Maximal nilpotente Teilstrukturen II: Eine Korrespondenz in auflösbaren Algebren; mit 187 Übungsaufgaben

Bearbeitet von
Sven Bodo Wirsing

Erstauflage 2015. Taschenbuch. 184 S. Paperback
ISBN 978 3 95935 186 7
Format (B x L): 15,5 x 22 cm

Weitere Fachgebiete > Mathematik > Algebra > Algebraische Strukturen, Galois Theorie

Leseprobe

Einleitung

In Band I dieser Serie wurden zwei Hauptthemen bearbeitet: zum einen die Ermittlung der Cartan-Teilalgebren und zum anderen die des Nilradikals der assoziierten Lie-Algebra A_ einer endlich-dimensionalen assoziativen unitären Algebra A. Beide Lie-Teilstrukturen gehören zu den maximal nilpotenten Lie-Teilalgebren von A_. Ist die Radikalfaktorstruktur separabel, so gibt es nach dem Satz von Wedderburn-Malcev ein Radikalkomplement T des Radikals rad(A) von A. Mit Hilfe des Radikalkomplementes konnten wir in Band I in vielen Algebrenklassen die Cartan-Teilalgebren und auch das Nilradikal von A_ beschreiben. Speziell im auflösbaren Fall von A (d.h., wenn die Faktoralgebra A=rad(A) und die Teilalgebra T kommutativ sind) haben wir eingesehen, dass die Zentralisatoren der Radikalkomplemente { also CA(T) { die Cartan-Teilalgebren von A_ sind. Dieses Ergebnis wurde orginär von Thorsten Bauer in seiner Dissertation [4] bewiesen. Insbesondere sind die Cartan-Teilalgebren wieder assoziative Teilalgebren. Mit Hilfe des Satzes von Wedderburn-Malcev folgt daraus weiter, dass alle Cartan- Teilalgebren unter der Gruppe 1 + rad(A) konjugiert sind. Betrachten wir weiter den zentralen Anteil von T { also Z(A) \ T { so haben wir in Band I zudem bewiesen, dass erstens Z(A) \ T das Radikalkomplement des Zentrums von A ist und zweitens die direkte Summe von rad(A) und Z(A) \ T das Nilradikal von A_ ergibt. Der vorliegende Band II führt diese Theorie im auflösbaren Fall von A weiter fort. Die folgenden Leitfragen bilden die Grundlage der Analysen in diesem Buch: _ Wie können im auflösbaren Fall von A sämtliche maximal nilpotente Lie- Teilalgebren von A_ beschrieben und konstruiert werden? _ Welche besondere Stellung haben das Nilradikal und die Cartan-Teilalgebren unter diesen? _ Was sind die Carter-Untergruppen und was ist die Fitting-Untergruppe der Einheitengruppe E(A) im auflösbaren Fall von A? _ Wie können im auflösbaren Fall von A sämtliche maximal nilpotente Untergruppen von E(A) beschrieben und konstruiert werden? _ Welche besondere Stellung haben die Fitting-Untergruppe und die Carter- Untergruppen unter diesen? _ Gibt es strukturelle Beziehungen zwischen den maximal nilpotenten Lie- Teilalgebren und Untergruppen? In Kapitel 1 stellen wir kurz eine Übersicht der verwendeten Strukturen (wie z.B. KG für die Gruppenalgebra) zusammen. Mit diesen werden wir einerseits die Ergebnisse illustrieren, andererseits dienen sie als Beispielmaterial für die zahlreichen Übungsaufgaben zu jedem Kapitel, in denen der Leser das Erlernte anwenden möge. Zur Beantwortung der Frage, ob es strukturelle Beziehungen zwischen maximal nilpotenten Untergruppen und Lie-Teilalgebren gibt, werden wir die Hauptaussage des zweiten Kapitels immer wieder in diesem Werk nutzen. Dabei handelt es sich um den Satz von Xiankun Du von 1992, der für Radikalalgebren zeigt, dass die aufsteigenden Zentralreihen der assoziierten Lie-Algebra und der quasiregulären Gruppe { eine Verallgemeinerung der Einheitengruppe { in jedem Schritt übereinstimmen. Insbesondere bedeutet dies, dass die Nilpotenzklassen dieser beiden Struturen übereinstimmen, eine Aussage, die Stephen Arthur Jennings bereits fast 40 Jahre zuvor vermutet hatte und die von Hartmut Laue in den 80iger Jahren teilweise bewiesen worden war. Es ist oft bequemer, die Nilpotenzklasse der Lie-Algebra und nicht die der quasiregulären Gruppe zu berechnen. Zum Beispiel sind Radikale assoziativer Algebren Radikalalgebren. In unserem Kontext werden wir dieses Resultat benutzen, um

