

# Statik starrer Körper

Technische Mechanik für Versorgungs-, Energie- und Verfahrenstechnik

Bearbeitet von  
Von Roman Mair

1. Auflage 2017. Buch. 180 S. Kartoniert  
ISBN 978 3 446 45156 8  
Format (B x L): 16,8 x 24,2 cm  
Gewicht: 471 g

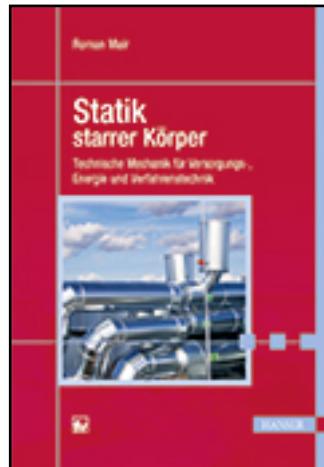
[Weitere Fachgebiete > Technik > Werkstoffkunde, Mechanische Technologie > Statik, Dynamik, Kinetik, Kinematik](#)

schnell und portofrei erhältlich bei



Die Online-Fachbuchhandlung beck-shop.de ist spezialisiert auf Fachbücher, insbesondere Recht, Steuern und Wirtschaft. Im Sortiment finden Sie alle Medien (Bücher, Zeitschriften, CDs, eBooks, etc.) aller Verlage. Ergänzt wird das Programm durch Services wie Neuerscheinungsdienst oder Zusammenstellungen von Büchern zu Sonderpreisen. Der Shop führt mehr als 8 Millionen Produkte.

# HANSER



Leseprobe

Roman Mair

Statik starrer Körper

Technische Mechanik für Versorgungs-, Energie- und Verfahrenstechnik

ISBN (Buch): 978-3-446-45156-8

ISBN (E-Book): 978-3-446-45365-4

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-45156-8>

sowie im Buchhandel.

# Vorwort

Dieses Buch wendet sich an Studierende der Gebäude-, Versorgungs-, Verfahrens-, Energie- und der Chemietechnik. Bücher über Technische Mechanik sind meistens für Maschinenbauer oder Bauingenieure geschrieben. In den oben genannten Fachrichtungen treten mitunter Probleme auf, die in den üblichen Mechanikbüchern nicht behandelt sind. Deswegen ist dieses Buch so konzipiert, dass hier ausgewählte Grundlagen der Statik starrer Körper behandelt werden, die diesen Berufsgruppen im Alltag abverlangt werden.

Die Statik starrer Körper beschreibt das Wesen von Kräften und Momenten. Sie stellt weiter Methoden zur Bestimmung des äußeren und inneren Gleichgewichts von Tragelementen vor. Dabei bleiben Verformungen unberücksichtigt. Obwohl die Rollreibung eigentlich ein Thema der Statik elastischer Körper ist, wird sie unter dem Abschnitt Reibung mit behandelt. Ein besonderes Augenmerk gilt den typischen Tragelementen wie dem Druck- und Zugstab, dem Biegebalken und der rotationssymmetrischen dünnen Schale.

Die Methoden werden hinreichend exakt hergeleitet; Vereinfachungen, genormte Methoden und praktische Kniffe bleiben den Vorlesungen in den anwendungsbezogenen Fächern vorbehalten, bauen aber auf den vorgestellten Grundlagen auf.

Bei den praktischen Berechnungen genügen drei Stellen einer Zahl, denn die Annahmen der aufgeprägten Lasten sind häufig mit größeren Ungenauigkeiten behaftet.

Ein kritischer Blick auf die eigenen Rechenergebnisse schadet keinem Ingenieur. Kann das stimmen? Ist eine Frage, die einen Konstrukteur sein Leben lang begleitet. Aus diesem Grund wurde bei den Rechenbeispielen ein großer Wert auf Kontrollen gelegt.

Das Verständnis der Theorie ist zwar notwendig, um eine sichere Beurteilung von Konstruktionen zu gewährleisten aber keineswegs ausreichend. Vielmehr kommt es in der täglichen Arbeit auf das Abstraktionsvermögen des Berechners an. Nur wenn man aus dem vorliegenden Problem ein passendes statisches Modell idealisieren kann, sind die daraus resultierenden Rechenergebnisse verwertbar. Und genau das ist das Dilemma der Lehrenden. Die vielfältigen praktischen Erfahrungen in der Statik können nicht gelehrt werden, diese muss jeder Einzelne im Berufsleben selbst sammeln.

Ohne regelmäßiges Üben bleibt auch den begabtesten Lernenden die Statik verschlossen. Deshalb ist das Üben des dargebotenen Stoffes unabdingbar.

An der Stelle möchte ich mich beim Carl Hanser Verlag, speziell bei Frau Ute Eckardt und Frau Katrin Wulst, für die Unterstützung bedanken.

# Inhalt

|  |           |
|--|-----------|
| <b>■ Vorwort .....</b>   | <b>5</b>  |
| <b>1 Konstruktionselemente .....</b>   | <b>12</b> |
| 1.1 Form und Beanspruchung .....   | 12        |
| 1.1.1 Kontinua .....   | 12        |
| 1.1.2 Flächentragwerke .....   | 13        |
| 1.1.3 Stabtragwerke .....  | 13        |
| 1.2 Nutzung und Material .....   | 13        |
| <b>2 Kräfte und Momente .....</b>  | <b>14</b> |
| 2.1 Kraftbegriff .....   | 14        |
| 2.1.1 Volumenkräfte .....  | 15        |
| 2.1.2 Oberflächenkräfte .....  | 15        |
| 2.1.3 Linienkräfte .....   | 16        |
| 2.1.4 Einzelkräfte .....   | 17        |
| 2.1.5 Lastannahmen .....   | 18        |
| 2.2 Eigenschaften einer Einzelkraft .....  | 19        |
| 2.2.1 Wirkungslinie .....  | 19        |
| 2.2.2 Mathematische Beschreibung von Kräften .....                                     | 20        |
| 2.2.3 Drehmoment einer Kraft .....   | 22        |
| 2.2.4 Kräftepaar .....   | 25        |
| 2.3 Ersatzkräfte von Kräftesystemen .....  | 26        |
| 2.3.1 Ersatzkraft im zentralen Kräftesystem .....                                      | 26        |
| 2.3.2 Ersatzkraft in einem parallelen Kräftesystem bestehend aus<br>zwei Kräften ..... | 27        |
| 2.3.3 Ersatzkraft in einem Kräftepaar .....  | 28        |
| 2.3.4 Ersatzkraft eines parallelen symmetrischen Kräftesystems .....                   | 29        |
| 2.3.5 Ersatzkraft eines allgemeinen Parallelkräftesystems .....                        | 30        |
| 2.3.6 Ersatzkraft eines allgemeinen Kräftesystems .....                                | 33        |
| 2.3.7 Behandlung von einzelnen Drehmomenten in Kräftegruppen .....                     | 35        |
| 2.4 Zerlegung von Kräften .....  | 36        |
| 2.4.1 Zerlegung einer Kraft in zwei Richtungen .....                                   | 36        |

