1 Funktionen

In diesem Kapitel werden wir den zentralen mathematischen Begriff der Funktion etwas genauer beleuchten. Wir werden an diesem Beispiel erläutern, warum exakt definierte mathematische Begriffe überhaupt hilfreich sind. Unser Ziel ist dabei, Fragestellungen zu präsentieren, die durch den Funktionsbegriff und Eigenschaften von Funktionen unmissverständlich formuliert werden können.

1.1 Wozu Funktionen?

Stellen Sie sich vor, Sie betreiben einen kleinen Catering-Service. Sie möchten auf einer Uni-Veranstaltung belegte Brötchen verkaufen. Am Ende des Tages interessieren Sie sich für eine Frage am meisten:

Beispielfrage:

Wie groß ist mein Gewinn gewesen?

Jeder mit ein wenig Fingerspitzengefühl wird zunächst einmal antworten: Kommt drauf an. Und das ist genau der Kern von Funktionen: Funktionen geben an, wovon genau eine Größe (hier: der Gewinn) abhängt und wie (Formel, Tabelle, Grafik, ...).

Ein weiteres Beispiel:

Beispielfrage:

Wie viel kostet die Produktion von x Brötchen?

Es ist klar, dass es nützlich ist, diese Information in kompakter Form zu haben, damit man nicht für jede Produktionsmenge sich wieder völlig neue Gedanken über die Produktionskosten machen muss. Liefert das Controlling z. B. eine Kostenfunktion

$$K(x) = 100\,\mathrm{GE} + x \cdot 1{,}5\,\mathrm{GE/ME},$$

so können wir für jede vernünftige Produktionsmenge x die Kosten $K(x)$ leicht berechnen.

Noch ein Beispiel:

Beispielfrage:

Wie viele Brötchen werden bei einem Preis von p nachgefragt?

Wenn hier das Marketing eine Nachfragefunktion der Art

$$N(p) = 60\,\mathrm{ME} - p \cdot 10\,\mathrm{ME/GE}$$

liefern könnte, so hätte man nützliche Informationen über die bestmögliche Preisfestsetzung in sehr kompakter Form. Wie man an eine Nachfragefunktion kommt, die auch nur annähernd zutrifft, ist nicht unser Thema: Wichtig ist, dass es sehr nützlich wäre, sie zu haben. Funktionen sind also unsere Freunde, auch wenn sie nicht immer einfach zu gewinnen sind.

1.2 Mathematische Definition einer Funktion

In der Mathematik ist es üblich, Einheiten wie GE, ME, ZE, … immer außerhalb der mathematischen Erwägungen explizit anzugeben. Es wird angenommen, dass man sich über die Einheit einer jeden Größe geeinigt hat und dass diese für die gesamte Rechnung gilt. Daher wollen wir ab diesem Abschnitt zur Vereinfachung der Notation auf explizite Einheiten in mathematischen Formeln verzichten.

Wir wollen einmal zusammenstellen, was wir uns von einer Funktion alles wünschen sollten. In unserem Brötchen-Catering-Beispiel: Der Gewinn am Ende des Tages hängt natürlich von den Einnahmen ab. Würden wir nun sagen, der Gewinn ist in unserem Beispiel eine Funktion der Einnahmen, so hieße das streng genommen nicht nur, dass der Gewinn von den Einnahmen abhängt, sondern sogar dass er *nur* von den Einnahmen abhängt und *von nichts sonst.*[1] Das wäre – wenn es denn stimmen würde – eine wertvolle Information: In diesem Falle müsste man sich stets nur um das Geldzählen in der Kasse kümmern, um den Gewinn zu ermitteln. Wie einfach wären dann doch Steuererklärungen!

Wir halten fest:

Merksatz:

Die Aussage, eine (abhängige) Größe y ist eine Funktion einer (unabhängigen) Größe x bedeutet, dass y nur von x abhängt und von nichts sonst.

