Zahlentheorie

Fünf ausgewählte Themenstellungen der Zahlentheorie

Bearbeitet von
Hartmut Menzer

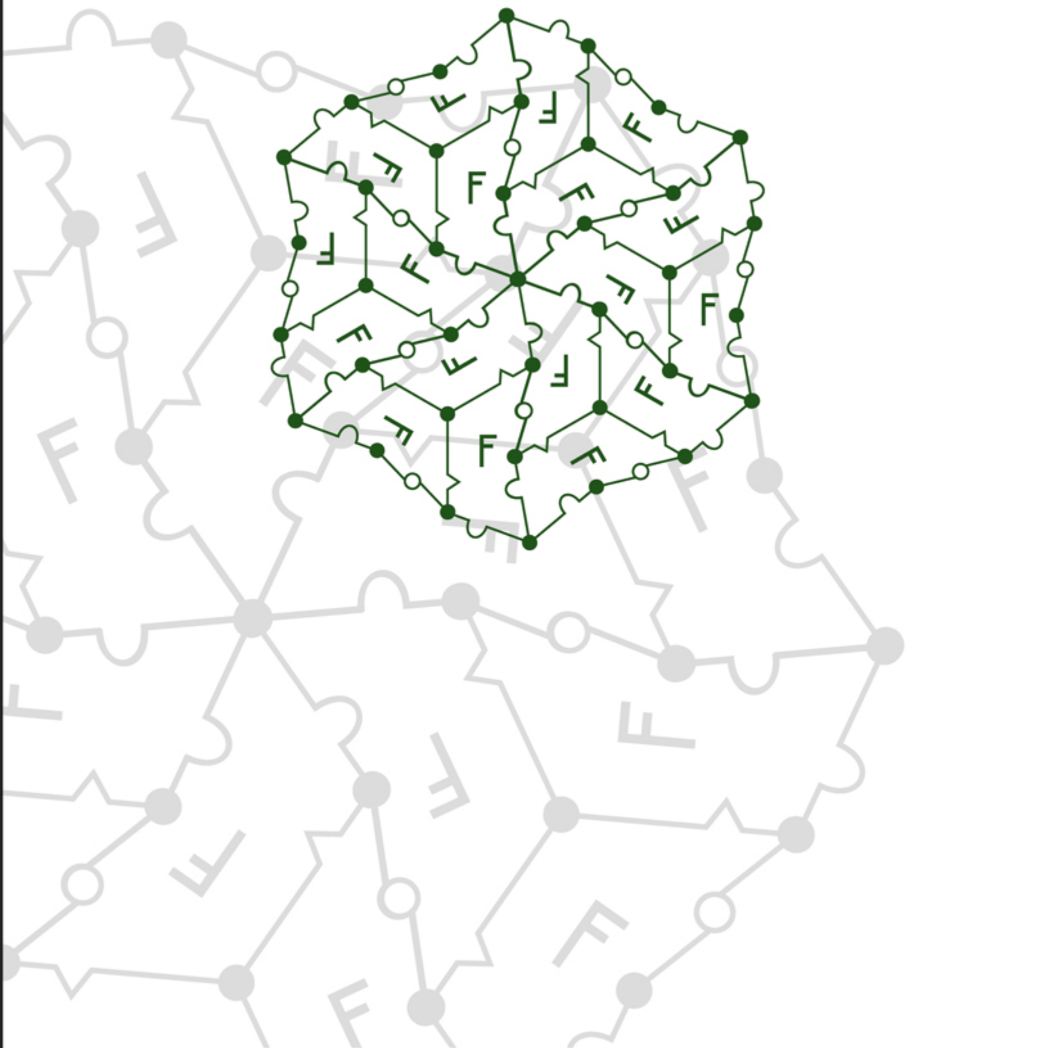
1. Auflage 2010. Taschenbuch. IX, 336 S. Paperback
ISBN 978 3 486 59674 8
Format (B x L): 17 x 24 cm
Gewicht: 576 g

Weitere Fachgebiete > Mathematik > Algebra > Zahlentheorie

Manfred Dobrowolski

Mathematische Exkursionen

Gödel, Escher und andere Spiele



Oldenbourg

Mathematische Exkursionen

Gödel, Escher und andere Spiele

von
Prof. Dr. Manfred Dobrowolski

Oldenbourg Verlag München

Prof. Dr. Manfred Dobrowolski ist seit 1995 Inhaber des Lehrstuhls für Angewandte Mathematik an der Universität Würzburg. Nach der Habilitation im Fach Mathematik an der Universität Bonn war er von 1984 bis 1986 Professor an der Universität der Bundeswehr in München und von 1986 bis 1995 Professor an der Universität Erlangen. Professor Dobrowolskis Arbeitsgebiete sind die Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
oldenbourg.de

