Mathematik und Zaubern: Ein Einstieg für Mathematiker

Bearbeitet von
Ehrhard Behrends

1. Auflage 2017. Buch. XIII, 180 S. Softcover
ISBN 978 3 658 17504 7

Weitere Fachgebiete > Mathematik

Zu Inhaltsverzeichnis

schnell und portofrei erhältlich bei

beck-shop.de
DIE FACHBUCHHANDLUNG

Die Online-Fachbuchhandlung beck-shop.de ist spezialisiert auf Fachbücher, insbesondere Recht, Steuern und Wirtschaft. Im Sortiment finden Sie alle Medien (Bücher, Zeitschriften, CDs, eBooks, etc.) aller Verlage. Ergänzt wird das Programm durch Services wie Neuerscheinungsdienst oder Zusammenstellungen von Büchern zu Sonderpreisen. Der Shop führt mehr als 8 Millionen Produkte.

Kapitel 2

Magische Quadrate und magische Würfel

Unter einem magischen Quadrat versteht man, streng genommen, die Anordnung der Zahlen $1, 2, \ldots, n^2$ in einem quadratischen $n \times n$-Schema, so dass die Summe über alle Zeilen, alle Spalten und die beiden Diagonalen den gleichen Wert hat. Die ersten magische Quadrate wurden schon vor einigen tausend Jahren gefunden, bekannt ist das *Lo-Shu-Quadrat* aus dem dritten Jahrtausend vor unserer Zeitrechnung. In unserer heutigen Notation sieht es so aus:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Noch weit berühmter ist das magische Quadrat von *Albrecht Dürer* aus dem Kupferstich *Melencolia I (1514)*[1)]:

[1)] Foto: Albertina, Wien.

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2017
E. Behrends, *Mathematik und Zaubern: Ein Einstieg für Mathematiker*, DOI 10.1007/978-3-658-17505-4_2

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Dürers magisches Quadrat weist einige Besonderheiten auf. Nicht nur, dass Zeilen-, Spalten- und Diagonalensummen alle gleich (nämlich gleich 34) sind, auch die Zahlen in den 2×2-Quadraten in den Ecken und in der Mitte sowie die vier Eckzahlen summieren sich zu diesem Wert auf. (Insgesamt gibt es also 16 verschiedene Summationen, die zum gleichen Wert führen.) Auch ist in der letzten Zeile in der Mitte die Zahl 1514 zu finden, die Jahreszahl der Entstehung des Bildes.

In diesem und im nächsten Kapitel werden wir den Begriff „magisches Quadrat“ allgemeiner verwenden. Es wird um quadratische Zahlen-Schemata mit besonderen Eigenschaften gehen.

Wir beginnen im vorliegenden Kapitel mit einen Trick, der auch für Mathematiker nicht leicht durchschaubar ist, obwohl der mathematische Hintergrund nicht sehr tiefliegend ist. Interessanter ist schon die Tatsache, dass das beschriebene Verfahren beweisbar bestmöglich ist, um das angestrebte Ziel zu erreichen.

Der Effekt

Ein Zuschauer wählt aus einem quadratischen Zahlenschema völlig frei einige Zahlen. Die werden addiert, und es zeigt sich nach Öffnen eines verschlossenen Umschlags, dass der Zauberer die Summe richtig vorhersagen konnte.

Genauer: Der Zuschauer unterstreicht irgendeine Zahl des Schemas, dann werden alle anderen Zahlen in der gewählten Zeile und Spalte durchgestrichen. Unter den verbleibenden Zahlen (also die, die nicht unterstrichen oder durchgestrichen sind) wird wieder eine unterstrichen, die anderen in der betreffenden Zeile und Spalte werden durchgestrichen. Und so weiter, so lange, bis – bei einem $n\times n$-Raster nach n Schritten – alle Zahlen unter- oder durchgestrichen sind. Dann werden die unterstrichenen Zahlen addiert.

~~12~~	17	~~4~~	~~6~~
~~19~~	~~24~~	11	~~13~~
~~13~~	~~18~~	~~5~~	7
15	~~20~~	~~7~~	~~9~~

17+11+7+15=50; das wusste der Zauberer schon vorher.

