

# Regelungstechnik für Ingenieure

Analyse, Simulation und Entwurf von Regelkreisen

Bearbeitet von  
Serge Zacher, Manfred Reuter

15., korrigierte Auflage 2017. Buch. XVIII, 515 S. Softcover

ISBN 978 3 658 17631 0

Format (B x L): 16,8 x 24 cm

Gewicht: 891 g

[Weitere Fachgebiete > Technik > Maschinenbau Allgemein](#)

Zu [Inhaltsverzeichnis](#)

schnell und portofrei erhältlich bei

  
DIE FACHBUCHHANDLUNG

Die Online-Fachbuchhandlung beack-shop.de ist spezialisiert auf Fachbücher, insbesondere Recht, Steuern und Wirtschaft. Im Sortiment finden Sie alle Medien (Bücher, Zeitschriften, CDs, eBooks, etc.) aller Verlage. Ergänzt wird das Programm durch Services wie Neuerscheinungsdienst oder Zusammenstellungen von Büchern zu Sonderpreisen. Der Shop führt mehr als 8 Millionen Produkte.

## 2 Mathematische Behandlung von Regelkreisen

Von den Praktikern wird die genaue Beschreibung einer Strecke gern etwas gering-schätzig bewertet mit dem Argument, dass die mathematischen Methoden kompliziert sind und an der Realität vorbeigehen. Jedoch lassen sich die Kennwerte einer Strecke, z. B. eines chemischen Prozesses, experimentell ermitteln und mit Hilfe der Theorie sinnvoll einordnen.

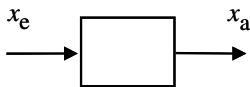
Anliegen der Regelungstheorie ist es, die Zusammenhänge im Regelkreis zu erfassen und gegebenenfalls gezielt einzugreifen. Man kennt im voraus die Wirkung eines Regelparameters, ohne auf bloßes Probieren angewiesen zu sein.

### 2.1 Beharrungszustand und Zeitverhalten eines Regelkreisgliedes

Wir haben in den vorangegangenen Betrachtungen gesehen, dass wir den *Regelkreis* im Wirkungsplan darstellen können und haben diesen in zwei Hauptblöcke unterteilt:

- Die *Regelstrecke*
- Die *Regeleinrichtung*.

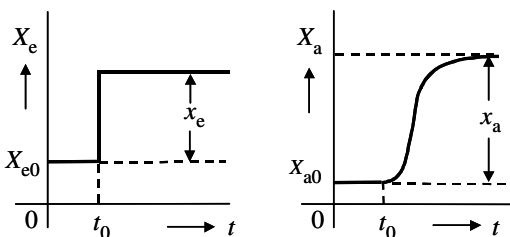
Jeder dieser Blöcke lässt sich nun wieder in einzelne rückwirkungsfreie Glieder zerlegen. Jedes dieser gerichteten Glieder hat einen Ein- und einen Ausgang. Rückwirkungsfrei bedeutet, dass das Signal das Glied nur vom Eingang zum Ausgang durchlaufen kann, nicht in umgekehrter Richtung (**Bild 2.1**).



**Bild 2.1** Blocksymbol eines Regelkreisgliedes

Man unterscheidet zwischen dem Beharrungszustand (statisches Verhalten) und dem Zeitverhalten (dynamisches Verhalten). Ist der Eingang  $X_e$  konstant, so ist bei proportionalen Systemen das Ausgangssignal  $X_a$  auch konstant. Nach einer Änderung der Eingangsgröße stellt sich normalerweise nach einer bestimmten Zeit auch eine konstante Ausgangsgröße ein, wie beispielsweise im **Bild 2.2** gezeigt ist.

Möglich ist es auch, dass ein Beharrungszustand überhaupt nicht erreicht werden kann. Dann ist das Regelkreisglied *ohne Ausgleich* bzw. *instabil*.



**Bild 2.2** Zeitverhalten eines Regelkreisgliedes

Die Zusammenhänge zwischen den Signalen im Beharrungszustand werden mit Hilfe von *statischen Kennlinien* bzw. Funktionen  $X_a = f(X_e)$  beschrieben.

Die stationären Ein- und Ausgangsgrößen im Arbeitspunkt eines Regelkreisgliedes werden als  $X_{e0}$  und  $X_{a0}$  bezeichnet. Bei der Untersuchung des statischen Verhaltens werden wir uns auf kleine Abweichungen  $\Delta X_e$  und  $\Delta X_a$  von einem Arbeitspunkt beschränken, da ein betriebsfähiger Regler nur kleine Abweichung in einem Regelkreis zulässt. Dabei ist es zweckmäßig, die kleinen Abweichungen  $\Delta X_e$  und  $\Delta X_a$  einfach durch die kleinen Buchstaben  $x_e$  und  $x_a$  zu bezeichnen.

Die Augenblickswerte setzen sich damit aus den stationären Arbeitspunktswerten und den zeitabhängigen Abweichungen zusammen:

$$X_e(t) = X_{e0} + x_e(t)$$

$$X_a(t) = X_{a0} + x_a(t).$$

Im Weiteren werden wir lediglich die Kleinschreibung benutzen, da die Untersuchungen nur für die Abweichungen von einem Arbeitspunkt durchgeführt werden.

In einem Regelkreis spielt neben dem *statischen* Verhalten das *dynamische* Verhalten eine wesentliche Rolle, somit auch das dynamische Verhalten der einzelnen Glieder. Maßgebend sind hierbei die Augenblickswerte  $x_e(t)$  und  $x_a(t)$  sowie deren zeitliche Ableitungen  $\dot{x}_e(t)$ ;  $\ddot{x}_e(t)$  ... und  $\dot{x}_a(t)$ ;  $\ddot{x}_a(t)$  ...

Gleichungen, die den statischen und dynamischen Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsgröße beschreiben, sind gewöhnliche, lineare Differentialgleichungen von der allgemeinen Form:

$$\begin{aligned} & \dots + a_3 \ddot{x}_a(t) + a_2 \dot{x}_a(t) + a_1 \dot{x}_a(t) + a_0 x_a(t) \\ & = b_0 x_e(t) + b_1 \dot{x}_e(t) + b_2 \ddot{x}_e(t) + b_3 \ddot{x}_e(t) + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

Die Ein- und Ausgangsgrößen sowie die konstanten Beiwerte  $a_0, a_1, \dots, a_n$  und  $b_0, b_1, \dots, b_m$  sind im Allgemeinen dimensionsbehaftet.

Die DGL der allgemeinen Form kann in die *regelungstechnische Normalform* gebracht werden, indem man:

- Die Ausgangsgrößen bzw. deren Ableitungen auf die linke DGL-Seite stellt
- Die Ausgangsgröße bzw. deren 0. Ableitung koeffizientfrei lässt.

Als Beispiel ist unten eine DGL 2.Ordnung gezeigt

$$a_2 \ddot{x}_a(t) + a_1 \dot{x}_a(t) + a_0 x_a(t) = b_1 \dot{x}_e(t) + b_0 x_e(t),$$

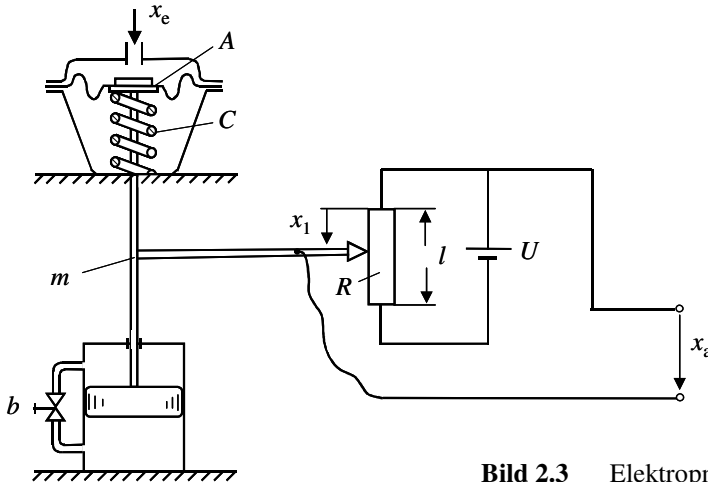
die durch Division mit  $a_0$  auf regelungstechnische Normalform gebracht wird:

$$\frac{a_2}{a_0} \ddot{x}_a(t) + \frac{a_1}{a_0} \dot{x}_a(t) + x_a(t) = \frac{b_1}{a_0} \dot{x}_e(t) + \frac{b_0}{a_0} x_e(t).$$

## 2.2 Das Aufstellen der Differentialgleichung

Bei der Aufstellung der Differentialgleichung eines Systems muss man die physikalischen Gesetze anwenden, denen das System unterliegt, so z. B. die mechanischen, hydraulischen, pneumatischen, elektrischen Gesetze usw.

### • Beispiel 2.1



**Bild 2.3** Elektropneumatischer Wandler

Die Eingangsgröße  $x_e$  eines elektropneumatischen Wandlers (**Bild 2.3**) ist der Luftdruck über dem Membranteller mit der Fläche  $A$ . Dieser erzeugt eine Kraft

$$F = A x_e .$$

Infolge dieser Kraft wird die Kolbenstange um  $x_1$  nach unten bewegt. Dadurch wird die Feder um  $x_1$  zusammengedrückt und erzeugt die Gegenkraft  $F_c = c x_1$ . Außerdem ist eine Dämpfungseinrichtung vorgesehen.

Bewegt sich der Kolben nach unten, so muss er die unter dem Kolben befindliche Ölmenge über die Umweg-Leitung mit dem Drosselventil nach oben fördern. Die Kraft, die dazu notwendig ist, ist proportional der Geschwindigkeit, mit der sich der Kolben nach unten bewegt:

$$F_k = b \dot{x}_1 .$$

Ferner sind die bewegten Teile mit einer Masse  $m$  behaftet, so dass eine weitere Gegenkraft entsteht:  $F_m = m \ddot{x}_1$ .

Nun muss in jedem Augenblick die Summe aller Kräfte gleich Null sein. Daraus folgt:

$$m \ddot{x}_1 + b \dot{x}_1 + c x_1 = A x_e . \quad (2.2)$$

Zwischen  $x_1$  und  $x_a$  besteht die Proportionalität

$$\frac{U}{l} = \frac{x_a}{x_1} , \text{ daraus folgt } x_1 = \frac{l}{U} x_a . \quad (2.3)$$

Setzen wir Gl. (2.3) in Gl. (2.2) ein, so erhalten wir

$$\frac{m \cdot l}{U} \ddot{x}_a + \frac{b \cdot l}{U} \dot{x}_a + \frac{c \cdot l}{U} x_a = A x_e. \quad (2.4)$$

Durch Vergleich mit der allgemeinen Form der DGL (2.1) finden wir die Beiwerte:

$$b_0 = A \text{ in } [\text{cm}^2], \quad a_0 = \frac{c \cdot l}{U} \text{ in } [\text{N/V}], \quad a_1 = \frac{b \cdot l}{U} \text{ in } [\text{Ns/V}], \quad a_2 = \frac{m \cdot l}{U} \text{ in } [\text{Ns}^2/\text{V}].$$

Dividiert man Gl. (2.4) durch den Faktor  $c \cdot l / U$ , so folgt eine andere Art der Darstellung

$$\frac{m}{c} \ddot{x}_a(t) + \frac{b}{c} \dot{x}_a(t) + x_a(t) = \frac{A \cdot U}{c \cdot l} x_e(t),$$

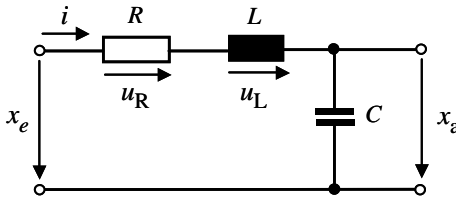
bzw. mit den Abkürzungen:

$$K = \frac{A \cdot U}{c \cdot l}; \quad T_1 = \frac{b}{c}; \quad T_2^2 = \frac{m}{c};$$

$$T_2^2 \ddot{x}_a(t) + T_1 \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K x_e(t). \quad (2.5)$$

$T_1$  und  $T_2$  haben die Dimension einer Zeit und sind die so genannten Zeitkonstanten.

### • Beispiel 2.2



**Bild 2.4** Reihenschwingkreis

Eingangsgröße des in **Bild 2.4** gezeigten Reihenschwingungskreises ist die Spannung  $x_e$  und Ausgangsgröße ist die Spannung über dem Kondensator  $x_a$ . Nach dem 2. Kirchhoffschen Satz ist die Summe aller Spannungen in einer Masche gleich Null.

$$x_e = u_R + u_L + x_a. \quad (2.6)$$

Der Spannungsabfall am Widerstand ergibt sich zu  $u_R = i R$ . Nach dem Induktionsgesetz ist  $u_L = L di/dt$ . Ferner ist der Ladestrom  $i$  proportional der Spannungsänderung am Kondensator  $i = C dx_a/dt$ . Diese Beziehungen in die Gl. (2.6) eingesetzt ergibt:

$$x_e(t) = x_a(t) + R C \dot{x}_a(t) + L C \ddot{x}_a(t).$$

Auch hier können wir die folgenden Zeitkonstanten einführen:  $T_1 = R C$  und  $T_2^2 = L C$ . Somit folgt:

$$T_2^2 \ddot{x}_a(t) + T_1 \dot{x}_a(t) + x_a(t) = x_e(t). \quad (2.7)$$

Man erkennt leicht, dass der Aufbau der beiden DGL (2.5) und (2.7), abgesehen vom Faktor  $K$ , übereinstimmt. Beide Systeme verhalten sich analog.