Lektorat: Kathrin Mönch
Herstellung: Anna Grosser
Coverentwurf: Kochan & Partner, München
Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Gesamtherstellung: Grafik + Druck, München

ISBN 978-3-486-58909-2

Vorwort

Das vorliegende Buch ist aus der Veranstaltungsreihe „Mathematik am Samstag“ entstanden, die ich seit einigen Jahren an der Universität Würzburg für Mathematik-Interessierte abhalte. Der Teilnehmerkreis setzt sich aus Schülern, Studenten, Lehrern und sonstigen Personen zusammen. Die Teilnehmerzahlen lassen auf die Popularität der behandelten Themen schließen und zeigen klare Präferenzen: „Escher“, „Chaos und Fraktale“, „Wie löst man Mathematik-Aufgaben?“, und zwar in dieser Reihenfolge. Ich habe mir in allen Veranstaltungen vorgenommen, neben dem visuellen Aspekt auch die zugrunde liegende Mathematik zu erläutern. Vor allem beim mittleren Thema besteht dann die Gefahr, die Teilnehmer zu überfordern.

Besonders wünsche ich mir, dass die Leser einen Zugang zur Mathematik des 20. Jahrhunderts bekommen. Gerade hier finden wir viele frische Ideen jenseits der Schulmathematik, die das heutige Weltbild mitprägen. Neben „Chaos und Fraktale“ gehören dazu sicherlich die strategische Spieltheorie sowie die mathematische Logik und Berechenbarkeit.

Bei Veranstaltungen, in denen die Teilnehmer ganz unterschiedliche Voraussetzungen mitbringen, sind natürlich Themen gefragt, die sich ohne großen Vorlauf erklären lassen. Sie stammen daher zu einem guten Teil aus der diskreten Mathematik, die heute eher in der Informatik als in der Mathematik gepflegt wird. Neben der bereits erwähnten „Logik und Berechenbarkeit“ gehören die Kapitel über Graphen und Polyeder sowie über die kombinatorische Spieltheorie in diesen Bereich.

Als direkte Fortsetzungen der Schulmathematik sind eigentlich nur die Kapitel über Algebra und Zahlentheorie sowie über Stochastik zu sehen, aber auch hier hoffe ich, den Themen interessante und ungewöhnliche Aspekte abgewonnen zu haben.

Normalerweise dient das Vorwort dazu, sich für das Buch zu rechtfertigen. Ich rechtfertige mich für die Auswahl der Themen, die in der Tat subjektiv gefärbt ist. Um ehrlich zu sein, habe ich das Buch geschrieben, das ich als junger Mann gerne gelesen hätte.

Besonders danken möchte ich meiner Kollegin Frau Huberta Lausch, die mir vor allem bei der Abfassung des Kapitels über Algebra und Zahlentheorie sehr geholfen und ausgiebig Korrektur gelesen hat. Ferner danke ich dem Oldenbourg Wissenschaftsverlag für die Bereitschaft, dieses Buch zu publizieren.

Würzburg — Manfred Dobrowolski

Inhaltsverzeichnis

1 Der Anfang ist leicht

1.1 Etwas Logik

Wir nennen eine Formel oder einen Satz der Alltagssprache eine *Aussage*, wenn sie wahr oder falsch sein kann. Die Formeln $2 = 3$, $2 \leq 4$, $5 \neq 5$ sind Beispiele für Aussagen, wenn auch nicht in jedem Fall für richtige. Solche Aussagen lassen sich kombinieren, die wichtigste ist die *Implikation* wie etwa

$$\text{„Wenn es regnet, dann ist die Straße nass“.} \tag{1.1}$$

In der Mathematik heißt der Wenn-Teil Voraussetzung, der Dann-Teil Behauptung.