Wie würde uns auffallen, dass der Gewinn unserer Unternehmung nicht eine Funktion (nur) des Erlöses ist? Zum Beispiel dadurch, dass wir auf zwei Veranstaltungen gleichhohe Erlöse hatten, aber die Gewinne am Ende des Tages unterschiedlich waren. Zum Beispiel haben wir bei einer Veranstaltung die Butter billiger bekommen und konnten daher die Brötchen billiger produzieren. Da wir von den Einnahmen ja noch die Kosten decken müssen, haben wir bei geringeren Kosten natürlich einen höheren Gewinn bei gleichen Einnahmen. Wir haben also zwei Paare von jeweils gemeinsam beobachteten Größen (E, G_1) und (E, G_2) aufgespürt mit $G_1 \neq G_2$. Wenn unterschiedliche Gewinne bei gleichem Erlös beobachtet werden können, dann muss der Gewinn also noch von etwas anderem

[1] Trotzdem wird oft die formell unkorrekte aber praktische Sprechweise »f ist eine Funktion von x_1; ferner ist f eine Funktion von x_2; ferner ist f eine Funktion von x_3, …« angewandt, indem man die Abhängigkeiten nach und nach auf diese Weise aufzählt. Man meint dann mit »f ist eine Funktion von x_1«, dass f eine Funktion von x_1 ist *und eventuell noch von anderen Größen.*

abhängen (z. B. den Kosten), und wir können nicht mehr sagen, der Gewinn ist eine Funktion (nur) der Einnahmen.

In ähnlicher Weise hängt die vom Bruttolohn abgezogene Lohnsteuer nicht nur vom Bruttoeinkommen ab, sondern auch von der Steuerklasse. Denn die sechsköpfige Familie Vielkind bekommt bei gleichem Bruttolohn weniger abgezogen als der Single Walter Nurfürsich. Somit ist der Lohnsteuerabzug keine Funktion (nur) vom Bruttolohn. Im Gesetz drückt sich das durch mehr als eine Tabelle (= Funktionsvorschrift) aus, im Wesentlichen für jede Steuerklasse eine.

Wir halten fest: Die Tatsache, dass y überhaupt eine Funktion von x ist, kann formell ausgedrückt werden durch:

Merksatz:

Eine abhängige Größe y ist genau dann eine Funktion einer unabhängigen Größe x, wenn es zu jedem x genau ein Paar zusammengehöriger (x, y) gibt. Das zu x eindeutige y wird dann mit $f(x)$ bezeichnet.

Also enthält eine Funktion schonmal eine qualitative Information über Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Größen. Aber eine Funktion muss noch mehr leisten: Sie muss genau spezifizieren, wie die eine von der anderen Größe abhängt. Mit anderen Worten: Sie muss uns zu jedem *vernünftigen* Wert der unabhängigen Größe den *eindeutigen* dazugehörigen Wert der abhängigen Größe liefern. Das kann mit einer Tabelle geschehen, aber auch mit einer mathematischen Formel.

In unserem Brötchen-Catering-Beispiel: Wir wissen schon, dass der Gewinn G von den Einnahmen E und von den Kosten K abhängt. Um die Gewinnfunktion anzugeben, müssen wir nun für jedes Paar aus Einnahmen und Kosten den Gewinn hinschreiben. Uns fällt gleich ein, dass Einnahmen minus Kosten den Gewinn ergeben, und somit können wir die Gewinnfunktion, die von Einnahmen und Kosten abhängt, mit einer Formel schreiben:

$$G(E, K) = E - K\,.$$

Reicht es nun, um eine Funktion f von x anzugeben, einfach eine Formel für $f(x)$ hinzuschreiben? Schauen wir auf ein anderes Beispiel. Nehmen wir an, unsere Kosten hängen nur von der Anzahl der produzierten Brötchen ab, da wir langfristige Lieferverträge für alle Rohstoffe haben. In Anwendung des bereits Gelernten: Die Kosten K sind also eine Funktion der Produktionsmenge x. Nehmen wir an, dass wir pro Brötchen 1 GE/ME Kosten haben, aber auch noch Fixkosten von 100 GE pro Veranstaltung. Eine Formel für die Kostenfunktion kann dann wie folgt angegeben werden:

$$K(x) = 100\,\mathrm{GE} + x \cdot 1\,\mathrm{GE/ME}\,.$$

Reicht das? Stimmt diese Formel immer? Was ist mit $x = -2\,\mathrm{ME}$? Irgendwie ist das Unsinn. Für unsinnige (hier: negative) Produktionsmengen x gibt es gar keine zugehörigen Kosten. Dann ist es auch nicht sinnvoll, dass wir für unsinnige x eine Formel für die Kosten hinschreiben. Manchmal ist die Unsinnigkeit von Werten offensichtlich, und es bedarf vielleicht keiner Aufklärung. Manchmal ist der Geltungsbereich einer Formel aber auch nicht so offensichtlich. Zum Beispiel kann es ja sein, dass die Kostenformel für Produktionmengen oberhalb von 1000 ME überhaupt nicht mehr stimmt, weil die Produktionsmittel für so eine große Produktion gar nicht mehr ausreichen. Dann sollten wir demjenigen, der unsere Funktion verwenden will, das mitteilen.

Wir wollen also zusätzlich zur Formel noch die vernünftigen Werte für die unabhängige Größe spezifizieren. Streng genommen können wir auch keine Achtel-Brötchen produzieren, so dass die Formel nur für ganzzahlige, nicht-negative Produktionsmengen x bis zur Höchstproduktion 1000 ME gilt, die mit unseren Produktionsmitteln überhaupt möglich ist.[2]

Eine vernünftige Einschränkung der Gültigkeit muss also bei der Spezifikation einer Funktion f mit der Formel zusammen angegeben werden. Die Menge der vernünftigen unabhängigen x für eine Funktion f wird mathematisch ausgedrückt als der Definitionsbereich D_f der Funktion f.

Analog wird die Menge der vernünftigen Werte für die abhängige Größe $f(x)$ einer Funktion f mathematisch ausgedrückt durch den Wertebereich W_f der Funktion f. Für die Nachfragefunktion unseres Brötchenverkaufs, die jedem festgesetzten Verkaufspreis für ein Brötchen eine Nachfrage zuordnet, ist unmittelbar einsichtig, dass eine negative Nachfrage keinen Sinn macht. Also sollte der Wertebereich der Nachfragefunktion nur die Menge der nicht-negativen Zahlen sein (bei kleinen Nachfragen sogar nur die Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen).

Wenn wir uns also in die Lage des Controllings versetzen und wir eine Kostenfunktion für eine Brötchenproduktion angeben sollen, dann wird von uns Folgendes erwartet:

1. Die vernünftigen Produktionsmengen (Definitionsbereich).
2. Die vernünftigen Kostenwerte (Wertebereich).
3. Eine Vorschrift, die jeder vernünftigen Produktionsmenge den eindeutigen zugehörigen Kostenwert zuordnet (Funktionsvorschrift).

In mathematischer Sprache kann man das so ausdrücken:

Definition 1.2.1 (Funktion)**.** Eine Funktion f ist ein Tripel (D_f, W_f, G_f) mit

(i) D_f ist der Definitionsbereich von f.

(ii) W_f ist der Wertebereich von f.

[2] Die Ganzzahligkeitsforderung wird häufig vernachlässigt, wenn die Produktionsmengen sehr groß sind, und man verlangt nur Nicht-Negativität, da Formeln, die nur für ganze Zahlen gelten, häufig wesentlich schwieriger zu behandeln sind.

(iii) G_f ist eine Menge von Paaren $(x,y) \in D_f \times W_f$ (d. h. $x \in D_f$ und $y \in W_f$), so dass zu jedem $x \in D_f$ genau ein Paar $(x,y) \in G_f$ existiert; dies ist der Graph von f.

Das eindeutige $y \in W_f$ mit $(x,y) \in G_f$ heißt Bild von x und wird mit $f(x)$ bezeichnet. Ein $x \in D_f$ mit $(x,y) \in G_f$ für ein $y \in W_f$ heißt ein Urbild von y.