Die Mathematik im Hintergrund

Wir betrachten zunächst die Summenbildung bei reellen Zahlen. Da für die Addition Assoziativgesetz und Kommutativgesetz gelten, ist es egal, wie man bei der Berechnung einer Summe mit endlich vielen Summanden die Reihenfolge wählt und ob man zwischendurch Teilsummen bildet. (Das ist jedem vom Einkaufen her geläufig: Es ist für den Gesamtpreis völlig egal, in welcher Reihenfolge man die Einkäufe auf das Förderband an der Kasse legt.) Hier die etwas abstraktere Formulierung dieser Erfahrung:

Satz 2.1 *Es sei I eine endliche Menge, und für jedes $i \in I$ sei x_i eine reelle Zahl.*

(i) Schreibt man I auf irgendeine Weise als $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$, so ist erstens die Zahl n für jede Aufzählung die gleiche, und zweitens ergibt sich in allen Fällen für $x_{i_1} + \cdots + x_{i_n}$ die gleiche Zahl x. („Erstens" liegt daran, dass Kardinalzahlen wohldefiniert sind, und „zweitens" folgt aus der Kommutativität und Assoziativität.) Deswegen ist es gerechtfertigt, diesen gemeinsamen Wert x als $\sum_{i\in I} x_i$ zu bezeichnen[2].

(ii) Nun sei I als disjunkte Vereinigung von nicht leeren Teilmengen $I_1, \ldots, I_m$ geschrieben[3]. Mit $y_k := \sum_{i\in I_k} x_i$ $(k = 1, \ldots, m)$ gilt dann $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k=1}^{m} y_k$.

Beweis: Beweise zu derartigen Aussagen sollte man im ersten Semester eines Mathematikstudiums kennen gelernt haben. Man verwendet vollständige Induktion, die Beweise sind ein bisschen schwerfällig. Wenn man sie allerdings verstanden hat, darf man $+$ durch eine beliebige assoziative und kommutative innere Komposition „$\circ$" auf irgendeiner Menge M ersetzen. (Um auch die „$\circ$-Summe über die leere Menge" definieren zu können, sollte $\circ$ ein neutrales Element haben.) □

Magische Quadrate

Für unsere Zaubertricks werden nur einfache Spezialfälle wichtig werden. Es sei $n \in \mathbb{N}$ vorgegeben, und es seien Zahlen $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ beliebig gewählt. Wir füllen ein quadratisches $n \times n$-Raster so, dass in der i-ten Zeile an der j-ten Stelle die Zahl $A_{i,j} := a_i + b_j$ steht:

$a_1 + b_1$	$a_1 + b_2$	$\ldots$	$a_1 + b_n$
$a_2 + b_1$	$a_2 + b_2$	$\ldots$	$a_2 + b_n$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$a_n + b_1$	$a_n + b_2$	$\ldots$	$a_n + b_n$

Nun werden n Felder in diesem Raster so gewählt, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eines dieser Felder steht. Wenn man dann die zu diesen Feldern gehörigen $A_{i,j}$ addiert, so kommt garantiert $a_1 + \cdots + a_n + b_1 + \cdots + b_n$ heraus. Das folgt sofort aus dem vorigen Satz: Zunächst wurden gewisse $a_i + b_j$ ausgerechnet, wobei jedes a_i und jedes b_j genau einmal vorkam, und die Ergebnisse wurden dann addiert.

Wenn in der i-ten Zeile das j-te Feld ausgewählt wurde, schreiben wir $\pi(i) := j$. Dann ist bei einer zulässigen Wahl $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ bijektiv, es handelt sich also um eine Permutation der Zahlen $1, \ldots, n$. Umgekehrt liefert jede Permutation eine zulässige Feld-Auswahl. Das können wir so zusammenfassen:

Satz 2.2 *Sei (mit den vorstehenden Bezeichnungen) $S := a_1 + \cdots + a_n + b_1 + \cdots + b_n$. Ist dann $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ eine Permutation, so ist*

$$A_{1,\pi(1)} + A_{2,\pi(2)} + \cdots + A_{n,\pi(n)} = S.$$

Dieses Ergebnis ist die Grundlage des in diesem Kapitel beschriebenen Zaubertricks. Deswegen wäre es natürlich interessant zu wissen, ob man den Effekt nicht auch durch

[2] Manchmal definiert man noch die Summe über die leere Menge als Null.