## 2.3 Lösung der Differentialgleichung

Mit der gefundenen Differentialgleichung kann man noch nicht allzuviel anfangen. Es interessiert der zeitliche Verlauf der Ausgangsgröße  $x_a(t)$ , wenn die Eingangsgröße  $x_e(t)$  einen bestimmten zeitlichen Verlauf annimmt. Um die Differentialgleichung mit der Störfunktion  $x_e(t)$  lösen zu können, muss diese genau bekannt sein.

Als Eingangsfunktionen benutzt man spezielle Signale, die leicht realisierbar und vergleichbar sind. Die Eingangsfunktionen werden auch in der Praxis zur experimentellen Ermittlung des zeitlichen Verlaufs des Ausgangssignals angewandt.

Ist das Übergangsverhalten für eine spezielle Eingangsfunktion bekannt, so lässt sich daraus das Zeitverhalten bei jeder beliebigen Eingangsfunktion ermitteln.

### 2.3.1 Spezielle Eingangsfunktionen

#### a) Die Sprungfunktion

Sowohl für theoretische Untersuchungen als auch als praktische Testfunktion hat die Sprungfunktion als Eingangserregung eine große Bedeutung. Sie ist definiert durch

$$x_e(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ x_{e0} = \text{const} & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

Der Verlauf einer solchen Sprungfunktion ist in **Bild 2.5** wiedergegeben.

Vielfach wird die Höhe des Eingangssprungs auf den Wert Eins normiert und als Einheitssprung  $\sigma(t)$  bezeichnet:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

Wegen der einfacheren Schreibweise wird im Folgenden die Sprungfunktion durch

$$x_e(t) = x_{e0} \cdot \sigma(t)$$

ausgedrückt.

In **Bild 2.5** (links) sind der ideale und der technisch realisierbare Verlauf (gestrichelt) gezeigt.



**Bild 2.5** Sprungfunktion (links) und Anstiegsfunktion (rechts)

Eine ideale Sprungfunktion, d. h. eine physikalische Größe, die sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  in unendlich kurzer Zeit um einen endlichen Betrag ändert, ist technisch nicht realisierbar.

Mit den elektronischen Bauelementen kommt man zu Anstiegszeiten, die kleiner als eine Nanosekunde sind. Bei anderen physikalischen Größen (Druck, Temperatur usw.) liegen die Zeitkonstanten z. T. wesentlich höher.

### b) Die Anstiegs- oder Rampenfunktion

Wie **Bild 2.5** (rechts) zeigt, steigt  $x_e(t)$  bei Null beginnend, linear mit der Zeit an

$$x_e(t) = K_{e0} \cdot t \cdot \sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ K_{e0} \cdot t & \text{für } t > 0, \end{cases}$$

wobei  $K_{e0} = \frac{dx_e(t)}{dt}$  die konstante Änderungsgeschwindigkeit des Eingangssignals ist. Der zeitliche Verlauf der Ausgangsgröße bei einer Anstiegsfunktion am Eingang wird als Anstiegsantwort bezeichnet.

### c) Die Impulsfunktion ( $\delta$ -Funktion)

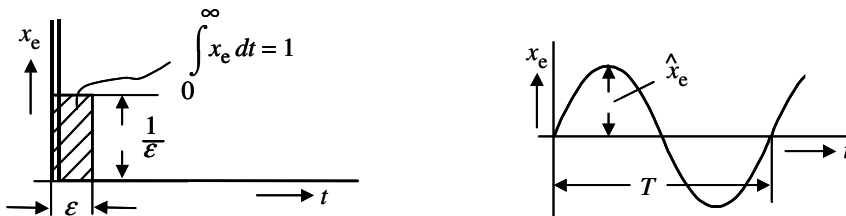
Die ideale Impulsfunktion zeigt zum Zeitpunkt  $t = 0$  einen Sprung ins Unendliche und ist gleich Null für  $t \neq 0$  (**Bild 2.6**, links).

$$x_e(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \infty & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Diese Funktion kann man sich aus einem rechteckförmigen Impuls der Breite  $\varepsilon$  und der Höhe  $1/\varepsilon$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ , mit der Zeitfläche  $1^1$ , entstanden denken. Zwischen der  $\delta$ -Funktion und dem Einheitssprung  $\sigma(t)$  besteht der Zusammenhang

$$\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}.$$

Der zeitliche Verlauf des Ausgangssignals bei einer Impulsfunktion am Eingang ist die Impulsantwort oder die Gewichtsfunktion  $g(t)$ .



**Bild 2.6** Impulsfunktion (links) und Sinusfunktion (rechts)

<sup>1</sup> Für praktische Untersuchungen, z. B. mit einem Impulsgenerator, hat die Impulsfläche die Dimension der Amplitude multipliziert mit der Zeit (Vs, As usw.).

Technisch kann die Impulsfunktion nur mit endlicher Dauer und Höhe realisiert werden. Die Anwendung einer Sprungfunktion über einen längeren Zeitraum stellt einen massiven, manchmal unzulässigen Eingriff dar. Ein kurzzeitiger Impuls hat den Vorteil, dass die durch ihn verursachte Beeinträchtigung verhältnismäßig gering ist.

#### d) Die sinusförmige Eingangsgröße

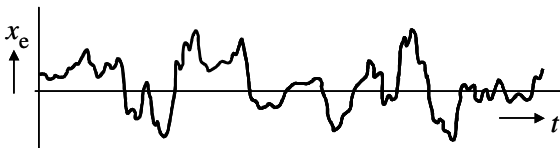
Neben der Sprungfunktion zur Untersuchung von Regelkreisgliedern hat die Methode durch sinusförmige Eingangserregung eine große Bedeutung. Die Sinusschwingung (**Bild 2.6**, rechts) hat den zeitlichen Verlauf

$$x_e(t) = \hat{x}_e \sin \omega t,$$

wobei  $\hat{x}_e$  die Schwingungsamplitude und  $\omega = 2\pi f$  die Kreisfrequenz ist, mit  $f$  als Frequenz. Die Schwingungsperiode ist  $T = 1/f$ .

#### e) Die stochastische Eingangsgröße

Der Vollständigkeit halber sei eine weitere Zeitfunktion erwähnt, die allerdings im Rahmen dieses Buches keine Berücksichtigung findet. Die unter a) bis d) genannten deterministischen Eingangssignale sind vielfach zur Identifikation ungeeignet. Man benutzt statt dessen die immer vorhandenen stochastischen, d. h. regellos verlaufenden, Störsignale (**Bild 2.7**), wie z. B. das Rauschen in elektronischen Geräten oder die Stromschwankungen in einer der Elektroden eines Lichtbogenofens während des Einschmelzvorganges.



**Bild 2.7** Typischer Verlauf eines stochastischen Signals

Meistens sind die stochastischen Signale klein gegenüber den Betriebswerten. Die Beurteilung, Verknüpfung und Auswertung der Ein- und Ausgangssignale erfolgt mittels statistischer Methoden.

Stochastische Signale mit einer Gaußschen Amplitudenverteilung spielen vergleichsweise eine ähnlich fundamentale Rolle, wie sinusförmige Signale bei deterministischer Betrachtungsweise.

### 2.3.2 Lösung der Differentialgleichung bei sprunghafter Verstellung der Eingangsgröße

Die am häufigsten in der Regelungstechnik angewandte Eingangsfunktion ist die *Sprungfunktion*. Setzt man die Sprungfunktion als Störfunktion in die Differentialgleichung ein und löst die DGL nach  $x_a(t)$  auf, so erhält man mit  $x_a(t)$  die so genannte Sprungantwort.



In den Beispielen 2.1 und 2.2 hatten wir folgende DGL gefunden:

$$T_2^2 \ddot{x}_a(t) + T_1 \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K x_e(t).$$

Vereinfachend wollen wir annehmen, dass die Zeitkonstante  $T_2$  sehr klein sei, und damit das Glied  $T_2^2 \ddot{x}_a(t)$  vernachlässigbar. Dies wäre z. B. der Fall, wenn die Masse  $m$  im Beispiel 2.1 bzw. die Induktivität  $L$  in Beispiel 2.2 sehr klein bzw. Null wäre.

Die so erhaltene Differentialgleichung 1. Ordnung

$$T_1 \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K x_e(t) \quad (2.8)$$

bzw. für  $t > 0$

$$T_1 \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K x_{e0} \quad (2.9)$$

wollen wir nun auf verschiedene Arten lösen.

### 2.3.3 Lösung der Differentialgleichung durch Trennen der Veränderlichen

Aus Gl. (2.9) findet man durch Umstellen nach  $dx_a/dt$

$$\frac{dx_a}{dt} = \frac{1}{T_1} (K x_{e0} - x_a) \quad \text{und} \quad \frac{dx_a}{K x_{e0} - x_a} = \frac{dt}{T_1}.$$

Durch Integration beider Seiten folgt:

$$\int \frac{dx_a}{K x_{e0} - x_a} = \int \frac{dt}{T_1} \quad \text{bzw.} \quad -\ln(K x_{e0} - x_a) + C = \frac{t}{T_1}. \quad (2.10)$$

Unter der Annahme, dass die Ausgangsgröße  $x_a(t)$  des Systems für  $t = 0$  Null ist, ergibt sich die Integrationskonstante  $C$  aus (2.10) mit der Anfangsbedingung  $x_a(0) = 0$ .

Dies wiederum in Gleichung (2.10) eingesetzt, ergibt

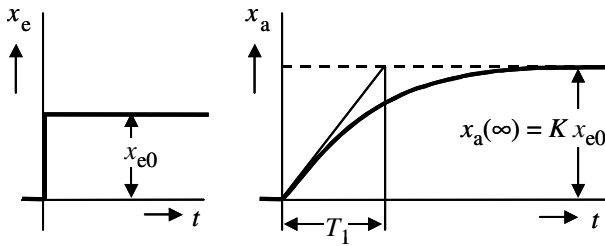
$$-\ln(K x_{e0} - x_a) + \ln(K x_{e0}) = \frac{t}{T_1} \quad \text{bzw.} \quad \ln\left(1 - \frac{x_a}{K x_{e0}}\right) = -\frac{t}{T_1}$$

und nach  $x_a$  aufgelöst:

$$1 - \frac{x_a}{K x_{e0}} = e^{-\frac{t}{T_1}},$$

$$x_a(t) = K x_{e0} \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right). \quad (2.11)$$

Der Eingangssprung und die Sprungantwort haben dann den in **Bild 2.8** dargestellten zeitlichen Verlauf.



**Bild 2.8** Sprungfunktion und Sprungantwort

Die Kurve  $x_a(t)$  hat für  $t = 0$  die größte Steigung. Legt man an die Kurve  $x_a(t)$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  die Tangente, so schneidet diese den Beharrungswert  $x_a(\infty)$  für  $t = T_1$ . Der Verlauf der Sprungantwort ist durch die Zeitkonstante  $T_1$  und den Übertragungsbeiwert  $K$  eindeutig bestimmt.

### 2.3.4 Lösung der Differentialgleichung durch geeigneten Ansatz

Die vorangegangene Lösungsmethode bestand darin, dass die Veränderlichen getrennt und anschließend integriert wurden. Dieser Weg ist nur bei DGL 1. und 2. Ordnung möglich. Bereits bei einer DGL 2. Ordnung ist der Aufwand ziemlich umfangreich, weil zunächst die Ordnung reduziert werden muss.

#### a) Lösung der homogenen Differentialgleichung

Bei der Lösung der Differentialgleichung (2.8)

$$T_1 \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K x_e(t)$$

nach der jetzt zu besprechenden Methode, wird zunächst die homogene Differentialgleichung gelöst, d. h. das Störglied  $K x_e(t)$  wird Null gesetzt:

$$T_1 \dot{x}_a(t) + x_a(t) = 0. \quad (2.12)$$

Unabhängig von der Ordnung der DGL macht man nun generell den Ansatz:

$$x_a(t) = e^{\lambda t}.$$

Es wird deshalb eine  $e$ -Funktion gewählt, weil die Ableitung einer  $e$ -Funktion ebenfalls wieder eine  $e$ -Funktion ergibt.

Wir setzen nun  $x_a(t) = e^{\lambda t}$  und  $\dot{x}_a(t) = \lambda e^{\lambda t}$  in die Gl. (2.12) ein und bestimmen den  $\lambda$ -Wert so, dass die Gleichung erfüllt ist:

$$\lambda e^{\lambda t} T_1 + e^{\lambda t} = 0 \text{ und dann } (\lambda T_1 + 1) e^{\lambda t} = 0.$$

Dies ist der Fall für  $(\lambda T_1 + 1) = 0$ , bzw.  $\lambda = -\frac{1}{T_1}$ . Daraus folgt, dass der gewählte

Ansatz mit  $\lambda = -1/T_1$  eine Lösung der homogenen DGL ist.

Wie man sich leicht durch Einsetzen überzeugen kann, erfüllt auch der Ansatz

$$x_a(t) = C_1 e^{\lambda t} \quad (2.13)$$

die homogene Differentialgleichung.

