Delta T_2 = \frac{\lambda_3}{\delta_3} \cdot A \cdot \Delta T_3 \qquad (16.2)$$

$$\Delta T_{ges} = \Delta T_1 + \Delta T_2 + \Delta T_3 \qquad (16.3)$$

$$\dot{Q} = \frac{A \cdot \Delta T_{ges}}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}} \qquad (16.4)$$

Die einzelnen Temperaturdifferenzen ergeben sich aus Gleichung (16.2) zu:

$$\Delta T_1 = \frac{\delta_1}{\lambda_1 \cdot A} \cdot \dot{Q} \qquad \Delta T_2 = \frac{\delta_2}{\lambda_2 \cdot A} \cdot \dot{Q} \qquad \Delta T_3 = \frac{\delta_3}{\lambda_3 \cdot A} \cdot \dot{Q} \qquad (16.5)$$

Analogie mit dem elektrischen Strom

Bei einer mehrfach geschichteten ebenen Wand addieren sich die spezifischen Wärmeleitwiderstände, das entspricht der Summe $\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}$ im Nenner von Gleichung (16.4).

Beispiel 16.2

Für eine dreischichtige Wand gelten folgende Werte gemäß Tabelle. Die Temperatur t_1 an der Außenwand beträgt 25 °C, die an der Innenwand t_4 beträgt –25 °C. Berechnen Sie:

a) den Wärmestrom in Watt bei einer Fläche von 28 m²,

b) die Temperaturdifferenzen in Kelvin und die Wandzwischentemperaturen t_2 und t_3,

c) die erforderliche Dicke einer zusätzlichen Dämmplatte (λ = 0,035 W/mK), die den Wärmestrom halbiert.

Schicht	δ cm	λ W/mK
1	2	0,6
2	36	0,87
3	3	0,35

Lösung:

a) Geg.: ΔT_{ges} = 50 K, A = 28 m², Wandaufbau siehe Tabelle; Gl. (16.4) ist anzuwenden

$$\dot{Q} = \frac{A \cdot \Delta T_{ges}}{\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}\right)} = \frac{28\,\text{m}^2 \cdot 50\,\text{K}}{\left(\frac{0{,}02\,\text{m}}{0{,}6\frac{\text{W}}{\text{mK}}} + \frac{0{,}36\,\text{m}}{0{,}87\frac{\text{W}}{\text{mK}}} + \frac{0{,}03\,\text{m}}{0{,}35\frac{\text{W}}{\text{mK}}}\right)} = \frac{28\,\text{m}^2 \cdot 50\,\text{K}}{0{,}5328\,407\frac{\text{m}^2\text{K}}{\text{W}}}$$

$$= \underline{\underline{2627{,}43\,\text{W}}}$$

b) Die Temperaturdifferenzen werden mit Gl. (16.5) berechnet

$$\Delta T_1 = \frac{\delta_1}{\lambda_1 \cdot A} \cdot \dot{Q} = \frac{0{,}02\,\text{m} \cdot 2627{,}43\,\text{W}}{0{,}6\frac{\text{W}}{\text{mK}} \cdot 28\,\text{m}^2} = \underline{\underline{3{,}12789\,\text{K}}}$$

$$\Delta T_1 = \frac{\delta_2}{\lambda_2 \cdot A} \cdot \dot{Q} = \frac{0{,}36\,\text{m} \cdot 2627{,}43\,\text{W}}{0{,}87\frac{\text{W}}{\text{mK}} \cdot 28\,\text{m}^2} = \underline{\underline{38{,}829\,\text{K}}}$$

Damit lassen sich die Zwischentemperaturen berechnen

$$t_2 = t_1 - \Delta T_1 = 25\,°\text{C} - 3{,}12789\,\text{K} = \underline{\underline{21{,}87211\,°\text{C}}}$$

$$t_3 = t_2 - \Delta T_2 = 21{,}87211\,°\text{C} - 38{,}829\,\text{K} = -\underline{\underline{16{,}95689\,°\text{C}}}$$

Zur Kontrolle sollte auch ΔT_3 und damit die Temperatur t_4 (– 25 °C) berechnet werden:

$$\Delta T_3 = \frac{\delta_3}{\lambda_3 \cdot A} \cdot \dot{Q} = \frac{0{,}03\,\text{m} \cdot 2627{,}43\,\text{W}}{0{,}35\frac{\text{W}}{\text{mK}} \cdot 28\text{m}^2} = \underline{\underline{8{,}04315\,\text{K}}}$$