[3] Es gilt also $I_k \cap I_l = \emptyset$ für $k \neq l$, und $\bigcup_{k=1}^{m} I_k = I$.

eine andere Konstruktionsvorschrift als $A_{i,j} = a_i + b_j$ für die Matrixeinträge erhalten könnte. Der folgende Satz zeigt, dass das nicht der Fall ist.

Satz 2.3 *Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $(A_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ eine Matrix mit reellen Einträgen. Für eine geeignete Zahl S soll*

$$A_{1,\pi(1)} + A_{2,\pi(2)} + \cdots + A_{n,\pi(n)} = S$$

für jede Permutation auf $\{1,\ldots,n\}$ gelten.

Dann kann man Zahlen $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ so wählen, dass $A_{i,j} = a_i + b_j$ für alle i,j gilt. Es ist dann $S = a_1 + \cdots + a_n + b_1 + \cdots + b_n$.

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir setzen $a_1 := x$ und $b_j := A_{1,j} - x$ für $j = 1,\ldots,n$. Dann gilt $A_{1,j} = a_1 + b_j$ für alle j. Definieren wir noch $a_i := A_{i,1} - b_1$ für $i = 2,\ldots,n$, so ist auch stets $A_{i,1} = a_i + b_1$. Zusammen heißt das, dass wir $A_{i,j} = a_i + b_j$ garantieren können, falls $i = 1$ oder $j = 1$. Es fehlt noch der Nachweis, dass diese Gleichung auch im Fall $i,j > 1$ gilt.

Dazu fixieren wir $i,j > 1$ und behaupten, dass $A_{i,1} - A_{1,1} + A_{1,j} = A_{i,j}$ gilt.

Fall 1: $i = j$. Wir definieren die Permutation $\pi_1 := \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ durch $\pi_1(1) := i$, $\pi_1(i) := 1$ und $\pi_1(k) := k$ für $k \neq 1,i$. Wendet man dann die Voraussetzung für π_1 an, so folgt $S = A_{1,i} + A_{i,1} + \sum_{k\neq i,1} A_{k,k}$. Wählt man π_2 als identische Permutation ($\pi(k) := k$ für alle k), so ergibt sich auch $S = A_{1,1} + A_{i,i} + \sum_{k\neq i,1} A_{k,k}$, und wir folgern, dass $A_{1,i} + A_{i,1} = A_{1,1} + A_{i,i}$ gilt. Das kann wegen $i = j$ als $A_{i,1} - A_{1,1} + A_{1,j} = A_{i,j}$ umgeschrieben werden.

Fall 2: $i \neq j$. Zunächst wählen wir eine bijektive Abbildung

$$\pi_0 : \{1,\ldots,n\} \setminus \{1,i\} \to : \{1,\ldots,n\} \setminus \{1,j\};$$

so etwas gibt es, da beide Mengen $n-2$ Elemente haben. Damit definieren wir eine Permutation π_1 durch $\pi_1(1) := 1$, $\pi_1(i) := j$ und $\pi_1(k) := \pi_0(k)$ für $k \neq 1,i$. Aufgrund der Konstruktion ist π_1 eine Permutation, und wir erhalten

$$S = A_{1,1} + A_{i,j} + \sum_{k\neq 1,i} A_{k,\pi_0(k)}.$$

Nun werde π_2 durch $\pi_2(1) := j$, $\pi_2(i) := 1$ und $\pi_2(k) := \pi_0(k)$ für $k \neq 1,i$ definiert. Es folgt

$$S = A_{1,j} + A_{i,1} + \sum_{k\neq 1,i} A_{k,\pi_0(k)},$$

und wir können daraus schließen, dass $A_{1,1} + A_{i,j} = A_{1,j} + A_{i,1}$. Wirklich ist also $A_{i,1} - A_{1,1} + A_{1,j} = A_{i,j}$.

