

Mathematik im Betrieb

Praxisbezogene Einführung mit Beispielen

Bearbeitet von
Heinrich Holland, Doris Holland

12., überarbeitete und erweiterte Auflage 2016. Taschenbuch. X, 364 S. Softcover

ISBN 978 3 8349 4745 1

Format (B x L): 16,8 x 24 cm

Wirtschaft > Betriebswirtschaft: Theorie & Allgemeines > Wirtschaftsmathematik und -
statistik

Zu [Inhaltsverzeichnis](#)

schnell und portofrei erhältlich bei

The logo for beck-shop.de features the text 'beck-shop.de' in a bold, red, sans-serif font. Above the 'i' in 'shop' are three red dots of increasing size. Below the main text, 'DIE FACHBUCHHANDLUNG' is written in a smaller, red, all-caps, sans-serif font.

beck-shop.de
DIE FACHBUCHHANDLUNG

Die Online-Fachbuchhandlung [beck-shop.de](#) ist spezialisiert auf Fachbücher, insbesondere Recht, Steuern und Wirtschaft. Im Sortiment finden Sie alle Medien (Bücher, Zeitschriften, CDs, eBooks, etc.) aller Verlage. Ergänzt wird das Programm durch Services wie Neuerscheinungsdienst oder Zusammenstellungen von Büchern zu Sonderpreisen. Der Shop führt mehr als 8 Millionen Produkte.

2.1 Funktionsbegriff

Eine Funktion dient der Beschreibung von Zusammenhängen zwischen mehreren verschiedenen Faktoren.

Funktionen in den Wirtschaftswissenschaften

In den Wirtschaftswissenschaften beschäftigen sich viele Fragestellungen mit der Untersuchung von Zusammenhängen zwischen wirtschaftlichen Größen. So ist es beispielsweise möglich, mit Hilfe mathematischer Verfahren Aussagen über den Zusammenhang zwischen dem Preis eines Gutes und der Nachfrage (Preisabsatzfunktion) oder über den Zusammenhang zwischen Volkseinkommen und Konsumausgaben (Konsumfunktion) zu machen.

Die Lehre von den Funktionen – die Analysis – ist der wohl wichtigste Bereich der Mathematik, der für wirtschaftliche Fragestellungen benötigt wird.

Zunächst müssen einige Begriffe bestimmt werden, deren Kenntnis für die folgenden Kapitel unerlässlich ist.

Variable und Konstante

Funktionen zeigen die gegenseitigen Abhängigkeiten von mehreren Größen. Diese Größen werden Variable (Veränderliche) genannt, wenn sie unterschiedliche Werte annehmen. Sie werden als Konstante bezeichnet, wenn sie nur einen festen Wert annehmen.

Beispiel

Ein Unternehmen, das nur ein Produkt herstellt (Einproduktunternehmen), ist in der Lage, der Produktionsmenge x in einer bestimmten Periode einen Wert K für die Kosten dieser Periode zuzuordnen.

Es existiert ein Zusammenhang zwischen Produktionsmenge und Kosten.

Die meisten Beziehungen zwischen ökonomischen Faktoren sind so gestaltet, dass man jedem Wert einer Größe (x) den Wert einer anderen Größe (y) zuordnen kann. In dem obigen Beispiel ist es möglich, jeder Produktionsmenge die zugehörigen Gesamtkosten zuzuweisen.

Die Zuordnung von Elementen der einen Menge zu denen einer anderen wird Relation genannt.

Relation und Funktion

Nur eine Relation mit einer eindeutigen Zuordnung ist eine Funktion.

Bei einer eindeutigen Zuordnung wird jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen zugewiesen; jedem x wird genau ein y zugeordnet und nicht mehrere.

Beispiel

Jeder Ware in einem Supermarkt wird genau ein Preis zugeordnet. Es handelt sich um eine Relation mit eindeutiger Zuordnung, also um eine Funktion. Diese Aussage lässt sich jedoch nicht umkehren. Es ist nicht möglich, jedem Preis genau eine Ware zuzuordnen, da durchaus mehrere Waren zum gleichen Preis angeboten werden. Diese Art der Relation ist keine Funktion.

Eine eineindeutige Funktion liegt dann vor, wenn jedem Element der Menge X genau ein Element der Menge Y zugeordnet werden kann (eindeutig) und umgekehrt. Zu jedem x gehört genau ein y , und zu jedem y gehört ebenfalls genau ein x .

► **Funktion** Eine Funktion ist eine Beziehung zwischen zwei Mengen, die jedem Element x der einen Menge eindeutig ein Element y einer anderen Menge zuordnet.

Eine Funktion schreibt man:

$$y = f(x)$$

(y ist eine Funktion von x ; y gleich f von x)

Dabei wird y als die abhängige Variable und x als die unabhängige Variable bezeichnet.