Die Bewertung von Implikationen als wahr oder falsch weicht in der mathematischen Logik von der Alltagslogik ab. Betrachten wir als erstes Beispiel die Aussage

$$\begin{aligned}&\text{„Wenn Albert Einstein den Nobelpreis nicht bekommen hätte,}\\&\text{dann wäre er an Hänschen Klein verliehen worden“.}\end{aligned} \tag{1.2}$$

Schon der Konjunktiv macht deutlich, dass dieser Satz sich sprachlich stark von (1.1) unterscheidet. Ich hatte in mehreren Veranstaltungen die Teilnehmer gefragt, ob sie diesen Satz für wahr oder falsch halten. Nach einer anfänglichen Irritation war in allen Fällen die überwältigende Mehrheit für das Urteil „falsch“.

Im nächsten Beispiel nehmen wir an, dass für einen Preis nur zwei heiße Kandidaten E und K in Frage kommen. Nachdem E den Preis erhalten hat, wird die Aussage

$$\begin{aligned}&\text{„Wenn } E \text{ den Preis nicht bekommen hätte,}\\&\text{dann wäre er an } K \text{ verliehen worden“.}\end{aligned} \tag{1.3}$$

wohl mehrheitlich als wahr angesehen. Beide Aussagen (1.2) und (1.3) sind von der Form „$A \Rightarrow B$“, wobei sowohl A als auch B falsch sind. Die Bewertung solcher Implikationen durch die Alltagslogik hängt also vom Kontext ab. Eine mit der Alltagslogik völlig konforme Definition der Wahrheit einer Implikation kann es daher in der mathematischen Logik nicht geben. Sie definiert die Wahrheit der Implikation durch die Wahrheitstafel

A\B	w	f
w	w	f
f	w	w

.

Eine Implikation ist daher immer wahr, wenn die Voraussetzung falsch ist. Damit sind beide Aussagen (1.2) und (1.3) wahr. Einerseits sorgt die Definition durch die Wahrheitstafel für klare Verhältnisse, andererseits wird nun Satz (1.2) gegen die Intuition für wahr erklärt. Zweifellos sorgt das enge Korsett der mathematischen Logik für die aus ganzem Herzen kommende Abneigung vieler Menschen gegenüber der Mathematik.[1]

Der obigen Wahrheitstafel am nächsten kommt in der Alltagslogik der Satz (1.1). Dieser muss auch dann richtig sein, wenn es nicht regnet. Für diesen Fall wird aber auch nichts behauptet.

Ein mathematischer Beweis besteht aus einer Folge von Aussagen, die entweder von vorneherein als richtig angesehen werden oder aus der folgenden Schlussregel, dem sogenannten modus ponens, abgeleitet werden können:

„Wenn es regnet, dann ist die Straße nass“	$A \Rightarrow B$
„Es regnet“	A
„Die Straße ist nass“	B

Die linke Seite gibt ein Beispiel für diese Regel. Weder „Wenn es regnet, ist die Straße nass“ noch „Es regnet“ reichen für sich genommen aus, damit man auf eine nasse Straße schließen kann. Also: Hat man einen wahren Satz der Form „Wenn ..., dann ...“ und ist auch der Satz wahr, der im Wenn-Teil steht, so ist auch der Satz im Dann-Teil wahr.

Für das folgende Beispiel nehmen wir an, dass es unter den Menschen nur Lügner gibt, die immer lügen, und Wahrheitssprecher, die immer die Wahrheit sagen. Eine *Antinomie* ist eine (scheinbare) Aussage, bei der jede Zuweisung eines Wahrheitswertes zu einem Widerspruch führt. Die bekannte *Antinomie des Epimenides*[2] lautet:

„Ein Kreter sagt, dass alle Kreter lügen“. (1.4)

Wäre der Satz wahr, so wäre auch der Sprecher des Satzes ein Lügner und der Satz damit falsch. Wäre er falsch, so wäre der Sprecher ein Wahrheitssprecher und der Satz damit wahr. Dieses Argument wurde über die Jahrhunderte von zahlreichen Philosophen wiederholt und erst spät wurde bemerkt, dass gar keine Antinomie vorliegt, sondern nur eine völlige Unkenntnis über die Verneinung von Aussagen. Jede Aussage greift eine Teilmenge des Kosmos der Möglichkeiten heraus. In diesem Fall besteht dieser Kosmos aus vielleicht 3000 Kretern, die jeder ein Lügner oder ein Wahrheitssprecher sein können. Die Aussage, dass alle Kreter lügen, greift dies eine Element heraus, dass alle 3000 Kreter Lügner sind. Die Verneinung dieser Aussage muss alle Elemente des Kosmos umfassen, die im Komplement dieses einen Elements liegen, und das ist natürlich „Es gibt einen Kreter, der nicht lügt“. Wir können (1.4) daher so auflösen, dass der Satz „Alle Kreter lügen“ falsch und der Sprecher ein Lügner ist. Somit liegt gar keine Antinomie vor. Die Idee hinter der vermeintlichen Antinomie, dass selbstbezügliche Aussagen widersprüchlich sein können, ist aber richtig und kann durch Sätze wie „Ich lüge“ oder „Der Satz, den ich jetzt ausspreche, ist falsch“ umgesetzt werden.[3]