Damit ergibt sich die Innentemperatur t_4 zu

$$t_4 = t_3 - \Delta T_3 = -16{,}95689\,°\text{C} - 8{,}04315\,\text{K} = -\underline{\underline{25{,}00004\,°\text{C}}} \approx -25\,°\text{C}$$

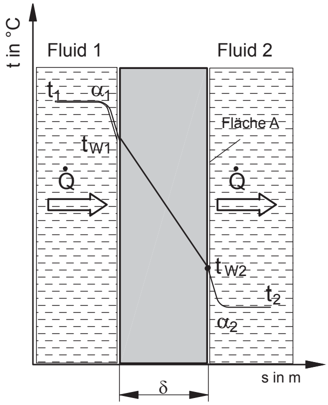
c) Wenn der Wärmestrom halbiert werden soll, muss der Nenner in der Gleichung für $\dot{Q}$ aus a) verdoppelt werden (Analogie zum elektrischen Strom: Der Wärmeleitwiderstand muss verdoppelt werden.) Es muss also der gleiche Wert (0,5328407 m²K/W) dazu kommen, und dies durch die weitere Dämmplatte:

$$0{,}5328407\,\frac{m^2K}{W} = \frac{\delta_4}{\lambda_4} \Rightarrow \delta_4 = 0{,}5328407\,\frac{m^2K}{W} \cdot 0{,}035\,\frac{W}{mK} = 0{,}0186\,m \approx \underline{\underline{19\,mm}}$$

Bei dem gegebenen Wandaufbau (ohne Dämmung) würde also eine nur 19 mm dicke Dämmplatte den Wärmeleitwiderstand verdoppeln und somit den Wärmestrom (Wärmeverlust) halbieren.

16.4 Wärmeübergang

Der Wärmeübergang zwischen Fluiden (Flüssigkeiten und Gase) und festen Stoffen ist ein in der Kältetechnik häufig vorkommender Fall, sowohl bei Kühlraumwänden (Übergang Luft zu Wand) als auch bei Wärmeübertragern (Kältemittel oder Kühlmittel zu Rohrwandung bzw. Kühlraumluft zu Lamellen). Beim Wärmeübergang ist der Wärmestrom $\dot{Q}$ in W proportional zur Wandfläche A und der Temperaturdifferenz ΔT. Der Proportionalitätsfaktor wird Wärmeübergangszahl α (Alpha) genannt. Damit ergibt sich der Wärmestrom zu:



$$\dot{Q} = \alpha \cdot A \cdot \Delta T \qquad (16.6)$$

α Wärmeübergangszahl W/m²K
A Wärmeübertragungsfläche m²

Die Wärmeübergangszahl ist abhängig von der Art des strömenden Fluids, der Strömungsgeschwindigkeit, der Oberflächenbeschaffenheit (glatt oder rau) sowie weiteren Faktoren und kann zwischen 2 und 20 000 W/m²K liegen.

Analogie mit dem elektrischen Strom

Der spezifische Wärmeübergangswiderstand r_α ergibt sich als Kehrwert der Wärmeübergangszahl α: $r_\alpha = \frac{1}{\alpha}$.

16.5 Wärmedurchgang

Ein Wärmedurchgang setzt sich aus mindestens zwei Wärmeübergängen und mindestens einer Wärmeleitung zusammen (s. Abbildung in 16.4).

In der Kälte und Klimatechnik muss oft der Wärmedurchgang durch eine mehrschichtige ebene Wand berechnet werden. Mit der Wärmedurchgangszahl k[1)] werden die beiden Wärmeübergänge (außen und innen) und sämtliche Wärmeleitungen (je nach Anzahl n der Schichten) erfasst.
Damit ergibt sich der Wärmestrom $\dot{Q}$ in W für eine mehrschichtige Wand zu:

$$\dot{Q} = k \cdot A \cdot \Delta T \qquad (16.7)$$

A Fläche in m^2
ΔT gesamte Temperaturdifferenz (= Summe der Einzeldifferenzen) in K

Die Wärmedurchgangszahl (k-Wert) in W/m^2K berechnet sich als Kehrwert der Summe der einzelnen spezifischen Wärmeleitwiderstände r_λ und der beiden spezifischen Wärmeübergangswiderstände r_α:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_a} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} + \ldots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\alpha_i}} \qquad (16.8)$$

α_a Wärmeübergangszahl außen (Alpha) in W/m^2K
α_i Wärmeübergangszahl innen in W/m^2K
λ Wärmeleitzahl (Lambda) in W/mK
δ Wanddicke (Delta) in m