---

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 2.4.2    | Zerlegung einer Kraft in zwei parallele Kräfte .....            | 37        |
| 2.4.3    | Zerlegung einer Kraft in drei nicht zentrale Richtungen .....   | 38        |
| <b>3</b> | <b>Gleichgewicht .....</b>                                      | <b>39</b> |
| 3.1      | Freiheitsgrade eines Körpers in der Ebene .....                 | 39        |
| 3.2      | Freiheitsgrade eines Körpers im Raum .....                      | 40        |
| 3.3      | Auflagerbedingungen in der Ebene .....                          | 41        |
| 3.3.1    | Bewegliche Lager .....  | 41        |
| 3.3.2    | Kipplager und Gelenke .....                                     | 41        |
| 3.3.3    | Führungen und Einspannungen .....                               | 42        |
| 3.3.4    | Zusammenfassung der zweidimensionalen Auflagerbedingungen ..... | 43        |
| 3.3.5    | Halterungen im Rohrleitungsbau .....                            | 44        |
| 3.3.6    | Statische Bestimmtheit bei ebenen Tragwerken .....              | 45        |
| 3.4      | Gleichgewichtsbedingung .....                                   | 47        |
| 3.5      | Ermittlung der Auflagerreaktionen .....                         | 49        |
| 3.5.1    | Rechnerische Lösung am Einfeldbalken .....                      | 49        |
| 3.5.2    | Zeichnerische Lösung am Einfeldbalken .....                     | 50        |
| 3.5.3    | Rechnerische Lösung am Zweifeldbalken .....                     | 51        |
| 3.6      | Stabilität Starrer Körper .....                                 | 54        |
| <b>4</b> | <b>Schwerpunkt .....</b>  | <b>56</b> |
| 4.1      | Definition .....  | 56        |
| 4.1.1    | Physikalischer Schwerpunkt .....                                | 56        |
| 4.1.2    | Geometrischer Schwerpunkt .....                                 | 56        |
| 4.2      | Schwerpunkt von Punktmassen .....                               | 57        |
| 4.2.1    | Schwerpunkt von ebenen Punktmassen .....                        | 57        |
| 4.2.2    | Schwerpunkt von räumlichen Punktmassen .....                    | 58        |
| 4.2.3    | Schwerpunkt von mehreren Punktmassenhaufen .....                | 59        |
| 4.3      | Schwerpunkte von Kurven und Kurvenzügen .....                   | 60        |
| 4.3.1    | Schwerpunkt einer krummen Kurve .....                           | 60        |
| 4.3.2    | Schwerpunkt von zusammengesetzten Kurvenzügen .....             | 65        |
| 4.4      | Schwerpunkt einer Fläche .....                                  | 68        |
| 4.5      | Schwerpunkt eines Körpers .....                                 | 73        |
| 4.6      | GULDINSche Regeln .....   | 74        |
| 4.6.1    | Berechnung der Mantelfläche von Rotationskörpern .....          | 74        |
| 4.6.2    | Berechnung des Volumens von Rotationskörpern .....              | 75        |
| <b>5</b> | <b>Schnittkräfte .....</b>                                      | <b>76</b> |
| 5.1      | Vom Wesen der Schnittkräfte .....                               | 76        |
| 5.2      | Definition der Schnittkräfte .....                              | 76        |
| 5.3      | Schnittkräfte an Stäben und Balken .....                        | 78        |
| 5.4      | Schnittkraftverläufe am Druck- und Zugstab .....                | 84        |
| 5.4.1    | Funktion der Normalkraftlinie .....                             | 84        |
| 5.4.2    | Lösungen für Standardfälle .....                                | 85        |

---

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 5.5   | Schnittkraftverlauf am geraden Biegebalken .....        | 92 |
| 5.5.1 | Funktion der Querkraftlinie und der Momentenlinie ..... | 92 |
| 5.5.2 | Lösungen für Standardfälle .....                        | 96 |

**6 Ebene Fachwerke ..... 109**

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 6.1   | Bezeichnungen und Tragprinzip .....            | 109 |
| 6.2   | Statische Bestimmtheit .....                   | 110 |
| 6.2.1 | Allgemeine statische Bestimmtheit .....        | 110 |
| 6.2.2 | Äußere statische Bestimmtheit .....            | 110 |
| 6.2.3 | Innere statische Bestimmtheit .....            | 111 |
| 6.3   | Abbrechbare Fachwerke .....                    | 112 |
| 6.4   | Nicht abbrechbare Fachwerke .....              | 113 |
| 6.5   | Nullstäbe .....                                | 113 |
| 6.6   | Berechnung nach dem Knotenpunktverfahren ..... | 114 |
| 6.7   | RITTERSches Schnittverfahren .....             | 117 |
| 6.8   | CREMONA-Plan .....                             | 118 |