Auf die gleiche Weise macht man sich klar, dass die Aussage „Es gibt einen Kreter, der die Wahrheit sagt“ verneint wird durch „Alle Kreter lügen“. Die Negation der Aussage A bezeichnen wir mit $\neg A$. Für den *Quantor* „Für alle“ schreiben wir „$\forall$“ und für den Quantor „Es gibt“ schreiben wir „$\exists$“. Sagt $A(x)$ etwas über die Individuen x aus wie eben „x ist ein Lügner“, so gelten die Verneinungsregeln

$$\neg(\forall x\, A(x)) = \exists x\, \neg A(x), \quad \neg(\exists x\, A(x) = \forall x\, \neg A(x).$$

Mehr zu dieser in der Mathematik verwendeten *Prädikatenlogik* gibt es in Abschnitt 9.1.

1.2 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Mit $\mathbb{N}$ bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Manche Autoren lassen die natürlichen Zahlen auch mit der Null beginnen, wir schreiben dafür $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Wir wollen die folgende Formel für die Summe der ersten n ungeraden Zahlen beweisen

$$(A_n) \qquad 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Für $n = 1$ erhalten wir auf der linken Seite 1 und auf der rechten $1^2 = 1$. Überprüfen wir ferner den Fall $n = 2$: Links steht $1 + 3 = 4$ und rechts $2^2 = 4$. Da wir auch den Fall $n = 3$ leicht im Kopf berechnen können, ist die Formel also für $n = 1, 2, 3$ richtig. Ein Physiker wäre mit diesem Argument vielleicht schon zufrieden und würde hieraus kühn auf die Richtigkeit von (A_n) für alle n folgern. Wir nennen dies einen Induktionsschluss, weil eine allgemeine Behauptung durch Nachweis von endlich vielen Fällen aufgestellt wird. Dem Physiker bleibt freilich nichts anderes übrig: Er kann ein von ihm postuliertes Gesetz nur in endlich vielen Fällen experimentell nachweisen, obwohl es in unendlich vielen Fällen gültig sein soll. In der Mathematik muss die Behauptung (A_n) dagegen für jedes n bewiesen werden.

Bei der Überprüfung von (A_n) kann man auf bereits Berechnetes zurückgreifen:

$$1 + 3 + 5 = (1 + 3) + 5 = 4 + 5 = 9 \tag{1.5}$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = (1 + 3 + 5) + 7 = 9 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = (1 + 3 + 5 + 7) + 9 = 16 + 9 = 25$$

Wie wir gleich sehen werden, kann man hieraus einen vollständigen Beweis machen, es fehlt nur noch ein Schema, das diese Rechnung allgemeingültig macht.

Wir können $(A_1), (A_2), \ldots$ mit Hilfe des *Prinzips der vollständigen Induktion* beweisen. Dazu beweist man zwei Dinge:

(i) (A_1) (=Induktionsanfang oder Induktionsverankerung),

(ii) $(A_n) \Rightarrow (A_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (=Induktionsschritt).

Der „Beweis“ von (A_1) ist nichts anderes als dass man nachrechnet, dass (A_1) eine wahre Aussage ist, was wir bereits getan haben. Der zweite Schritt lässt sich so interpretieren: Unter der Voraussetzung, dass wir schon wissen, dass die *Induktionsvoraussetzung* (A_n)

richtig ist, können wir auch die Richtigkeit von (A_{n+1}) nachweisen. Warum ist mit diesen beiden Schritten tatsächlich der Nachweis von (A_n) für jedes $n \in \mathbb{N}$ erfolgt?