Nun kann der Beweis leicht beendet werden. Wir wollen doch $A_{i,j} = a_i + b_j$ zeigen:

$$\begin{aligned} a_i + b_j &= (A_{i,1} - b_1) + (A_{1,j} - x) \\ &= (A_{i,1} - A_{1,1} + x) + (A_{1,j} - x) \\ &= A_{i,1} - A_{1,1} + A_{1,j} \\ &= A_{i,j}. \end{aligned}$$

Dass $S = a_1 + \cdots + a_n + b_1 + \cdots + b_n$ gilt, kann man zum Beispiel dadurch einsehen, dass man π als identische Permutation wählt. Dafür ist nämlich

$$A_{1,1} + A_{2,2} + \cdots + A_{n,n} = (a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n) = a_1 + \cdots + a_n + b_1 + \cdots + b_n.$$

Es wurde auch mitbewiesen, dass die Wahl von a_i, b_j zu den $A_{i,j}$ nicht eindeutig ist: Es gibt einen freien, beliebig wählbaren Parameter x. □

Wir bemerken noch, dass im Beweis nur die Gruppeneigenschaften von $(\mathbb{R}, +)$ ausgenutzt wurden. Das Ergebnis kann also auf beliebige kommutative Gruppen übertragen werden.

Magische Würfel und magische Hyperwürfel

Im vorstehenden Satz wurden die Koordinaten nicht auf gleiche Weise behandelt. Wenn man die Ergebnisse auf mehr als zwei Dimensionen übertragen will, empfiehlt sich eine symmetrische Formulierung:

- Die a_i, b_j, $A_{i,j} := a_i + b_j$ seien wie vorstehend, und $S := a_1 + \cdots + a_n + b_1 + \cdots + b_n$. Sind dann π_1, π_2 Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$, so ist

$$\sum_{i=1}^{n} A_{\pi_1(i),\pi_2(i)} = S.$$

- Gegeben sei die Matrix $A_{i,j}$, und es gebe eine Zahl S, so dass $\sum_{i=1}^{n} A_{\pi_1(i),\pi_2(i)} = S$ für alle Permutationen π_1, π_2. Dann gibt es Zahlen a_i und b_j, so dass $A_{i,j} = a_i + b_j$ für alle i, j gilt.

Der obige Beweis kann leicht auf die neue Formulierung übertragen werden.

Eine Verallgemeinerung auf „magische Würfel“ liest sich so.

- Es sei $n \in \mathbb{N}$, und $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$, $c_1, \ldots, c_n$ seien Zahlen. Definiert man dann Zahlen $A_{i,j,k}$ durch $A_{i,j,k} := a_i + b_j + c_k$ für $i, j, k = 1 \ldots, n$, so ist

$$\sum_{i=1}^{n} A_{\pi_1(i),\pi_2(i),\pi_3(i)} = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j + \sum_{k=1}^{n} c_k$$

  für beliebige Permutationen π_1, π_2, π_3 auf $\{1, \ldots, n\}$.

- Umgekehrt: Es seien Zahlen $(A_{i,j,k})_{i,j,k=1,\ldots,n}$ vorgegeben. Es gebe eine Zahl S, so dass

$$\sum_{i=1}^{n} A_{\pi_1(i),\pi_2(i),\pi_3(i)} = S$$

  für beliebige Permutationen π_1, π_2, π_3. Dann kann man Zahlen a_i, b_j, c_k so finden, dass $A_{i,j,k} = a_i + b_j + c_k$ für alle $i, j, k = 1, \ldots, n$ gilt. Auch ist dann

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} b_j + \sum_{k=1}^{n} c_k.$$

Dabei ist die erste Aussage wieder ein Spezialfall von Satz 2.1, für die zweite muss man recht schwerfällig argumentieren: Es ist $a_{\pi_1(1)} := x$, $b_{\pi_2(1)} := y$ (mit beliebigen Zahlen x, y) und $c_{\pi_3(1)} := A_{\pi_1(1),\pi_2(1),\pi_3(1)} - x - y$. Und so weiter.

