

# Konzeptualisierung und Diagnose von mathematischem Grundwissen und Grundkönnen

Eine theoretische Betrachtung und exemplarische Konkretisierung am Ende der Sekundarstufe II

Bearbeitet von  
Nora Feldt-Caesar

1. Auflage. 2017. Buch. XIV, 367 S. Kartoniert / Broschiert  
ISBN 978 3 658 17372 2  
Format (B x L): 14,6 x 21,1 cm  
Gewicht: 507 g

[Weitere Fachgebiete > Mathematik](#)

Zu [Inhaltsverzeichnis](#)

schnell und portofrei erhältlich bei

**beck-shop.de**  
DIE FACHBUCHHANDLUNG

Die Online-Fachbuchhandlung [beck-shop.de](http://beck-shop.de) ist spezialisiert auf Fachbücher, insbesondere Recht, Steuern und Wirtschaft. Im Sortiment finden Sie alle Medien (Bücher, Zeitschriften, CDs, eBooks, etc.) aller Verlage. Ergänzt wird das Programm durch Services wie Neuerscheinungsdienst oder Zusammenstellungen von Büchern zu Sonderpreisen. Der Shop führt mehr als 8 Millionen Produkte.

## 2            **Anlage der Arbeit**

### 2.1           **Begriffsklärung**

Im Fokus dieser Arbeit steht die verallgemeinerte Beschreibung des Entstehungsprozesses von Mindeststandards und Möglichkeiten ihrer Diagnose. In diesem Kontext erweisen sich die Begriffe der Konzeptualisierung, Konkretisierung, Operationalisierung und Diagnose sowie der Ziel- und Inhaltsbegriff für die differenzierte Bezeichnung einzelner Prozessphasen als zentral. Diese Begriffe sollen im weiteren Verlauf dieser Arbeit wie folgt verstanden werden (vgl. auch Abb. 2):

- **Konzeptualisierung:**  
Dieser Begriff bezeichnet den gesamten Prozess der Entstehung eines Mindeststandardkonzepts. Er umfasst damit die Phasen der allgemeinen Zielbildung, der Definition eines entsprechenden Mindeststandardbegriffs sowie die Phase der inhaltlichen Konkretisierung, der Festlegung eventueller Qualitätsparameter und die Phase der Operationalisierung. In Abbildung 2 sind alle am Prozess der Konzeptualisierung beteiligten Phasen dargestellt. Eine detaillierte Beschreibung findet sich in Kapitel 6.
- **Konkretisierung:**  
Die Phase der Konkretisierung umfasst die Festlegung konkreter, inhaltsgebundener Lernziele. Hierzu gehören die Auswahl der zu den Mindeststandards zu zählenden Inhalte, die durch entsprechende Kenntnisse beherrscht werden sollen, sowie gegebenenfalls die Festlegung der Aneignungsqualität dieser Kenntnisse. Ziel des Konkretisierungsprozesses ist in der Regel die Erstellung eines Inhalts- bzw. Lernzielkatalogs.
- **Operationalisierung:**  
Mit dem Begriff der Operationalisierung wird die Formulierung von Mindeststandards auf Handlungsebene bezeichnet. Hierzu werden konkrete Anforderungen ausgewiesen, die mit Hilfe der festgelegten Kenntnisse beherrscht werden sollen. Das Ausweisen dieser Anforderungen erfolgt häufig in Form von (illustrierenden) Aufgaben. Ziel des Operationalisierungsprozesses ist in

der Regel die Erstellung eines Anforderungs- bzw. Aufgabenkatalogs.

- **Diagnose:**  
Der Konzeptualisierungsprozess kann die Diagnose von Mindeststandards zum Ziel haben. In diesem Fall schließt sich dem Operationalisierungsprozess die Konzeption eines konkreten Test- bzw. Diagnoseinstruments und dessen Einsatz in einer Lerngruppe an.

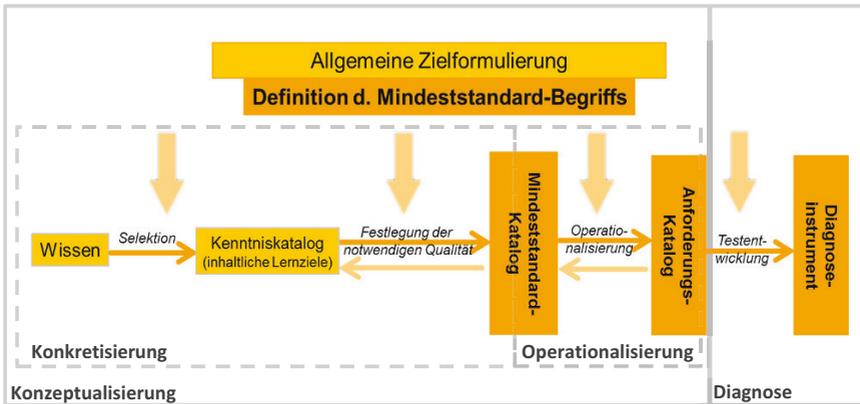


Abbildung 2 Schematische Übersicht über den Prozess der Konzeptualisierung und Diagnose von Mindeststandards