Wir betrachten den unendlich langen Zug in Abbildung 1.1. Die Aussage „(A_n) ist richtig" soll in diesem Bild bedeuten „Der Waggon n fährt". Wir nehmen zunächst an, dass die Waggons nicht miteinander gekoppelt sind. Wenn also (A_1) bewiesen ist, so fährt die Lokomotive los – allerdings allein, weil nichts aneinandergekoppelt ist. Haben wir „ $(A_1) \Rightarrow (A_2)$ " bewiesen, so haben wir die Wahrheit von (A_2) an die Wahrheit von (A_1) gekoppelt: Mit (A_1) wahr, ist auch (A_2) wahr. Fährt die Lokomotive los, so auch Waggon 2. Im Induktionsschritt sind sogar alle Waggons miteinder gekoppelt. Fährt nun die Lokomotive aufgrund der Induktionsverankerung los, so auch der unendlich lange Zug.

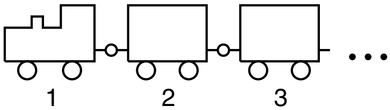


Abb. 1.1: *Der Induktionszug*

Nun können wir (A_n) beweisen. (A_1) ist ja richtig. Zum Nachweis von (A_{n+1}) dürfen wir nun (A_n) verwenden. Wir schauen (A_{n+1}) tief in die Augen und kommen dann mit dem gleichen Verfahren wie bei (1.5) auf

$$\begin{aligned}
&1 + 3 + \ldots + (2n-1) + (2(n+1)-1) \\
&= \Big(1 + 3 + \ldots + (2n-1)\Big) + (2(n+1)-1) \\
&= n^2 + (2(n+1)-1) \\
&= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.
\end{aligned}$$

Damit ist (A_{n+1}) bewiesen.

Es sei darauf hingewiesen, dass bei der wahren Implikation „Wenn es regnet, ist die Straße nass" weder etwas über Regen noch über eine nasse Straße ausgesagt wird. Genauso sagt $(A_n) \Rightarrow (A_{n+1})$ für sich alleine genommen weder etwas über (A_n) noch über (A_{n+1}) aus. Nehmen wir aber alles zusammen, so baut sich der Beweis von (A_n) schrittweise auf: (A_1) ist die Induktionsvoraussetzung, dann wird der Induktionsschritt für $n = 1$ angewendet, also ist $(A_1) \Rightarrow (A_2)$ ebenfalls bewiesen, nach dem modus ponens daher auch (A_2). Durch fortgesetzte Anwendung des Induktionsschritts begleitet vom modus ponens erhält man den Beweis von (A_n) für alle n.

Das Prinzip der vollständigen Induktion lässt sich auf vielfältige Weise verallgemeinern. Ist beispielsweise (A_n) eine Aussage, die für alle $n \geq n_0$ definiert ist für ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, so haben wir mit

(i) (A_{n_0}),

(ii) $(A_n) \;\Rightarrow\; (A_{n+1}) \quad$ für alle $n \geq n_0$, die Aussage (A_n) für alle $n \geq n_0$ bewiesen. In diesem Fall hat die Lokomotive nur einen anderen Namen bekommen, nämlich n_0, an der Struktur des Zuges hat sich nichts geändert.

Mit diesem verallgemeinerten Induktionsprinzip beweisen wir die *Bernoulli-Ungleichung*, die für eine reelle Zahl $a \geq 0$ und für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ Folgendes behauptet,

$$(1+a)^n \geq 1 + na. \qquad (B_n)$$

In diesem Fall können wir die Induktion mit $n_0 = 0$ verankern, denn $(1+a)^0 = 1$. Für $n \geq 0$ gilt unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung (B_n)

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} &= (1+a)^n(1+a)\\ &\geq (1+na)(1+a) = 1 + na + a + na^2\\ &\geq 1 + (n+1)a.\end{aligned}$$

Die *Fibonacci-Zahlen* F_n sind definiert durch die Anfangsvorgaben

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1,$$

sowie durch die *Rekursion*

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir bekommen die Folge $F_0, F_1, \ldots$ der Fibonacci-Zahlen, indem wir die letzte Formel sukzessive für $n = 1, 2 \ldots$ anwenden. Für $n = 1$ ergibt sich also $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$. Allgemeiner ist jede Fibonacci-Zahl die Summe ihrer beiden Vorgänger. In der Definition haben wir also ein verallgemeinertes Induktionsprinzip kennengelernt: Da jede Fibonacci-Zahl F_{n+1} von ihren beiden Vorgängern F_n, F_{n-1} abhängt, benötigen wir *zwei* „Induktionsanfänge“ F_0 und F_1. Damit sind die Fibonacci-Zahlen für alle natürlichen Zahlen definiert und lassen sich, da nur die beiden vorherigen Fibonacci-Zahlen addiert werden müssen, leicht hinschreiben:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5,\ F_6 = 8,\ F_7 = 13,\ F_8 = 21,\ F_9 = 34.$$

