Springer-Lehrbuch

Elektromagnetische Felder

Theorie und Anwendung

Bearbeitet von
Heino Henke

5., erweiterte Auflage 2015. Buch. XVIII, 572 S. Kartoniert
ISBN 978 3 662 46917 0
Format (B x L): 16,8 x 24 cm
Gewicht: 971 g

14. Zeitlich beliebig veränderliche Felder II (Homogene Wellengleichung)

Dieses Kapitel behandelt Felder in Gebieten, in denen keine Ladungen und Ströme als Quellen existieren. Ströme in leitenden Materialien, die über das OHM'sche Gesetz mit der elektrischen Feldstärke $\boldsymbol{E}$ verbunden sind, seien selbstverständlich möglich. Die Quellen, die die Felder erzeugen, liegen außerhalb des betrachteten Gebietes, typischerweise im Unendlichen. Eventuell vorhandene Materialien seien linear, zeitunabhängig und örtlich zumindest stückweise konstant. Unter diesen Umständen wird aus den MAXWELL'schen Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&\text{(I)} && \nabla \times \boldsymbol{H} = \kappa \boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \\
&\text{(II)} && \nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \\
&\text{(III)} && \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \\
&\text{(IV)} && \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \,.
\end{aligned}
\tag{14.1}
$$

Die einfachste Lösung dieser Gleichungen sind ebene Wellen im freien Raum. An Trennschichten zwischen zwei Materialien werden diese reflektiert und gebrochen.
Unter Ausnutzung des Reflexionsverhaltens wird die geführte Wellenausbreitung längs einer dielektrischen Platte und in einer Parallelplattenleitung hergeleitet.
Im Dreidimensionalen wird die Wellengleichung durch Separation gelöst und man erhält Wellen im Rechteck- und Rundhohlleiter sowie stehende Wellen in Resonatoren. Abschließend werden Kugelwellen behandelt, welche die natürliche Form darstellen für Wellen, die durch endlich ausgedehnte Quellen erzeugt werden.

14.1 Homogene Wellengleichung

Die Wellengleichung beschreibt die Ausbreitung eines bestimmten Zustandes mit konstanter Form und konstanter Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$. Als Beispiel sei ein eindimensionaler Vorgang in kartesischen Koordinaten betrachtet, Abb. 14.1.

H. Henke, *Elektromagnetische Felder,* DOI 10.1007/978-3-662-46918-7_14,

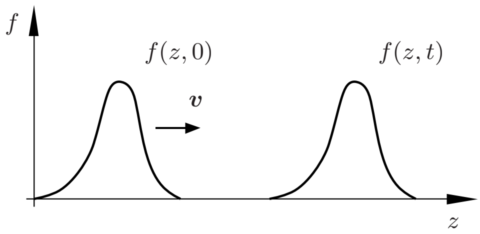

Abb. 14.1. Zustand f, der sich in z-Richtung ausbreitet

Offensichtlich ist der Zustand an der Stelle z und zum Zeitpunkt t derselbe wie der um vt in negative z-Richtung verschobene Zustand zu dem früheren Zeitpunkt $t = 0$

$$f(z, t) = f(z - vt, 0) \; .$$

Jede Funktion mit dem Argument $z - vt$ erfüllt dies. Ist das Argument $z + vt$, so breitet sich der Zustand in negative z-Richtung aus. Die Funktionen

$$f(z - vt) \quad , \quad g(z + vt) \tag{14.2}$$

beschreiben demnach Wellenvorgänge und müssen die Wellengleichung erfüllen. Sie heißen D'ALEMBERT*'sche Lösungen*.

Natürlich handelt es sich hier um eine mathematische Idealisierung. Jedes reale Medium hat Verluste und die Amplitude des Vorganges nimmt ab. Sehr oft ist auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit v von der zeitlichen Änderung der Felder, z.B. der Frequenz, abhängig, und die Form des Zustandes verändert sich im Laufe der Ausbreitung.