- **Ziele:**  
Der Zielbegriff wird in dieser Arbeit in einem zweifachen Sinne verwendet. Es wird zwischen *allgemeinen* und *konkreten (Lern-) Zielen* eines Mindeststandardkonzepts entschieden. Diese Unterscheidung findet sich u.a. auch bei H. Winter (1972, S. 69). Sill (1997) unterscheidet analog zwischen *Funktionen* und *Zielen* des Mathematikunterrichts: „Unter der *Funktion eines pädagogischen Prozesses* [...] wird seine Rolle innerhalb eines Systems gesellschaftlicher Erscheinungen, Verhältnisse oder Prozesse verstanden“ (ebd., S. 466). Aus der Funktion ergeben sich *Ziele* für den Unterricht, wobei unter einem Ziel „ein spezielles System von Kenntnissen, Fähigkeiten, Fertigkeiten, Einstellungen u.a. Persönlichkeits-eigenschaften verstanden [wird], das im Mathematikunterricht bei den Schülern auszubilden ist.“ Eine Zielan-

gabe fordert dabei „keinen Bezug zu einem übergreifenden System von Anforderungen“ (ebd.). Dem weiteren Verlauf dieser Arbeit wird diese Unterscheidung anhand der Begriffe *allgemeine Ziele* bzw. *konkrete Ziele* zugrunde gelegt.

- Inhalte:  
Unter Inhalten werden in Anlehnung an Sill (1997, S. 467) „die Gegenstände der Aneignungsprozesse“ genannt. Sie sind Bestandteil des (gesellschaftlichen) Wissens und werden von Lernenden in Form von Kenntnissen angeeignet.<sup>4</sup>

## 2.2 Ziele und Inhalte der Arbeit

Mindeststandards legen für alle Schüler eine gemeinsame Wissens- und Könnensbasis<sup>5</sup> fest. Die Konkretisierung und Operationalisierung von Mindeststandards in Form von Inhalts- und Aufgabenkatalogen kann zusammen mit einer entsprechenden Diagnose und Förderung dazu beitragen, dass alle Schüler über die notwendigen Voraussetzungen für ein Weiterlernen im schulischen oder außerschulischen Kontext verfügen. Insbesondere an den verschiedenen Übergängen des Bildungssystems (vgl. hierzu auch Heinze & Bruder, 2015, S. 2ff.) kommt der Sicherung von Mindeststandards durch geeignete Diagnose- und Fördermaßnahmen Bedeutung zu. Es ist Aufgabe der Fachdidaktik, den Prozess der Konzeptualisierung, Diagnose und Förderung von Mindeststandards wissenschaftlich zu begleiten und gleichzeitig aus einer stoffdidaktischen und lerntheoretischen Perspektive heraus Forderungen an die inhaltliche Konkretisierung sowie die Operationalisierung zu formulieren (vgl. Kap. 6.2). Die vor diesem Hintergrund entstandenen Mindeststandardkonzepte (vgl. Abb. 1) weisen weitreichende Unterschiede auf, die sowohl die Inhalts- und Aufgabenkataloge als sichtbare Produkte des Konzeptualisierungsprozesses als auch das methodische Vorgehen der jeweiligen Autorengruppe betreffen: Während bei der Ausarbeitung einiger Konzepte in erster Linie pragmatisch vorgegangen wird, wählen andere Autoren ein stärker theoriegeleitetes Vorgehen.