Erfunden hat die Fibonacci-Zahlen der Mathematiker Leonardo von Pisa (ca 1170-1240), der sich Fibonacci nannte. Mit den Fibonacci-Zahlen soll die Kaninchenaufgabe gelöst werden, also wie viele Kaninchen im Laufe einer Zeitspanne aus einem Paar entstehen. Es wird angenommen, das jedes Paar allmonatlich ein neues Paar in die Welt setzt, das wiederum nach *zwei* Monaten ein weiteres Paar produziert. Man nimmt also an, dass die neugeborenen Kaninchen nicht sofort geschlechtsreif sind. Todesfälle werden nicht berücksichtigt. Hat man im ersten Monat ein neugeborenes Paar (N), so im zweiten Monat ein geschlechtsreifes Paar (G) und im dritten Monat 2 Paare, nämlich 1N+1G. Im 4. Monat hat man 3 Paare, nämlich 1N+2G. Bezeichnet man mit F_n die Anzahl der Kaninchenpaare im Monat n, so kommen im Monat $n+1$ gerade F_{n-1} hinzu:

$$\begin{array}{ccccc} F_{n+1} & = & F_n & + & F_{n-1}\\ \text{Paare in } n+1 & & \text{Paare in } n & & \text{geschlechtsreife Paare in } n\end{array}$$

Wäre jedes neugeborene Paar sofort geschlechtsreif, so hätte man stattdessen die Rekursion $F_{n+1} = 2F_n$, was eine Verdoppelung der Paare in jedem Monat bedeuten würde. Die Berücksichtigung der Geschlechtsreife führt dagegen zu einem langsameren Wachstum der Population, nämlich

$$\frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1,6, \quad \frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8} = 1,625, \quad \frac{F_8}{F_7} = \frac{21}{13} = 1,615\ldots,$$

$$\frac{F_9}{F_8} = \frac{34}{21} = 1,619\ldots, \quad \frac{F_{10}}{F_9} = \frac{55}{34} = 1,617\ldots.$$

Das sieht recht geheimnisvoll aus: Die Quotienten scheinen um einen nicht offensichtlichen Wert zu oszillieren, der in der Nähe von $1,618$ liegt.

Nun wollen wir die verwandte Frage diskutieren, für welche positiven Zahlen a die Abschätzung

$$F_n \leq a^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ richtig ist. Um erst einmal die Struktur des Beweises zu verstehen, machen wir es uns einfach und beweisen die Aussagen

$$(D_n) \qquad F_n \leq 2^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Wir wollen das Induktionsprinzip verwenden, haben aber Schwierigkeiten, weil in $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ sowohl F_n als auch F_{n-1} vorkommen. Wir zeigen daher

(i) (D_0) *und* (D_1) (= Induktionsanfang),

(ii) $(D_{n-1}), (D_n) \Rightarrow (D_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (= Induktionsschritt).

Wir können leicht durchprobieren, dass damit die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}_0$ bewiesen ist. (D_0) und (D_1) sind nach dem ersten Schritt richtig. Zum Beweis von (D_2) setzen wir im zweiten Schritt $n = 1$, und erhalten, da (D_0) und (D_1) richtig sind, die Behauptung (D_2). Für die größeren n geht das ganz genauso.

Der Beweis von (D_0) und (D_1) ist

$$F_0 = 0 \leq 1 = 2^0, \quad F_1 = 1 \leq 2 = 2^1.$$

Zum Nachweis von (D_{n+1}) dürfen wir die Induktionsvoraussetzung

$$F_n \leq 2^n, \quad F_{n-1} \leq 2^{n-1}$$

verwenden. Demnach gilt

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \leq 2^n + 2^{n-1} \leq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}. \tag{1.6}$$

Damit ist (D_{n+1}) bewiesen.