Nun ist aber die zu lösende Differentialgleichung (2.8) nicht homogen, sondern mit einem Störglied  $Kx_e(t)$  behaftet.

***b) Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch die Methode der Variation der Konstanten nach Lagrange***

Die Methode der Variation der Konstanten besteht darin, dass die Konstante  $C_1$ , in der Lösung der homogenen Differentialgleichung (2.13) durch eine Funktion  $C_1(t)$  ersetzt wird. Setzt man den modifizierten Ansatz

$$x_a(t) = C_1(t) e^{-\frac{t}{T_1}} \quad (2.14)$$

in die inhomogene Differentialgleichung (2.8) ein, so folgt:

$$T_1 \left( \dot{C}_1(t) e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{1}{T_1} C_1(t) e^{-\frac{t}{T_1}} \right) + C_1(t) e^{-\frac{t}{T_1}} = K x_e(t) \quad \text{bzw.}$$

$$T_1 \dot{C}_1(t) e^{-\frac{t}{T_1}} = K x_e(t).$$

Nach  $\dot{C}_1(t)$  aufgelöst ergibt:

$$\dot{C}_1(t) = \frac{K}{T_1} x_e(t) e^{+\frac{t}{T_1}}.$$

Durch Integration zwischen den Grenzen  $\tau = 0$  und  $\tau = t$  erhält man:

$$\int_0^t \dot{C}_1(\tau) d\tau = \frac{K}{T_1} \int_0^t x_e(\tau) e^{\frac{\tau}{T_1}} d\tau.$$

Nach dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung ist

$$C_1(t) - C_1(0) = \frac{K}{T_1} \int_0^t x_e(\tau) e^{\frac{\tau}{T_1}} d\tau \quad \text{bzw.}$$

$$C_1(t) = C_1(0) + \frac{K}{T_1} \int_0^t x_e(\tau) e^{\frac{\tau}{T_1}} d\tau. \quad (2.15)$$

(2.15) in (2.14) eingesetzt, führt zu

$$x_a(t) = C_1(0) e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{K}{T_1} \int_0^t x_e(\tau) e^{-\frac{\tau-t}{T_1}} d\tau.$$

Unter Berücksichtigung einer allgemeinen Anfangsbedingung  $x_a(0)$  für  $t = 0$  folgt

$$x_a(0) = C_1(0).$$

Somit lautet die vollständige Lösung:

$$x_a(t) = x_a(0) e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{K}{T_1} \int_0^t x_e(\tau) e^{-\frac{\tau-t}{T_1}} d\tau.$$

Die Ausgangsgröße setzt sich aus zwei Termen zusammen. Der erste Term berücksichtigt die Abhängigkeit von der Anfangsbedingung, der zweite Term ist die Reaktion der Ausgangsgröße auf die Eingangsgröße.

Wählen wir wieder die Anfangsbedingung  $x_a(0) = 0$  und als Eingangsgröße die Sprungfunktion

$$x_e(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ x_{e0} = \text{const} & \text{für } t > 0, \end{cases}$$

so wird

$$x_a(t) = \frac{K}{T_1} x_{e0} e^{-\frac{t}{T_1}} \int_0^t e^{\frac{\tau}{T_1}} d\tau$$

und damit

$$x_a(t) = K x_{e0} (1 - e^{-\frac{t}{T_1}}). \quad (2.16)$$

Dieses Ergebnis ist identisch mit dem zuvor gefundenen (2.11).

### 2.3.5 Lösung mittels Laplace-Transformation. Die Übertragungsfunktion

Bei linearen Systemen ist es vorteilhaft, die Lösung von Differentialgleichungen nicht im Zeitbereich, sondern mittels Laplace-Transformation vorzunehmen.

Gemäß der Laplace-Transformation erhält man für die einzelnen DGL-Glieder unter der Voraussetzung, dass die Anfangsbedingung Null ist, folgende Laplace-Transformierten:

$$L [x(t)] = x(s)$$

$$L [\dot{x}(t)] = s \cdot x(s)$$

$$L [\ddot{x}(t)] = s^2 \cdot x(s)$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$L \left[ \int x(t) dt \right] = \frac{1}{s} \cdot x(s).$$

Beispielsweise treten in der DGL (2.8) an die Stelle der Glieder im Zeitbereich nun die Ein-/Ausgangsgrößen im Bildbereich:

$$\begin{array}{ccccc} T_1 \dot{x}_a(t) + x_a(t) & = & K x_e(t) \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ T_1 \cdot s \cdot x_a(s) + x_a(s) & = & K x_e(s). \end{array}$$

Die Laplace-Transformierte stellt damit eine algebraische Gleichung dar und lautet:

$$(1 + sT_1) x_a(s) = K x_e(s). \quad (2.17)$$

Allgemein ist das Verhältnis der Laplace-Transformierten Ausgangsgröße zur Laplace-Transformierten Eingangsgröße als Übertragungsfunktion  $G(s)$  definiert, deren enge Beziehung zum Frequenzgang noch besprochen wird. Für die Gl. (2.17) gilt:

$$G(s) = \frac{x_a(s)}{x_e(s)} = \frac{K}{1 + sT_1}.$$

Für die Sprungfunktion  $x_e(t)$  am Eingang (Bild 2.5) ist die Laplace-Transformierte

$$L [x_e(t)] = x_e(s) = \frac{1}{s} x_{e0}.$$

Setzt man diese in die Gleichung (2.17) ein, so folgt

$$x_a(s) = \frac{K}{1 + sT_1} x_e(s) = \frac{K}{1 + sT_1} \cdot \frac{1}{s} x_{e0}.$$

Aus der letzten Beziehung sind die Polstellen, d. h. die Nullstellen des Nenners

$$s(1 + sT_1) = 0 \text{ mit } s_1 = 0 \text{ und } s_2 = -\frac{1}{T_1} \text{ ersichtlich.}$$

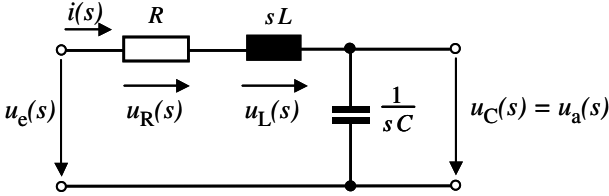
Die Rücktransformation in den Zeitbereich kann mittels Partialbruchzerlegung, Residuensatz oder Korrespondenztabelle erfolgen. Mit  $\alpha = 1/T_1$  folgt aus der Beziehung 5 der Korrespondenztabelle (s. Anhang) sofort

$$x_a(t) = K x_{e0} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right), \quad (2.18)$$

die mit den zuvor gefundenen (2.11) und (2.16) identisch ist.

Im weiteren Verlauf des Buches wird zur Lösung von Differentialgleichungen ausschließlich die Methode der Laplace-Transformation benutzt.

• **Beispiel 2.3**



**Bild 2.9** Darstellung eines Reihenschwingkreises im Bildbereich

Die Spannungen  $u_e$  und  $u_a$  eines Reihenschwingkreises (**Bild 2.9**) werden als Eingangs- und Ausgangsgrößen betrachtet. Es soll der Einschaltvorgang ermittelt werden, wenn die Eingangsspannung bei  $t = 0$  von 0 auf  $u_{e0}$  sprungförmig geändert wird.

Zur Berechnung von Einschaltvorgängen in elektrischen Netzwerken ist es nicht nötig, die DGL wie in Beispiel 2.2 aufzustellen, vielmehr kann man die aus der Theorie der Wechselstromlehre bekannten Regeln in modifizierter Form als Übertragungsfunktionen anwenden.

Nach dem Ohmschen Gesetz gilt für Bild 2.9 im Zeit- und Bildbereich

$$u_R(t) = R \cdot i(t) \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad u_R(s) = R \cdot i(s). \quad (2.19)$$

An der Induktivität (Bild 2.9) sind die Beziehung zwischen zeitlichen und Laplace-Transformierten Strom und Spannung wie folgt gegeben:

$$u_L(t) = L \cdot \dot{i}(t) \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad u_L(s) = s \cdot L \cdot i(s). \quad (2.20)$$

Die Verhältnisse an der Kapazität  $C$  im Zeit- und Bildbereich sind:

$$i(t) = C \cdot \dot{u}_C(t) \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad i(s) = s \cdot C \cdot u_C(s) \text{ bzw. } i(s) = s \cdot C \cdot u_a(s). \quad (2.21)$$

Für die Ausgangsspannung folgt die Laplace-Transformierte aus dem 2. Kirchhoffschen Satz:

$$u_e(s) = u_R(s) + u_L(s) + u_a(s). \quad (2.22)$$

Setzen wir nun die Gln. (2.19) und (2.20) in die Gleichung (2.22)

$$u_e(s) = R i(s) + s L i(s) + u_a(s)$$

und ersetzen wir den Strom  $i(s)$  aus der Gl. (2.21) durch  $u_a(s)$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} u_e(s) &= s R C u_a(s) + s^2 L C u_a(s) + u_a(s) \\ L C \cdot s^2 u_a(s) + R C \cdot s u_a(s) + u_a(s) &= u_e(s). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Aus letzter Gleichung folgt nach der Differentiationsregel der Laplace-Transformation die DGL

$$L C \ddot{u}_a(t) + R C \dot{u}_a(t) + u_a(t) = u_e(t).$$

Zur Ermittlung des zeitlichen Verlaufs der Ausgangsgröße bei gegebenem Eingang ist die DGL nicht erforderlich, sondern wird direkt aus Gln. (2.23) in den Zeitbereich zurücktransformiert.

Die Übertragungsfunktion stellt das Verhältnis der Laplace-Transformierten Ausgangsgröße zur Laplace-Transformierten Eingangsgröße dar:

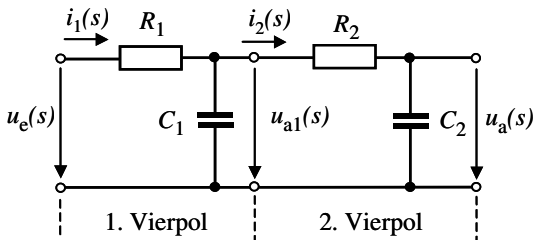
$$G(s) = \frac{u_a(s)}{u_e(s)} = \frac{1}{s^2 L C + s R C + 1}. \quad (2.24)$$

Mit den Abkürzungen  $T_2^2 = L C$  und  $T_1 = R C$  ergibt sich die Normalform der 2. Ordnung

$$G(s) = \frac{u_a(s)}{u_e(s)} = \frac{1}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}. \quad (2.25)$$

### ► Aufgabe 2.1

Eine Kettenschaltung von zwei gleichartigen Vierpolen mit Ein- und Ausgangsgrößen  $u_e(s)$  und  $u_a(s)$  ist im **Bild 2.10** gezeigt.



**Bild 2.10** Kettenschaltung von zwei Vierpolen

Gegeben ist die Übertragungsfunktion der Kettenschaltung

$$G(s) = \frac{u_a(s)}{u_e(s)} = \frac{1}{s^2 T_1 T_2 + s (T_1 + T_2 + T_3) + 1},$$

mit folgenden Zeitkonstanten:

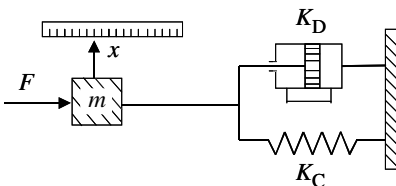
$$T_1 = R_1 C_1 \quad T_2 = R_2 C_2 \quad T_3 = R_1 C_2.$$

Ermitteln Sie  $u_a(t)$  bei dem für  $t = 0$  gegebenen Eingangssprung von der Höhe  $u_{e0}$  mit

$$\begin{aligned} R_1 &= 50 \text{ k}\Omega & C_1 &= 20 \text{ }\mu\text{F} \\ R_2 &= 100 \text{ k}\Omega & C_2 &= 10 \text{ }\mu\text{F} \end{aligned} \quad (\text{Lösung im Anhang})$$

### • Beispiel 2.4

Es soll die Übertragungsfunktion eines Feder-Masse-Dämpfer Systems (**Bild 2.11**) ermittelt werden.



**Bild 2.11** Mechanisches System

Die Eingangsgröße ist die Kraft  $F(t)$ , die Ausgangsgröße ist der Weg  $x(t)$  der Masse  $m$ . Die Wegstrecke  $x(t)$  ist von der Federkraft  $F_C(t)$  und der Dämpfer-Widerstandskraft  $F_D(t)$  abhängig:

$$F_C(t) = K_C x(t) \text{ und } F_D(t) = K_D \dot{x}(t), \quad (2.26)$$

worin  $K_C$  und  $K_D$  die Federkonstante und die Dämpfungskonstante sind.