An dieser Stelle stellt sich die Frage nach einem gemeinsamen theoretischen Rahmen, vor dessen Hintergrund Gemeinsamkeiten und Un-

---

4 Für eine Abgrenzung der Begriffe Wissen und Kenntnisse vergleiche Kapitel 5.2.

5 Für eine Klärung der Begriffe des Wissens und Könnens vergleiche Kapitel 3 sowie Kapitel 5.3.

terschiede einzelner Konzepte ein Stück weit aufgeklärt werden können. Ebenso stellt sich die Frage, wie der Prozess der Konzeptualisierung und Diagnose theoriegeleitet durchgeführt werden kann und an welchen Stellen sich Aushandlungsprozesse, die zu pragmatischen Entscheidungsfindungen führen, als unerlässlich erweisen. Diesen Fragen geht diese Arbeit durch eine theoretische Betrachtung des Prozesses der Konzeptualisierung und Diagnose<sup>6</sup> von Mindeststandards nach. Eine exemplarische Konkretisierung des entwickelten theoretischen Rahmens dient als Beispiel für ein weitestgehend theoriegeleitetes Vorgehen.

### *Ziele der Arbeit*

*Das Ziel dieser Arbeit besteht in einer verallgemeinerten Beschreibung des Prozesses der Konzeptualisierung von Mindeststandards und den sich hieraus ergebenden Anforderungen an die Diagnose von Mindeststandards. Ausgehend von diesen Anforderungen wird auf zunächst theoretischer Ebene ein entsprechendes Diagnoseverfahren entwickelt. Durch das Konzept des „Mathematischen Grundwissens und Grundkönnens“ erfolgt eine exemplarische Konkretisierung dieser Überlegungen.*

Folgende Teilziele werden dabei verfolgt:

- Vor dem Hintergrund der Tätigkeitstheorie werden die für die theoretische Beschreibung der Konzeptualisierung und Diagnose von Mindeststandards notwendigen theoretischen Konstrukte und Begrifflichkeiten entwickelt.
- Es wird eine theoretisch begründete und verallgemeinerte Beschreibung des Prozesses der Konzeptualisierung von Mindeststandards vorgenommen.
- Aus den spezifischen Anforderungen an eine Diagnose im Bereich von Mindeststandards wird auf zunächst theoretischer Ebene ein Diagnoseverfahren entwickelt.
- Vor dem entwickelten theoretischen Hintergrund werden bereits existierende Mindeststandardkonzepte insbesondere hinsichtlich ihrer Zielstellung verortet. Für Unterschiede in ihrer Umsetzung werden Erklärungsansätze entworfen.
- In einer exemplarischen Konkretisierung des entwickelten theoretischen Rahmens wird mit dem Konzept des *Mathematischen Grundwissens und Grundkönnens* ein weitestgehend theoriege-

---

6 Die sich der Diagnose im Idealfall anschließende Förderung ist nicht Gegenstand dieser Arbeit.

- leitetes Vorgehen zur Konzeptualisierung von Mindeststandards dargestellt.
- Ein konkretes Testinstrument zur Diagnose des am Ende der Sekundarstufe II verfügbaren Grundwissens und Grundkönnens wird für den Inhaltsbereich ‚Funktionaler Zusammenhang‘ entwickelt und empirisch erprobt.

### *Inhalte der Arbeit*

Zunächst wird in Kapitel 3 der Begriff der Mindeststandards in einer allgemeingehaltene Form definiert. Gleichzeitig werden ergänzende Rahmenfragen vorgestellt, mit deren Hilfe sich die spezifischen Besonderheiten des Mindeststandardbegriffs im Kontext eines bestimmten Konzeptes konkretisieren lassen.

In Kapitel 4 wird ein Überblick über existierende Mindeststandardkonzepte gegeben. Im letzten Teil dieses Kapitels erfolgt ein Vergleich dieser Konzepte vor dem Hintergrund der vier in Kapitel 3 entwickelten Rahmenfragen. Auch die jeweilige im Entstehungsprozess verwendete Methodik sowie Form und Besonderheiten der resultierenden Produkte (in der Regel Inhalts- und Aufgabenkataloge) fließen in diese Analyse ein.

In Kapitel 5 wird zunächst erörtert, inwiefern sich die Tätigkeitstheorie als Hintergrundtheorie für die allgemeine Beschreibung der Konzeptualisierung und Diagnose von Mindeststandards eignet. Im Anschluss werden grundlegende Konzepte und Begriffe der Tätigkeitstheorie vorgestellt und der Zielstellung dieser Arbeit entsprechend adaptiert.

Der auf diese Weise entstehende theoretische Hintergrund wird im ersten Teil des sechsten Kapitels verwendet, um den Prozess der Konzeptualisierung von Mindeststandards in verallgemeinerter Form zu beschreiben. Ein Fokus liegt dabei auf der Verortung der Grenzen, auf die eine Theorieorientierung dieses Prozesses stößt, sowie auf der Rolle, die die Fachdidaktik in diesem Prozess einnimmt. Aus den spezifischen Anforderungen an die Diagnose im Mindeststandardbereich wird im zweiten Teil des sechsten Kapitels mit dem Prinzip des *Elementarisierenden Testens* ein Diagnoseformat entwickelt, das diesen Anforderungen gerecht wird.