**7 Dünnwandige Rotationsschalen ..... 123**

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 7.1   | Geometrische Zusammenhänge .....                          | 123 |
| 7.2   | Gleichgewicht am Flächenelement in Normalenrichtung ..... | 125 |
| 7.3   | Schnittkräfte an typischen Rotationskörpern .....         | 127 |
| 7.3.1 | Torusschale .....   | 127 |
| 7.3.2 | Kugelschale .....   | 130 |
| 7.3.3 | Zylinderschale .....                                      | 131 |
| 7.3.4 | Kegelschale .....   | 132 |

**8 Reibung ..... 134**

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 8.1   | Haftreibung .....                        | 134 |
| 8.1.1 | Reibungskegel, Reibungskeil .....        | 135 |
| 8.1.2 | Selbsthemmung .....                      | 136 |
| 8.2   | Gleitreibung (COULOMBSche Reibung) ..... | 138 |
| 8.2.1 | Hangabtrieb .....                        | 140 |
| 8.2.2 | Keil .....                               | 141 |
| 8.2.3 | Schraube .....                           | 142 |
| 8.2.4 | Seilreibung .....                        | 143 |
| 8.3   | Rollreibung .....                        | 144 |
| 8.4   | Reibung in Schüttgütern .....            | 145 |

**9 Übungsaufgaben ..... 147**

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 9.1   | Kräfte und Momente .....                                       | 147 |
| 9.1.1 | Resultierende Ersatzkraft aus Einzelkraft und Kräftepaar ..... | 147 |
| 9.1.2 | Resultierende Ersatzkraft für paralleles Kräftesystem .....    | 148 |
| 9.1.3 | Kräftezerlegung in zwei Richtungen .....                       | 149 |
| 9.1.4 | Kräftezerlegung in drei Richtungen .....                       | 149 |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 9.2   | Gleichgewicht .....                                      | 150 |
| 9.2.1 | Schiefe Ebene .....                                      | 150 |
| 9.2.2 | Greifer .....  | 151 |
| 9.2.3 | Stapel .....   | 152 |
| 9.3   | Schwerpunkt .....  | 152 |
| 9.3.1 | Schwerpunkt von Punktmassen .....                        | 152 |
| 9.3.2 | Streckenzug .....  | 153 |
| 9.3.3 | Krummlinig umrandete Fläche .....                        | 153 |
| 9.3.4 | Zusammengesetzte Flächen .....                           | 154 |
| 9.3.5 | Zusammengesetzter Körper .....                           | 155 |
| 9.3.6 | GULDINSche Regel .....                                   | 155 |
| 9.4   | Schnittkräfte .....                                      | 156 |
| 9.4.1 | Schnittstellen .....                                     | 156 |
| 9.4.2 | Überkragender Balken mit Einzellast und Gleichlast ..... | 156 |
| 9.4.3 | Balken mit allgemeiner Belastung .....                   | 157 |
| 9.5   | Ebene Fachwerke .....                                    | 158 |
| 9.5.1 | Einfeldträger mit parallelen Gurten .....                | 158 |
| 9.5.2 | Kragträger .....   | 159 |
| 9.6   | Dünnwandige Rotationsschalen .....                       | 159 |
| 9.6.1 | Schnittkräfte im Rohr .....                              | 159 |
| 9.6.2 | Schnittkräfte im Rohrbogen .....                         | 159 |
| 9.6.3 | Behälter mit Halbkugelboden .....                        | 160 |
| 9.6.4 | Behälter mit Klöpperboden .....                          | 160 |
| 9.6.5 | Zylindrischer Behälter mit Füllrohr .....                | 160 |
| 9.7   | Reibung .....  | 161 |
| 9.7.1 | Reibung am Gleitlager einer Rohrleitung .....            | 161 |
| 9.7.2 | Selbsthemmung eines Gleitschuhs .....                    | 162 |
| 9.7.3 | Vergleich Backen- und Bandbremse .....                   | 162 |
| 9.7.4 | Rohrgraben .....   | 163 |

**10 Lösungen .....** **164**

|        |  |     |
|--------|--|-----|
| 10.1   | Kräfte und Momente .....                                       | 164 |
| 10.1.1 | Resultierende Ersatzkraft aus Einzelkraft und Kräftepaar ..... | 164 |
| 10.1.2 | Resultierende Ersatzkraft für paralleles Kräftesystem .....    | 167 |
| 10.1.3 | Kräftezerlegung in zwei Richtungen .....                       | 169 |
| 10.1.4 | Kräftezerlegung in drei Richtungen .....                       | 173 |
| 10.2   | Gleichgewicht .....  | 175 |
| 10.2.1 | Schiefe Ebene .....  | 175 |
| 10.2.2 | Greifer .....  | 177 |
| 10.2.3 | Stapel .....   | 179 |
| 10.3   | Schwerpunkt .....  | 186 |
| 10.3.1 | Schwerpunkt von Punktmassen .....                              | 186 |
| 10.3.2 | Streckenzug .....  | 187 |
| 10.3.3 | Krummlinig umrandete Fläche .....                              | 188 |
| 10.3.4 | Zusammengesetzte Flächen .....                                 | 195 |
| 10.3.5 | Zusammengesetzter Körper .....                                 | 198 |

---

|   |            |
|---|------------|
| 10.3.6 GULDINSche Regel .....                                   | 199        |
| 10.4 Schnittkräfte .....  | 200        |
| 10.4.1 Schnittstellen .....                                     | 200        |
| 10.4.2 Überkragender Balken mit Einzellast und Gleichlast ..... | 206        |
| 10.4.3 Balken mit allgemeiner Belastung .....                   | 212        |
| 10.5 Ebene Fachwerke .....                                      | 218        |
| 10.5.1 Einfeldträger mit parallelen Gurten .....                | 218        |
| 10.5.2 Kragträger .....   | 228        |
| 10.6 Dünnwandige Rotationsschalen .....                         | 232        |
| 10.6.1 Schnittkräfte im Rohr .....                              | 232        |
| 10.6.2 Schnittkräfte im Rohrbogen .....                         | 234        |
| 10.6.3 Behälter mit Halbkugelboden .....                        | 236        |
| 10.6.4 Behälter mit Klöpperboden .....                          | 237        |
| 10.6.5 Zylindrischer Behälter mit Füllrohr .....                | 239        |
| 10.7 Reibung .....  | 241        |
| 10.7.1 Reibung am Gleitlager einer Rohrleitung .....            | 241        |
| 10.7.2 Selbsthemmung eines Gleitschuhs .....                    | 242        |
| 10.7.3 Vergleich Backen- und Bandbremse .....                   | 243        |
| 10.7.4 Rohrgraben .....   | 247        |
| <b>Index .....</b>  | <b>250</b> |

# 3

## Gleichgewicht

Ausgehend von den Bewegungsmöglichkeiten eines Körpers werden fixierende vorerst noch unbekannte Kräfte, sogenannte Auflagerreaktionen, angesetzt und diese dann so bestimmt, dass die Resultierende der Belastungen und Auflagerreaktionen verschwindet.