Aus dem Kräftegleichgewicht

$$m \ddot{x}(t) = F(t) - F_C(t) - F_D(t) \quad (2.27)$$

erhält man die Differentialgleichung des mechanischen Systems, indem man die Gleichungen (2.26) in die Gl. (2.27) einsetzt:

$$m \ddot{x}(t) = F(t) - K_C x(t) - K_D \dot{x}(t).$$

Nach Laplace-Transformation folgt daraus mit den Abkürzungen

$$T_2^2 = \frac{m}{K_C}, \quad T_1 = \frac{K_D}{K_C} \quad \text{und} \quad K = \frac{1}{K_C}$$

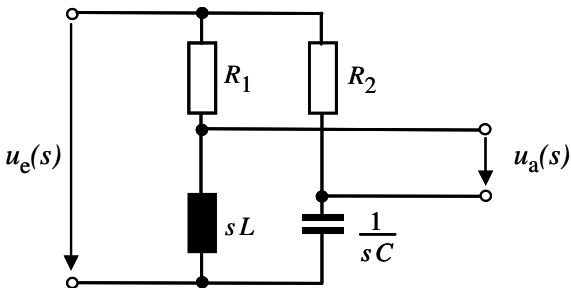
die Übertragungsfunktion 2. Ordnung, die mit Gl. (2.25) identisch ist:

$$G(s) = \frac{x(s)}{F(s)} = \frac{K}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}.$$

### ► Aufgabe 2.2

Gegeben sind das in **Bild 2.12** gezeigte Netzwerk mit  $R$ -,  $C$ - und  $L$ -Elementen sowie die das System beschreibende Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{u_a(s)}{u_e(s)} = \frac{sT_1}{1 + sT_1} - \frac{1}{1 + sT_2} \quad \text{bzw.} \quad G(s) = \frac{s^2 T_1 T_2 - 1}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}.$$



**Bild 2.12** RCL-Brückenschaltung (Allpaßglied)

Die Zeitkonstanten sind durch die folgenden Abkürzungen bezeichnet:

$$T_1 = \frac{L}{R_1} \quad \text{und} \quad T_2 = R_2 C.$$

Die Anfangsbedingungen sind Null. Es ist mit

$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega \quad C = 0,2 \text{ }\mu\text{F}$$

$$R_2 = 100 \text{ k}\Omega \quad L = 1 \text{ H}$$

zu ermitteln:

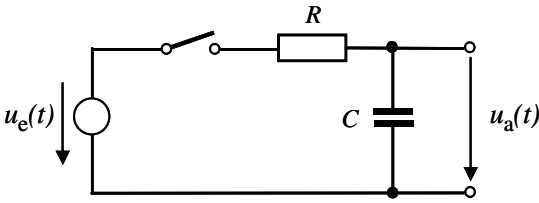


- a) Die Ausgangsspannung  $u_a(t)$  nach einem Einheitssprung der Spannung  $u_e(t) = u_{e0} \cdot \sigma(t)$ .  
 b) Die Werte von  $u_a(t)$  für  $t = 0$  und  $t = \infty$ .

*Hinweis:* Zur Rücktransformation in den Zeitbereich geht man am zweckmäßigsten von dem partialbruchzerlegten Ausdruck aus.

### 2.3.6 Lösung der Differentialgleichung bei sinusförmiger Eingangsgröße

Wie ist der Verlauf der Ausgangsgröße, wenn die Eingangsgröße eine sinusförmige Schwingung ist? Diese Frage soll für das in **Bild 2.13** gezeigte lineare System beantwortet werden.



**Bild 2.13** Zuschalten einer sinusförmigen Spannung auf ein RC-Glied

Die Übertragungsfunktion entspricht den Gln. (2.24) und (2.25) mit  $T_1 = RC$  und ohne Induktivität  $L$  bzw. mit  $T_2 = 0$ :

$$G(s) = \frac{u_a(s)}{u_e(s)} = \frac{1}{1 + s \cdot RC} = \frac{1}{1 + sT_1}. \quad (2.28)$$

Die Anfangsbedingung ist Null. Für die sinusförmige Eingangsfunktion bei  $t > 0$

$$u_e(t) = \hat{u}_e \sin(\omega t + \alpha) = \hat{u}_e \frac{e^{j(\omega t + \alpha)} - e^{-j(\omega t + \alpha)}}{2j}$$

ist die Laplace-Transformierte, gemäß der Beziehung 4 der Korrespondenztabelle

$$u_e(s) = \frac{\hat{u}_e}{2j} \left[ \frac{e^{j\alpha}}{s - j\omega} - \frac{e^{-j\alpha}}{s + j\omega} \right] = \frac{\hat{u}_e}{2j} \cdot \frac{(s + j\omega)e^{j\alpha} - (s - j\omega)e^{-j\alpha}}{(s - j\omega)(s + j\omega)}. \quad (2.29)$$

Mit (2.29) in (2.28) folgt:

$$u_a(s) = \frac{\hat{u}_e}{2jT_1} \cdot \frac{(s + j\omega)e^{j\alpha} - (s - j\omega)e^{-j\alpha}}{(s - j\omega)(s + j\omega)} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}}.$$

In dieser Form sind die drei Pole mit

$$s_1 = j\omega \quad s_2 = -j\omega \quad s_3 = -\frac{1}{T_1}$$

bekannt. Die Rücktransformation in den Zeitbereich erfolgt am zweckmäßigsten mittels des Residuensatzes:

$$u_a(t) = \frac{\hat{u}_e}{2jT_1} \cdot [\text{Res}(s_1) + \text{Res}(s_2) + \text{Res}(s_3)] \quad (2.30)$$

Für die ersten zwei Pole ergeben sich die Residuen

$$\begin{aligned} \text{Res}(s_1) &= \frac{T_1 e^{j\alpha}}{1 + j\omega T_1} e^{j\omega t} \\ \text{Res}(s_2) &= -\frac{T_1 e^{-j\alpha}}{1 - j\omega T_1} e^{-j\omega t}, \end{aligned}$$

die sich wie folgt zusammenfassen lassen:

$$\text{Res}(s_1) + \text{Res}(s_2) = T_1 \frac{(1 - j\omega T_1) e^{j(\omega t + \alpha)} - (1 + j\omega T_1) e^{-j(\omega t + \alpha)}}{1 + (\omega T_1)^2}$$

bzw. durch trigonometrische Funktionen ausgedrückt:

$$\text{Res}(s_1) + \text{Res}(s_2) = \frac{2jT_1}{1 + (\omega T_1)^2} [\sin(\omega t + \alpha) - \omega T_1 \cos(\omega t + \alpha)] . \quad (2.31)$$

Das Residuum des dritten Pols

$$\text{Res}(s_3) = \frac{\left(-\frac{1}{T_1} + j\omega\right) e^{j\alpha} - \left(-\frac{1}{T_1} - j\omega\right) e^{-j\alpha}}{\left(-\frac{1}{T_1} - j\omega\right) \left(-\frac{1}{T_1} + j\omega\right)} e^{-\frac{t}{T_1}}$$

wird vereinfacht

$$\text{Res}(s_3) = -T_1 \frac{(1 - j\omega T_1) e^{j\alpha} - (1 + j\omega T_1) e^{-j\alpha}}{1 + (\omega T_1)^2} e^{-\frac{t}{T_1}}$$

und auch durch trigonometrische Funktionen ausgedrückt:

$$\text{Res}(s_3) = -\frac{2jT_1}{1 + (\omega T_1)^2} [\sin \alpha - \omega T_1 \cos \alpha] e^{-\frac{t}{T_1}} . \quad (2.32)$$

(2.31) und (2.32) in (2.30) eingesetzt, ergibt:

$$u_a(t) = \frac{\hat{u}_e}{1 + (\omega T_1)^2} \left[ \sin(\omega t + \alpha) - \omega T_1 \cos(\omega t + \alpha) - (\sin \alpha - \omega T_1 \cos \alpha) e^{-\frac{t}{T_1}} \right] .$$

Da die Summe bzw. Differenz einer Sinus- bzw. einer Cosinusfunktion, bei gleicher Frequenz, stets wieder eine Sinusschwingung ergibt, kann man für die ersten beiden Terme in der eckigen Klammer schreiben:

$$\sin(\omega t + \alpha) - \omega T_1 \cos(\omega t + \alpha) = A \sin(\omega t + \alpha + \varphi).$$

Hierin ist  $A$  die Schwingungsamplitude und  $\varphi$  der Phasenverschiebungswinkel der resultierenden Schwingung. Mit Hilfe der Additionstheoreme findet man:

$$\sin(\omega t + \alpha + \varphi) = \sin(\omega t + \alpha) \cdot \cos \varphi + \cos(\omega t + \alpha) \cdot \sin \varphi$$

und somit

$$\sin(\omega t + \alpha) - \omega T_1 \cos(\omega t + \alpha) = A [\sin(\omega t + \alpha) \cdot \cos \varphi + \cos(\omega t + \alpha) \cdot \sin \varphi].$$

Setzt man die Glieder mit  $\sin(\omega t + \alpha)$  bzw.  $\cos(\omega t + \alpha)$  beider Seiten gleich, so ergibt sich:

$$A \cos \varphi = 1$$

$$A \sin \varphi = -\omega T_1.$$

Durch Division beider Gleichungen erhält man

$$\tan \varphi = -\omega T_1 \quad (2.33)$$

und durch Quadrieren und Addieren beider Gleichungen

$$A^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 1 + (\omega T_1)^2$$

bzw.

$$A = \sqrt{1 + (\omega T_1)^2}.$$

Somit ergibt sich die endgültige Lösung

$$u_a(t) = \frac{\hat{u}_e}{A} \left[ \sin(\omega t + \alpha + \varphi) - \sin(\alpha + \varphi) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \right].$$

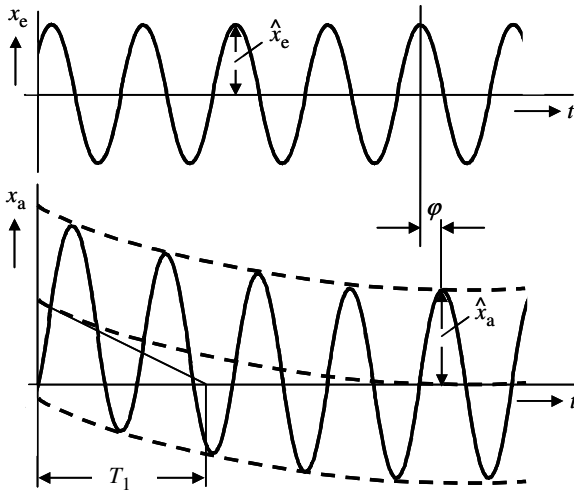
Nach einer Zeit  $t = 5 T_1$  ist das Glied mit dem Faktor  $e^{-\frac{t}{T_1}}$  nahezu Null und vernachlässigbar, d. h. der Einschwingvorgang (**Bild 2.14**) ist abgeschlossen und die Ausgangsgröße ist dann eine ungedämpfte Sinusschwingung mit dem zeitlichen Verlauf

$$u_a(t) = \hat{u}_a \sin(\omega t + \alpha + \varphi). \quad (2.34)$$

Wie aus Gl. (2.34) ersichtlich, hat die Ausgangsgröße  $u_a$  im stationären Zustand die gleiche Kreisfrequenz wie die Eingangsgröße mit der Schwingungsamplitude  $\hat{u}_a$

$$\hat{u}_a = \frac{\hat{u}_e}{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2}}.$$

Die Amplitude  $\hat{u}_a$  ist eine Funktion von  $\omega$  und nimmt mit zunehmendem  $\omega$  ab.



**Bild 2.14** Einschwingvorgang beim Einschalten eines sinusförmigen Eingangssignals

Der Phasenverschiebungswinkel  $\varphi$ , den man aus der Gl. (2.33) erhält:

$$\varphi = -\arctan(\omega T_1)$$

ist stets negativ und ebenfalls eine Funktion von  $\omega$ . Mit zunehmender Kreisfrequenz wird der negative Phasenverschiebungswinkel  $\varphi$  größer.

Das ist auch aus dem Systemaufbau zu erkennen. Mit zunehmender Frequenz kann die Ausgangsspannung, infolge der durch die Zeitkonstante  $RC$  festliegenden Trägheit, der Eingangsspannung nicht mehr folgen.

Das behandelte Beispiel, dass zu einer DGL 1.Ordnung führte, hat gezeigt, dass bei einer sinusförmigen Eingangserregung am Ausgang ebenfalls eine sinusförmige Schwingung gleicher Frequenz entsteht.

Allgemein gilt bei einem linearen System, das zu einer Differentialgleichung beliebiger Ordnung führt, dass eine harmonische Schwingung am Eingang am Ausgang ebenfalls eine harmonische Schwingung erzeugt.

Sinusförmige Eingangssignale werden nicht nur zur Untersuchung elektrischer Regelkreisglieder, sondern auch für pneumatische und andere Systeme angewandt. Diese Methode hat besonders bei schnellen Systemen Vorteile gegenüber der Sprungfunktion. Vielfach erfolgt die Anwendung nur theoretisch, wie bei Stabilitäts- und Optimierungsproblemen.

### ► Aufgabe 2.3

Wie müsste der Phasenwinkel der Eingangsfunktion  $u_e(t) = \hat{u}_e \sin(\omega t + \alpha)$  gewählt werden, damit der stationäre Schwingungszustand direkt (ohne Einschwingvorgang) erreicht wird?