Beziehungen bzgl. den Nilpotenzklassen maximal nilpotenter Lie-Teilalgebren und Untergruppen herzuleiten. Exkursartig zeigen wir am Ende von Kapitel 2 noch eine weitere Anwendung des Satzes von Xiankun Du. Betrachtet man die aufsteigende Zentralreihe der quasiregulären Gruppe einer Radikalalgebra und dabei sukzessive die Faktorgruppen, dann sind diese per De_nition der Zentralreihe abelsche Gruppen. Im Falle einer Radikal-Algebra über einem Körper der Charakteristik p lässt sich mit Hilfe des Satzes von Xiankun Du sogar einsehen, dass diese sukzessiv gebildeten Faktorgruppen sogar elementar-p-abelsch sind. Auf die Gruppenalgebra { für die Adalbert Bovdi dieses Resultat verö_entlich hat { möge der Leser dieses Ergebnis in den Übungsaufgaben zu Kapitel 2 anwenden und erleben. Wie wir weiter oben beschrieben haben, möchten wir unsere Leitfragen in diesem Werk für auflösbare Algebren beantworten. Innerhalb der Leitfragen sind besonders die strukturellen Beziehungen zwischen assoziativer, assoziierter Lie- und der abgeleiteten Gruppenstruktur in Form der Einheitengruppe von Bedeutung. Bereits bei dem Begriff der Auflösbarkeit selbst ist dieses Phänomen zu beobachten. Wir werden in Kapitel 3 nämlich einsehen, dass der Begriff der Auflösbarkeit für die assoziative Algebra, ihrer assoziierten Lie-Algebra und ihrer Einheitengruppe für endlich-dimensionale assoziative unitäre Algebren (für einen Körper mit mindestens 5 Elementen, in dem 1+1 6= 0 gilt) äquivalent ist. Dieses Ergebnis gibt durchaus einen Ansto _ dazu, dass es unter diesen Bedingungen noch weitere Beziehungen zwischen diesen Strukturen gibt, und es stellt quasi auch den Grund dafür dar, dass die oben geschilderten Leitfragen im Falle der Auflösbarkeit untersucht werden. Einen ersten Zusammenhang schildern wir bereits noch exkursartig zum Abschluss von Kapitel 3. Dort werden wir einsehen, dass die sog. Borel- Teilalgebren von A_ { dies sind die maximal auflösbaren Lie-Teilalgebren { für Körper der Charakteristik Null wieder assoziative unitale Teilalgebren von A sind. Dabei werden uns der Satz von Sophus Lie und ein Ergebnis von Hartmut Laue zum assoziativen Erzeugnis den Beweis liefern. Leider können wir nicht herleiten, dass die zugehörige Einheitengruppe dieser assoziativen unitalen Teilalgebren auch maximal auflösbar { also Borel-Untergruppen { sind. Es gilt aber zumindest die Aussage, dass die Einheitengruppe wieder auflösbar ist und aus jeder Borel-Teilalgebra eine neue Einheitengruppe entsteht. Der Grund dafür ist, dass das K-Erzeugnis der Einheitengruppe die ganze Algebra ist. Dieses Vorgehen { Einheitengruppen- und K-Erzeugnis- Bildung { werden wir im weiteren Verlauf dieses Werkes oftmals anwenden. Thorsten Bauer hat bereits in seiner Dissertation [4] eine der obigen Leitfragen geklärt, nämlich die Bestimmung der Carter-Untergruppen der Einheitengruppe einer assoziativen auflösbaren Algebra mit separabler Radikalfaktorstruktur. Er zeigt dort das sehr runde Resultat, dass die Carter- Untergruppen (für Körper mit mindestens drei Elementen) genau die Einheitengruppen der Cartan-Teilalgebren der assoziierten Lie-Algebra sind. Die Voraussetzung über den Körper ist deshalb wichtig, da mit dieser die Algebra von ihrer Einheitengruppe K-erzeugt wird. Dementsprechend könnte man deshalb auch so formulieren, dass das K-Erzeugnis der Carter-Untergruppen genau die Cartan-Teilalgebren sind. Schon an dieser Stelle zeigt sich wiederum das Zusammenspiel von Einheitengruppen- und K-Erzeugnis-Bildung. In dem Artikel [5] von Thorsten Bauer und Salvatore Siciliano zu dieser Thematik, verwenden die Autoren ein Resultat, das wir auch im Laufe der Arbeit benutzen werden. Sie zeigen, dass das K-Erzeugnis einer nilpotenten Untergruppe wieder Lie-nilpotent ist. Das Phänomen des Zusammenspiels von