Kommen wir nun zur Ausgangsfrage zurück, für welche $a > 0$ die Abschätzung

$$F_n \leq a^n$$

für alle n in $\mathbb{N}_0$ richtig ist. Gleichzeitig soll hier gezeigt werden, dass mit dem Prinzip der vollständigen Induktion nicht nur vermutete Aussagen bewiesen, sondern auch völlig neue Erkenntnisse hergeleitet werden können, wenn man mit dem Prinzip kreativ umgeht. Der Beweis der neuen Aussage läuft genauso wie vorher. Der Induktionsanfang $F_0 \leq a^0$ und $F_1 \leq a$ ist für jedes $a \geq 1$ richtig. Die Hauptschwierigkeit ist der Schritt (1.6), den wir ganz analog durchführen wollen:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \leq a^n + a^{n-1} \overset{!}{\leq} a^{n+1}.$$

Das Ausrufezeichen bedeutet hier, dass wir diejenigen a herausfinden müssen, für die

$$a^n + a^{n-1} \leq a^{n+1}$$

richtig ist. Da $a \geq 1$ wegen des Induktionsanfangs, können wir hier kürzen und erhalten

$$a + 1 \leq a^2 \tag{1.7}$$

und somit

$$a \geq \Phi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = 1.618033\ldots,$$

was im Einklang mit den obigen Untersuchungen von F_{n+1}/F_n steht. Die Zahl Φ heißt *goldener Schnitt* und löst folgendes Problem: Gesucht ist das Verhältnis der Seitenlängen a, b eines Rechtecks mit

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\text{lange Seite}}{\text{kurze Seite}} = \frac{\text{Summe der Seiten}}{\text{lange Seite}}.$$

Mit $\Phi = a/b$ folgt hieraus $\Phi = 1 + \Phi^{-1}$ und $\Phi^2 = \Phi + 1$, was gerade die mit (1.7) verbundene quadratische Gleichung ist.

1.3 Kombinatorik

Für jede Menge A gilt $\emptyset \subset A$ und $A \subset A$, dies ist Bestandteil der Definition der Teilmenge. Die Menge $A_2 = \{1, 2\}$ besitzt daher die Teilmengen

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}.$$

Die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A ist definiert als die Menge aller Teilmengen von A, daher

$$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\big\}.$$

Wir wollen die Anzahl der Teilmengen der Menge $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ bestimmen. Dazu bietet sich vollständige Induktion über n an, allerdings müssen wir erst einmal wissen, *was* wir beweisen sollen – die Induktion sagt uns das ja nicht. Durch Probieren stellen wir zunächst eine Hypothese auf:

$$\begin{array}{lll} A_1: & \emptyset, \{1\} & 2 \\ A_2: & \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\} & 4 \\ A_3: & \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} & 8 \end{array}$$

Die Vermutung ist also: A_n besitzt 2^n Teilmengen.

Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig (=Induktionsanfang). Sei 2^n die Anzahl der Teilmengen von A_n (=Induktionsvoraussetzung). Die Beweisidee bei solchen kombinatorischen Problemen ist die Strukturierung der zu zählenden Objekte nach dem Motto „Teile und Herrsche“. Wir zerlegen die Teilmengen von A_{n+1} in zwei Gruppen:

$$\begin{aligned} \text{I}: &\quad \text{Teilmengen, die } n+1 \text{ nicht enthalten,} \\ \text{II}: &\quad \text{Teilmengen, die } n+1 \text{ enthalten.} \end{aligned}$$

Gruppe I enthält genau die Teilmengen von A_n, das sind nach Induktionsvoraussetzung 2^n. In den Teilmengen von Gruppe II können wir das Element $n+1$ weglassen und wir erhalten eine Teilmenge von A_n. Umgekehrt können wir jede Teilmenge von A_n durch Anfügen von $n+1$ zu einer Teilmenge von Gruppe II machen. Damit enthält auch Gruppe II genau 2^n Teilmengen, zusammen also $2^n + 2^n = 2^{n+1}$, wie zu beweisen war. Wir haben damit gezeigt:

Satz 1.1 *Die Anzahl der Teilmengen einer n-elementigen Menge ist 2^n.*

Eine *Permutation* von $(1, 2, \ldots, n)$ ist eine Umstellung der Zahlen $1, \ldots, n$. Beispielsweise besitzt $(1, 2, 3)$ die Permutationen

$$(1, 2, 3),\ (1, 3, 2),\ (2, 1, 3),\ (2, 3, 1),\ (3, 1, 2),\ (3, 2, 1).$$

Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist $n!$ (gesprochen: n Fakultät) definiert durch

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

Die Fakultäten wachsen sehr schnell in n,

$$3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120,\ 6! = 720, \quad 20! = 2.43\ldots \times 10^{18}.$$

Rein aus praktischen Gründen setzt man $0! = 1$.