Am anschaulichsten lässt sich die Wellengleichung für eine schwingende Saite herleiten.

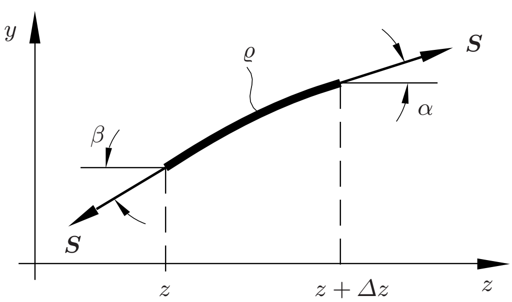

Abb. 14.2. Differentiell kleines Stück einer schwingenden Saite mit Massenbelegung ϱ und Spannung S

Die Saite habe eine Masse ϱ pro Längeneinheit, eine Spannung S und es seien nur kleine Auslenkungen zugelassen. Dann gilt für ein kleines Stück Δz der Saite, Abb. 14.2, die transversale Kraftgleichung

$$\Delta K_y = S \sin\alpha - S \sin\beta = \varrho \, \Delta z \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \; .$$

Bei kleinen Auslenkungen und nicht zu starker Krümmung sind die Winkel α und β klein und $\sin\beta$ ist ungefähr gleich $\tan\beta = \partial y/\partial z$, so dass

$$\Delta K_y = S\left(\left.\frac{\partial y}{\partial z}\right|_{z+\Delta z} - \left.\frac{\partial y}{\partial z}\right|_{z}\right) = S\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\,\Delta z\ .$$

Die Kombination der beiden Gleichungen ergibt die *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{mit} \quad v = \sqrt{\frac{S}{\varrho}}\ . \tag{14.3}$$

Es ist einfach zu verifizieren, dass die Funktionen (14.2) die Wellengleichung (14.3) erfüllen und die allgemeine Lösung lautet

$$y(z,t) = f(z - vt) + g(z + vt)\ . \tag{14.4}$$

Anders als in der Diffusionsgleichung, z.B. (12.20), tritt in der Wellengleichung die zweite Zeitableitung auf. Daher ergibt eine Spiegelung der Zeit, $t \to -t$, wieder dieselbe Gleichung und die zugehörigen Vorgänge sind reversibel. Ein in der Zeit rückwärts laufender Vorgang ist möglich und entspricht dem in entgegengesetzte Raumrichtung laufenden Vorgang.

Elektromagnetische Felder genügen einer vektoriellen Wellengleichung. Nimmt man z.B. die Rotation von (14.1 II) und setzt (14.1 I) (hier mit $\kappa = 0$) sowie (14.1 III) ein

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{H}) = -\mu\varepsilon\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}\ ,$$

so erhält man die Wellengleichung für das elektrische Feld

$$\boxed{\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0} \quad \text{mit der Lichtgeschwindigkeit} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\ . \tag{14.5}$$

Analog ergibt sich eine Wellengleichung für das magnetische Feld. Zusätzlich zur Wellengleichung müssen die Felder noch die Bedingung der Divergenzfreiheit, (14.1 III) und (14.1 IV), erfüllen. Die Lösung der vektoriellen Wellengleichung ist ein schwieriges Problem und es ist meist einfacher, die Felder von Potentialen abzuleiten, die ihrerseits die Wellengleichung erfüllen. Der Ansatz

$$\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{14.6}$$

erfüllt (14.1 IV) und führt nach Einsetzen in (14.1 II) zu

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \mu\,\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = 0$$

und somit zu einem Ansatz für $\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \mu\,\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\ . \tag{14.7}$$

Einsetzen von (14.6), (14.7) in die verbleibenden MAXWELL'schen Gleichungen (14.1 I,III) ergibt

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{H} &= \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \\ &= \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = -\nabla \left(\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} &= -\nabla^2 \phi - \mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \, . \end{aligned} \tag{14.8}$$