Definitions- und Wertebereich

Der Definitionsbereich ist der Gesamtbereich der Werte, die für die unabhängige Variable zugelassen sind. Der Wertebereich ist die Menge der Funktionswerte, die die abhängige Variable y annimmt.

Beispiel

In einer Fabrik, die Farbfernseher produziert, fallen monatliche fixe Kosten in Höhe von 1 Mio. € an. Die variablen Kosten betragen für jeden produzierten Fernseher 400 €. Maximal können 5000 Fernsehgeräte im Monat produziert werden.

- Gibt es einen Zusammenhang zwischen Produktionsmenge und Kosten?
Ja, bedingt durch die variablen Kosten.
- Handelt es sich um eine Funktion?
Ja, es besteht ein eindeutiger Zusammenhang.
- Was ist die unabhängige Variable x ?
Die Produktionsmenge
- Was ist die abhängige Variable y ?
Die Gesamtkosten
- Wie lautet die Funktion $K = f(x)$?
Funktionsgleichung: $K = 1.000.000 + 400x$ (Summe der fixen und variablen Kosten)
- Welchen Definitions- und Wertebereich hat die Funktion?
Definitionsbereich: von 0 bis 5000, da die Produktionsmenge einen Wert zwischen 0 und der Kapazitätsgrenze 5000 annehmen kann.
Wertebereich: von 1 Mio. bis 3 Mio. €, da bei einer Produktion von Null die Fixkosten in Höhe von 1 Mio. € anfallen, und bei einer Produktion von 5000 die variablen Kosten in Höhe von $5000 \cdot 400$ hinzukommen.

2.2 Darstellungsformen

Es gibt drei Möglichkeiten, Funktionen darzustellen:

1. Tabellarische Darstellung (Wertetabelle)
2. Analytische Darstellung (Funktionsgleichung)
3. Grafische Darstellung

Bei der Untersuchung konkreter Fragestellungen ist es nicht immer möglich, unter allen drei Darstellungsformen zu wählen, die alle verschiedenen Zwecken dienen und mit unterschiedlichen Vor- und Nachteilen verbunden sind.

Tabellarische Darstellung

Die tabellarische Darstellung ist die einfachste Form, die Abhängigkeit zwischen zwei Variablen anzugeben.

Beispiel

Für das Beispiel der Kostenfunktion $K = 1.000.000 + 400x$ aus dem letzten Abschnitt ergibt sich folgende Wertetabelle:

Produktionsmenge	0	1000	2000	3000	4000	5000
Gesamtkosten (Mio. €)	1	1,4	1,8	2,2	2,6	3

Zwar lässt sich die Tabelle um beliebig viele Werte erweitern, aber es bleibt der Nachteil, dass keine Aussagen über Zwischenwerte gemacht werden können.

Tabellarische Darstellungen werden eingesetzt, wenn die Funktionsgleichung nicht bekannt ist, sondern nur eine empirisch ermittelte Anzahl von Wertepaaren.

Beispiel

Bruttonationaleinkommen (in Mrd. €) der Bundesrepublik Deutschland in den Jahren 2008–2014

Jahr	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Bruttonationaleinkommen	2589	2516	2630	2769	2822	2882	2972

Diese Darstellungsform ist auch bei mathematisch komplizierten Funktionen vorteilhaft, um die Anwendung zu vereinfachen (z. B. Einkommensteuertabelle).

Häufig verwendete mathematische Funktionen werden tabellarisch dargestellt (z. B. Logarithmentafeln, Tafeln für $\sqrt{x}$, x^2 , x^3 , $\sin x$, ...).

Der Nutzen mathematischer Tabellenwerke hat allerdings in den letzten Jahren durch die Verbreitung preisgünstiger, leistungsfähiger Taschenrechner stark abgenommen.

Analytische Darstellung

Die analytische Darstellung als Funktionsgleichung $y = f(x)$ erlaubt es, aus beliebigen Werten der unabhängigen Variablen x den zugehörigen Wert der abhängigen Variablen y exakt zu berechnen.