### ■ 3.1 Freiheitsgrade eines Körpers in der Ebene

Will man das ebene Dreieck ABC in Bild 3.1 aus der Position 1 in die Position 3 verbringen, so kann das durch eine Verdrehung (Rotation) um den Winkel  $\Delta\alpha$  in die Zwischenposition 2 und eine anschließende Verschiebung (Translation) in die  $x$ -Richtung um  $\Delta x$  und  $y$ -Richtung um  $\Delta y$  in die gewünschte Position 3 geschehen.

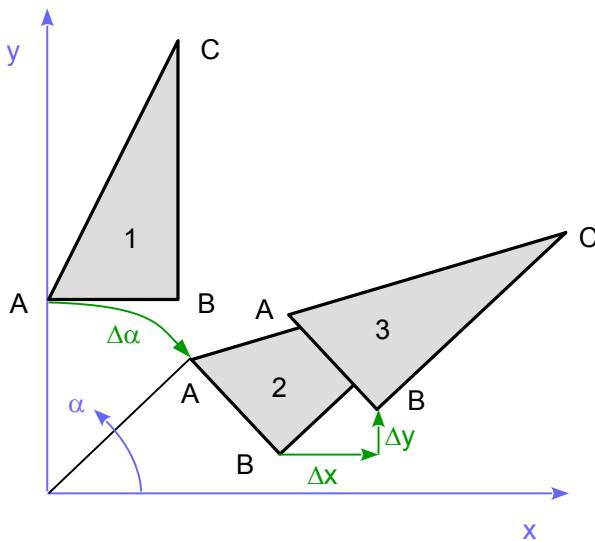


Bild 3.1: Die Freiheitsgrade der Ebene

Translationen werden durch Kräfte im Schwerpunkt und Rotationen durch Momente verursacht. Die unabhängigen Bewegungsmöglichkeiten eines starren Körpers nennt man Freiheitsgrade. Eine ebene starre Scheibe hat in seiner Ebene zwei Freiheitsgrade der Translation und einen Freiheitsgrad der Rotation.

Die Reihenfolge der Transformationsarten – Rotation vor Translation oder Translation vor Rotation – ist nicht gleichgültig.

## ■ 3.2 Freiheitsgrade eines Körpers im Raum

Ein dreidimensionaler Körper hat im Raum drei Freiheitsgrade der Translation (siehe Bild 3.2) und drei Freiheitsgrade der Rotation.

Genauso wie für die allgemeine Translation des Punktes A drei unterschiedliche Verschiebungen  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  und  $\Delta z$  nötig sind, benötigt man für eine allgemeine Rotation auch drei Drehwinkel um  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse.

Die Reihenfolge der Transformationsarten – Rotation vor Translation oder Translation vor Rotation – ist auch hier nicht gleichgültig. Die Reihenfolge der Translationen ist vertauschbar, die der Rotationen nicht.

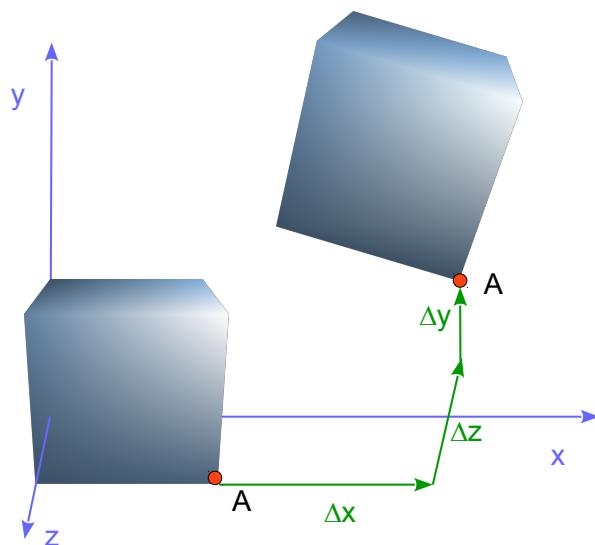


Bild 3.2: Die Freiheitsgrade des Raumes

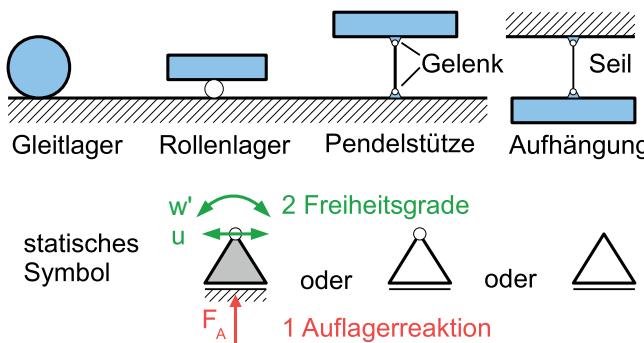
## ■ 3.3 Auflagerbedingungen in der Ebene

### 3.3.1 Bewegliche Lager

Das bewegliche Lager in Bild 3.3 unterbindet die Translation quer zum Auflager. Dieses Lager kann auch schräg angeordnet sein. Dann ist die Translation senkrecht zu der Richtung in die das Lager ausweichen kann unterbunden. Das kann bevorzugt bei Pendelstützen vorkommen.