Sowohl das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ als auch das Skalarpotential ϕ sind nicht eindeutig bestimmt, und man benutzt diesen Freiheitsgrad bei der Bestimmung, um eine sogenannte LORENZ-*Eichung*[1] durchzuführen

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \, . \tag{14.9}$$

Dadurch werden die beiden Gleichungen in (14.8) entkoppelt und ergeben die Wellengleichungen

$$\begin{aligned} &\text{(I)} \qquad \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \, , \\ &\text{(II)} \qquad \nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0 \, . \end{aligned} \tag{14.10}$$

Die Lösung der vier MAXWELL'schen Gleichungen hat sich auf die Lösung von zwei Wellengleichungen reduziert.

In manchen Fällen erweist sich jedoch eine andere Vorgehensweise als zweckmäßiger. Wegen (14.1 III und IV) macht man zwei getrennte Ansätze

$$\begin{aligned} &\text{(I)} \qquad \boldsymbol{E}^H = \nabla \times \boldsymbol{A}^H \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{A}^H = A^H(\boldsymbol{r}, t)\, \boldsymbol{e}_i \, , \\ &\text{(II)} \qquad \boldsymbol{H}^E = \nabla \times \boldsymbol{A}^E \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{A}^E = A^E(\boldsymbol{r}, t)\, \boldsymbol{e}_i \, , \end{aligned} \tag{14.11}$$

wobei $\boldsymbol{A}$ jeweils nur eine Komponente in Richtung des Einheitsvektors $\boldsymbol{e}_i$ hat und A^H, A^E die beiden erforderlichen unabhängigen Lösungen darstellen. Für beide Ansätze ergibt sich das Gleichungssystem (14.10), allerdings unterscheiden sich die LORENZ-Eichungen. Der Ansatz $\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ hat die Eichung (14.9) und der Ansatz $\boldsymbol{E} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ die Eichung

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} \, .$$

Dies ist aber ohne Bedeutung, da das Skalarpotential nicht benötigt wird, weil divergenzfreie Felder vorausgesetzt wurden und diese nach dem HELMHOLTZ'schen Theorem[2] durch ihre Wirbel (14.11) voll bestimmt sind. Die zu (14.11) gehörenden anderen Feldkomponenten werden nun nicht mit Hilfe des Skalarpotentials sondern direkt aus den MAXWELL'schen Gleichungen

[1] Siehe z.B. § 16.1.
[2] Siehe § 1.7

bestimmt. Diese Vorgehensweise ist angebracht, wenn i eine kartesische Koordinate oder die r-Koordinate in Kugelkoordinaten darstellt und wenn es sich um zeitharmonische Felder handelt. Dann geht die vektorielle Wellengleichung (14.10 II) in eine skalare HELMHOLTZ-Gleichung über und die zu den Ansätzen (14.11) gehörenden Feldkomponenten berechnen sich aus

$$\begin{aligned} -\mathrm{j}\omega\mu \boldsymbol{H}^H &= \nabla \times \boldsymbol{E}^H = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}^H)\,, \\ \mathrm{j}\omega\varepsilon \boldsymbol{E}^E &= \nabla \times \boldsymbol{H}^E = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}^E)\,. \end{aligned} \tag{14.12}$$

Stellt die Koordinate i in (14.11) außerdem die Ausbreitungsrichtung der Wellen dar, so bezeichnen die Indices E, H der beiden unabhängigen Lösungen sogenannte *E- bzw. H-Wellen*. E-Wellen haben in Richtung $\boldsymbol{e}_i$ nur eine E- und keine H-Komponente und H-Wellen nur eine H- und keine E-Komponente. E- bzw. H-Wellen heißen in der englischsprachigen Literatur *TM-Wellen (***t***ransverse* **m***agnetic)* bzw. *TE-Wellen (***t***ransverse* **e***lectric)*. Daneben gibt es noch *TEM-Wellen (***t***ransverse* **e***lectro***m***agnetic)*, die weder eine E- noch eine H-Komponente in Richtung der Ausbreitung besitzen.

