Vahlen kompakt

Mathematik in der BWL

Anwendungsorientiert und verständlich

Bearbeitet von
Von Prof. Dr. Korbinian Blanckenburg

1. Auflage 2017. Buch. XV, 119 S. Kartoniert
ISBN 978 3 8006 5491 8
Format (B x L): 14,1 x 22,4 cm
Gewicht: 235 g

2.3.8 Verschiebungen, Streckungen, Stauchungen und Spiegelung von Graphen

Eine Funktion lässt sich – wie an diversen Beispielen gezeigt – mit einer Wertetabelle skizzieren. Doch dies kann teilweise recht lange dauern, vor allem wenn unklar ist, welche Werte eigentlich eingesetzt werden sollen. Es ist daher empfehlenswert sich vor einer Skizze Gedanken über den Verlauf der Funktion zu machen. Wenn der Standardfunktionsverlauf bekannt ist, muss häufig nur noch eine Überlegung zu einer möglichen Transformation angestellt werden. $f(x) = 4(x + 1)^3 - 2$ beruht beispielsweise auf dem Standardverlauf von $f(x) = x^3$. Der Graph der Funktion ist hier aber offensichtlich manipuliert (um 2 nach unten und um 1 links verschoben und mit dem Faktor 4 vertikal gestreckt). Solche Manipulationen wurden in den vorherigen Abschnitten für die Funktionstypen betrachtet. Anbei eine Übersicht zu möglichen Manipulationen:

Operation	**Funktionsterm des neuen Graphen**
Vertikalverschiebung um eine Konstante a $a > 0$: Verschiebung um a Einheiten nach oben $a < 0$: Verschiebung um a Einheiten nach unten	$g(x) = f(x) + a$
Horizontalverschiebung um eine Konstante a $a > 0$: Verschiebung um a Einheiten nach links $a < 0$: Verschiebung um a Einheiten nach rechts	$g(x) = f(x + a)$
Vertikale Streckung / Stauchung um Faktor c ($c > 0$) $c > 1$: Vertikale Streckung / Dehnung $c < 1$: Vertikale Stauchung	$g(x) = cf(x)$
Horizontale Streckung / Stauchung um Faktor c ($c > 0$) $c > 1$: Horizontale Stauchung $c < 1$: Horizontale Streckung / Dehnung	$g(x) = f(c \cdot x)$
Vertikale Spiegelung (an der x-Achse)	$g(x) = -f(x)$
Horizontale Spiegelung (an der y-Achse)	$g(x) = f(-x)$

2.4 Funktionen in der Praxis

Ein klassisches Beispiel für den Einsatz von Funktionen in der betriebswirtschaftlichen Praxis sind Erlös-, Kosten- und Gewinnfunktionen. Zur Veranschaulichung des Zusammenhangs dieser Funktionen wird im Folgenden angenommen, dass ein Unternehmen A ein Produkt herstellt und am Markt verkauft. Der Gewinn ist definiert als Erlös (auch: Umsatz) abzüglich der Kosten die durch die Herstellung entstehen. *Hinweis: Es handelt sich streng genommen um einen Deckungsbeitrag, da Fixkosten ausgeblendet werden.*

2.4.1 Erlösfunktion

Eine Erlösfunktion ist zum Beispiel $E(x) = 80x - 2x^2$. Der ökonomisch sinnvolle Definitionsbereich ist dabei $D_x \geq 0$. Klassischerweise (und so auch hier) steigt der Erlös anfangs an, irgendwann kehrt sich die Steigung jedoch um. Der Grund dafür liegt in der endlichen Nachfrage.