Die Translation quer zur unterbundenen Richtung und eine Rotation ist weiterhin möglich.

Dieses Auflager besitzt eine Festhaltung (Fesselung) und zwei verbliebene Freiheitsgrade.



**Bild 3.3:** Verschiebliches Kipplager

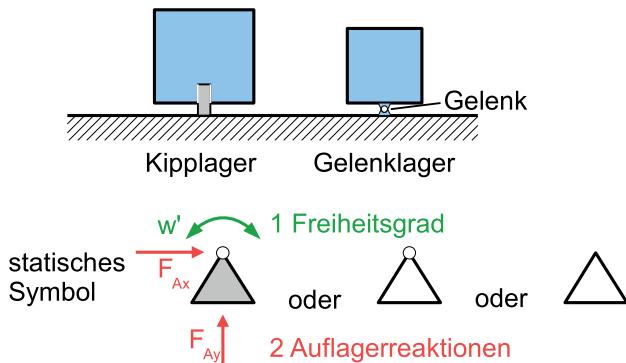
Im Maschinenbau wird der Ausdruck Gleitlager auch für Auflager von rotierenden Wellen benutzt. Das trifft aber nicht die Lagerbedingungen des gleichlautenden Lagers in statischen Systemen.

### 3.3.2 Kipplager und Gelenke

Das Gelenk und das Kipplager, wie sie in Bild 3.4 dargestellt sind, unterbinden die Translationen in alle Richtungen. Wenn das Lager schräg eingebaut wird, ändert das nichts an der Wirkungsweise.

Eine Rotation ist weiterhin möglich.

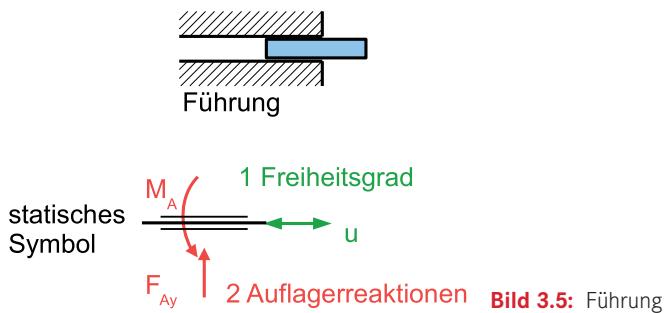
Dieses Auflager besitzt zwei Festhaltungen (Fesselungen) und einen verbleibenden Freiheitsgrad der Rotation.

**Bild 3.4:** Festes Kipplager

### 3.3.3 Führungen und Einspannungen

Bei einer Führung (vgl. Bild 3.5) wird der Freiheitsgrad der Translation quer zur Führung und der Freiheitsgrad der Rotation unterbunden. Ein Freiheitsgrad der Translation entlang der Führung bleibt erhalten.

Führungen müssen nicht als gleitende Lager realisiert werden, sondern können auch als Rollen oder Kugellager, wie beispielsweise bei Auszügen von Schubläden, ausgeführt sein.



Die Einspannung (vgl. Bild 3.6) dagegen unterbindet alle Bewegungsmöglichkeiten.

Diese Lagerbedingungen findet man bevorzugt bei abstehenden Bauteilen wie Konsolen oder Balkonen.

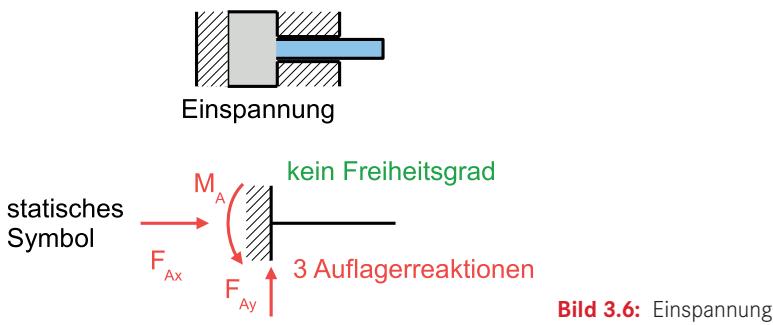


Bild 3.6: Einspannung

### 3.3.4 Zusammenfassung der zweidimensionalen Auflagerbedingungen

Die wichtigsten Arten von Lagern, sind mit ihren Reaktionskräften in Tabelle 3.1 aufgeführt.

Tabelle 3.1: Zweidimensionale Auflagerbedingungen

| Bezeichnung                  | Symbol | Wertigkeit | Reaktionskräfte |
|------------------------------|--------|------------|-----------------|
| Gleitlager (Loslager)        |        | 1          |                 |
| Pendelstütze                 |        | 1          |                 |
| Gelenkiges Lager (Festlager) |        | 2          |                 |
| Parallelführung              |        | 2          |                 |
| Linearführung (Schiebehülse) |        | 2          |                 |
| Einspannung                  |        | 3          |                 |

### 3.3.5 Halterungen im Rohrleitungsbau

Im Rohrleitungsbau werden Auflager allgemein als Halterungen bezeichnet.