14.2 Ebene Wellen

Ebene Wellen sind die einfachsten Lösungen der Wellengleichung. Sie sind nur von einer Ortskoordinate, die zugleich die Ausbreitungsrichtung angibt, abhängig. Betrachtet man zu einem festen Zeitpunkt die Flächen gleichen Zustandes, so sind dies Ebenen (daher der Name ebene Wellen). Ihr „natürliches“ Koordinatensystem sind die kartesischen Koordinaten und man wählt z.B. die z-Koordinate als Variable

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(z,t) \quad , \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(z,t)\,. \tag{14.13}$$

Einsetzen von (14.13) in die beiden ersten MAXWELL'schen Gleichungen (14.1) ergibt

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}\,, \\ &\frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad , \quad -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}\,, \\ &0 = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad , \quad 0 = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}\,. \end{aligned} \tag{14.14}$$

Die drei Zeilen von (14.14) sind untereinander nicht verkoppelt und es liegen drei Sätze von unabhängigen Gleichungen vor. Die erste Zeile besteht aus einem Satz für E_x und H_y, die zweite Zeile für E_y und H_x und die dritte Zeile beschreibt zeitlich konstante Felder, die hier nicht weiter betrachtet werden. Da die zweite Zeile aus der ersten durch Vertauschen

$$E_x \to H_x \quad , \quad H_y \to -E_y \quad , \quad \mu \to \varepsilon \quad , \quad \varepsilon \to \mu$$

hervorgeht, genügt es, nur einen Satz zu behandeln, z.B. die erste Zeile. Differenzieren und gegenseitiges Einsetzen führt auf die eindimensionale Wellengleichung z.B. für H_y

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \ . \tag{14.15}$$

Die Lösung ist eine Linearkombination entsprechend (14.4)

$$H_y = H_y^+(z - ct) + H_y^-(z + ct) \ . \tag{14.16}$$

Die elektrischen Feldkomponenten gewinnt man durch Einsetzen von (14.16) in (14.14)

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \mu c \left(H_y^{+\prime} - H_y^{-\prime}\right) \quad , \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon}\left(H_y^{+\prime} + H_y^{-\prime}\right)$$

und anschließender Integration

$$E_x = \mu c \left(H_y^+ - H_y^-\right) + f(t) \quad , \quad E_x = \frac{1}{\varepsilon c}\left(H_y^+ - H_y^-\right) + g(z) \ .$$

Ein Vergleich zeigt, dass die „Integrationsfunktionen" f und g gleich und somit konstant sein müssen und, da hier nur zeitlich veränderliche Felder interessieren, zu null gewählt werden können. Somit lautet das elektrische Feld

$$E_x = E_x^+(z - ct) + E_x^-(z + ct) = Z H_y^+(z - ct) - Z H_y^-(z + ct) \, , \tag{14.17}$$

wobei die Konstante

$$\boxed{Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} \tag{14.18}$$

das Verhältnis

$$\frac{E_x^+}{H_y^+} = -\frac{E_x^-}{H_y^-} = Z \tag{14.19}$$

angibt und *Wellenwiderstand* heißt. Die Geschwindigkeit

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}} \tag{14.20}$$

mit der sich die ebene Welle ausbreitet, ist zugleich die Lichtgeschwindigkeit in dem entsprechenden Medium. Im Vakuum ist

$$c = c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \approx \left[4\pi \cdot 10^{-7}\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}\,\frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}\right]^{-1/2} = 3 \cdot 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$Z = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 120\pi\,\Omega = 377\,\Omega \ . \tag{14.21}$$

Aus (14.16), (14.17) ist ersichtlich, dass E_x^+, H_y^+, $\boldsymbol{e}_z$ und E_x^-, H_y^-, $-\boldsymbol{e}_z$ jeweils ein Rechtssystem bilden.