Das im sechsten Kapitel entwickelte Prozessmodell wird in Kapitel 7 exemplarisch konkretisiert. Mit dem *Mathematischen Grundwissen und Grundkönnen* wird ein Konzept entwickelt, das – innerhalb der in Kapitel 6 aufgezeigten Grenzen – aus theoriegeleiteten Ansätzen hervorgeht. Die einzelnen Schritte des Prozessmodells werden unter dem Einfluss

einer vorwiegend fachsystematischen Perspektive beispielhaft durchlaufen. Der Prozessschritt der Inhaltsbestimmung wird dabei durch den Rückgriff auf die Expertise von zwei bestehenden Mindeststandardkonzepten deutlich verkürzt. Zur Diagnose des am Ende der Sekundarstufe II verfügbaren Grundwissens und Grundkönnens wird ein konkretes Diagnoseinstrument mit inhaltlichem Schwerpunkt auf der Leitidee des ‚Funktionalen Zusammenhangs‘ entwickelt und bezüglich ausgewählter, in erster Linie das *Elementarisierende Testen* betreffender Fragestellungen empirisch erprobt. Die Erprobung wird methodisch beschrieben und die gewonnenen Ergebnisse werden vorgestellt und diskutiert.

In Kapitel 8 erfolgt schließlich eine Zusammenfassung der Arbeit. Daran schließt sich in Kapitel 9 eine kritische Reflexion der erzielten Ergebnisse an. Ihr Mehrwert für die mathematikdidaktische Forschung wird herausgestellt und in einem Ausblick werden mögliche, sich an diese Arbeit anschließende Fragestellungen diskutiert.

## 2.3 Verortung der Arbeit

Bei der vorliegenden Arbeit handelt es sich um eine vorwiegend theoretische Arbeit, die sich in begrenztem Umfang empirischer Forschungsmethoden zur explorativen Untersuchung des auf theoretischer Grundlage entwickelten Testverfahrens bedient. Für eine globale Verortung der vorgenommenen Theorieentwicklung wird die begriffliche Differenzierung von Theorien anhand ihrer Funktion in der mathematikdidaktischen Forschung nach Prediger (2010, 2015) verwendet. Eine lokale Verortung einzelner Elemente theoretischer und empirischer Forschung erfolgt schließlich in Anlehnung an Mayring (2007) und Prediger (2015).

### *Globale Verortung der Theoriebildung*

Die in Kapitel 1 beschriebene Doppelrolle der Fachdidaktik im Prozess der Konzeptualisierung von Mindeststandards findet sich in verallgemeinerter Form in der Unterscheidung von Vordergrund- und Hintergrundtheorien der mathematischen Fachdidaktik, die Prediger (2010, 2015) vornimmt, wieder.

Theorien, die die „beforschten Phänomenbereiche durchdringen und Handlungsorientierungen für die Unterrichtspraxis bieten“ (Prediger, 2015, S. 648), kategorisiert Prediger als Vordergrundtheorien. Sie sind Ergebnisse von Forschung, mit denen Unterrichtsprozesse beschrieben, erklärt, verstanden und prognostiziert werden können. Gleichzeitig bieten sie einen Handlungsrahmen für den Mathematikunterricht und seine

Gestaltung (Prediger, 2010, S. 170). Prediger bezeichnet diese Theorien auch als „Theorien *in* Mathematikdidaktik“ (Prediger, 2015, S. 648, Hervorh. im Original) und grenzt sie von „Theorien *über* Mathematikdidaktik“ (ebd., Hervorh. im Original), den sogenannten Hintergrundtheorien ab. Diese stellen Rahmenbedingungen für die mathematikdidaktische Forschung bereit und bieten sowohl explizite als auch implizite Orientierungen für Forschungs- und Entwicklungsprozesse.