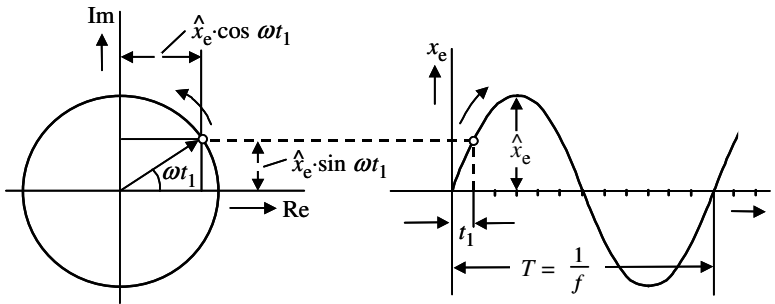
## 2.4 Beschreibung von Regelkreisen im Frequenzbereich

### 2.4.1 Der Frequenzgang

Die Rechnung bei sinusförmiger Eingangsgröße wird besonders einfach, wenn man die Sinusschwingung

$$x_e(t) = \hat{x}_e \sin \omega t \quad (2.35)$$

aus einem, um den Ursprung der Gaußschen Zahlenebene rotierenden Zeiger entstanden denkt, der auf die imaginäre Achse projiziert ist (**Bild 2.15**).



**Bild 2.15** Zusammenhang zwischen Linien- und Zeigerdarstellung

Der Zeiger ist durch die beiden Komponenten  $\hat{x}_e \cos \omega t$  und  $j \cdot \hat{x}_e \sin \omega t$  eindeutig festgelegt:

$$x_e(t) = \hat{x}_e (\cos \omega t + j \cdot \sin \omega t).$$

Nach der Eulerschen Gleichung ist:

$$\cos \omega t + j \cdot \sin \omega t = e^{j\omega t}.$$

Damit wird:

$$x_e(t) = \hat{x}_e e^{j\omega t}. \quad (2.36)$$

Das heißt, wir betrachten nicht nur die imaginäre Komponente des rotierenden Zeigers, sondern wir nehmen noch die reelle Komponente hinzu. Anstelle von (2.35) schreibt man nun (2.36).

Wird ein lineares System am Eingang mit einer Sinusschwingung  $x_e(t)$  erregt, dann wird, wie im vorherigen Abschnitt abgeleitet, auch die Ausgangsgröße  $x_a(t)$  im eingeschwungenen Zustand einen sinusförmigen Verlauf haben. Bei gleicher Frequenz haben Amplitude und Phasenlage von Ein- und Ausgangsgrößen im Allgemeinen verschiedene Werte. Die Ausgangsgröße  $x_a(t)$  ist gegenüber der Eingangsgröße  $x_e(t)$  um den Phasenwinkel  $\varphi$  verschoben, wie **Bild 2.14** zeigt.

Der zeitliche Verlauf der Ausgangsgröße ist somit:

$$x_a(t) = \hat{x}_a (\sin \omega t + \varphi) .$$

Betrachten wir die Ausgangsgröße entsprechend der Eingangsgröße als rotierenden Zeiger, so können wir schreiben:

$$x_a(t) = \hat{x}_a e^{j(\omega t + \varphi)} . \quad (2.37)$$

Das Verhältnis der Zeiger von Ausgangs- zur Eingangsgröße bezeichnet man als Frequenzgang. Dieser ist, wie wir später sehen werden, nicht mehr eine Funktion der Zeit, sondern von  $j\omega$

$$G(j\omega) = \frac{x_a(t)}{x_e(t)} = \frac{\hat{x}_a e^{j(\omega t + \varphi)}}{\hat{x}_e e^{j\omega t}} = \frac{\hat{x}_a e^{j\varphi}}{\hat{x}_e} . \quad (2.38)$$

Bei elektrischen Systemen gewinnt man den Frequenzgang mittels der Methoden der Theorie der Wechselströme.

In diesem Abschnitt soll der Frequenzgang, wie bei nichtelektrischen Systemen üblich, aus der Differentialgleichung abgeleitet werden. Dafür stellen wir zuerst die zeitlichen Funktionen (2.36) und (2.37) der Ein- und Ausgangsgrößen  $x_e(t)$  und  $x_a(t)$  im Frequenzbereich als Funktionen von  $j\omega$  dar:

$$x_e(j\omega) = \hat{x}_e e^{j\omega t} \quad (2.39)$$

$$x_a(j\omega) = \hat{x}_a e^{j(\omega t + \varphi)} . \quad (2.40)$$

Unter Beachtung der Ableitungsregeln der Exponentialfunktionen

$$\frac{d}{dt} e^{j\omega t} = j\omega \cdot e^{j\omega t}$$

erhalten wir die zeitlichen Ableitungen der Eingangsgröße der Gl. (2.39) wie:

$$\dot{x}_e(j\omega) = j\omega \cdot \hat{x}_e e^{j\omega t} \quad \text{bzw.} \quad \dot{x}_e(j\omega) = j\omega \cdot x_e(j\omega)$$

$$\ddot{x}_e(j\omega) = (j\omega)^2 \cdot \hat{x}_e e^{j\omega t} \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x}_e(j\omega) = (j\omega)^2 \cdot x_e(j\omega)$$

$$\dddot{x}_e(j\omega) = (j\omega)^3 \cdot \hat{x}_e e^{j\omega t} \quad \text{bzw.} \quad \dddot{x}_e(j\omega) = (j\omega)^3 \cdot x_e(j\omega) \quad \text{usw.}$$

Ähnlich ergeben sich die zeitlichen Ableitungen (2.40) der Ausgangsgröße zu:

$$\dot{x}_a(j\omega) = j\omega \cdot x_a(j\omega)$$

$$\ddot{x}_a(j\omega) = (j\omega)^2 \cdot x_a(j\omega)$$

$$\dddot{x}_a(j\omega) = (j\omega)^3 \cdot x_a(j\omega) \quad \text{usw.}$$

Nach Gl. (2.1) lautet die allgemeine Form der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} & \dots + a_3 \ddot{x}_a(t) + a_2 \dot{x}_a(t) + a_1 \dot{x}_a(t) + a_0 x_a(t) \\ & = b_0 x_e(t) + b_1 \dot{x}_e(t) + b_2 \ddot{x}_e(t) + b_3 \ddot{x}_e(t) + \dots \end{aligned}$$

Setzen wir  $x_e(j\omega)$  und  $x_a(j\omega)$  sowie deren Ableitungen in diese allgemeine Differentialgleichung ein, so wird:

$$\begin{aligned} & \dots + a_3 \cdot (j\omega)^3 x_a(j\omega) + a_2 \cdot (j\omega)^2 x_a(j\omega) + a_1 \cdot (j\omega) x_a(j\omega) + a_0 \cdot x_a(j\omega) \\ & = b_0 \cdot x_e(j\omega) + b_1 \cdot (j\omega) x_e(j\omega) + b_2 \cdot (j\omega)^2 x_e(j\omega) + b_3 \cdot (j\omega)^3 x_e(j\omega) + \dots \end{aligned}$$

Auf der linken Seite der Gleichung lässt sich der gemeinsame Faktor  $x_a(j\omega)$  und auf der rechten Seite  $x_e(j\omega)$  herausziehen. Bildet man nach der Gl. (2.38) das Verhältnis  $x_a(j\omega)$  zu  $x_e(j\omega)$ , so folgt der Frequenzgang  $G(j\omega)$

$$G(j\omega) = \frac{x_a(j\omega)}{x_e(j\omega)} = \frac{b_0 + b_1 \cdot (j\omega) + b_2 \cdot (j\omega)^2 + b_3 \cdot (j\omega)^3 + \dots}{a_0 + a_1 \cdot (j\omega) + a_2 \cdot (j\omega)^2 + a_3 \cdot (j\omega)^3 + \dots}.$$

### • Beispiel 2.5

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$T_2^2 \ddot{x}_a(t) + T_1 \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K x_e(t)$$

(siehe Beispiele 2.1 und 2.2).

Zu ermitteln ist der Frequenzgang  $G(j\omega)$ .

Setzt man die Ein- und Ausgangsgrößen  $x_e(t)$  und  $x_a(t)$  als Funktionen von  $j\omega$  in die DGL ein, so ergibt sich:

$$T_2^2 \cdot (j\omega)^2 x_a(j\omega) + T_1 \cdot (j\omega) x_a(j\omega) + x_a(j\omega) = K x_e(j\omega).$$

Daraus folgt:

$$G(j\omega) = \frac{x_a(j\omega)}{x_e(j\omega)} = \frac{K}{T_2^2 \cdot (j\omega)^2 + T_1 \cdot (j\omega) + 1}.$$

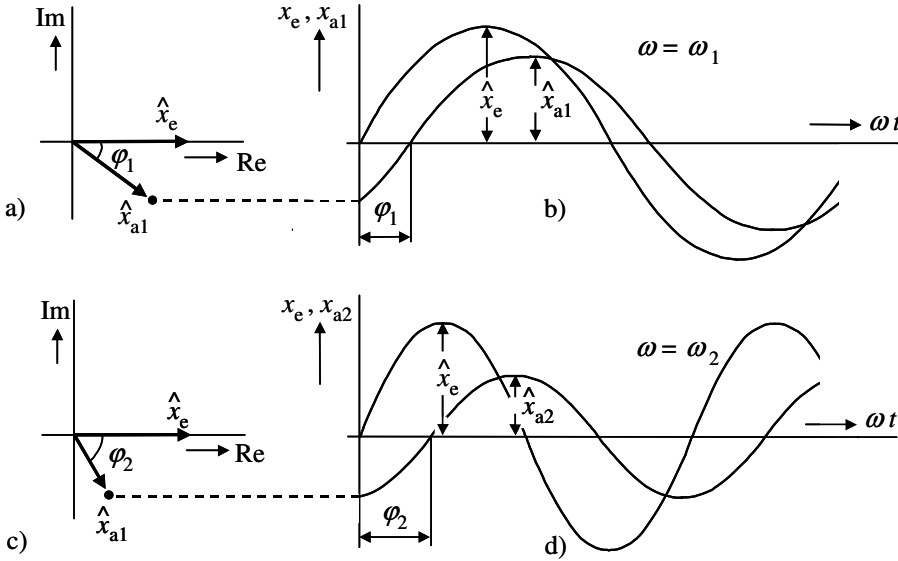
### 2.4.2 Die Ortskurve

In Abschnitt 2.3.6 wurde gezeigt, dass eine Sinusfunktion als Eingangsgröße eine Sinusschwingung gleicher Frequenz am Ausgang zur Folge hat. Die Amplitude und die Phasenlage der Ausgangsschwingung sind abhängig von der Frequenz.

Um das Verhalten eines Regelkreisgliedes durch sinusförmige Erregung beurteilen zu können, genügt es nicht, die Schwingung der Ausgangsgröße bei nur einer Frequenz zu ermitteln, sondern es müssen die Amplitude und die Phasenlage bezogen auf die

Eingangsgröße für alle Frequenzen von  $\omega = 0$  bis  $\omega = \infty$  bekannt sein. Die Eingangsgröße  $x_e(t)$  hat immer die gleiche Amplitude  $\hat{x}_e$ .

In **Bild 2.16b** und **d** sind die Sinusschwingungen für Ein- und Ausgangsgröße für zwei verschiedene Frequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  dargestellt, wobei  $\omega_1 < \omega_2$  ist. Verwendet man anstelle der Linienbilder die Zeigerbilder, so gelangt man zu der in **Bild 2.16a** und **c** gezeigten Darstellung.



**Bild 2.16** Ein- und Ausgangsgröße bei verschiedenen Frequenzen im Zeiger- und Linienbild

Im Zeigerbild bleibt die Länge und die Lage des Zeigers  $\hat{x}_e$  für alle Frequenzen gleich. Lediglich die Länge und Lage des Zeigers  $\hat{x}_a$  ändert sich in Abhängigkeit von der Frequenz. Normiert man die Eingangsgröße auf den Wert  $\hat{x}_{e0} = 1$ , dann wird die Ausgangsgröße  $\frac{\hat{x}_a}{\hat{x}_e}$ . Für verschiedene Frequenzen  $\omega$  ergeben sich dann verschiedene

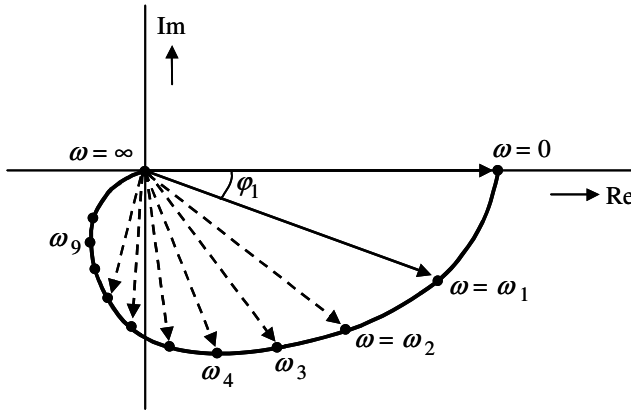
$\frac{\hat{x}_a}{\hat{x}_e}$ -Werte mit jeweils verschiedenen Phasenwinkeln  $\varphi$  zu  $\hat{x}_{e0} = 1$ .

Zeichnet man die bei den verschiedenen Frequenzen erhaltenen Ausgangszeiger  $\frac{\hat{x}_a}{\hat{x}_e}$

in ein Schaubild, wie in **Bild 2.17** gezeigt ist, und verbindet die Endpunkte der Zeiger durch einen geschlossenen Kurvenzug, so stellt dieser die *Ortskurve des Frequenzganges* dar.

Zur Beschreibung eines Regelkreisgliedes genügt die Ortskurve mit dem Frequenzmaßstab. Ist sie bekannt, so kann daraus der Frequenzgang, die Differentialgleichung und die Sprungantwort ermittelt werden.