Allgemein gilt für ebene Wellen:

- Die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ und die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}$ stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Die Welle ist rein transversal.
- Bezeichnet der Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_a$ die Ausbreitungsrichtung, so bilden $\boldsymbol{E}^+$, $\boldsymbol{H}^+$, $\boldsymbol{e}_a$ und $\boldsymbol{E}^-$, $\boldsymbol{H}^-$, $-\boldsymbol{e}_a$ Rechtssysteme.
- Die Feldstärken $\boldsymbol{E}^+$, $\boldsymbol{H}^+$ und $\boldsymbol{E}^-$, $\boldsymbol{H}^-$ liegen in einer Ebene. Ihre Beträge stehen in einem festen Verhältnis zueinander, welches den Wellenwiderstand darstellt.
- Flächen konstanten Argumentes, $x_a \pm ct = \text{const.}$, mit der Koordinate x_a in Ausbreitungsrichtung, sind Ebenen.

14.2.1 Feldpuls

Als erstes Beispiel sei ein ebener Feldpuls behandelt. Er entsteht z.B. durch eine Flächenladung, die impulsartig auf eine Geschwindigkeit v gebracht wird und einen Flächenstrom

$$\boldsymbol{J}_F = q_F v\,[h(t) - h(t-T)]\,\boldsymbol{e}_x \quad , \quad h(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0 \\ 1 & \text{für} \quad t \geq 0 \end{cases} ,$$

erzeugt. Der Strom verursacht ein Magnetfeld und dieses durch Induktion ein elektrisches Feld. Auf beiden Seiten des Stromes entsteht ein Feldpuls, der von der Quelle wegläuft. Die Amplitude folgt aus dem Durchflutungssatz mit einem Umlauf wie in Abb. 14.3a

$$-H_y^+(z=+0)\Delta y + H_y^-(z=-0)\Delta y = J_{Fx}\Delta y ,$$

wobei die umlaufende Fläche so klein gewählt wurde ($\delta \to 0$), dass der sie durchsetzende Verschiebungsstrom verschwindet.

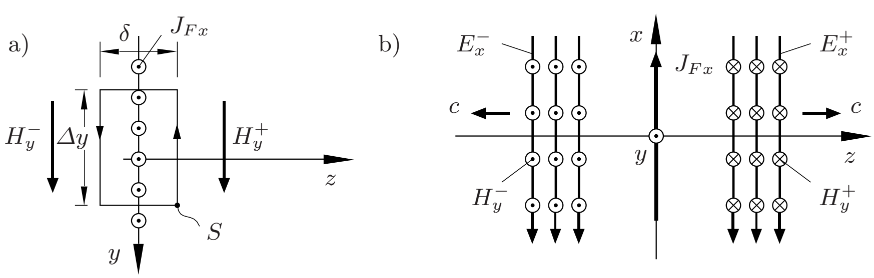

Abb. 14.3. **(a)** Flächenstrom J_{Fx} und Umlauf S. **(b)** Ebene Feldpulse

Wegen der Symmetrie der Anordnung ist ferner

$$H_y^+(z=+0) = -H_y^-(z=-0)$$

und somit

$$H_y^+(z=+0) = -\frac{1}{2}J_{Fx} = -\frac{1}{2}q_F v\,[h(t) - h(t-T)] \ .$$

Die beliebige Funktion H_y^+ muss also für $z \to +0$ in eine Impulsfunktion übergehen. Ferner kann man anstelle von $z - ct$ auch das Argument $t - z/c$ benutzen, da (14.15) durch die Transformation

$$z \to -z/c \quad , \quad t \to -t/c$$

in sich selbst übergeht. Offensichtlich ist daher die Lösung

$$H_y^+ = -\frac{1}{2} q_F v \left[h(t - z/c) - h(t - T - z/c) \right] \quad , \quad E_x^+ = Z H_y^+ \; . \tag{14.22}$$

Dies ist ein rechteckiges Feldpaket der zeitlichen Dauer T, das sich in z-Richtung ausbreitet, Abb. 14.3b. Innerhalb des Paketes sind die Feldstärken E_x, H_y konstant, außerhalb verschwinden sie. Ein entsprechendes Paket läuft in negative z-Richtung.