Diese beispielhafte Erlösfunktion hat folgenden Verlauf:

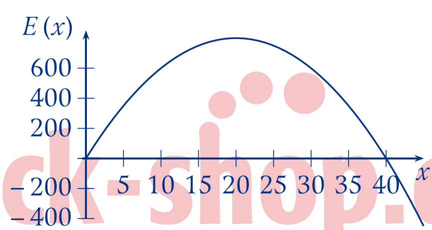

Abbildung 2.19: Beispiel einer Erlösfunktion

Diese Erlösfunktion ist hier eine nach rechts und nach oben verschobene quadratische Funktion. Der Graph ist nach unten geöffnet und die Funktion hat zwei Nullstellen:

$$E(x) = 0 \Leftrightarrow 80x - 2x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x(80 - 2x) = 0$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 0 \wedge 80 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 40$$

Die zweite Nullstelle kann dabei als Umsatzgrenze interpretiert werden, also jene Menge, bei der der Markt gesättigt ist und keine Nachfrage, auch nicht für geschenkte Produkte, mehr besteht (= Sättigungsmenge).

2.4.2 Kostenfunktion

Die Kosten steigen mit wachsender Produktion (je mehr x produziert wird, desto mehr absolute Kosten entstehen). Solche Kostenfunktionen können ganz unterschiedliche Verläufe haben (z. B. progressiv, linear, degressiv). Hier wird angenommen, dass die Kosten progressiv ansteigen. Ein beispielhafter Kostenverlauf kann durch die Funktion $K(x) = 3x^2 + x$ mit $D_x \geq 0$ beschrieben werden.[6]

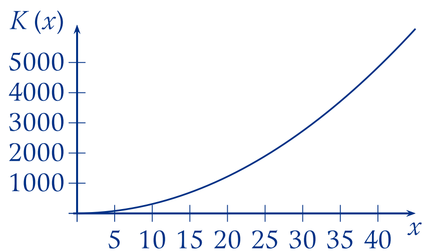

Abbildung 2.20: Beispiel einer Kostenfunktion

2.4.3 Gewinnfunktion

Der Gewinn ist hier definiert als Erlöse minus Kosten. Die Gewinnfunktion ist also die Differenz der Erlös- und Kostenfunktion.

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

Damit würde die Gewinnfunktion für die zuvor eingeführte Erlös- und Kostenfunktion wie folgt lauten: $G(x) = (80x - 2x^2) - (3x^2 + x) = 79x - 5x^2$

Die Nullstellen dieser Gewinnfunktion sind:

$$G(x) = 0 \Leftrightarrow 79x - 5x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x(79 - 5x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = \tfrac{79}{5} = 15{,}8$$

In diesem Beispiel erwirtschaftet das Unternehmen also nur dann einen positiven Gewinn, wenn es mehr als 0 und weniger als 15,8 Einheiten produziert und anbietet.

[6] Dies ist eine Kostenfunktion ohne Fixkosten – erkennbar am Start im Ursprung.

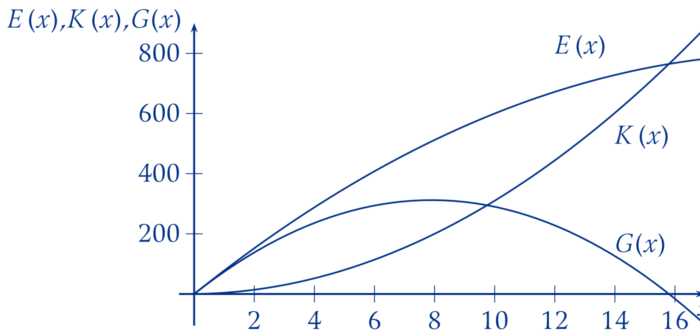

Abbildung 2.21: Erlös-, Kosten- und Gewinnfunktion

Wenn das Unternehmen Gewinnmaximierung betreibt, sollte es soviel produzieren, dass $G(x)$ maximal wird. Wie das Maximum einer Funktion berechnet werden kann, ist wesentlicher Bestandteil des nächsten Kapitels.

3 Differentialrechnung

Lernziele

In diesem Kapitel lernen Sie:

- bekannte Funktionstypen mit Hilfe von Regeln abzuleiten,
- markante Punkte mit Hilfe von Ableitungen zu berechnen,
- die berechneten Punkte im Hinblick auf betriebswirtschaftliche Fragestellungen zu interpretieren und
- die Lagrange-Funktion zur Berechnung von Extremstellen bei Funktionen mit mehreren Unbekannten unter Nebenbedingungen kennen.