Beispiel 16.3
Eine Tiefkühlzelle mit den Maßen l = 4,4 m, b = 3,5 m, h = 2,75 m hat einen dreischichtigen Aufbau gemäß Tabelle. Die Innentemperatur beträgt $t_{KR} = -18\,°C$, die Außentemperatur $t_a = 25\,°C$. Die TK-Zelle ist unterlüftet und die Temperatur unterhalb der Kühlzelle beträgt 20 °C. Die Wärmeübergangswerte werden mit $\alpha_a = 25\,W/m^2K$ und $\alpha_i = 8\,W/m^2K$ veranschlagt. Die Kühlzellentür (2 m × 1 m) hat den gleichen Aufbau wie die Wand. Berechnen Sie

	Material	δ in mm	λ in W/mK
1	Stahlblech	1	58
2	Polyurethan	100	0,024
3	Chromstahl	0,5	46,7

a) den k-Wert der Wand,
b) den Wärmestrom durch Boden sowie Wände und Decke.

1) Seit Einführung der Energieeinspar-Verordnung (EnEV) 2002 wird im Bereich Gebäudetechnik europaweit für die Wärmedurchgangszahl der Buchstabe U genommen, der sich jedoch im Bereich der Kälte- und Klimatechnik noch nicht durchgesetzt hat. Hier wird weiterhin die Bezeichnung „k-Wert" verwendet.

a) Lösung erfolgt gemäß Gl. (16.8)

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_a} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_i}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{25\,W/m^2K} + \frac{0{,}001\,m}{58\,W/mK} + \frac{0{,}1\,m}{0{,}024\,W/mK} + \frac{0{,}0005\,m}{46{,}7\,W/mK} + \frac{1}{8\,W/m^2K}}$$

$$= \underline{\underline{0{,}23086\,W/m^2K}}$$

b) Für die Berechnung des Wärmestroms mit Gl. (16.7) müssen zunächst die Flächen berechnet werden, und zwar getrennt, wenn unterschiedliche Temperaturdifferenzen oder k-Werte vorliegen. Hier ist also eine getrennte Rechnung für den Boden erforderlich:
Flächen mit $t_a = 25\,°C$ ($\Delta T = 43\,K$) sind Seitenwände und Decke:

$$A_{W+D} = 2 \cdot (l \cdot h + b \cdot h) + l \cdot b$$
$$= 2 \cdot (4{,}4\,m \cdot 2{,}75\,m + 3{,}5\,m \cdot 2{,}75\,m) + 4{,}4\,m \cdot 3{,}5\,m$$
$$= 43{,}45\,m^2 + 15{,}4\,m^2 = \underline{\underline{58{,}85\,m^2}}$$

Eine Fläche mit $t_a = 20\,°C$ ($\Delta T = 38\,K$) ist der Boden: Er hat die gleiche Fläche wie die Decke, $A_B = 15{,}4\,m^2$.
Wärmeströme:

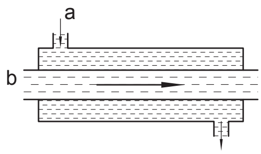
$$\dot{Q}_{W+D} = k \cdot A_{W+D} \cdot \Delta T_{W+D} = 0{,}2308 \frac{W}{m^2K} \cdot 58{,}85\,m^2 \cdot 43\,K = \underline{584\,W}$$

$$\dot{Q}_B = k \cdot A_B \cdot \Delta T_B = 0{,}2308 \frac{W}{m^2K} \cdot 15{,}4\,m^2 \cdot 38\,K = \underline{135\,W}$$

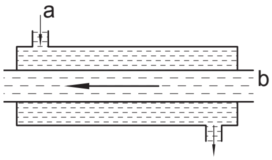
$$\dot{Q} = \dot{Q}_{W+D} + \dot{Q}_B = 584\,W + 135\,W = \underline{\underline{719\,W}}$$

16.6 Mittlere logarithmische Temperaturdifferenz

Wärmeübertrager zur Kühlung von Flüssigkeiten bestehen im einfachsten Fall aus einem Innenrohr mit Fluid a und einem dieses umhüllenden Außenrohr mit Fluid b. Sie können im Gleichstrom und im Gegenstrom betrieben werden.