14.2.2 Zeitharmonische Welle

Bei harmonischer Zeitabhängigkeit gilt $\partial/\partial t = \mathrm{j}\omega$ und aus (14.14) wird

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = (\kappa + \mathrm{j}\omega\varepsilon) E_x \quad , \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mathrm{j}\omega\mu H_y \; .$$

Hier haben wir im Gegensatz zu (14.14) Verluste, $\kappa \neq 0$, zugelassen. Differentiation und Einsetzen führt auf eine HELMHOLTZ-Gleichung für die magnetische Feldstärke H_y

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + k^2 H_y = 0 \quad \text{mit} \quad k = \omega \sqrt{\mu\varepsilon \left(1 - \mathrm{j}\,\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)} \; . \tag{14.23}$$

Ihre Lösung lautet unter Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit $\exp(\mathrm{j}\omega t)$

$$H_y = A\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}(\omega t - kz)} + B\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}(\omega t + kz)} \tag{14.24}$$

und besteht wiederum aus in $\pm z$-Richtung laufenden Wellen. Die Amplituden A und B werden durch die Anregung festgelegt. Das zugehörige elektrische Feld folgt aus (14.19) zu

$$E_x = Z \left[A\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}(\omega t - kz)} - B\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}(\omega t + kz)} \right]$$

$$\text{mit} \quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(1 - \mathrm{j}\kappa/\omega\varepsilon)}} \; . \tag{14.25}$$

Die *komplexe Wellenzahl* k zerlegt man in Real- und Imaginärteil

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 - \mathrm{j}\,\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}} = \beta - \mathrm{j}\alpha \; , \tag{14.26}$$

wobei

$$\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)^2}\right)} \tag{14.27}$$

die *Dämpfungskonstante* ist und

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)^2}\right)} \tag{14.28}$$

die *Phasenkonstante*. Die Dämpfungskonstante α bestimmt die durch die Verluste verursachte Abnahme der Felder. Die Phasenkonstante β legt die Ausbreitungsgeschwindigkeit und die Wellenlänge λ fest

$$\beta(z+\lambda) - \beta z = 2\pi \quad \rightarrow \quad \lambda = 2\pi/\beta \; . \tag{14.29}$$