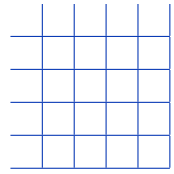
Und wer Tricks für Zauberer in beliebig hochdimensionalen Räumen zur Verfügung stellen möchte, sollte sogar die folgende Verallgemeinerung beweisen:

- Es seien $d, n \in \mathbb{N}$, und für $\delta = 1, \ldots, d$ und $i = 1, \ldots, n$ seien Zahlen a_i^δ gegeben. Setze
$$A_{i_1,\ldots,i_d} := a_{i_1}^1 + a_{i_2}^2 + \cdots + a_{i_d}^d$$
für $i_1, \ldots, i_d = 1, \ldots, n$.
Dann hat $\sum_{i=1}^n A_{\pi_1(i),\ldots,\pi_d(i)}$ den Wert $\sum_{i=1,\ldots,n,\delta=1,\ldots,d} a_i^\delta$ für beliebige Permutationen $\pi_1, \ldots, \pi_d$.

- Und umgekehrt: Haben vorgelegte $A_{i_1,\ldots,i_d}$ die Eigenschaft, dass alle Summen $\sum_{i=1}^n A_{\pi_1(i),\ldots,\pi_d(i)}$ übereinstimmen, so kann man die $A_{i_1,\ldots,i_d}$ als $a_{i_1}^1 + a_{i_2}^2 + \cdots + a_{i_d}^d$ schreiben. Der Beweis ist „im Prinzip“ so wie der von Satz 2.3. Da er aber schreibtechnisch viel aufwändiger ist, soll er hier nicht geführt werden.

Der Zaubertrick

Wir beginnen mit einer Vorbereitung. Dazu wählen wir eine beliebige – vorzugsweise nicht zu große – natürliche Zahl n und zeichnen ein leeres $n \times n$-Raster. Hier ist ein Beispiel mit $n = 4$:



Anschließend bestimmen wir eine „Zielzahl“ Z, wobei es naheliegend ist, dass Z irgendeine Beziehung zur geplanten Vorführung hat (Geburtstag, Hausnummer, Jubiläum). Z wird auf irgendeine Weise als Summe von $2n$ Zahlen $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ geschrieben. Zur Illustration arbeiten wir mit $Z = 50$ und der Darstellung $50 = 2 + 9 + 3 + 5 + 10 + 15 + 2 + 4$.

Die gewählten $2n$ Zahlen werden nun an den Rand des Schemas geschrieben: Die a_i nach links und b_j nach oben. Etwa so:

	10	15	2	4
2				
9				
3				
5				

Und dann werden die 16 noch freien Felder gefüllt: In jedes Feld wird die Summe aus den zwei Randzahlen (links und oben) geschrieben.

	10	15	2	4
2	12	17	4	6
9	19	24	11	13
3	13	18	5	7
5	15	20	7	9

Das alles wurde *vor* der Vorstellung gemacht. Für das Publikum wird das mit den eben berechneten Zahlen gefüllte Zahlenschema noch einmal abgeschrieben, die Randzahlen müssen auf jeden Fall geheim bleiben!

Und nun kann es wie oben beschrieben losgehen. Ein Zuschauer wählt eine Zahl. Die wird unterstrichen, und alle anderen Einträge in dieser Zeile und dieser Spalte werden durchgestrichen. Wurde etwa die 11 gewählt, so würde das Ergebnis so aussehen:

12	17	~~4~~	6
~~19~~	~~24~~	$\underline{11}$	~~13~~
13	18	~~5~~	7
15	20	~~7~~	9

Es geht dann so weiter: Unter den noch nicht unter- oder durchgestrichenen Zahlen eine wählen und unterstreichen, alle anderen Zahlen in dieser Zeile und Spalte durchstreichen. Und das immer wieder, bis alle Zahlen abgearbeitet sind: Das Endergebnis ist am Beginn dieses Abschnitts zu sehen. (Im letzten Schritt wird übrigens nur noch eine Zahl unterstrichen.) Wir wollen einmal annehmen, dass – in dieser Reihenfolge – die Zahlen $11, 17, 7, 15$ gewählt werden.

Wenn man dann die unterstrichenen Zahlen addiert, kommt garantiert 50 heraus. Die Begründung steht in Satz 2.2 (der auf Satz 2.1 zurückgeführt wurde).

Varianten

1. Es wurde schon erwähnt, dass man beliebige innere Kompositionen verwenden kann, die kommutativ und assoziativ sind. Damit sind – zum Beispiel – die Addition und die Multiplikation rationaler, reeller und komplexer Zahlen zugelassen, und man könnte auch mit den Elementen eines Restklassenrings $\mathbb{Z}_k$ zaubern. Für ein Laienpublikum sollte man allerdings natürlichen (evtl. auch ganzen) Zahlen und der Addition bleiben.