Beispiel

$$K = 1.000.000 + 400x \quad (\text{für } 0 \leq x \leq 5000)$$

$$y = 3x^2 + 2x + e^x - 17$$

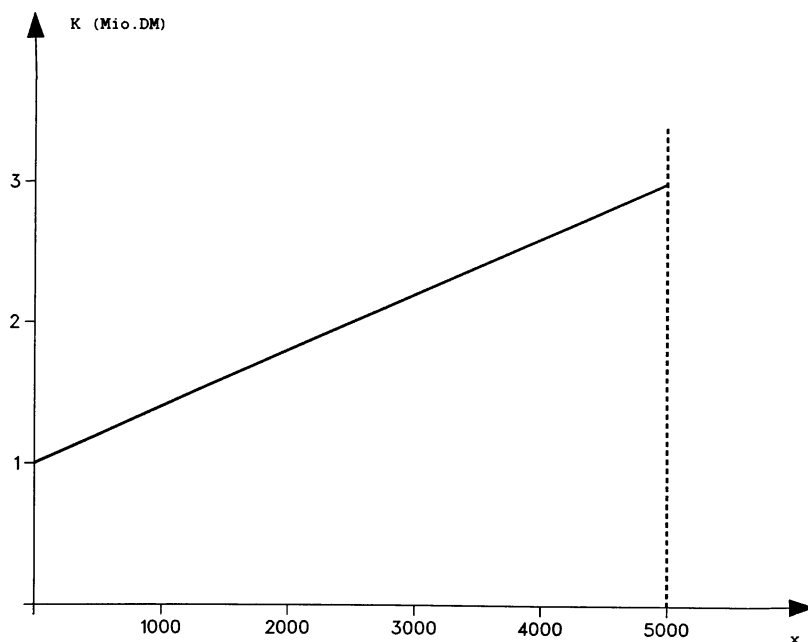
$$y = \ln(3x + 7) - \sqrt{x}$$

Bei vielen ökonomischen Fragestellungen ist der Definitionsbereich beschränkt; dies muss mit der Funktionsgleichung angegeben werden.

Die mathematisch-analytische Funktionsgleichung ist bei ökonomischen Beziehungen häufig unbekannt, oder sie kann nur in einer groben Annäherung angegeben werden. So lässt sich zum Beispiel die zeitliche Entwicklung des Bruttonationaleinkommens in einem Land nicht exakt durch eine Funktionsgleichung beschreiben.

Grafische Darstellung

Das Einzeichnen von Wertepaaren $(x; y)$ der Funktion $y = f(x)$ in ein (rechtwinkliges kartesisches) Koordinatensystem bedeutet eine Reduktion auf die wesentlichen Merkmale. Aus dem Schaubild lassen sich zwar die Werte nicht exakt ablesen, aber diese

**Abb. 2.1** Kostenfunktion

Darstellungsform ist visuell gut aufzunehmen, da sie es erlaubt, die relevanten Informationen sehr schnell zu erfassen.

Eine grafische Darstellung eignet sich gut für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen; bei zwei Unabhängigen ist sie schon problematisch, da hierfür ein dreidimensionaler Raum modellhaft in der Ebene abgebildet werden muss (s. Abschn. 3.4). Funktionen mit drei und mehr Unabhängigen sind praktisch nicht mehr grafisch darstellbar.

Das Koordinatensystem besteht für Funktionen mit einer abhängigen und einer unabhängigen Variablen aus zwei senkrecht aufeinander stehenden Achsen. An der horizontalen Achse – der Abszisse – wird im Allgemeinen die unabhängige Variable x abgetragen (x -Achse) und an der Ordinate die abhängige Variable y (y -Achse).

Beispiel

Die Kostenfunktion $K(x) = 1.000.000 + 400x$ für $0 \leq x \leq 5000$ hat den in Abb. 2.1 dargestellten Verlauf (K in Mio. €).

Aufgaben

Stellen Sie die folgenden Funktionen grafisch dar:

2.1 $f(x) = y = 50 + 10x$

2.2 $f(x) = y = 20 - x$

2.3 $f(x) = y = x^2 + 3$

2.3 Umkehrfunktionen

Da bei einer eindeutigen Funktion jedem x genau ein y und jedem y genau ein x zugeordnet wird, ist eine Umkehrung der Zuordnungsvorschrift möglich.

Wenn man die Funktionsgleichung $y = 4x$ nach der unabhängigen Variablen auflöst, erhält man die Umkehrfunktion $x = \frac{1}{4}y$.

Die Funktion, die man durch Umkehrung der Zuordnungsvorschrift aus einer eindeutigen Funktion ableiten kann, heißt Umkehrfunktion oder Inverse.

$$x = f^{-1}(y)$$

Beispiel

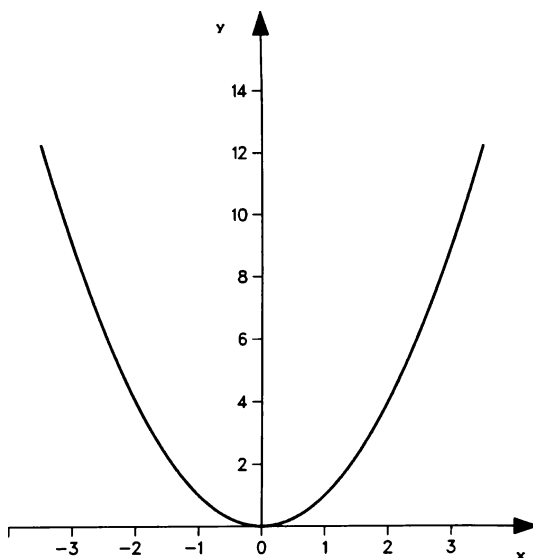
$$y = 2x + 4 \quad 2x = y - 4 \quad x = \frac{1}{2} \cdot y - 2$$

$$y = ax + b \quad x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a} \quad (\text{für } a \neq 0)$$

$$y = x^2 (x \geq 0) \quad x = \sqrt{y}$$

Die Funktion $y = x^2$ ist nicht eineindeutig, da jedem y zwei Werte für x zugeordnet sind (vgl. Abb. 2.2).