Satz 1.2 *Die Anzahl der Permutationen von $(1, 2, \ldots, n)$ ist $n!$.*

Beweis: Man kann das durch vollständige Induktion über n beweisen. Einfacher ist die Überlegung, auf wie viele Arten man die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ auf n nummerierte Kästchen verteilen kann. Für die Zahl 1 hat man n Möglichkeiten, für die Zahl 2 $n-1$, für die letzte Zahl n verbleibt nur noch eine Möglichkeit. □

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sind die *Binomialkoeffizienten* folgendermaßen definiert

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{für } 0 \le k \le n.$$

Dass all diese Werte natürliche Zahlen sind, werden wir später sehen. Wichtig sind im Folgenden die Fälle

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1, \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1. \tag{1.8}$$

Wir beweisen die technische Formel

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \tag{1.9}$$

indem wir die linke Seite auf den Hauptnenner bringen,

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\\ &= \frac{n!\,k}{k!\,(n-k+1)!} + \frac{n!(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

Man interpretiert die Formel (1.9) durch das *Pascalsche Dreieck*:

$$\begin{array}{lccccccccccc}
\text{n=0} & & & & & & 1 & & & & & \\
\text{n=1} & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
\text{n=2} & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
\text{n=3} & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
\text{n=4} & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\text{n=5} & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Jede neue Zeile wird rechts und links um 1 ergänzt, was den Werten $\binom{n}{0}$ und $\binom{n}{n}$ in (1.8) entspricht, die übrigen Einträge erhält man aus der Formel (1.9), jeder Eintrag ist die Summe der links und rechts über ihm stehenden Zahlen.

Satz 1.3 *Die Zahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist* $\binom{n}{k}$.

Beweis: Wir zeigen dies durch vollständige Induktion über n. Für $n = 0$ ist die Behauptung richtig, denn die leere Menge enthält nur sich selbst als Teilmenge. Die Behauptung ist auch richtig für $k = 0$ und $k = n$, in beiden Fällen haben wir nur eine Teilmenge, die leere Menge bzw. die Menge selbst, was mit den Werten in (1.8) übereinstimmt. Nach dem Prinzip „Teile und Herrsche“ strukturieren wir die k-elementigen Teilmengen der Menge $A_{n+1} = \{1, 2, \ldots, n+1\}$ in zwei Gruppen :

I : k-elementige Teilmengen, die $n+1$ nicht enthalten,

II : k-elementige Teilmengen, die $n+1$ enthalten.

Gruppe I besteht genau aus den k-elementigen Teilmengen der Menge $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, nach Induktionsvoraussetzung sind das $\binom{n}{k}$.

In den Teilmengen der Gruppe II können wir das Element $n+1$ weglassen und erhalten eine $k-1$-elementige Teilmenge von A_n. Umgekehrt können wir jede $k-1$-elementige

Teilmenge von A_n um das Element $n+1$ ergänzen und erhalten eine Teilmenge von Gruppe II. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Zahl der Teilmengen in Gruppe II gerade $\binom{n}{k-1}$. Für die Gesamtzahl der Teilmengen gilt daher mit (1.9)

$$\text{Gruppe I} + \text{Gruppe II} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Damit ist der Induktionsbeweis erfolgreich abgeschlossen. □

Beim Lotto „6 aus 49“ ist die Wahrscheinlichkeit, alle sechs Zahlen richtig getippt zu haben, gleich der Wahrscheinlichkeit, aus der Gesamtheit der 6-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 49\}$ die „richtige“ herausgefunden zu haben. Die Zahl der Möglichkeiten ist

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\,43!} == \frac{49 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6) \cdot 47 \cdot 46 \cdot (3 \cdot 5 \cdot 3) \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 49 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 3 \cdot 44 = 13\,983\,816.$$

Die Wahrscheinlichkeit für sechs Richtige ist daher ungefähr 1 : 14 Millionen.

Eine weitere Anwendung der Binomialkoeffizienten ist die *binomische Formel*:

Satz 1.4 *Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Beweis: Wir beweisen die binomische Formel durch Induktion über n. Für $n = 0$ ist sie richtig. Unter der Annahme, dass sie für n richtig ist, folgt

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i+1} b^i + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1}.$$

Mit Umnummerierung erhalten wir für den ersten Summanden

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i+1} b^i = a^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1} a^{n-i} b^{i+1},$$

daher

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\binom{n}{i+1} + \binom{n}{i} \right) a^{n-i} b^{i+1} + b^{n+1}.$$

Die Behauptung folgt aus der Additionseigenschaft des Binomialkoeffizienten (1.9). □