Hier ist ein Beispiel, bei dem bei einer Privatfeier im Kollegenkreis (zu einem 65. Geburtstag) komplexe Zahlen eingesetzt wurden:

$18-i$	$9+i$	$8-2i$	$23-2i$	$15-i$
11	$2+2i$	$1-i$	$16-i$	8
$9+2i$	$4i$	$-1+i$	$14+i$	$6+2i$
22	$13+2i$	$12-i$	$27-i$	19
$22-i$	$13+i$	$12-2i$	$27-2i$	$19-i$

2. Das gleiche Prinzip kann auch in einem sehr regelmäßig aussehenden Zahlenquadrat ausgenutzt werden, etwa im Fall $n = 5$ bei

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Man kann es sich auf die vorstehend beschriebene Art entstanden denken, wenn für die b_j die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5$ und für die a_i die Zahlen $0, 5, 10, 15, 20$ eingetragen wurden. Deswegen wird sich als Endergebnis garantiert $1+2+3+4+5+0+5+10+15+20 = 65$ ergeben.

3. Bisher wurde Satz 2.1 „zweidimensional“ umgesetzt. Ganz analog könnte man auch drei (oder noch mehr) Dimensionen verwenden:

– Suche ein $n \in \mathbb{N}$, bereite n^3 durchsichtige $1 \times 1 \times 1$-Würfel vor und füge sie zu einem $n \times n \times n$-Würfel zusammen. Jeder dieser $1 \times 1 \times 1$-Würfel kann durch drei „Koordinaten“ eindeutig beschrieben werden, wobei jede Koordinate von 1 bis n läuft: $W_{i,j,k}$, mit $i, j, k = 1, \ldots, n$.

– Wähle eine beliebige Zielzahl Z und schreibe sie als

$$Z = a_1 + \cdots + a_n + b_1 + \cdots + b_n + c_1 + \cdots + c_n$$

mit $3n$ geeigneten Zahlen a_i, b_j, c_k.

– Ordne jedem $1 \times 1 \times 1$-Würfel $W_{i,j,k}$ die Zahl $a_i + b_j + c_k$ zu. $W_{i,j,k}$ wird damit beschriftet.

– Der Trick geht dann so:

- Ein Zuschauer wählt einen der $1 \times 1 \times 1$-Würfel W_{i_0,j_0,k_0} und unterstreicht die zugeordnete Zahl. In allen anderen $1 \times 1 \times 1$-Würfeln $W_{i,j,k}$ mit

  $$i = i_0 \quad \text{oder} \quad j = j_0 \quad \text{oder} \quad k = k_0$$

  wird die zugeordnete Zahl gestrichen.

- Danach wird unter den $1 \times 1 \times 1$-Würfeln, bei denen die Zahl noch nicht unter- oder durchgestrichen ist, ein Würfel $W_{i_0',j_0',k_0'}$ gewählt, und mit ihm wird genauso verfahren: Zahl unterstreichen und einige durchstreichen.

- Nach n Schritten sind alle Zahlen durch- oder unterstrichen, und die Summe der unterstrichenen wird Z sein.

Die Begründung steht im mathematischen Teil.

Leider ist das nicht praktikabel, denn man kann ja in einen Würfel nicht hineingreifen. Deswegen wollen wir eine andere Visualisierung wählen: *Die dritte Dimension wird durch Farben dargestellt.*

Genauer geht es so:

- Wir wählen eine Zahl n: Es soll – mit einem $n \times n$-Quadrat und n Farben - ein dreidimensionaler Würfel dargestellt werden, bei dem jede Kante n Einheiten lang ist. Wir werden hier mit $n = 4$ arbeiten.

- Dann werden n verschiedene Farben bestimmt: $F_1, \ldots, F_n$. Wir wählen F_1=rot, F_2=blau, F_3=grau und F_4=grün.

- Nun muss man noch Zahlen $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n$ auswählen. Sie sind völlig beliebig, aber die Summe soll gleich einer Zielzahl Z sein. (Statt Zahlen zu addieren kann man auch mit einer beliebigen inneren Komposition arbeiten, für die das Assoziativ- und das Kommutativgesetz gilt.)