Abb. 2.2 Parabel



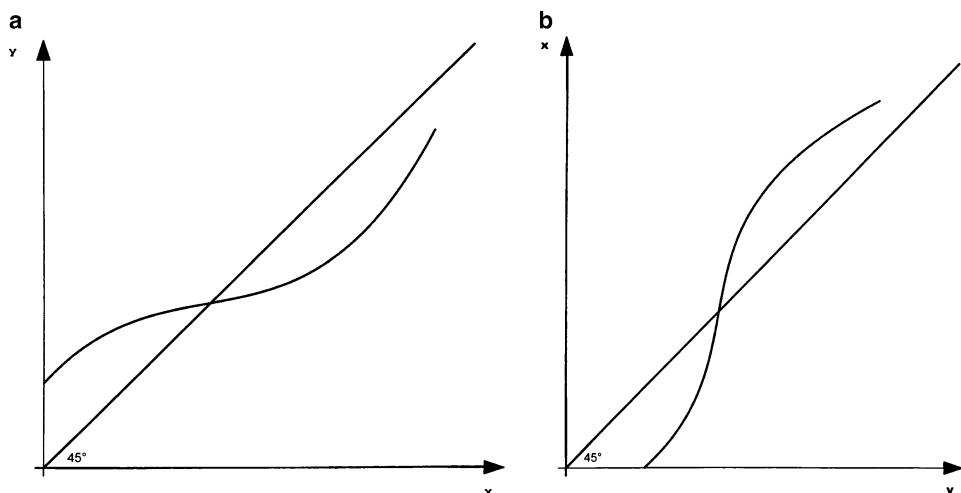


Abb. 2.3 Umkehrfunktion grafische Bestimmung

Zu $y = 4$ gehören die Werte 2 und -2 für x , da $y = x^2$ eine Parabel darstellt, bei der x -Werten, die sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden, der gleiche y -Wert zugeordnet wird.

Einschränkung des Definitionsbereiches

Somit ist die Umkehrung der Funktion keine Funktion mehr ($x = \sqrt{y}$), da sie keine eindeutige Zuordnungsvorschrift enthält. Jedem Wert der unabhängigen Variablen (jetzt y) werden zwei Werte der abhängigen (x) zugeordnet (s. Abschn. 1.3). Durch die Einschränkung des Definitionsbereiches ($x \geq 0$) der ursprünglichen Funktion $y = x^2$ entsteht eine eindeutige Funktion, die sich auch umkehren lässt.

Aus dem Definitionsbereich der Ursprungsfunktion wird der Wertebereich der Umkehrfunktion, und aus dem Wertebereich wird der neue Definitionsbereich.

Zur Bestimmung der Umkehrfunktion muss die Funktionsgleichung nach der unabhängigen Variablen aufgelöst werden.

In vielen Büchern findet man die Anweisung, dass neben der Auflösung der Funktion nach der Unabhängigen auch die Variablen vertauscht werden müssen.

Zu $y = 4x$ würde die Umkehrfunktion dann $y = \frac{1}{4}x$ sein.

Im Bereich der Wirtschaftswissenschaften darf diese Vertauschung der Variablen nicht erfolgen, da die Variablen hier ökonomische Größen repräsentieren. Eine Vertauschung würde zu Fehlinterpretationen führen.

Grafische Bestimmung

Grafisch lässt sich eine Umkehrfunktion durch die Spiegelung der Funktion und des Koordinatensystems an der 45°-Linie bestimmen (vgl. Abb. 2.3).

2.4 Lineare Funktionen

Zur Vereinfachung der Berechnung werden sehr viele ökonomische Zusammenhänge durch lineare Funktionen beschrieben.

Allgemeine Funktionsgleichung

Die grafische Darstellung einer linearen Funktion ergibt eine Gerade. Die allgemeine Funktionsgleichung einer linearen Funktion lautet:

$$y = mx + b$$

Symbole

x – unabhängige Variable

y – abhängige Variable

m – Steigung

b – Schnittpunkt mit der Ordinate, Ordinatenabschnitt

Beispiel

$$y = \frac{1}{2}x + 5$$

Ordinatenabschnitt

Dadurch, dass man $x = 0$ setzt, erhält man den Schnittpunkt einer Funktion mit der Ordinate.

Bei linearen Funktionen kann der Ordinatenabschnitt b direkt aus der Funktionsgleichung abgelesen werden.