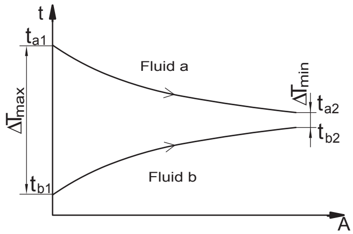


Gleichstromwärmeübertrager

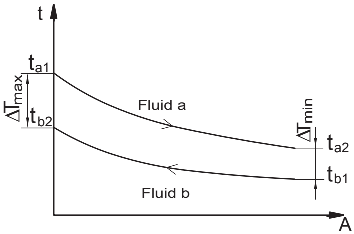


Gegenstromwärmeübertrager

In solchen Wärmeübertragern ist die Temperaturdifferenz zwischen den beteiligten Fluiden nur konstant, wenn beide einen Phasenwechsel durchlaufen (latente Wärme). Das ist z. B. im Verdampfer/Verflüssiger von Kaskadenkälteanlagen der Fall: Das Kältemittel der unteren Temperaturstufe verflüssigt (t_c = const.) und gibt seine Wärme an das verdampfende Kältemittel (t_0 = const.) der oberen Temperaturstufe ab. In den meisten Fällen ändert sich aber die Temperatur von mindestens einem der beiden Fluide:



Temperaturverlauf über der Fläche (A) bei Gleichstromwärmeübertragung



Temperaturverlauf über der Fläche (A) bei Gegenstromwärmeübertragung

In diesen Fällen muss mit der mittleren logarithmischen Temperaturdifferenz ΔT_m gerechnet werden:

$$\Delta T_m = \frac{\Delta T_{max} - \Delta T_{min}}{\ln \frac{\Delta T_{max}}{\Delta T_{min}}} \qquad (16.9)$$

ΔT_{max}	maximale Temperaturdifferenz zwischen den Fluiden in K
ΔT_{min}	minimale Temperaturdifferenz zwischen den Fluiden in K
ln	natürlicher Logarithmus

Beispiel 16.4

Mit einem Doppelrohr-Wärmeübertrager wird Wasser von 28 °C auf 10 °C gekühlt. Im Innenrohr fließt Eiswasser, das sich von 0,5 °C auf 6 °C erwärmt. Berechnen Sie die mittlere logarithmische Temperaturdifferenz

a) im Gleichstrombetrieb,

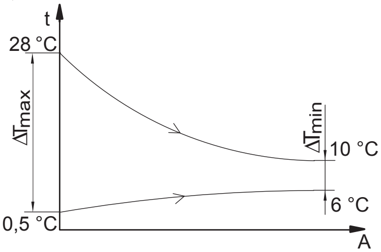
b) im Gegenstrombetrieb.

c) Bewerten Sie den Unterschied.

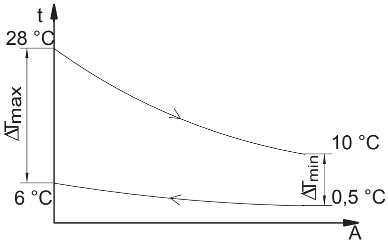
Lösung:

Zur Berechnung der beiden Temperaturdifferenzen ΔT_{max} und ΔT_{min} empfiehlt es sich, eine Skizze für Gleich- und Gegenstrombetrieb anzufertigen:

a)



b)



a) $\Delta T_{max} = 27{,}5\,\text{K} \quad \Delta T_{min} = 4\,\text{K}$

$$\Delta T_m = \frac{\Delta T_{max} - \Delta T_{min}}{\ln \dfrac{\Delta T_{max}}{\Delta T_{min}}} = \frac{27{,}5\,\text{K} - 4\,\text{K}}{\ln \dfrac{27{,}5\,\text{K}}{4\,\text{K}}}$$

$$= \frac{23{,}5\,\text{K}}{\ln 6{,}875} = \frac{23{,}5\,\text{K}}{1{,}92789} = \underline{\underline{12{,}189\,\text{K}}}$$

b) $\Delta T_{max} = 22\,\text{K} \quad \Delta T_{min} = 9{,}5\,\text{K}$

$$\Delta T_m = \frac{\Delta T_{max} - \Delta T_{min}}{\ln \dfrac{\Delta T_{max}}{\Delta T_{min}}} = \frac{22\,\text{K} - 9{,}5\,\text{K}}{\ln \dfrac{22\,\text{K}}{9{,}5\,\text{K}}}$$

$$= \frac{12{,}5\,\text{K}}{\ln 2{,}3157} = \frac{12{,}5\,\text{K}}{0{,}83975} = \underline{\underline{14{,}885\,\text{K}}}$$

c) Die Rechnung zeigt, dass Gegenstrombetrieb die größere mittlere logarithmische Temperaturdifferenz ergibt. Da der übertragene Wärmestrom proportional zur Temperaturdifferenz ist, hat also ein Wärmeübertrager im Gegenstrombetrieb mehr Wärmeübertragungsleistung als im Gleichstrombetrieb.