Cartan-Teilalgebren und Carter- Untergruppen zeigt sich auch beim Nilradikal und der Fitting-Untergruppen. Wir werden in Kapitel 5 herleiten, dass diese beiden Strukturen auch über die Einheitengruppen- und K-Erzeugnis-Bildung eindeutig zusammenhängen. Dabei ist das oben erwähnte Resultat von Thorsten Bauer und Salvatore Siciliano von gro_er Bedeutung. In den bisherigen Kapiteln haben wir uns mit prominenten Beispielen zu maximal nilpotenten Teilstrukturen beschäftigt. Wir lösen uns nun von die ser speziellen Sichtweise und beschreiben sowie konstruieren in Kapitel 6 alle maximal nilpotenten Lie-Teilalgebren. Wir zeigen zunächst { in Analogie zu den Borel-Teilalgebren (aber mit gänzlich anderer Begründung) {, dass diese Lie-Teilalgebren wieder assoziative unitale Teilalgebren sind. Das ermöglicht es uns, eine der Aussagen von Band I anzuwenden: die innere Struktur dieser assoziativen Teilalgebren M von A ist die innere direkte Summe ihres Radikals (das wegen der Auflösbarkeit in rad(A) liegt) und des eindeutig bestimmten zentralen Radikalkomplements bestehend aus vollseparablen Elementen { etwa M = rad(M) _ V SEP(M) {. Wegen des Satzes von Wedderburn-Malcev liegt V SEP(M) in einem Radikalkomplement T. Wir zeigen anschliessend, dass derartige direkte Summen genau dann maximal Lie-nilpotent sind, wenn die Zentralisator-Bedingungen Crad(A)(V SEP(M)) = rad(M) und CT (rad(M)) = V SEP(M) gelten. Eine leichte Folgerung hieraus ist, dass maximal nilpotente Lie-Teilalgebren die Doppel-Zentralisator-Bedingungen Crad(A)(CT (rad(M))) = rad(M) und CT (Crad(A)(V SEP(M))) = V SEP(M) erfüllen. Um nun sämtliche maximal Lie-nilpotente Teilalgebren zu ermitteln, nutzen wir diese Eigenschaft aus bzw. nehmen sie zum Anlass, wie folgt vorzugehen: Wir starten mit einer unitalen Teilalgebra C von T, ermitteln damit den Doppelzentralisator CT (Crad(A)©). Auf diesen wenden wir erneut das Doppel-Zentralisieren an usw. Aufgrund der endlichen Dimension muss diese Bildung stagnieren. Es zeigt sich, dass für die so entstehende Teilalgebra ^ C in T die direkte Summe ^ C _ Crad(A)(^ C) maximal Lie-nilpotent ist. Auch die duale Bildung { beginnend mit einer Teilalgebra von rad(A) { führt so zu maximal Lie-nilpotenten Teilalgebren, aber nicht zu weiteren. Es stellt sich sofort die Frage, wann für eine unitale Teilalgebra das Doppel-Zentralisieren stagniert. Die Antwort ist ganz schlicht: nach dem ersten Bilden. Das bedeutet, dass wir auf den unitalen Teilalgebren-Verband von T einmal das Doppel-Zentralisieren anwenden müssen, um anschlissend mit obiger direkter Summen-Bildung sämtliche maximal nilpotenten Lie-Teilalgebren zu erhalten. Dabei erweisen sich das Nilradikal und die Cartan-Teilalgebren als extrem. Beim Nilradikal ist der Anteil von T zentral in A, bei den Cartan-Teilalgebren ist es das ganze Radikalkomplement. Bei allen anderen ist der Anteil zwischen diesen beiden Extremstellen gelegen. Beim übergang zu einem weiteren Radikalkomplement entstehen (wegen des Satzes von Wedderburn-Malcev) durch unser Verfahren nur isomorphe Kopien. Das bedeutet aber, dass wir die Isomorphietypen maximal Lie-nilpotenter Teilalgebren mit Hilfe der Anzahl der unitalen Teilalgebren von T abschätzen können. Diese Anzahl ist endlich, da T separabel und kommutativ ist. Derartige Algebren heissen futil. Dies leiten wir in einem eigenen Abschnitt in diesem Kapitel her, und wir zeigen zudem, dass wir diese Anzahl durch die Bell-Zahl B(dimK(T)) abschätzen können. In Kapitel 7 stellen wir den Zusammenhang zwischen maximal nilpotenten Lie-Teilalgebren und Untergruppen her. Dabei zeigt sich, dass der Zusammenhang { wie bei den Cartan-Teilalgebren und den Carter-Untergruppen