Beispiel

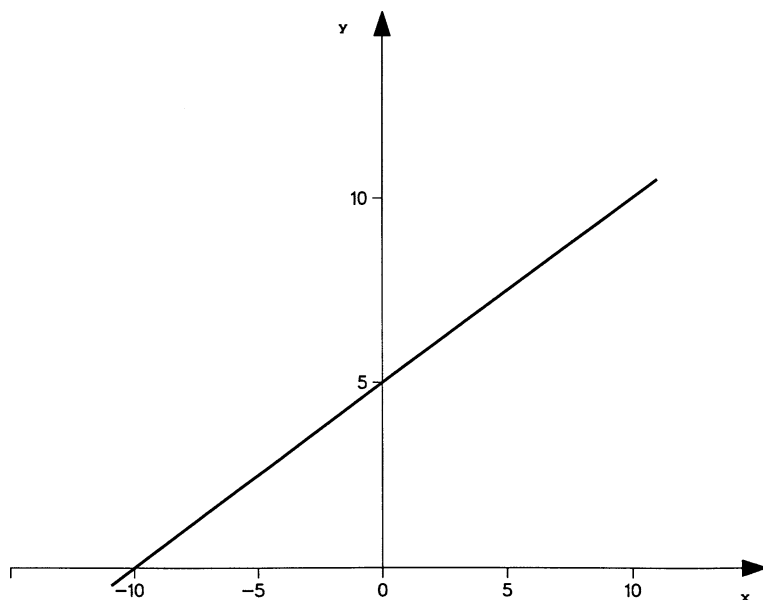
Für das obige Beispiel ergibt sich:

$$x = 0 \quad y = \frac{1}{2} \cdot 0 + 5 \quad y = 5 = b$$

Steigung

Die Steigung m beträgt in der Beispielfunktion $\frac{1}{2}$ (vgl. Abb. 2.4).

Wenn x um eine Einheit steigt, steigt y um eine halbe Einheit ($m = \frac{1}{2}$).

**Abb. 2.4** Lineare Funktion

Die Steigung gibt das Verhältnis der Änderung der abhängigen Variablen zu der der unabhängigen an.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Änderung der abhängigen Variable}}{\text{Änderung der unabhängigen Variable}}$$

► Die Steigung einer Geraden ist während ihres gesamten Verlaufes konstant.

$m > 0$ bedeutet eine steigende Gerade

$m < 0$ bedeutet eine fallende Gerade

$m = 0$ bedeutet Parallele zur Abszisse

Je größer $|m|$, desto steiler ist die Gerade.

Durch zwei Punkte ist eine Gerade hinreichend beschrieben, da es nur eine Gerade gibt, die durch zwei Punkte gezeichnet werden kann.

Um eine lineare Funktion zu zeichnen, genügt es also zwei Punkte zu bestimmen. Der erste Punkt könnte zweckmäßigerweise der Ordinatenabschnitt sein, der sich direkt ablesen lässt. Durch Einsetzen eines weiteren x -Wertes in die Funktionsgleichung werden die Koordinaten eines zweiten Punktes ermittelt, der wegen der Zeichengenauigkeit nicht zu nahe am ersten liegen sollte. Mit der Verbindung beider Punkte durch eine Gerade ist die lineare Funktionsgleichung dargestellt.

Aufgaben

Bestimmen Sie Steigung und Ordinatenabschnitt der folgenden Funktionen und zeichnen Sie diese.

$$2.4 \quad y = x + 4$$

$$2.5 \quad y = 2x - 1$$

$$2.6 \quad y = x$$

$$2.7 \quad y = 4$$

Aufstellung von Funktionsgleichungen

Lineare Funktionen sind eindeutig durch zwei Punkte oder durch einen Punkt und die Steigung bestimmt, so dass eine Ermittlung der Funktionsgleichung aus sehr wenigen Informationen möglich ist.

Wenn eine lineare Funktion zu bestimmen ist, von der nur die Steigung und die Koordinaten eines Punktes $(x_1; y_1)$ bekannt sind, so lässt sich die Funktionsgleichung über die Formel für die Steigung nach der Punktsteigungsform berechnen.

Punktsteigungsform

$$m = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

Beispiel

Von einer linearen Kostenfunktion ist die Steigung $m = 50$ und der Punkt $(100; 10.000)$ bekannt.

Wie lautet die Kostenfunktion?

Die abhängige Variable ist hier nicht y , sondern K als Symbol für die Kosten.

$$K = mx + b$$

$$m = 50$$

Koordinaten eines Punktes:

$$x_1 = 100, \quad K_1 = 10.000$$

Punktsteigungsform

$$m = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

$$50 = \frac{10.000 - K}{100 - x}$$

$$5000 - 50x = 10.000 - K$$

Die Kostenfunktion lautet:

$$K = 5000 + 50x$$

Die fixen Kosten betragen 5000 € und die variablen 50 € pro Stück.

Zweipunkteform

Durch die Zweipunkteform, die auf der Tatsache aufbaut, dass die Steigung einer Geraden überall gleich ist, lässt sich die Funktionsgleichung bestimmen, wenn zwei Punkte bekannt sind.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

Beispiel

Bei der Produktion von 1000 Einheiten eines Produktes sind Kosten in Höhe von 15.000 € angefallen. Eine Verminderung der Produktion um 100 Stück verursachte eine Kostenreduktion auf 13.800 €.