3.1 Einführung

Die Differentialrechnung gehört, zusammen mit der Integralrechnung, zur Infinitesimalrechnung als Bestandteil der Analysis. Besser bekannt ist sie unter dem Stichwort Ableitung einer Funktion.

Als Ableitung wird im Folgenden die Steigung einer Funktion in einem Punkt verstanden. Die Steigung einer Funktion ist für viele ökonomische Modelle wesentlich, beispielsweise bei der Bestimmung von Grenzkosten, bei der berechnet wird, um wieviel Einheiten die Kosten ansteigen, wenn die produzierte Menge um eine Einheit zunimmt. Ein weiteres Anwendungsfeld der Differentialrechnung ist die Bestimmung von lokalen Extrempunkten, beispielsweise eines Gewinnmaximums oder eines Kostenminimums. Solche Extremstellen lassen sich mit der Differentialrechnung schnell identifizieren, da die Steigung der entsprechenden Funktion in diesen Punkten Null ist.

In den nächsten Abschnitten wird gezeigt, wie unterschiedliche Funktionstypen abgeleitet werden können. Dabei werden sukzessiv bestimmte Ableitungsregeln eingeführt und anschließend die Bedeutung der Ableitung zur Bestimmung von Minimum, Maximum und Sattelpunkt erläutert.

3.2 Ableitung verschiedener Funktionstypen

3.2.1 Lineare Funktionen

Die Steigung einer linearen Funktion lässt sich an folgendem Beispiel beschreiben: Bei der Funktion $f(x) = 2x+1$ handelt es sich um eine lineare Funktion. Die Steigung gibt an um wie viele Einheiten sich der Funktionswert verändert, wenn zu einem bestimmten x-Wert eine (unendlich kleine) Einheit hinzu kommt. Oder anders gesagt: um wie viel nach oben oder unten gegangen werden muss, bei einem Schritt nach rechts.

Bei einer linearen Funktion macht es keinen Unterschied an welcher Stelle der Funktion die Steigung betrachtet wird, da die Steigung immer gleich groß ist (das ergibt sich allein schon aus dem Verständnis von „linear"). Wie groß ist aber die Steigung in obigem Beispiel? Bei Betrachtung der Funktion im Punkt $x = 0$ beträgt der Funktionswert $f(0) = 1$. Wird die Funktion nun um Eins erhöht, steigt der Funktionswert auf $f(1) = 3$ an. Die Funktion ist also um zwei Einheiten angestiegen. Dies gilt bei linearen Funktionen für jeden Ausgangspunkt, z. B. $f(4) = 9$ und $f(5) = 11$, $f(-2) = -3$ und $f(-1) = -1$ etc.

Die Steigung ist somit bei der Funktion $f(x) = 2x + 1$ in jedem Punkt „2" und gibt an wie viel bei einem Schritt nach rechts nach oben gegangen werden muss. Mathematisch wird dies wie folgt ausgedrückt: $f'(x) = 2$.

Allgemein folgt daraus die erste Ableitungsregel für die lineare Funktionen:

Formel 12: Ableitungsregel für lineare Funktionen

Die Ableitung von $f(x) = mx + b$ mit $x,m,b \in \mathbb{R}$ lautet $f'(x) = m$.

3.2.2 Quadratische Funktionen

Bei quadratischen Funktionen ist der Wert der Ableitung bzw. die Steigung nicht in allen Punkten gleich. Es gibt Bereiche in denen die Funktion fällt und einen Punkt in dem die Funktion weder ansteigt noch abnimmt.

Für quadratische Funktionen gibt es eine allgemeine Ableitungsregel:

Formel 13: Ableitungsregel für quadratische Funktionen

Die Ableitung von $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $x,a,b,c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ lautet $f'(x) = 2a \cdot x + b$.