**Bild 2.17** Ortskurve des Frequenzganges

Will man die Ortskurve aus dem Frequenzgang ermitteln, so wird der komplexe Ausdruck in Real- und Imaginärteil zerlegt und für verschiedene Frequenzen in die Gaußsche Zahlenebene eingetragen.

Die Ermittlung der Ortskurve aus dem Frequenzgang soll nun an einem Beispiel gezeigt werden.

- **Beispiel 2.6**

Gegeben ist die Übertragungsfunktion eines Verzögerungsgliedes 1. Ordnung

$$G(s) = \frac{x_a(s)}{x_e(s)} = \frac{K}{1 + sT} \quad \text{mit } K = 10 \text{ und } T = 0,1\text{s}.$$

Es ist der Verlauf der Ortskurve zu ermitteln. Der Frequenzgang ergibt sich aus der Übertragungsfunktion, indem wir die komplexe Variable  $s$  durch  $j\omega$  ersetzen.

$$G(j\omega) = \frac{x_a(j\omega)}{x_e(j\omega)} = \frac{K}{1 + j\omega T}.$$

Der Frequenzgang  $G(j\omega)$  ist eine komplexe Größe, die sich in der Gaußschen Zahlenebene darstellen lässt. Zur Trennung von  $G(j\omega)$  in Real- und Imaginärteil wird  $G(j\omega)$  mit dem konjugiert komplexen Ausdruck des Nenners erweitert:

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T} \cdot \frac{1 - j\omega T}{1 - j\omega T} = \frac{K(1 - j\omega T)}{1 + (\omega T)^2} = \text{Re}(G) + j \cdot \text{Im}(G).$$

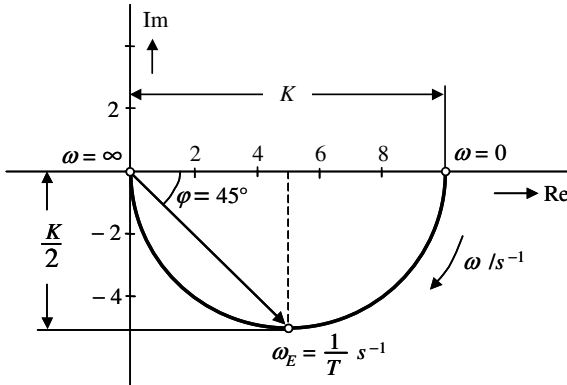
Daraus ergibt sich:

$$\text{Re}(G) = \frac{K}{1 + (\omega T)^2} \quad \text{und} \quad \text{Im}(G) = \frac{-K \omega T}{1 + (\omega T)^2}.$$

Variiert man nun  $\omega = 0$  bis  $\omega = \infty$ , so ergibt sich für jeden diskreten  $\omega$ -Wert je eine reelle und eine imaginäre Komponente, die zusammen einen Punkt in der Gaußschen Zahlenebene ergeben.

In der folgenden Tabelle ist das für verschiedene  $\omega$ -Werte in  $\text{sec}^{-1}$  durchgeführt und als Ortskurve in **Bild 2.18** wiedergegeben.

$\omega$	0	2	4	6	8	10	15	20	30	40	$\infty$
$\text{Re}(G)$	10	9,6	8,6	7,35	6,1	5	3,07	2	1	0,59	0
$\text{Im}(G)$	0	-1,92	-3,44	-4,41	-4,88	-5	-4,6	-4	-3	-2,36	0



**Bild 2.18** Ortskurve eines Gliedes 1. Ordnung

Die Ortskurve ist ein Halbkreis im vierten Quadranten.

Der Frequenzgang  $G(j\omega)$  lässt sich in Betrag  $|G(\omega)|$  und Phasenwinkel  $\varphi(\omega)$  zerlegen:

$$|G(\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2(G) + \text{Im}^2(G)} = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\text{Im}(G)}{\text{Re}(G)} = -\arctan(\omega T).$$

Bemerkenswert ist, dass für die so genannte Eckfrequenz  $\omega = \omega_E = 1/T$  der Realteil von  $G(j\omega)$  gleich dem negativen Imaginärteil von  $G(j\omega)$  ist, d. h.  $\text{Re}(G) = -\text{Im}(G) = K/2$ . Oder anders ausgedrückt, der Betrag  $|G(\omega)|$  ist für  $\omega_E$  nur noch  $\frac{K}{\sqrt{2}}$  gegenüber dem Betrag  $K$  für  $\omega = 0$ .

Die Phasenverschiebung beträgt bei dieser Frequenz gerade  $-45^\circ$ .

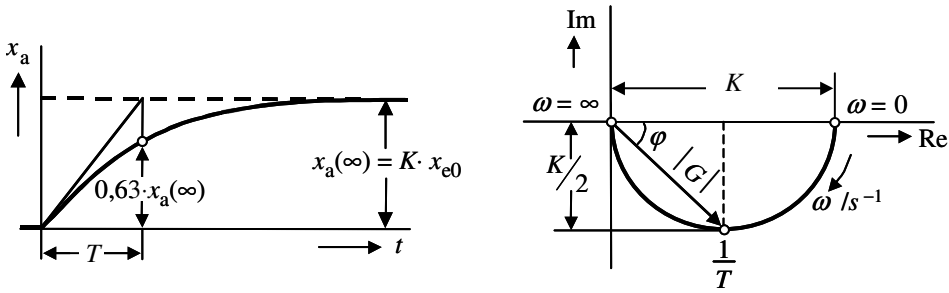
### 2.4.3 Beziehung zwischen Ortskurve und Sprungantwort

Betrachtet man eine Differentialgleichung 1. Ordnung des Typs

$$T \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K x_e(t)$$

mit dem Eingang  $x_{e0} = 1$  und vergleicht die Sprungantwort (Bild 2.7) mit der Ortskurve (Bild 2.17), so kann man bestimmte Wechselbeziehungen erkennen (**Bild 2.19**):

- Für  $t = 0$  hat die Sprungantwort den Wert  $x_a(0) = 0$ . Diesen Wert finden wir aus der Ortskurve für  $\omega = \infty$  mit  $|G(\infty)| = 0$ . Daraus folgt  $x_a(j\omega) = x_a(j\infty) = 0$ .
- Für  $t = \infty$  nimmt die Sprungantwort den Wert  $x_a(\infty) = K x_{e0}$  an. Den gleichen Wert hat die Ortskurve für  $\omega = 0$ ,  $\frac{x_a}{x_e} = K$ .



**Bild 2.19** Sprungantwort und Ortskurve eines Verzögerungsgliedes 1. Ordnung

Die Sprungantwort und Ortskurve nehmen die gleichen Werte an für  $t = 0$  und  $\omega = \infty$ , sowie für  $t = \infty$  und  $\omega = 0$ .

Diese Wechselbeziehung gilt allgemein und erklärt sich aus den Grenzwertsätzen:

$$\lim_{t \rightarrow 0} x_a(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot x_a(s) \quad (2.41)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_a(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot x_a(s). \quad (2.42)$$

Für einen Eingangssprung (siehe Abschnitt 2.3.1, Bild 2.5) ist  $x_e(s) = \frac{x_{e0}}{s}$  und somit

$$x_a(s) = G(s) \cdot x_e(s) = \frac{G(s)}{s} \cdot x_{e0} \quad \text{bzw.} \quad s \cdot x_a(s) = G(s) \cdot x_{e0}.$$

Setzt man nun die letzte Gl. in die Gln. (2.41) und (2.42), so wird die Beziehung zwischen Zeit- und Frequenzbereich wie folgt formuliert:

$$\lim_{t \rightarrow 0} x_a(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) \cdot x_{e0}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_a(t) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \cdot x_{e0}.$$

Ein weiterer charakteristischer Wert ist die Zeitkonstante  $T$ :

- Bei  $t = T$  erreicht die Sprungantwort 63% des Beharrungszustandwertes  $x_a(\infty)$
- Für Eckfrequenz  $\omega_E = \frac{1}{T}$  gilt  $\varphi(\omega_E) = -45^\circ$ .

#### ► Aufgabe 2.4

Auf ein System, das durch die Übertragungsfunktion  $G(s) = \frac{x_a(s)}{x_e(s)} = K_P \frac{1 + sT_v}{1 + sT_1}$  beschrieben wird, wirkt ein Eingangssprung. Es ist  $x_a(t)$  für  $t = 0$  und  $t = \infty$  im Bildbereich mittels Grenzwertsatz zu bestimmen und mit den entsprechenden Punkten der Ortskurve zu vergleichen.

### 2.4.4 Das Bode-Diagramm

Bei der Ortskurvendarstellung in Abschnitt 2.4.2 wird der Frequenzgang  $G(j\omega)$  in Real- und Imaginärteil zerlegt und in einem einzigen Diagramm in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt. Die Darstellung im *Bode-Diagramm* erfolgt in zwei getrennten Diagrammen, indem der Frequenzgang in Betrag  $|G(\omega)|$  und Phasenwinkel  $\varphi(\omega)$  zerlegt und als Funktion der Kreisfrequenz  $\omega$  dargestellt wird. Charakteristisch ist, dass  $|G(\omega)|$  und  $\omega$  im logarithmischen Maßstab (in *Dezibel* und in *Dekaden*),  $\varphi(\omega)$  im linearen Maßstab aufgetragen wird. In Kapitel 5 wird das Bode-Diagramm ausführlich behandelt und die Vorteile dieser Darstellungsart besprochen.

#### • Beispiel 2.7

Der in Beispiel 2.6 als Ortskurve dargestellte Frequenzgang  $G(s) = \frac{x_a(j\omega)}{x_e(j\omega)} = \frac{K}{1 + j\omega T}$

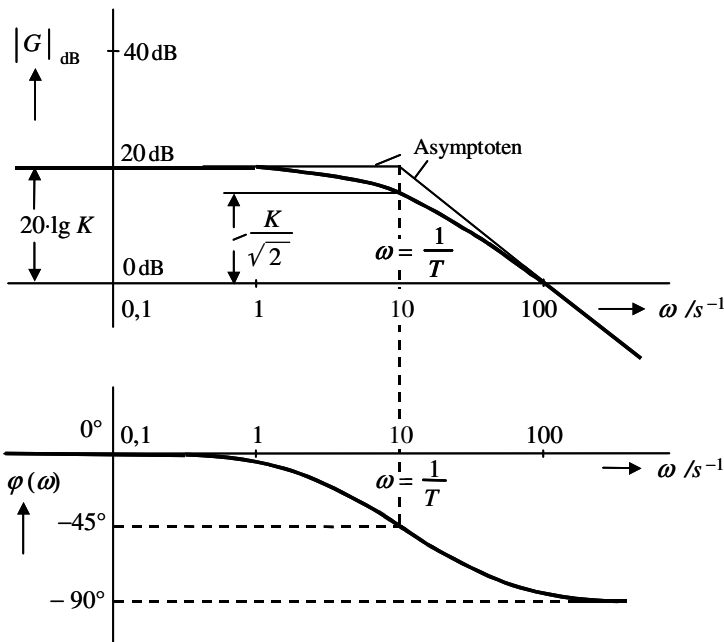
mit  $K = 10$  und  $T = 0,1\text{s}$ , soll nun im Bode-Diagramm dargestellt werden.

Wie in Beispiel 2.6 ermittelt, sind:

$$|G(\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \quad \text{und} \quad \varphi(\omega) = -\arctan(\omega T),$$

indem der Betrag in Dezibel umgerechnet wird:  $|G(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \lg |G(\omega)|$ .

Variiert man  $\omega$  von 0 bis  $\infty$ , so erhält man für jeden diskreten  $\omega$ -Wert je einen Wert des Betrags und des Phasenwinkels  $\varphi(\omega)$ , die in **Bild 2.20** als Bode-Diagramm dargestellt sind.



**Bild 2.20** Bode-Diagramm eines Verzögerungsgliedes 1. Ordnung

## 2.5 Beschreibung von Regelkreisen mit Übertragungsfunktionen

### 2.5.1 Verbindungsmöglichkeiten von Regelkreisgliedern

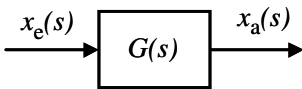
In Kapitel 1 wurde gezeigt, dass man den Regelkreis im Wirkungsplan darstellen und dabei in zwei Hauptblöcke unterteilen kann, in die Regelstrecke und die Regeleinrichtung. Um die mathematische Beschreibung des Regelkreises als Gesamtheit zu vereinfachen, zerlegt man jeden der beiden Hauptblöcke in einzelne, rückwirkungsfreie Glieder, die sich nun besser theoretisch erfassen lassen. Ist die Abhängigkeit zwischen Ausgangsgröße  $x_a$  und Eingangsgröße  $x_e$  sämtlicher zur Regelstrecke bzw. zur Regeleinrichtung gehörenden Glieder bekannt, so lässt sich eine Aussage über die Abhängigkeit zwischen Eingang und Ausgang der Regelstrecke, der Regeleinrichtung und schließlich über das Verhalten des geschlossenen Regelkreises machen.

Zur Beschreibung von Regelkreisgliedern gibt es verschiedene Möglichkeiten, wie die in den vorangegangenen Abschnitten gezeigten Differentialgleichung, die Sprungantwort, die Übertragungsfunktion, sowie Frequenzgänge, Ortskurven und Bode-Diagramme.