bzw. wie der beim Nilradikal und bei der Fitting-Untergruppe { bei beliebigen maximal nilpotenten Substrukturen wiederfindet: Die Einheitengruppe einer maximal Lie-nilpotenten Teilalgebra ist eine maximal nilpotente Untergruppe und das K-Erzeugnis einer maximal nilpotenten Untergruppe ist eine maximal nilpotente Lie-Teilalgebra. Dieser Zusammenhang ist sogar bijektiv: Die Abbildungen E(_) und h_iK sind invers zueinander. Mit Hilfe des Satzes von Xiankun Du gilt zudem, dass die Nilpotenzklassen der maximal nilpotenten korrespondierenden Partner identisch sind. Dieser Hauptsatz ermöglicht es uns, die Aussagen von Kapitel 6 auf maximal nilpotente Untergruppen zu übertragen, was der Inhalt von Kapitel 8 ist. Dort beschreiben wir demnach analog zu Kapitel 6 _ die innere Struktur der maximal nilpotenten Untergruppen als direktes Produkt unipotenter und zentraler, vollseparabler Elemente, _ die Kennzeichnung maximal nilpotenter Untergruppen mittels Einfachund Doppelzentralistorbildung, _ die Ermittlung sämtlicher maximal nilpotenter Untergruppen durch die Anwendung des Doppel-Zentraliserens auf den Untergruppenverband von E(T), _ die duale Ermittlung sämtlicher maximal nilpotenter Untergruppen durch die Anwendung des Doppel-Zentraliserens auf den Untergruppenverband von 1 + rad(A), _ die Extremstellung der Carter-Untergruppen und der Fitting-Untergruppe unter allen maximal nilpotenten Untergruppen von E(A), _ das Verhalten beim Wechsel zu einem neuen Radikalkomplement und _ die Endlichkeit der Anzahl der Isomorphieklassen maximal nilpotenter Untergruppen, die wir durch dieselbe Bell-Zahl abschätzen. Im letzten Kapitel beschäftigen wir uns mit weiteren prominenten maximal nilpotenten Untergruppen, nämlich den sog. Nilpotenten Injektoren, nilpotenten Projektoren und den Fischer-Untergruppen. Wir sehen ein, dass diese mit den Carter-Untergruppen bzw. der Fitting-Untergruppe zusammenfallen. Schliesslich übertragen wir diese Begri_swelt auf die Lie-Seite (nilpotente Lie-Injektoren, nilpotente Lie-Projektoren und Fischer-Teilalgebren) und beweisen, dass diese mit den Cartan-Teilalgebren und dem Nilradikal übereinstimmen. Postum ergibt sich dadurch auch das Ergebnis, dass die Einheitengruppe der Fischer-Teilalgebra, der nilpotenten Lie-Projektoren und -Injektoren genau die Fischer-Untergruppen und nilpotenten Projektoren und Injektoren sind. Wie oben erwähnt, illustrieren wir die Ergebnisse mit unseren Standard-Beispielen. Dabei verwenden wir die Gruppenalgebra, die unteren und oberen Dreiecksmatrizen, die Solomon-Algebra und die Solomon-Tits-Algebra im Haupttext, diese und die anderen Konstruktionen für die Übungsaufgaben. Der Leser wird sehen, dass wir in den ersten Kapiteln die Beispiele sehr allgemein halten, in den letzten 4 Kapitel allerdings nur noch exemplarisch vorgehen. Der Grund dafür ist der, dass die Klassifizierung der maximal nilpotenten Teilalgebren für die oben genannten vier Algebrenklassen weitere theoretische Überlegungen verlangt. Um den Leser nicht zu weit von den Leitfragen zu entfernen, hat sich der Autor entschlossen, diese in einem dritten Band darzustellen, was den Ausblick am Ende des Buches rechtfertigt. Am Ende jedes Kapitel finden sich zahlreiche Übungsaufgaben. Diese Aufgaben dienen dem Leser als weitere Vertiefung in die geschilderten Thematiken. Zu Beginn jeder übungsaufgaben-Serie befinden sich zudem offene Fragestellungen, die dem Leser (aber auch dem Autor) als Basis für weitere Forschungen in diesem Bereich dienen können. Zahlreiche Graphiken verdeutlichen dem Leser zudem die erlangten Ergebnisse in diesem Buch. • Übungsaufgabe 1 Wie werden die Leitfaden in diesem Werk beantwortet?