Wie lautet die Kostenfunktion, die als linear angesehen wird?

2 Punkte sind bekannt:

$$x_1 = 1000 \quad K_1 = 15.000$$

$$x_2 = 900 \quad K_2 = 13.800$$

2-Punkteform

$$\begin{aligned} \frac{13.800 - 15.000}{900 - 1000} &= \frac{15.000 - K}{1000 - x} \\ \frac{-1200}{-100} &= \frac{15.000 - K}{1000 - x} \\ 12 \cdot (1000 - x) &= 15.000 - K \end{aligned}$$

Die Kostenfunktion lautet:

$$K = 12x + 3000$$

Welcher der beiden Punkte als Punkt 1 und Punkt 2 definiert wird, spielt für die Berechnung keine Rolle.

Nullstelle

Die Nullstelle x_0 einer Funktion erhält man durch Nullsetzen der Funktion ($y = 0$) und Auflösen nach x .

Für das Beispiel $y = \frac{1}{2}x + 5$ bedeutet das:

$$y = 0 \quad 0 = \frac{1}{2}x + 5 \quad x_0 = -10$$

Schnittpunktbestimmung

Der Schnittpunkt von zwei Funktionen lässt sich durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen berechnen, da die x - und y -Werte beider Funktionen in diesem Punkt identisch sein müssen.

Den Wert für die unabhängige Variable erhält man durch Auflösen nach x . Der zugehörige y -Wert ergibt sich durch Einsetzen des gefundenen x -Wertes in eine der beiden Funktionsgleichungen.

Beispiel

Welche Koordinaten hat der Schnittpunkt der Funktionen $y = 20 + 2x$ und $y = 5 + 5x$

$$20 + 2x = 5 + 5x$$

$$3x = 15$$

$$x = 5$$

$$y = 20 + 2 \cdot 5 = 30$$

Die Geraden schneiden sich im Punkt (5; 30).

2.5 Ökonomische lineare Funktionen

Zusammenhänge zwischen wirtschaftlichen Größen lassen sich im Allgemeinen durch Funktionen beschreiben. In der Praxis tritt häufig das Problem auf, dass diese Funktionen nicht bekannt sind und sich zudem nur sehr schwer abschätzen lassen.

Beispielsweise weiß ein Unternehmen, dass die Nachfrage steigt, wenn der Preis gesenkt wird, doch der genaue Verlauf der Nachfragefunktion ist nicht bekannt. Er kann auch nicht exakt ermittelt werden, da dazu Experimente mit verschiedenen Preisen notwendig wären, die in der Realität nicht durchzuführen sind.

Häufig kennt man aber einige Eigenschaften der Funktion, aus denen sich Folgerungen für wirtschaftliche Entscheidungen ableiten lassen.

Zusammenhänge zwischen ökonomischen Variablen sind in der Realität sehr komplex und werden von vielen Einflussgrößen mitbestimmt. Zur Beschreibung dieser Zusammenhänge sind Funktionen mit mehreren Unabhängigen heranzuziehen.

So ist zum Beispiel die Nachfrage nach einem Produkt nicht nur von dessen Preis abhängig, sondern auch von den Preisen der konkurrierenden Güter und aller anderen Güter, die ein Wirtschaftssubjekt konsumiert. Außerdem spielen das Einkommen und viele weitere Faktoren eine Rolle.

Zur Lösung wirtschaftlicher Fragestellungen durch mathematische Methoden ist es nicht möglich, die Realität in ihrer umfassenden Komplexität zu berücksichtigen. Deshalb wird ein Modell (ein vereinfachtes Abbild der Wirklichkeit) erstellt, das die realen Zusammenhänge auf das Wesentliche reduziert.

Häufig unterstellt man für die Bestimmung der Nachfragefunktion, dass alle Faktoren bis auf den Preis des Produktes konstant bleiben (*ceteris paribus* Bedingung), so dass nur noch eine unabhängige Variable in die Berechnung eingeht.

Eine weitere Vereinfachung erfolgt dadurch, dass häufig lineare Funktionen verwendet werden, auch wenn die Beziehungen zwischen zwei wirtschaftlichen Größen nur annähernd linear verlaufen oder nur in einem bestimmten Intervall eine konstante Steigung haben.

In diesem Abschnitt werden ökonomische Funktionen untersucht, bei denen zwei Vereinfachungen zugrunde liegen:

1. Reduktion auf eine unabhängige Variable
2. Unterstellung eines linearen Kurvenverlaufes.

Insbesondere bei wirtschaftlichen Funktionen ist es wichtig, Definitions- und Wertebereich zu beachten, da diese in vielen Fällen eingeschränkt sind.