Ist die Übertragungsfunktion  $G(s)$  bekannt, so gibt diese das Verhältnis der Laplace-Transformierten Ausgangsgröße  $x_a(s)$  zur Laplace-Transformierten Eingangsgröße  $x_e(s)$  durch die Beziehung:

$$x_a(s) = G(s) \cdot x_e(s)$$

wieder. Die Darstellung erfolgt dann wie in **Bild 2.21** gezeigt.

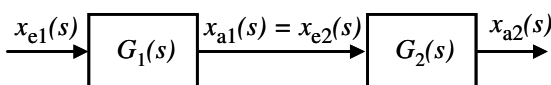


**Bild 2.21** Blockdarstellung im Bildbereich

Bei der rückwirkungsfreien Kopplung mehrerer Übertragungsglieder ergeben sich besonders einfache Beziehungen. Als rückwirkungsfrei bezeichnet man ein System, dessen Signalfluss nur vom Eingang zum Ausgang erfolgt. Im Folgenden werden drei Grundformen der Kopplung von zwei Regelkreisgliedern mit den Übertragungsfunktionen  $G_1(s)$  und  $G_2(s)$  beschrieben.

#### a) Reihenschaltung

Der Ausgang des ersten Gliedes ist, wie **Bild 2.22** zeigt, mit dem Eingang des zweiten Gliedes verbunden.



**Bild 2.22** Reihenschaltung von Regelkreisgliedern

Betrachtet man die einzelnen Glieder, so ergibt sich:

$$x_{a1}(s) = G_1(s) \cdot x_{e1}(s) \text{ und } x_{a2}(s) = G_2(s) \cdot x_{e2}(s).$$

Ferner ist:  $x_{a1}(s) = x_{e2}(s)$ . Daraus folgt:

$$x_{a2}(s) = G_2(s) \cdot x_{e2}(s) = G_2(s) \cdot G_1(s) \cdot x_{e1}(s)$$

bzw. die Gesamtübertragungsfunktion

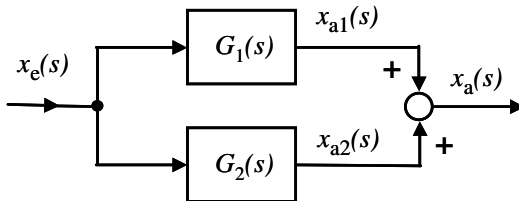
$$G(s) = \frac{x_{a2}(s)}{x_{e1}(s)} = G_2(s) \cdot G_1(s).$$

Bei Reihenschaltung von  $n$  Gliedern mit den Übertragungsfunktionen  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$ , ...,  $G_n(s)$  ist die Übertragungsfunktion des gesamten Systems gleich dem Produkt der einzelnen Übertragungsfunktionen

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot \dots \cdot G_n(s).$$

### b) Parallelschaltung

Das Eingangssignal  $x_a(s)$  verzweigt sich und wirkt gleichzeitig auf die beiden Eingänge der Glieder mit den Übertragungsfunktionen  $G_1(s)$  und  $G_2(s)$  (**Bild 2.23**). Die beiden Ausgangssignale  $x_{a1}(s)$  und  $x_{a2}(s)$  werden in einer Additionsstelle addiert.



**Bild 2.23** Parallelschaltung von Regelkreisgliedern

Für das erste und für das zweite Glied gilt:

$$x_{a1}(s) = G_1(s) \cdot x_e(s) \text{ und } x_{a2}(s) = G_2(s) \cdot x_e(s).$$

Ferner ist:  $x_a(s) = x_{a1}(s) + x_{a2}(s)$ .

Daraus folgt:

$$x_a(s) = [G_1(s) + G_2(s)] \cdot x_e(s)$$

bzw. die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems:

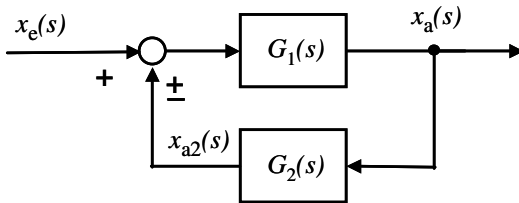
$$G(s) = \frac{x_a(s)}{x_e(s)} = G_1(s) + G_2(s).$$

Schaltet man  $n$  Glieder mit den Übertragungsfunktionen  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$ , ...,  $G_n(s)$  parallel, so ist die Übertragungsfunktion des gesamten Systems gleich der Summe der einzelnen Übertragungsfunktionen

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) + \dots + G_n(s).$$

### c) Rückführungsschaltung

Wie **Bild 2.24** zeigt, wird die Ausgangsgröße  $x_a(s)$  des ersten Gliedes  $G_1(s)$  über ein zweites Glied mit  $G_2(s)$  auf den Eingang von  $G_1(s)$  zurückgeführt und zu der Eingangsgröße  $x_e(s)$  addiert (Mitkopplung) oder von der Eingangsgröße subtrahiert (Gegenkopplung).



**Bild 2.24** Rückkopplungs-schaltung

Für den oberen Block gilt:

$$x_a(s) = G_1(s) \cdot [x_e(s) \pm x_{a2}(s)]$$

und für den unteren Block (im Rückführzweig):

$$x_{a2}(s) = G_2(s) \cdot x_a(s).$$

Setzt man  $x_{a2}(s)$  in die obere Gleichung ein, so erhält man:

$$x_a(s) = G_1(s) \cdot [x_e(s) \pm G_2(s) \cdot x_a(s)]$$

bzw.

$$x_a(s) \cdot [1 \mp G_1(s) G_2(s)] = G_1(s) \cdot x_e(s).$$

Daraus folgt die Übertragungsfunktion der Rückführschaltung:

$$G(s) = \frac{x_a(s)}{x_e(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s) G_2(s)},$$

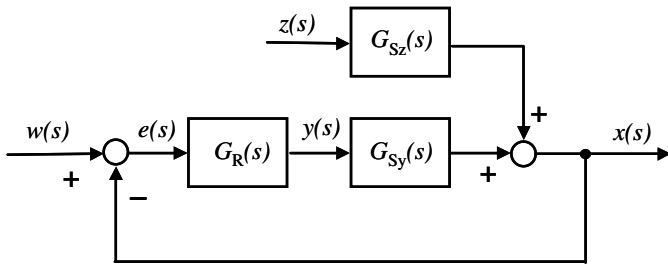
Mitkopplung  $\hat{=}$  negatives Vorzeichen

Gegenkopplung  $\hat{=}$  positives Vorzeichen.

## 2.6 Behandlung des statischen Verhaltens

Ein Regelkreis befindet sich unter der Wirkung von Eingangsgrößen, die man mittels Führungs- bzw. Störverhalten abwechselnd untersuchen kann. Der Regler soll den aktuellen Wert der Regelgröße  $X(t)$  ständig dem vorgegebenen Arbeitspunkt der Regelstrecke  $X_0$  anpassen. Dies erfolgt durch die Ansteuerung der Stellgröße  $Y(t)$ , die im Arbeitspunkt einen bestimmten Wert  $Y_0$  annimmt. Von ausschlaggebender Bedeutung für die Aussage über die Güte der Regelung sind die Abweichungen vom Arbeitspunkt, die wir im Abschnitt 2.1 durch Kleinbuchstaben  $x(t)$  und  $y(t)$  bezeichnet haben. Zum Beispiel gilt für den in **Bild 2.25** gezeigten Regelkreis:

$$X(t) = X_0 + x(t) \qquad Y(t) = Y_0 + y(t) \qquad Z(t) = Z_0 + z(t). \qquad (2.43)$$



**Bild 2.25** Wirkungsplan eines Regelkreises mit Führungs- und Störgröße

Im stationären Zustand soll keine Abweichung der Regelgröße vorkommen, d. h. bei  $t = \infty$  soll  $x(t) = 0$  und  $X = X_0$ , um das Verhältnis *Istwert = Sollwert* beizubehalten.

### 2.6.1 Statische Kennlinien

Wie in den Abschnitten 2.1 und 2.2 gezeigt wurde, kann das dynamische Verhalten einzelner Regelkreisglieder sowie des gesamten Regelkreises durch gewöhnliche, lineare Differentialgleichungen in allgemeiner Form beschrieben werden. Die Beschreibung des statischen Verhaltens kann man aus der Differentialgleichung des dynamischen Verhaltens erhalten, indem man alle zeitlichen Ableitungen gleich Null setzt.

#### • Beispiel 2.8

Aus einer DGL der Regelstrecke für das dynamische Verhalten

$$a_3 \ddot{X}(t) + a_2 \dot{X}(t) + a_1 \dot{X}(t) + a_0 X(t) = b_0 Y(t) + b_1 \dot{Y}(t) + c_0 Z(t) \quad (2.44)$$

entsteht die folgende Beschreibung des statischen Verhaltens:

$$a_0 X = b_0 Y + c_0 Z. \quad (2.45)$$

In der Gl. (2.45) bewirkt eine Veränderung der Stellgröße oder der Störgröße eine proportionale Veränderung der Regelgröße, somit handelt es sich um eine *lineare* Regelstrecke.

Die Gl. (2.45) soll auch für den Arbeitspunkt gelten, d. h.

$$a_0 X_0 = b_0 Y_0 + c_0 Z_0. \quad (2.46)$$

Subtrahiert man die Gl. (2.46) von Gl. (2.44) und berücksichtigt dabei die Gleichungen (2.43), so entsteht die DGL der Regelstrecke für das dynamische Verhalten von kleinen Abweichungen vom Arbeitspunkt (Kleinbuchstaben):

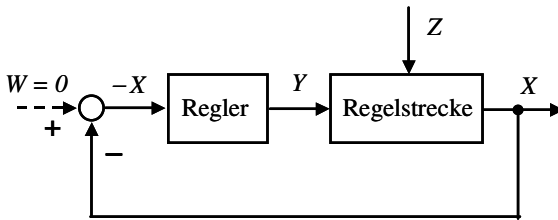
$$a_3 \ddot{x}(t) + a_2 \dot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 y(t) + b_1 \dot{y}(t) + c_0 z(t).$$

Bei realen Regelstrecken liegen jedoch oft Nichtlinearitäten vor, wie z. B. bei Ventilen, die einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen dem Ventilhub und dem Volumenstrom besitzen. Dabei entstehen nichtlineare Beschreibungen, wie folgende Beispiele mit multiplikativen oder nichtlinearen Funktionen und mit konstanten Koeffizienten  $K_1$  und  $K_2$  zeigen:

$$X = K_1 \cdot Y^2 + K_2 \cdot Z \quad X = K_1 \cdot Y \cdot Z \quad X = K_1 \cdot Y + K_2 \cdot \sin Z.$$



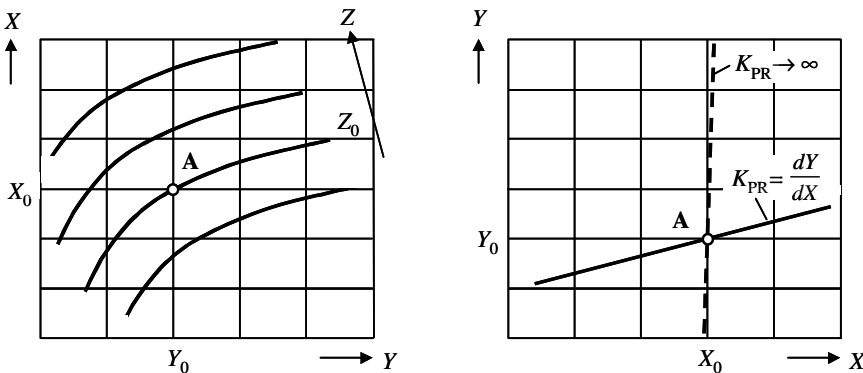
Das statische Verhalten kann grafisch abgebildet werden. Da in einem geschlossenen Regelkreis beim Störverhalten die Ausgangsgröße des Reglers gleichzeitig Eingangsgröße der Regelstrecke ist, wie in **Bild 2.26** gezeigt, können die statischen Kennlinien der Regelstrecke und des Reglers in ein Diagramm eingetragen werden.



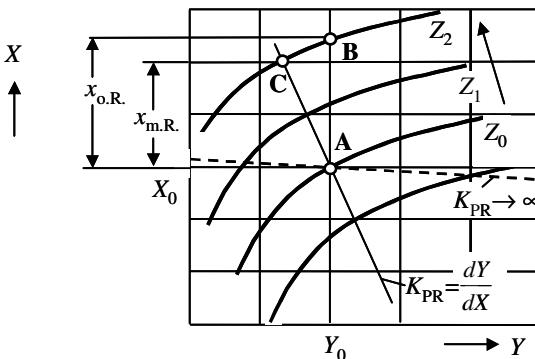
**Bild 2.26** Wirkungsplan eines Regelkreises beim Störverhalten

In **Bild 2.27** ist das nichtlineare Kennlinienfeld  $X = f(Y, Z)$  einer Regelstrecke und die Kennlinie eines linearen Reglers  $Y = K_{PR} X$  mit der Steigung  $K_{PR} = \Delta Y / \Delta X$  dargestellt, wobei  $K_{PR}$  der Proportionalbeiwert des Reglers ist. Die Werte im Arbeitspunkt A sind  $X_0$ ,  $Y_0$  und  $Z_0$ .