Eine Funktion f kann auf verschiedene Arten spezifiziert werden. Ist z. B. f gegeben durch $D_f = \mathbb{R}$ (die Menge der reellen Zahlen), $W_f = \mathbb{R}_{\geq 0}$ (die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen) und $G_f = \left\{ (x,x^2) : x \in D_f \right\}$ (die Menge aller Paare (x,x^2), für die $x \in D_f$ ist), so kann man f z. B. wie folgt schreiben:

1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \mapsto x^2.$
2. $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\geq 0}\,, \\ x & \longmapsto & x^2\,. \end{cases}$
3. $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0},\ f(x) = x^2.$
4. Die Kurzschreibweise $y = y(x) = x^2$ trifft man gelegentlich in Mathematik-Anwendungen an. (Zum Beispiel schreibt man in der Physik, wenn man betonen möchte, dass der Weg eine Funktion der Zeit ist, $s = s(t) = {}^{gt^2}\!/_2$ im Beispiel des freien Falls.) Man will damit darauf hinweisen, dass die Abhängigkeit der Größe y von x nun das Thema ist und dass andere Abhängigkeiten durch Festhalten der Werte ausgeblendet werden (Betrachtung der Abhängigkeit y von x *ceteris paribus*). Um Buchstaben zu sparen und um eine möglichst suggestive Notation zu erhalten, benutzt man also für die Funktion das gleiche Symbol wie für die Elemente des Wertebereichs und verzichtet auf eine separate Benennung der Funktion.

   Das ist in Ordnung, wenn man sich klar macht, dass das Symbol y hier in verschiedenen Bedeutungen auftaucht: y bezeichnet gleichzeitig die abhängige Größe und die Funktion. Ferner ist mit $y(x)$ im einen Fall die Funktion gemeint (wenn x nur als Platzhalter für alle möglichen x gemeint ist), im anderen Fall aber ein spezieller Funktionswert $y(x) \in W_y$ (wenn mit x ein konkretes $x \in D_y$ gemeint ist). Wir werden in Beispielen auch manchmal diese intuitive Schreibweise benutzen, solange keine Verwechslungen zu befürchten sind.

Nun haben wir also unsere erste mathematische Definition präsentiert. Sie besagt ohne Interpretationsspielraum, was es bedeuten soll, wenn wir den Begriff »Funktion« in den Mund nehmen. Wir haben versucht, diese Definition als formelle Formulierung plausibler Überlegungen darzustellen: Wenn etwas eine Funktion im Sinne der Definition ist, dann ist es genau das, was wir brauchen.

Im Vergleich zu Mathematikbüchern für Mathematiker sind formelle Definitionen in diesem Buch etwas seltener anzutreffen: Nur wenn wir der Ansicht sind, dass der definierte Begriff grundlegend ist und ohne formelle Definition die Gefahr von Missverständnissen besteht, wollen wir darauf eingehen. Der Grenzwertbegriff in Kapitel 4 ist allein aus historischen Gründen dafür ein wichtiges Beispiel. Aber dazu später mehr.

Zu allen Begriffen ist i. d. R. auch ein unmittelbareres intuitives Verständnis hilfreich, das in den meisten Fällen für unsere Zwecke sogar ausreicht; im Zweifel allerdings ist die mathematische Definition der unanfechtbare Schiedsrichter.

Mathematische Definitionen sind die Vokabeln für die Sprache der Mathematik. Diese Sprache ist sehr dicht und gestattet es, komplizierte Zusammenhänge ohne Interpretationsspielraum zu formulieren. Das ist nützlich und daher nicht für umsonst zu haben: Es erfordert durchaus Mühe, da wie bei jeder Fremdsprache Verständnis nur mit sicherer Vokabelkenntnis möglich ist.