Beispielsweise haben alle Kostenfunktionen $K(x)$ einen beschränkten Definitionsbereich, da die Produktionsmenge durch Kapazitätsbegrenzungen eingeschränkt ist, und K nur die Werte annehmen kann, die sich durch Einsetzen der x -Werte in die Funktion ergeben. Kosten und Produktionsmengen können zudem nicht negativ werden.

Nachfragefunktion

Die Nachfragefunktion gibt die Abhängigkeit zwischen der nachgefragten Menge eines bestimmten Gutes und allen Faktoren an, die sie beeinflussen.

Wie oben beschrieben, wird diese Beziehung häufig vereinfacht. Die nachgefragte Menge x eines Haushaltes wird nur noch als abhängig von dem Preis p des entsprechenden Gutes angesehen.

$$x = f(p)$$

Preisabsatzfunktion

Wenn man die Abhängigkeit zwischen Preis und nachgefragter Menge eines Gutes aus der Sicht des anbietenden Unternehmens betrachtet, bezeichnet man die Nachfragefunktion als Preisabsatzfunktion. Dabei ändern sich die Zusammenhänge und die Funktionsgleichung nicht, lediglich die Fragestellung ist eine andere. Bei der Preisabsatzfunktion fragt sich der Unternehmer, welche Mengen er bei welchen Preisen absetzen kann.

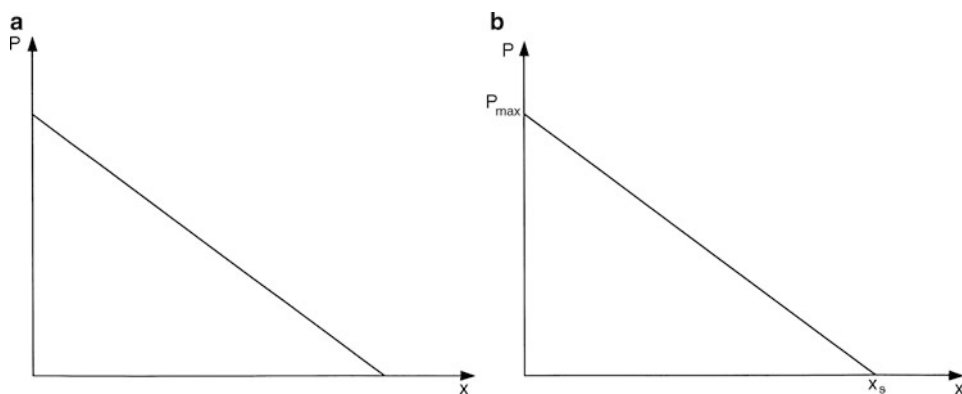


Abb. 2.5 Nachfragefunktion $x = f(p)$ und $p = f(x)$

Wenn man von einigen Besonderheiten absieht (Preis-Qualitäts-Effekt bei Luxusgütern mit Prestige vermittelndem Preis), bei denen die Preisabsatzfunktion von ihrem typischen Verlauf abweicht, ist es plausibel, dass die nachgefragte Menge steigt, wenn der Preis sinkt, und umgekehrt. Die Preisabsatzfunktion hat demnach eine negative Steigung.

Vereinfachend wird in der Praxis häufig ein linearer Verlauf unterstellt, obwohl die Funktion in der Realität vor allem in der Nähe der Achsen ihre Steigung ändern und sich an die Achsen anschmiegen wird (vgl. Abb. 2.5).

In den Wirtschaftswissenschaften ist es üblich, den Preis an der Ordinate und die Menge an der Abszisse abzutragen. Die Nachfragefunktion wird dem gemäß so dargestellt, dass der Preis der abhängigen und die Menge der unabhängigen Variablen entsprechen. Man betrachtet also die Umkehrfunktion, welche die Abhängigkeit des Preises von der Nachfragemenge angibt (vgl. Abb. 2.5).

$$p = f(x)$$

► Allgemeine Funktionsgleichung einer linearen Nachfragefunktion:

$$p(x) = mx + b$$

Symbole:

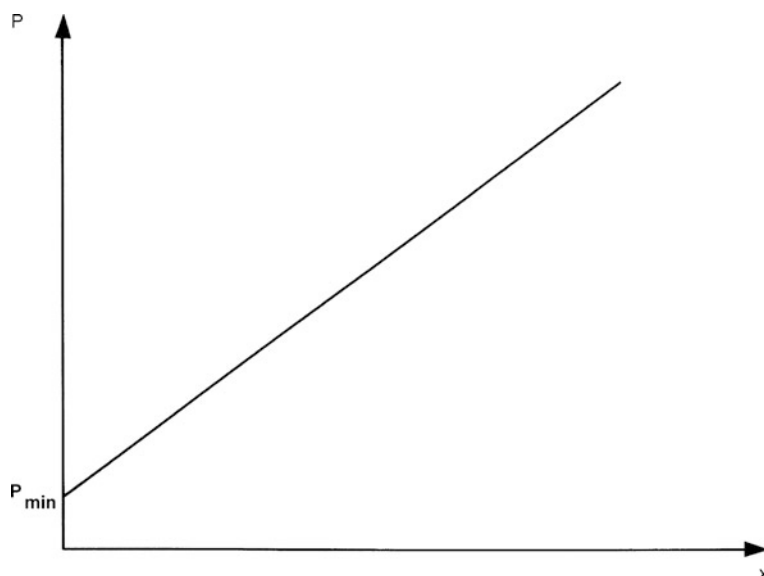
p = Preis

m = Steigung (negativ)