**Tabelle 3.2:** Halterungen von Rohrleitungen

| Beschreibung   | Symbol  |
|--|---|
| Jede Rohrleitung muss durch mindestens einen Hauptfestpunkt (HFP) lagetreu gehalten werden. Hauptfestpunkte und Zwischenfestpunkte (ZFP) entsprechen einer Einspannung (Bild 3.6) oder je nach Konstruktion einem Kipplager (Bild 3.4).  | <br>HFP<br>ZFP |
| Gleitfestpunkte (GFP) erlauben eine axiale Translation. Ob eine Behinderung der Verdrehung zusätzlich vorliegt, muss aus den Konstruktionszeichnungen abgelesen werden. Wenn die Rotation unterdrückt ist, entspricht diese Halterung dem Auflagertyp Führung in Bild 3.5, andernfalls dem Typ in Bild 3.3.  |   |
| Die Halterungen Auflager (AL) und  | <br>AL         |
| Rollenlager (RL) entsprechen dem Auflagertyp Gleitlager in Bild 3.3.   | <br>RL         |
| Die Halterung Führungslager (FL) entspricht dem Auflagertyp Führung in Bild 3.5.   | <br>FL         |
| Federhänger (FH) sind Halterungen, die hauptsächlich im Rohrleitungsbau vorkommen. Man verwendet sie bei warmgehenden Leitungen die beweglich verlegt werden. Warmgehend sind Rohrleitungen, bei denen sich die Temperaturen während unterschiedlicher Betriebsarten ändern. Die Auflagerreaktion ist abhängig von der Einsenkung der Rohrleitung. Federhänger verwendet man z.B. zur Aufhängung von kompletten Dampferzeugern im kalten Gerüst. Sie sind näherungsweise mit Pendelstützen in Bild 3.3 vergleichbar. | <br>FH         |
| Konstanthänger (KH) lassen, ähnlich wie Federhänger, axiale und laterale (quer zur Rohrrachse) Bewegungen zu. Im Gegensatz zum Federhänger bleibt beim Konstanthänger, unabhängig von der Senkung der Rohrleitung, die Auflagerreaktion konstant. Die Rohrleitung wird an dieser Stelle immer mit der eingestellten Kraft unterstützt. Auch sie sind näherungsweise mit Pendelstützen in Bild 3.3 vergleichbar.  | <br>KH       |

## ■ 10.3 Schwerpunkt

### 10.3.1 Schwerpunkt von Punktmassen

#### Aufgabe

Erde und Mond rotieren näherungsweise um einen gemeinsamen Schwerpunkt.

Masse der Erde:  $5,9736 \cdot 10^{24}$  kg

Masse des Mondes:  $0,07349 \cdot 10^{24}$  kg

Abstand der Schwerpunkte Erde - Mond: 384 400 km

Radius der Erde: 6371 km

Bestimmen Sie:

1. den gemeinsamen Schwerpunkt von Erde und Mond (gemessen vom Schwerpunkt der Erde) und
2. das Verhältnis Erdradius zu Abstand gemeinsamer Schwerpunkt.

#### Lösung

Der Abstand des Schwerpunktes zu einem frei wählbaren Punkt ergibt sich aus nachfolgenden Formeln:

$$x_s = \frac{\sum x_i \cdot M_i}{\sum M_i}, \quad y_s = \frac{\sum y_i \cdot M_i}{\sum M_i} \text{ und } z_s = \frac{\sum z_i \cdot M_i}{\sum M_i}.$$

In Tabelle 10.1 ist der Koordinatenursprung im Mittelpunkt der Erde.

**Tabelle 10.1:** Schwerpunkt für Punktmassen

| Schwerpunkt für Punktmassen |              |              |              |              |                     |                     |                     |
|-----------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Nr.                         | $M_i$        | $x_{S,i}$    | $y_{S,i}$    | $z_{S,i}$    | $M_i \cdot x_{S,i}$ | $M_i \cdot y_{S,i}$ | $M_i \cdot z_{S,i}$ |
| 1                           | $5,9736E+24$ | $0,0000E+00$ | $0,0000E+00$ | $0,0000E+00$ | $0,0000E+00$        | $0,0000E+00$        | $0,0000E+00$        |
| 2                           | $7,3490E+22$ | $3,8440E+05$ | $0,0000E+00$ | $0,0000E+00$ | $2,8250E+28$        | $0,0000E+00$        | $0,0000E+00$        |
| Summe                       | $6,0471E+24$ |              |              |              | $2,82E+28$          | $0,00E+00$          | $0,00E+00$          |
| Schwerpunkt                 |              | $4,6716E+03$ | $0,0000E+00$ | $0,0000E+00$ |                     |                     |                     |

Das Verhältnis Erdradius zu Abstand gemeinsamer Schwerpunkt beträgt  $6371 \text{ km} / 4671 \text{ km} = 1,364$ .

### 10.3.2 Streckenzug

#### Aufgabe

In Bild 10.23 ist vereinfacht ein Z-Profil mit gleicher Wanddicke dargestellt.

Bestimmen Sie von dem Streckenzug die Schwerpunktskoordinaten  $x_s$  und  $y_s$ .

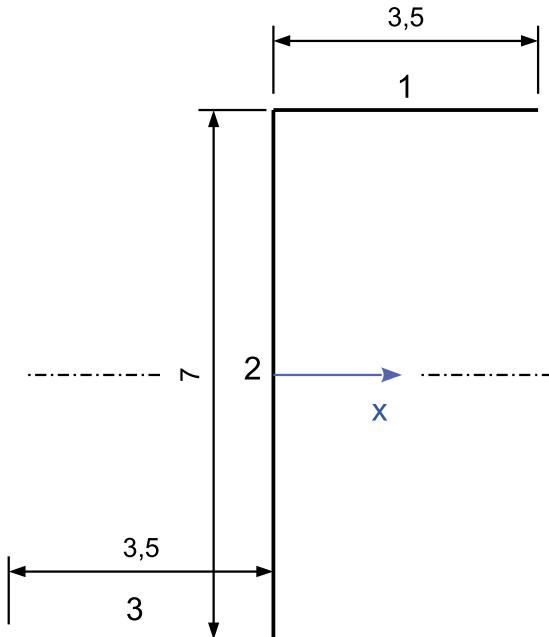


Bild 10.23: Stahlprofil

#### Lösung

Zur Berechnung des Gesamtschwerpunktes wird der Linienzug in Teile zerlegt, deren Teilschwerpunkte leicht zu bestimmen sind (vgl. Bild 10.24), und ein geeignetes Koordinatensystem gewählt. Ein geeignetes Koordinatensystem ist dasjenige, bei dem möglichst viele Teilschwerpunkte auf den Koordinatenachsen liegen.

Die Schwerpunkte werden nach folgenden Gleichungen

$$x_s = \frac{\sum_i^n L_i \cdot x_{s,i}}{\sum_i^n L_i} \quad \text{und} \quad y_s = \frac{\sum_i^n L_i \cdot y_{s,i}}{\sum_i^n L_i}$$

bestimmt.