1.3 Umkehrbarkeit von Funktionen

Wir wollen nun einige grundlegende Eigenschaften von Funktionen besprechen, die allesamt durch den Wunsch motiviert werden können, aus einem Bild einer Funktion auf ein Urbild zu schließen. Nehmen wir wieder die Brötchen her. Für die Planung des Caterings ist sicher folgende Frage von Belang:

Beispielfrage:

Wie hoch muss der Preis für ein Brötchen sein, damit x Brötchen abgesetzt werden können?

Es kann nämlich sein, dass wir x Brötchen noch im Schrank haben und wir genau den Wunsch haben, diese abzusetzen (Lagerräumung).

Wir bitten unsere Marketingabteilung um die Nachfragefunktion und erhalten die Nachfrage in ME aus dem Preis in GE (wobei das Intervall $[0,6]$ die Menge aller reellen Zahlen zwischen einschließlich 0 und 6 ist):

$$N\colon \begin{cases} [0,6] & \to & \mathbb{R}_{\geq 0}\,, \\ p & \mapsto & 60-10p\,. \end{cases}$$

Warum müssen wir den Definitionsbereich auf $[0,6]$ einschränken? Negative Preise wollen wir natürlich vermeiden, aber auch bei einem Preis über 6 GE würde die Nachfragefunktion eine negative Nachfrage ergeben, was Unsinn ist.

Wissen wollen wir aber den Preis bei gegebener (angestrebter) Nachfrage. Wir stellen die Formel $N = 60-10p$ nach p um und erhalten eine neue Formel:

$$p = \frac{(60-N)}{10}\,.$$

Da durch diese Formel nun jedem $N \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ genau ein $p \in [0,6]$ zugeordnet wird, müssten wir doch damit p als Funktion von N darstellen können. Der erste

Versuch mit

$$p: \begin{cases} \mathbb{R}_{\geq 0} & \longrightarrow & [0,6]\,, \\ N & \longmapsto & \frac{(60-N)}{10}\,, \end{cases}$$

ergibt aber *keine* Funktion, denn bei Nachfragewerten von über 60 erhalten wir negative Preise, die nicht im Wertebereich sind. Wir müssen also den Definitionsbereich weiter einschränken, und erkennen schließlich, dass

$$p: \begin{cases} [0,60] & \longrightarrow & [0,6]\,, \\ N & \longmapsto & \frac{(60-N)}{10}\,, \end{cases}$$

auch eine Funktion ist, und zwar eine mit $p\big(N(p)\big) = p$ für alle $p \in [0,6]$ und $N\big(p(N)\big) = N$ für alle $N \in [0,60]$.

Wenn wir den Wertebereich von N auf $[0,60]$ festgesetzt hätten, dann hätten wir uns die letzte Überlegung sparen können. Das heißt, für die im Wertebereich modifizierte Nachfragefunktion

$$\tilde{N}: \begin{cases} [0,6] & \longrightarrow & [0,60]\,, \\ p & \longmapsto & 60-10p\,, \end{cases}$$

hätten wir eine Funktion

$$p: \begin{cases} [0,60] & \longrightarrow & [0,6]\,, \\ \tilde{N} & \longmapsto & \frac{(60-\tilde{N})}{10}\,, \end{cases}$$

mit vertauschten Rollen von Definitions- und Wertebereich. In diesem Falle nennen wir $p(\tilde{N})$ die Umkehrfunktion zu $\tilde{N}(p)$.

Wir fassen zusammen:

Merksatz:

Eine Funktion kann umgekehrt werden, wenn nicht nur jedes Urbild genau ein Bild hat, sondern auch jedes potentielle Bild genau ein Urbild.

Können wir eine solche Umkehrfunktion mit genau vertauschtem Definitions- und Wertebereich immer angeben? In unserer modifizierten Nachfragefunktion $\tilde{N}$ hat nicht nur jedes Element des Definitionsbereichs genau ein Bild (wie bei jeder Funktion), sondern auch jedes Element des Wertebereichs genau ein Urbild. Da beim Umkehren der Abhängigkeit zwischen Nachfrage und Preis sich die Rollen von Urbildern und Bildern vertauschen, ist diese letztere Eigenschaft wichtig dafür, dass die umgekehrte Abhängigkeit wirklich durch eine Funktion dargestellt werden kann.