  Um konkrete Zahlen vor uns zu haben, werden wir mit $Z = 40$ und den folgenden a_i-b_j-c_k-Zahlen arbeiten:

$$a_1 = 4,\ a_2 = 1,\ a_3 = 3,\ a_4 = 2;$$

$$b_1 = 5,\ b_2 = 1,\ b_3 = 4,\ b_4 = 2;$$

$$c_1 = 8,\ c_2 = 0,\ c_3 = 3,\ c_4 = 7.$$

- Der nächste Schritt besteht darin, ein $n \times n$-Quadrat vorzubereiten. Dabei kommen in das Feld in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte n Zahlen, und zwar die Zahlen $a_i + b_j + c_k$ für $k = 1, \ldots, n$. Dabei wird $a_i + b_j + c_k$ mit der Farbe F_k geschrieben. Damit stehen in diesem Feld n Zahlen in verschiedenen Farben. Damit es unauffällig wirkt, sollten sie so positioniert sein, dass es etwas unregelmäßig aussieht: In manchen Feldern ist die Zahl oben links mit Farbe F_1 geschrieben, in anderen mit Farbe F_3 usw.

  Unsere Tabelle ist nachstehend zu finden. Dabei kam – zum Beispiel – die graue 11 im Feld in der ersten Zeile und der dritten Spalte so zustande: Es ist $i = 1$ (erste Zeile) und $j = 3$ (dritte Spalte); „grau“ ist unsere dritte Farbe (d.h., $k = 3$), es geht also um die Zahl $a_1 + b_3 + c_3 = 4 + 4 + 3 = 11$, die in grau aufzuschreiben ist.

17	9	8	5	15	16	9	14
12	16	13	12	8	11	6	13
13	14	9	10	12	5	11	3
6	9	2	5	13	8	10	6
11	15	11	12	7	15	5	12
8	16	7	4	10	14	13	8
14	7	6	10	13	6	12	11
15	10	3	11	9	14	7	4

- Nun die Spielregel: Ein Zuschauer wählt irgendeine der n^3 Zahlen in der Tabelle. (In unserem Fall sind es $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ Zahlen.) Die bekommt ein Sternchen „*“, und ab sofort sind alle Zahlen in dieser Zeile, in dieser Spalte und in dieser Farbe nicht mehr wählbar. Man könnte sie sicherheitshalber durchstreichen.

Im nächsten Schritt wird eine der noch erlaubten Zahlen gewählt und mit einem Sternchen versehen. Danach sind die entsprechende Zeile, die Spalte und die Farbe nicht mehr wählbar. So geht das immer weiter, bis es keine Wahlmöglichkeiten mehr gibt. (Das ist im letzten, dem n-ten, Durchgang der Fall: Da gibt es nur eine Zahl, die ein „*“ bekommen kann.)

Und wenn man jetzt die mit „*“ gekennzeichneten Zahlen addiert, ergibt sich die Zielzahl $Z = 40$.

4. Das Problem bei der vorigen Variante waren unsere mangelhaft ausgeprägten Visualisierungsmöglichkeiten. Deswegen musste eine Dimension durch Farben dargestellt werden. Ein Wesen mit einer vierdimensionalen Lebenserfahrung könnte direkt mit dem dreidimensionalen Würfel arbeiten, dann da kann er/sie direkt hineingreifen. Ganz entsprechend haben wir im mathematischen Teil schon Zauberertipps für Kollegen in Räumen mit $d + 1$ Dimensionen für beliebig großes d vorbereitet.

Quellen

Der Originaltrick ist „Folklore“, der Charakterisierungssatz 2.3 ist sicher auch bekannt (auch wenn ich ihn nirgendwo gefunden habe), die Farb-Interpretation der dreidimensionalen Variante ist von mir. Sie wurde erstmals in meinem Buch „Der mathematische Zauberstab“ veröffentlicht.

http://www.springer.com/978-3-658-17504-7

Mathematik und Zaubern: Ein Einstieg für Mathematiker

Behrends, E.

2017, XIII, 180 S. 65 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-658-17504-7