In Tabelle 10.2 ist der Koordinatenursprung im Mittelpunkt des Steges (senkrechter Teil des Profils).

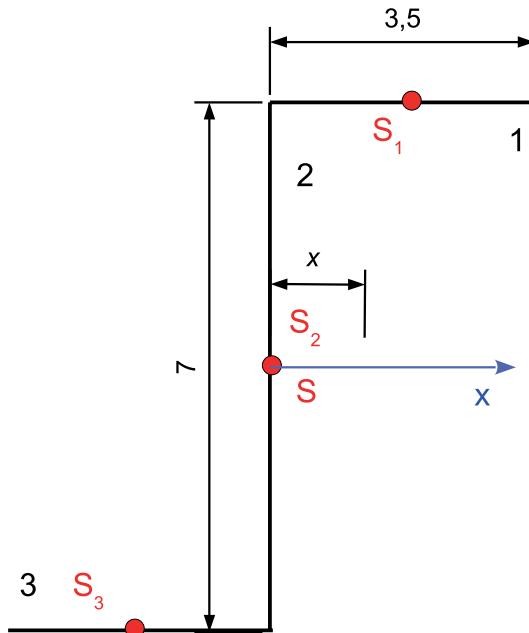


Bild 10.24: Teilschwerpunkte

Tabelle 10.2: Schwerpunkt für Z-Profil

| Schwerpunkt für Linienzüge |       |           |           |           |                 |                 |                 |
|----------------------------|-------|-----------|-----------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Nr.                        | $L_i$ | $x_{S,i}$ | $y_{S,i}$ | $Z_{S,i}$ | $L_i * x_{S,i}$ | $L_i * y_{S,i}$ | $L_i * Z_{S,i}$ |
| 1                          | 3,50  | 1,75      | 3,50      |           | 6,13            | 12,25           |                 |
| 2                          | 7,00  | 0,00      | 0,00      |           | 0,00            | 0,00            |                 |
| 3                          | 3,50  | -1,75     | -3,50     |           | -6,13           | -12,25          |                 |
| Summe                      | 14,00 |           |           |           | 0,00            | 0,00            |                 |
| Schwerpunkt                |       | 0,000     | 0,000     |           |                 |                 |                 |

Der Abstand des Schwerpunktes  $S$  in Mitte Steg des Z-Profil beträgt  $x_S = 0 \text{ cm}$  und  $y_S = 0 \text{ cm}$ . Das war zu erwarten, denn die statischen Flächenmomente der Flansche (Blätter senkrecht zum Steg) heben sich wegen unterschiedlicher Vorzeichen in beide Richtungen auf.

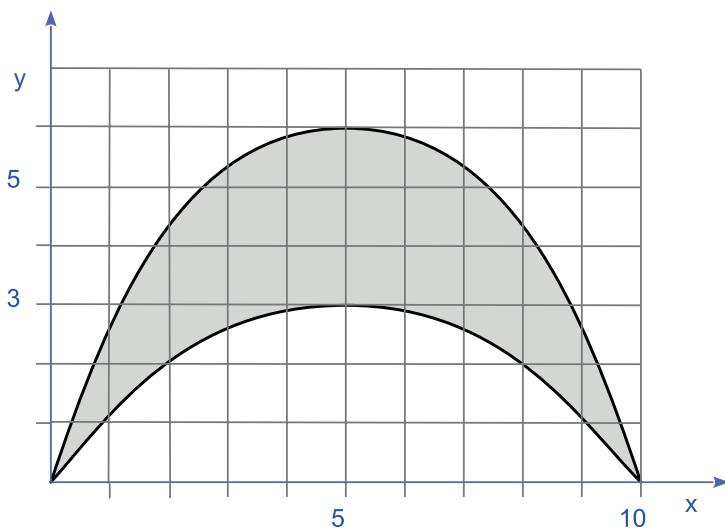
### 10.3.3 Krummlinig umrandete Fläche

#### Aufgabe

Die Fläche in Bild 10.25 ist von zwei Kurven 2. Ordnung (quadratische Parabeln) umrandet.

Bestimmen Sie die Schwerpunktskoordinaten in:

1.  $x$ -Richtung und
2.  $y$ -Richtung.



**Bild 10.25:** Umrandung mit Parabel

### Lösung

1. Der Schwerpunktabstand in  $x$ -Richtung ergibt sich aus der Symmetrie zu  $x_s = 5 \text{ cm}$ .
2. Die Funktion der Parabeln ist allgemein mit

$$y = f(x) = -\frac{b}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot x \cdot (x - a) \text{ gegeben.}$$

Wegen  $f(x=0) = 0$  muss der Faktor  $x$  und wegen  $f(x=a) = 0$  muss der Faktor  $(x-a)$  in der Formel enthalten sein. Außerdem wird der Koeffizient so gesucht, dass  $f(x=a/2) = b$  gilt.

# Index

## A

Abzählkriterium, statische Bestimmtheit 47  
Anfangswert 85  
Aufhängung 41  
Auflager 41  
Auflagerreaktion 39, 49, 76  
Auftriebsschwerpunkt 56  
axial 44

## B

Balken 13  
Balkenabschnitt  
– belastungloser 96  
– Einzellast 97  
– Einzelmoment 101  
– Gleichlast 102  
– Trapezlast steigend 104  
Biegebalken 92  
Biegemoment 78  
Bilanzraum 78

## C

Cullmannsche Gerade 38

## D

Dichte 15  
Doppelintegral 69  
Druck 16

## Druckstab 84

Durchhang 104, 106 ff.