Das statische Verhalten des Regelkreises wird durch Einzeichnen der Kennlinie des Reglers in das Kennlinienfeld der Regelstrecke, und zwar mit dem Vorzeichenumkehr, dargestellt, wie es beispielsweise in **Bild 2.28** für das Störverhalten gezeigt ist.



**Bild 2.27** Kennlinienfeld einer Regelstrecke (links) und Kennlinie eines Reglers (rechts)



**Bild 2.28** Zusammenwirkung von Regler und Regelstrecke beim Störverhalten

Nehmen wir zuerst an, dass der Regler unwirksam ist. In diesem Fall wird eine Veränderung der Störgröße z. B. von  $Z_0$  auf  $Z_2$  bei der konstanten Stellgröße  $Y_0$  zum Wechsel des Arbeitspunktes führen, nämlich vom Punkt A zum Punkt B. Wirkt der Regler im Regelkreis, so entspricht die Stellgröße der Reglerkennlinie (Punkt C).

Die Steigung der Reglerkennlinie des Reglers muss also entgegengesetzt zur Steigung der Kennlinien der Regelstrecke sein, um die Abweichung  $x_{m.R.}$  („mit Regler“) gegenüber der Abweichung  $x_{o.R.}$  („ohne Regler“) zu minimieren. Je größer der Proportionalbeiwert  $K_{PR}$  des Reglers bzw. die Steigung der Reglerkennlinie im Bild 2.27 wird, desto flacher liegt die Gerade im Bild 2.29 und desto kleiner wird die Abweichung der Regelgröße  $x_{m.R.}$  im geregelten Zustand. Außerdem folgt aus dem Bild 2.28, dass in diesem Kreis ein proportionaler Regler im geregelten Zustand eine Abweichung  $x_{m.R.}$  vom Arbeitspunkt  $X_0$  bzw. vom Sollwert  $W$  hinterlässt.

### 2.6.2 Statischer Regelfaktor

Nachdem die Regelgröße einen Beharrungszustand

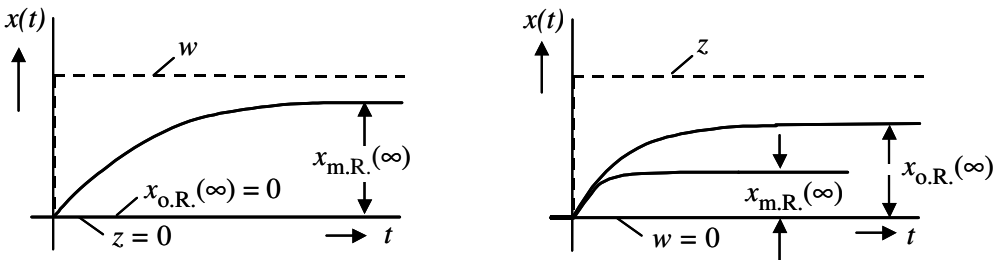
$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$$

eingenommen hat, kann der Erfolg der Regelung, wie im **Bild 2.29** gezeigt, durch einen Vergleich der bleibenden Regeldifferenzen „mit Regler“  $e_{m.R.}(\infty)$  und „ohne Regler“  $e_{o.R.}(\infty)$  ausgedrückt werden.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot x(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot w(s) \cdot G_w(s). \quad (2.47)$$

Für  $w(t) = w_0 = \text{const}$  ist  $w(s) = \frac{w_0}{s}$  und somit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{w_0}{s} \cdot G_w(s) = w_0 \cdot \lim_{s \rightarrow 0} G_w(s). \quad (2.48)$$



**Bild 2.29** Sprungantworten beim Führungsverhalten (links) und Störverhalten (rechts)

Es wird der so genannte reelle bzw. statische Regelfaktor  $R_F$  eingeführt

$$R_F = \frac{e_{m.R.}(\infty)}{e_{o.R.}(\infty)}$$

und unter Beachtung von  $e(\infty) = w - x(\infty)$  in folgende Form gebracht:

$$R_F = \frac{w - x_{m.R.}(\infty)}{w - x_{o.R.}(\infty)}.$$

Dadurch wird angegeben, wie stark die Änderung einer der Eingangsgrößen des Regelkreises (Störgröße oder Führungsgröße) durch die Regelung beseitigt wird. Je kleiner der Regelfaktor ist, desto weniger wirkt die Störgröße auf die Regelgröße und desto effektiver ist der Regler.

Abhängig von Eingangsstörung wird der Regelfaktor nach zwei verschiedenen Formeln, wie im Bild 2.29 angedeutet, berechnet:

Führungsverhalten	Störverhalten
$R_F = \frac{w - x_{m.R.}(\infty)}{w - 0} = \frac{w - x_{m.R.}(\infty)}{w}$	$R_F = \frac{0 - x_{m.R.}(\infty)}{0 - x_{o.R.}(\infty)} = \frac{-x_{m.R.}(\infty)}{-x_{o.R.}(\infty)}$

Der statische Regelfaktor kann durch die Kreisverstärkung  $V_0$  ausgedrückt werden. Sind beispielsweise im Regelkreis (siehe Bild 2.25) der Regler und die Teilstrecke mit Proportionalbeiwerten  $K_{PR}$  und  $K_{PSy}$  enthalten, so gilt für den statischen Regelfaktor:

$$R_F = \frac{1}{1 + V_0} = \frac{1}{1 + K_{PR} K_{PSy}}. \quad (2.49)$$

Der Regler muss also mit dem Einstellparameter  $K_{PR}$  so ausgelegt werden, dass bei stabiler Funktionsweise ein möglichst kleiner Regelfaktor entsteht.

In nachfolgenden Kapiteln wird gezeigt, dass ein Regler mit integrierender Wirkung keine bleibende Regeldifferenz  $e(\infty)$  hinterlässt und damit einen statischen Regelfaktor von  $R_F = 0$  besitzt.

### 2.6.3 Linearisierung mit analytischen Verfahren

Das nichtlineare Kennlinienfeld einer Regelstrecke kann durch die Tangente im Arbeitspunkt  $(X_0, Y_0, Z_0)$  linearisiert werden. Dabei wird die Funktion  $X = f(Y, Z)$  durch das Differential

$$dX = \left( \frac{\partial X}{\partial Y} \right)_0 \cdot dY + \left( \frac{\partial X}{\partial Z} \right)_0 \cdot dZ \quad (2.50)$$

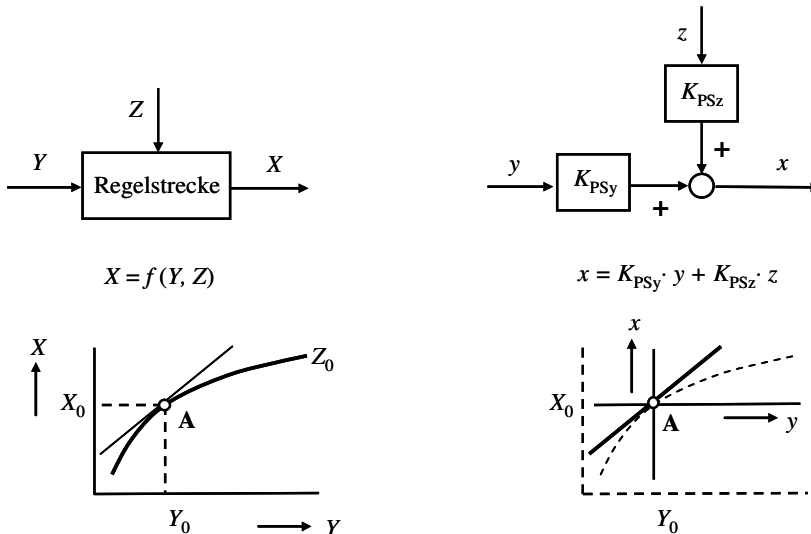
beschrieben. Der Index 0 steht für die Arbeitspunktwerte  $X_0$ ,  $Y_0$  und  $Z_0$ . Die partiellen Ableitungen im Arbeitspunkt bezeichnet man durch die Koeffizienten  $K_{PSy}$  und  $K_{PSz}$

$$K_{PSy} = \left( \frac{\partial X}{\partial Y} \right)_0 \quad K_{PSz} = \left( \frac{\partial X}{\partial Z} \right)_0 . \quad (2.51)$$

Bezeichnet man  $dX$ ,  $dY$  und  $dZ$  in Gl. (2.50) unter Beachtung der Gl. (2.43) durch kleine Abweichungen  $x$ ,  $y$  und  $z$  vom Arbeitspunkt, so ergibt sich aus Gln. (2.50) und (2.51) die linearisierte Beschreibung des statischen Verhaltens

$$x = K_{PSy} \cdot y + K_{PSz} \cdot z .$$

Das Prinzip der Linearisierung ist in **Bild 2.30** verdeutlicht. Die Variablen  $X$ ,  $Y$ , und  $Z$  (Großschreibung) beschreiben die ursprüngliche nichtlineare Regelstrecke. Die linearisierte Regelstrecke wird durch die Abweichungen  $x$ ,  $y$ , und  $z$  (Kleinschreibung) vom Arbeitspunkt  $A$  definiert und besteht aus zwei getrennten Teilstrecken für Stell- und Störsignale, deren Ausgänge addiert werden.



**Bild 2.30** Eine nichtlineare Regelstrecke vor (links) und nach (rechts) der Linearisierung

### • Beispiel 2.9

Eine Regelstrecke, die durch die Differentialgleichung

$$T_2^2 \cdot \ddot{X}(t) + T_1 \cdot \dot{X}(t) + X(t) = 3 \cdot Y^2(t) + 5 \cdot \sqrt{Z(t)} \quad (2.51)$$

beschrieben wird, soll im Arbeitspunkt

$$Y_0 = 2 \quad \text{und} \quad Z_0 = 4$$

linearisiert bzw. in der Form  $x = K_{PSy} \cdot y + K_{PSz} \cdot z$  dargestellt werden.

Für das statische Verhalten sind  $\ddot{X}(t) = 0$  und  $\dot{X}(t) = 0$ . Aus der Gl. (2.51) ergibt sich

$$X = 3 \cdot Y^2 + 5 \cdot \sqrt{Z} .$$

Die gesuchten Proportionalbeiwerte sind partielle Ableitungen im Arbeitspunkt:

$$K_{PSy} = \left( \frac{\partial X}{\partial Y} \right)_0 = (2 \cdot 3 \cdot Y)_0 = 2 \cdot 3 \cdot Y_0 = 12$$

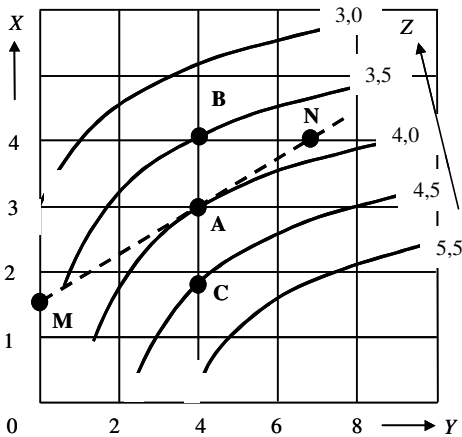
$$K_{PSz} = \left( \frac{\partial X}{\partial Z} \right)_0 = \left( 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{Z}} \right)_0 = 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{Z_0}} = 1,25.$$

### 2.6.4 Linearisierung mit grafischen Verfahren

Wenn das nichtlineare Verhalten der Regelstrecke nur in Form eines Kennlinienfeldes gegeben ist, lassen sich die Proportionalbeiwerte  $K_{PSy}$  und  $K_{PSz}$  grafisch als die Steigung der Tangente zu Kennlinien  $X = f(Y)$  und  $X = f(Z)$  bestimmen (**Bild 2.31**).

#### • Beispiel 2.10

Das Kennlinienfeld einer Regelstrecke ist in **Bild 2.32** gegeben. Die Regelstrecke soll im Arbeitspunkt  $Y_0 = 4$  und  $Z_0 = 4$  linearisiert werden.



**Bild 2.31** Kennlinienfeld einer Regelstrecke

Die Steigung der Tangente zur Kennlinie  $X = f(Y)$  ergibt sich mit Hilfe von zwei beliebig gewählten Punkten M und N:

$$K_{PSy} = \left( \frac{\Delta X}{\Delta Y} \right)_0 = \frac{X_M - X_N}{Y_M - Y_N} = \frac{1,6 - 4}{0 - 6,9} = 0,35.$$

Um die Kennlinie  $X = f(Z)$  für die Ermittlung der Steigung der Tangente  $K_{PSz}$  nicht gesondert zu skizzieren, wählen wir die Punkte B und C, die vom Arbeitspunkt  $Z_0 = 4$  gleichermaßen um  $\pm \Delta Z = 0,5$  entfernt sind. Damit wird die Steigung der Sekante berechnet, die sich von der Tangente für kleine Abweichungen  $\Delta Z$  nur gering unterscheidet:

$$K_{PSz} = \left( \frac{\Delta X}{\Delta Z} \right)_0 = \frac{X_B - X_C}{Z_B - Z_C} = \frac{4 - 1,8}{3,5 - 4,5} = -2,2.$$

Das gesuchte statische Verhalten der linearisierten Regelstrecke im Arbeitspunkt ist:

$$x = 0,35 y - 2,2 z.$$

Regelungstechnik für Ingenieure

Analyse, Simulation und Entwurf von Regelkreisen

Zacher, S.; Reuter, M.

2017, XVIII, 515 S. 403 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-17631-0