Im Prozess der Konzeptualisierung von Mindeststandards treten Theorien in beiden Funktionen auf. Der Verlauf der Theorieentwicklung in dieser Arbeit macht das deutlich: Die Tätigkeitstheorie dient zunächst als Hintergrundtheorie. Aus ihren – z.T. für den Zweck dieser Arbeit weiterentwickelten – Begrifflichkeiten und Konstrukten (Kap. 5) wird eine Theorie zur Konzeptualisierung von Mindeststandards (Kap. 6) abgeleitet. Die entwickelte Theorie ist zunächst eine Vordergrundtheorie, im Sinne einer Theorie, die als Beschreibungsmittel dient. Mit ihrem Potential, verschiedene Ansätze zur Konzeption von Mindeststandards in einen theoretischen und lernpsychologisch fundierten Rahmen einzubetten, wird sie unmittelbar auch zur Hintergrundtheorie. Durch die Bereitstellung der entsprechenden Begrifflichkeiten zur Beschreibung der einzelnen Prozessschritte liefert sie die notwendigen Rahmenbedingungen, um daraus konkrete Mindeststandardkonzepte als resultierende Vordergrundtheorien abzuleiten. Die daraus ableitbaren Konzepte, so beispielsweise das in Kapitel 7 entwickelte Konzept des *Grundwissens und Grundkönnens*, stehen im unmittelbaren Bezug zu den Phänomenen des Mathematikunterrichts. Wie für Vordergrundtheorien charakteristisch können mit ihrer Hilfe Unterrichtsprozesse beschrieben, erklärt, verstanden und prognostiziert werden. Auf diese Weise bieten sie einen entsprechenden Handlungsrahmen für den Unterricht und seine Gestaltung (vgl. Prediger, 2010, S. 170).

### *Lokale Verortung theoretischer und empirischer Elemente*

Im Einzelnen lassen sich die in dieser Arbeit entwickelten Theorieelemente nach Prediger (2015) folgendermaßen verorten:

Die in Teil II (Kap. 3-6) der Arbeit entwickelten Theorieelemente lassen sich in erster Linie als *präskriptiv* charakterisieren. Es wird das globale Ziel der Konzeptualisierung und Diagnose von Mindeststandards verfolgt und aus der Hintergrundtheorie werden adäquate Mittel zur Erreichung dieses Ziels entwickelt. Lokal betrachtet werden mit dem Ziel, handlungsleitende Prinzipien für einzelne Prozessschritten herauszuarbeiten, geeignete Mittel beschrieben. So wird beispielsweise in Kapitel

6.4 nach geeigneten Konstruktionsprinzipien für die Entwicklung von Diagnoseinstrumenten im Mindeststandardbereich gesucht. Die vergleichende Analyse existierender Mindeststandardkonzepte, die in Kapitel 4 vorgenommen und an späterer Stelle (u.a. Kap. 6.3.1.1) weiter ausgeführt wird, umfasst in erster Linie *deskriptive Theorieelemente* bzw. mit der Entwicklung von Erklärungsansätzen an einigen Stellen auch *erklärende bzw. verstehende Theorieelemente*.

In Teil III (Kap. 7) der Arbeit, in dem der entwickelte theoretische Rahmen exemplarisch konkretisiert wird, treten durch die notwendigen normativen Setzungen (beispielsweise hinsichtlich Zielsetzung und Definition) zu den präskriptiven Theorieelementen *normative Theorieelemente* hinzu. Diese geben für die sich anschließende inhaltliche Konkretisierung und Operationalisierung spezifische Ziele vor, denen wiederum die Entwicklung *präskriptiver Theorieelemente* folgt.

Mit dem im letzten Schritt des beschriebenen Prozesses entwickelten Diagnoseverfahren des *Elementarisierenden Testens*, das auf inhaltlicher Ebene adaptive Elementarisierungen vornimmt, wird Neuland in der mathematikdidaktischen Forschung betreten. Aus diesem Grund werden einige konkrete, nach diesem Verfahren entwickelte Testbausteine empirisch explorativ untersucht, sodass sich am Ende der Arbeit ein empirischer Teil mit der Beschreibung dieser Erprobung anschließt (Kap. 7.6.2). Die Erprobung umfasst im Sinne eines mixed-method-Ansatzes sowohl qualitative als auch quantitative Untersuchungsdesigns, die jedoch alle mit dem Ziel der Hypothesengenerierung eingesetzt werden und damit explorative Studien darstellen (Mayring, 2007, S. 4). Hierzu werden einerseits im Rahmen diagnostischer Interviews (qualitative) Einzelfallvergleiche durchgeführt, andererseits aber auch quantitative Zusammenhangs- und Kausalanalysen eingesetzt. Da auch letztere dem Generieren von Hypothesen dienen, sind sie an dieser Stelle ebenfalls den explorativen Studien zuzuordnen.

Konzeptualisierung und Diagnose von mathematischem  
Grundwissen und Grundkönnen

Eine theoretische Betrachtung und exemplarische  
Konkretisierung am Ende der Sekundarstufe II

Feldt-Caesar, N.

2017, XIV, 367 S. 38 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-17372-2