## E

Einfeldbalken 50  
Einspannung 42  
Einzelmoment 80  
Erddruckkraft 145  
Ersatzkraft 28f., 32, 34, 57

## F

Fachwerk 109  
– abbrechbares 112  
– äußere statische Bestimmtheit 110  
– Cremona-Plan 118  
– Gleichungssystem 115  
– innere statische Bestimmtheit 111  
– Knotenpunktverfahren 114  
– nichtabbrechbares 112  
– Nullstab 113  
– Ritterscher Schnitt 117  
– statische Bestimmtheit 110  
Fachwerkträger 109  
Faltwerk 13  
Federhänger 44  
Fesselung 41  
Festhaltung 41

## Fläche

– drucktragende 132  
– spannungstragende 132  
Flächenmoment 1. Ordnung 68

Flächentragwerke 13  
Flaschenzug 54  
Freiheitsgrad 40  
Führung 42  
Führungsgeber 44

## G

Gelenk 41, 51  
Gelenkkräfte 51  
Gleichgewicht 47  
Gleichgewichtsbedingung 49  
Gleichgewichtsgruppe 48, 78  
Gleichlast 80, 94  
Gleitfestpunkt 44  
Gleitlager 41  
Gleitreibungskoeffizient 138  
Gravitationszentrum 56  
Guldinsche Regel 74

## H

Haftreibungskoeffizient 134, 138  
Haftzahl 134

- Halterung 44  
 Hangabtriebskraft 135, 140  
 Hauptfestpunkt 44  
 Hebel 68  
 Hebelarm 22, 61
- K**
- Keil 141  
 Kipplager 41  
 Knotenpunktplatte 109  
 Kompensator  
   - Angularkompensator 46  
   - Axialkompensator 46  
   - Lateralkompensator 46  
 Konstanthänger 44  
 Kontinuum 12  
 Koordinate, normierte 104  
 Koordinatensystem 140  
   - kartesisches 21  
   - Polarkoordinaten 64  
   - Toruskoordinaten 123  
 Koordinatentransformation 64, 78  
 Kraft 14  
   - Einzelkraft 19  
   - Ersatzkraft 14, 26  
   - Komponenten 20f.  
   - Kräftepaar 25, 28  
   - Linienkraft 16  
   - Oberflächenkraft 15  
   - resultierende 26  
   - teilresultierende 34  
   - Volumenkraft 15  
   - Zerlegung 36f.  
 Kräftesystem  
   - paralleles 27  
   - symmetrisches 29  
   - zentrales 26  
 Kurvenzug 65
- L**
- Lager  
   - bewegliches 41
- Gleitlager 41  
   - Kipplager 44  
 Last  
   - Eigengewicht 18  
   - Eislast 18  
   - Flächenlast 18  
   - Linienlast 17  
   - Nutzlast 18  
   - Schneelast 18  
   - Verkehrslast 17  
   - Windlast 18  
 Lastannahmen 18  
 Lasteinleitung 20  
 lateral 44
- M**
- Massenmittelpunkt 56  
 Moment 14  
   - Biegemoment 77  
   - Drehmoment 22, 29, 35  
   - Einzelmoment 101  
   - Kippmoment 55  
   - Richtungssinn 23  
 Momentenlinie 96
- N**
- Normalkraft 85  
 Normalkraftlinie 85  
 Normalkraft Reibung 135  
 Normalkraftverlauf 86
- P**
- Pappus, Satz von 74  
 Pendelstütze 41  
 Platten 13  
 Polplan 30, 33  
 Polstrahlen 31, 33  
 Prinzip von St. Venant 20
- Q**
- Querkraft 93
- R**
- Rahmen 13  
 Reibung  
   - Euler-Eytelwein-Formel 144  
   - Riemen 143  
   - Schleppspannung 143  
   - Schüttgüter 145  
   - Seil 143  
 Reibungsbeiwert 134  
 Reibungskegel 135  
 Reibungskeil 135  
 Reibungskraft 134, 140  
   - Rohrleitung 87  
 Rohrkrümmer 129  
 Rohrleitung 44, 87, 90  
 Rollenlager 41, 44  
 Rollreibung 144  
 Rotation 39  
 Rotationskörper  
   - Mantelfläche 75  
   - Volumen 75
- S**
- Schale 13, 123  
   - Breitenkreis 124  
   - Hauptkrümmungsradius 124  
   - Kegelschale 132  
   - Kugelschale 130  
   - Längenkreis 124  
   - Rotationsschale 123  
   - Torusschale 123, 127  
   - Überdruck 125  
   - Zylinderschale 131  
 Scheiben 13  
   - Fachwerkscheiben 112  
 Schnittfläche 77  
 Schnittgröße 76  
 Schnittkraft 76  
   - äußere Lasten 76  
   - Horizontalkraft 78  
   - Normalkraft 77  
   - Querkraft 77

- schnittresultierende 77  
 - Vertikalkraft 78  
 Schnittufer 77, 84  
 Schraube 142  
 Schwerebene 58  
 Schwerezentrum 56  
 Schwerlinie 57  
 Schwerpunkt 56  
 - Fläche 68  
 - Körper 73  
 - Kurve 61  
 - Punktmasse 57  
 - Schwerlinie 71  
 - Symmetrielinie 71  
 Schwerpunktabstand 61  
 Seil 13  
 Seileck 30  
 Seileckverfahren 30, 33  
 Seilstrahlen 31, 33  
 Selbsthemmung 136, 141  
 Silo 18

Stab 13  
 - Eigengewicht 88  
 - Einzellast 85  
 - Wärmeausdehnung Rohrleitung 90  
 - Zentrifugalkraft 91  
 Stabilität 54  
 Stabkraft 109  
 statisch  
 - bestimmt 45  
 - überbestimmt 45  
 - unbestimmt 45  
 statisches Flächenmoment 69  
 statisches Moment 68  
 St. Venant, Prinzip von 20  
 Superposition 19

## T

Temperatureinwirkung 18  
 Trägerrost 13  
 Translation 39

## V

Vektor  
 - frei 20  
 - linienflüchtig 20  
 - Ortsvektor 20  
 Verdrehung 39  
 Verschiebung 39

## W

Wärmeausdehnung 87  
 Wärmespannung 18  
 warmgehend 44  
 Wechselwirkungsgesetz 78  
 Wirkungslinie 20, 25ff., 31, 33, 35, 37f., 46, 48, 50, 60, 77, 106, 138

## Z

Zugstab 84  
 Zweifeldbalken 52  
 Zwischenfestpunkt 44  
 Zwischengelenk 45  
 Zwischenlagerbedingung 45