Die Ableitung einer quadratischen Funktion ist also laut Ableitungsregel nicht konstant, sondern von x abhängig. Dies wird bei Betrachtung des einfachen Beispiels $f(x) = x^2$ deutlich. Laut Ableitungsregel ist $f'(x) = 2x$. Die Steigung im Punkt $x = -3$ ist demnach $f'(-3) = -6$, die Steigung im Punkt $x = 2$ lautet $f'(2) = 4$ und die Steigung im Punkt Null liegt bei $f'(0) = 0$.

Die unterschiedlichen Steigungen der Funktion werden besonders gut in der nachfolgenden Abbildung deutlich. Die Ableitung selbst lässt sich ebenfalls zeichnen. Es handelt sich dabei um eine lineare Funktion. Die vertikal gestrichelten Linien zeigen den Wert der Ableitung an den zuvor genannten Stellen der Funktion ($x = -3$, $x = 0$, $x = 2$).

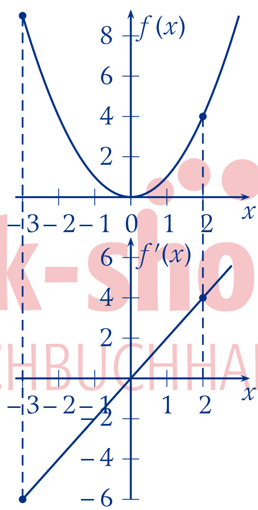

Abbildung 3.1: Quadratische Funktion mit Ableitungsfunktion

3.2.3 Kubische Funktionen

Bei kubischen Funktionen lautet die allgemeine Ableitungsregel:

Formel 14: Ableitungsregel für kubische Funktionen

Die Ableitung von $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $x,a,b,c,d \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ lautet $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Spätestens aus der Ableitungsregel für kubische Funktionen wird ein allgemeines Muster für die Ableitung einer Potenzfunktion erkennbar. Offenbar wird der Exponent immer um eine Einheit verringert, während die Ableitungsfunktion mit dem ursprünglichen Exponent multipliziert wird.

Formel 15: Ableitungsregel für Potenzfunktionen

Die Ableitung von $f(x) = ax^n$ mit $x,a,n \in \mathbb{R}$ lautet $f'(x) = nax^{n-1}$.

In der nachfolgenden Abbildung ist die kubische Funktion $f(x) = x^3$ und deren Ableitungsfunktion $f'(x) = 3 \cdot x^2$ dargestellt. Die Steigung der Funktion an der Stelle $x = 2$ lautet dann $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$. An der Stelle $x = 0$ steigt die Funktion gerade gar nicht an, folglich lautet $f'(0) = 0$.

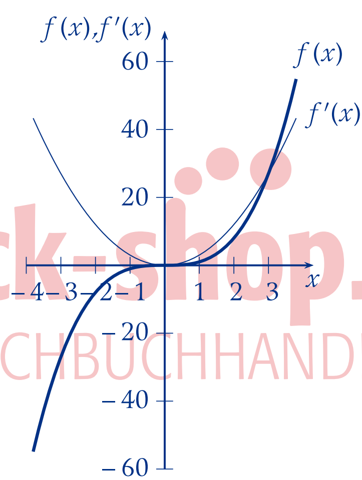

Abbildung 3.2: Kubische Funktion mit Ableitungsfunktion

3.2.4 Gebrochenrationale Funktionen

Gebrochenrationale Funktionen lassen sich über die bereits eingeführte Ableitungsregel für Potenzfunktionen ableiten. Auch hier wird dann der Exponent um eins verringert, während die Funktion mit dem ursprünglichen Exponenten multipliziert wird.

Die beispielhafte Betrachtung von $f(x) = \frac{3}{x} = 3 \cdot x^{-1}$ mit der Ableitung $f'(x) = -1 \cdot 3 \cdot x^{-1-1} = -3x^{-2} = -\frac{3}{x^2}$ verdeutlicht, dass die Ableitungsfunktion hier offenbar selbst eine gebrochenrationale Funktion ist.