x = nachgefragte bzw. abgesetzte Menge

b = Ordinatenabschnitt

Der Ordinatenabschnitt b – der Schnittpunkt mit der Ordinate – gibt den maximalen Preis $p_{\max}$ für das Gut an, bei dem die Nachfrage Null wird.

**Abb. 2.6** Angebotsfunktion

Die Nullstelle x_s zeigt die Sättigungsgrenze an. Selbst wenn der Preis des Produktes auf Null gesenkt wird, überschreitet die nachgefragte Menge nicht den Wert x_s .

Angebotsfunktion

Die Angebotsfunktion gibt die Abhängigkeit der angebotenen Menge eines Gutes von dem dafür verlangten Preis an. Je höher der Verkaufspreis, desto mehr sind die Hersteller bereit zu produzieren. Mit steigenden Preisen wird also auch die angebotene Menge zunehmen. Die Angebotsfunktion hat eine positive Steigung, wie die Abb. 2.6 zeigt.

- Allgemeine Funktionsgleichung einer linearen Angebotsfunktion:

$$p = mx + b$$

Symbole:

p = Preis

m = Steigung (positiv)

x = Angebotsmenge

b = Ordinatenabschnitt

Der Ordinatenabschnitt b gibt hier den minimalen Preis $p_{\min}$ an. Bei diesem Preis ist das Angebot gleich Null. Erst bei steigenden Preisen sind die Produzenten bereit, mehr und mehr Produkte anzubieten.

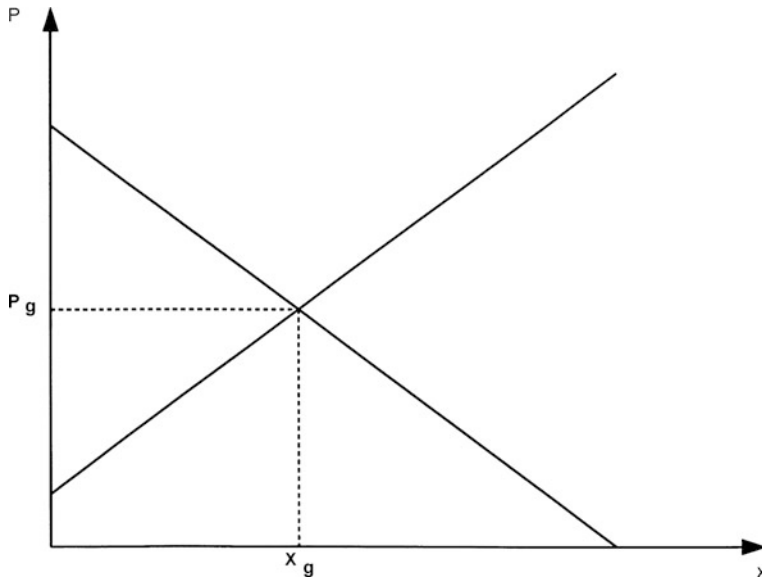


Abb. 2.7 Marktgleichgewicht

Marktgleichgewicht

Das Marktgleichgewicht, bei dem sich Angebot und Nachfrage ausgleichen, lässt sich grafisch ermitteln, wenn Nachfrage- und Angebotsfunktion in ein Koordinatensystem gezeichnet werden.

Das Marktgleichgewicht ist erreicht, wenn das Angebot mit der Nachfrage übereinstimmt. Grafisch entspricht das Gleichgewicht dem Schnittpunkt der beiden Funktionen (vgl. Abb. 2.7).

p_g = Gleichgewichtspreis

x_g = Gleichgewichtsmenge

Aufgaben

- 2.8 Auf dem Markt für ein bestimmtes Produkt gilt ein Maximalpreis von 500 € und eine Sättigungsmenge von 200 Stück. Der Mindestpreis ist 100 € und die Steigung der Angebotsfunktion beträgt 1,5.
- Bestimmen Sie die Nachfrage- und Angebotsfunktion, die beide einen linearen Verlauf haben sollen.
 - Bestimmen Sie Gleichgewichtspreis und -menge grafisch und analytisch.
 - Welche Folge hat eine staatliche Festlegung des Preises auf 200 € für Nachfrage und Angebot?

Mathematik im Betrieb

Praxisbezogene Einführung mit Beispielen

Holland, H.; Holland, D.

2016, X, 364 S. 107 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-8349-4745-1