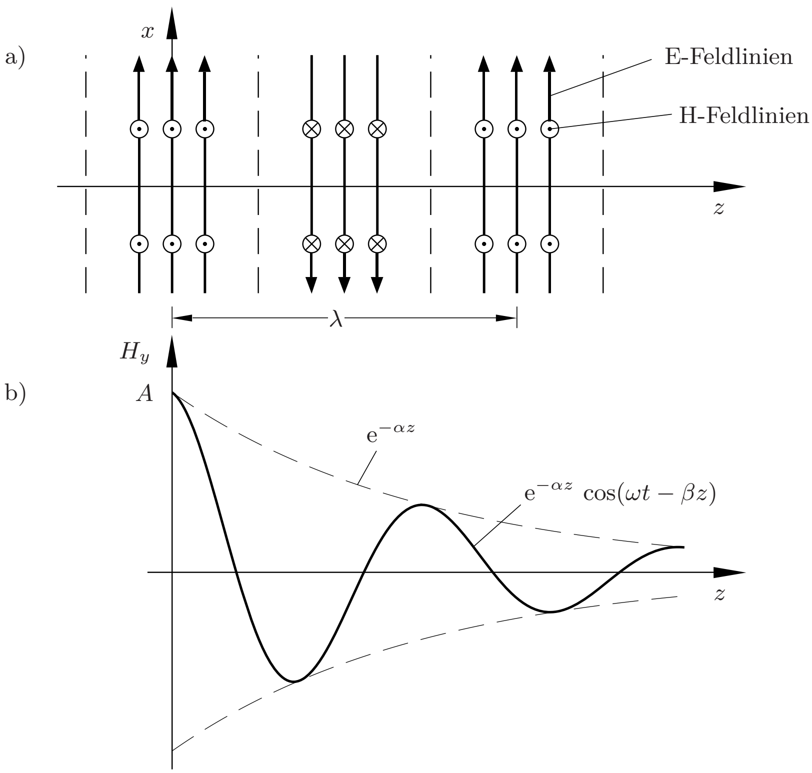

Abb. 14.4. Momentanaufnahmen ($t = 0$) der Felder einer in z-Richtung laufenden, ebenen Welle. **(a)** Feldlinien. **(b)** Amplitude des magnetischen Feldes zum Zeitpunkt $t = 0$

Das physikalische Feld ist der Realteil von (14.24), (14.25) und man erhält für das elektromagnetische Feld der vorwärts laufenden Wellen

$$H_y^+ = A\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) \quad , \quad E_x^+ = ZA\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) \; .$$

Es ist in Abb. 14.4 dargestellt. Die inverse Form von (14.28)

$$\omega = \omega(\beta) = \frac{2\beta^2 c}{\sqrt{(2\beta)^2 + \kappa^2\mu/\varepsilon}} \tag{14.30}$$

heißt *Dispersionsrelation.* Sie ist im Allgemeinen sehr unterschiedlich und hat auch verschiedene Ursachen. Typisch ist eine mit der Phasenkonstanten β zunehmende Frequenz, Abb. 14.5.

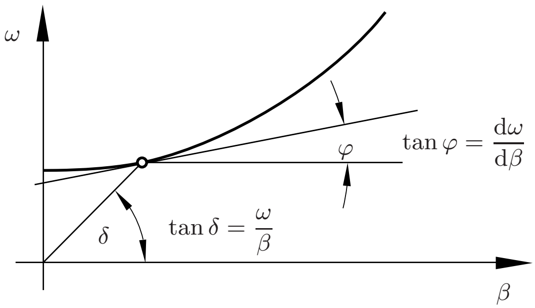

Abb. 14.5. Typische Dispersionsrelation

Die Steigung der Geraden durch den Ursprung und einen Punkt der Kurve $\omega(\beta)$

$$\boxed{v_{ph} = \frac{\omega(\beta)}{\beta}} \tag{14.31}$$

heißt *Phasengeschwindigkeit.* Dies ist die Geschwindigkeit, mit der sich Flächen konstanter Phase ausbreiten

$$\omega t \mp \beta z = \text{const.} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega t \mp \beta z) = 0 = \omega \mp \beta \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_{ph} = \pm\frac{\omega}{\beta} \ .$$

Bei ebenen Wellen ist sie gleich der Lichtgeschwindigkeit. Die Steigung der Kurve $\omega(\beta)$

$$\boxed{v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\beta}} \tag{14.32}$$

heißt *Gruppengeschwindigkeit.* Sie gibt normalerweise die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Signalen und der elektromagnetischen Energie an. Die Definition einer Signalgeschwindigkeit macht nur Sinn, wenn die Bandbreite des Signals schmal genug ist, so dass die Relation $\beta(\omega)$ am Arbeitspunkt β_0 linearisiert werden kann. Dies kann man sich am einfachsten an Hand eines Signals klarmachen, welches nur aus zwei Frequenzen besteht

Springer

http://www.springer.com/978-3-662-46917-0

Elektromagnetische Felder
Theorie und Anwendung
Henke, H.
2015, XVIII, 572 S. 517 Abb. Mit Online-Extras., Softcover
ISBN: 978-3-662-46917-0