Leider gibt es Funktionen, für die diese Eigenschaft, dass jedes Element des Wertebereichs genau ein Urbild hat, nicht gilt: Zum Beispiel gab es für unsere erste Nachfragefunktion N zu Nachfragewerten oberhalb von 60 keine Urbilder (sprich: zugehörige Preise). Ein anderes, abstrakteres aber lehrreiches Beispiel: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ hat zum Wert -1 kein Urbild anzubieten, während 4 sogar zwei Urbilder hat, nämlich 2 und -2.

Ein Element des Wertebereichs einer Funktion kann also im Allgemeinen auch kein Urbild haben oder auch mehr als eins. Funktionen, bei denen das erste Hindernis nicht vorkommt, heißen surjektiv; Funktionen, bei denen das letzte Hindernis nicht vorkommt, heißen injektiv; Funktionen, bei denen beide Hindernisse nicht vorkommen, heißen bijektiv.

Definition 1.3.1 (surjektiv, injektiv, bijektiv)**.** Sei $f\colon D_f \to W_f$, $x \mapsto f(x)$ eine Funktion.

(i) f heißt surjektiv, wenn jedes $y \in W_f$ mindestens ein Urbild hat.

(ii) f heißt injektiv, wenn jedes $y \in W_f$ höchstens ein Urbild hat.

(iii) f heißt bijektiv, wenn jedes $y \in W_f$ genau ein Urbild hat.

Unsere Überlegungen von oben zeigen, dass wir genau für die bijektiven Funktionen eine Umkehrfunktion angeben können. Denn wenn jedes Element im Wertebereich genau ein Urbild hat, dann können wir jedem Element im Wertebereich genau dieses Urbild zuordnen. Das Element des Wertebereichs wird nun aufgefasst als ein Element des Definitionsbereichs der Umkehrfunktion, und das Urbild liegt nun im Wertebereich der Umkehrfunktion, der gleich dem Definitionsbereich der Ausgangsfunktion ist.

Definition 1.3.2 (Umkehrfunktion)**.** Sei $f = (D_f, W_f, G_f)$ eine bijektive Funktion. Dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} von f definiert durch

(i) $D_{f^{-1}} := W_f$ (der Doppelpunkt besagt »nach Definition«).

(ii) $W_{f^{-1}} := D_f$.

(iii) $G_{f^{-1}} := \left\{ (y,x) \in D_{f^{-1}} \times W_{f^{-1}} : (x,y) \in G_f \right\}$.

Eine Formel für die Funktionsvorschrift $G_{f^{-1}}$ wird dabei – wie im Beispiel zur Nachfragefunktion – häufig durch Umstellen einer Formel für die Funktionsvorschrift G_f nach der unabhängigen Größe gewonnen. Da es aber nicht immer geschlossene Formeln für Funktionen geben muss, ist obige Definition über den Graphen der Funktion umfassender. Zum Beispiel: Die Funktion, die zu Weihnachten 2007 jedem Bundesligafußballverein seinen Tabellenplatz zuordnet, kann man nicht durch eine Formel darstellen, man kann aber in der Tabelle alle Funktionswerte ablesen. Und man kann sie umkehren, da man aus den möglichen Tabellenplätzen den Bundesligaverein durch Blick auf dieselbe Tabelle ermitteln kann.

Man kann im Übrigen die Hindernisse »nicht surjektiv« und »nicht injektiv« oft bei ausreichender Kenntnis der Funktion durch recht milde Modifikationen aus dem Weg räumen.

Betrachten wir als Beispiel die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Die Funktion ist weder surjektiv noch injektiv. Wir wissen, dass negative Werte nicht angenommen werden, alle anderen aber schon. Wenn wir also einfach den Wertebereich auf die tatsächlich angenommenen Werte in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ einschränken, dann erhalten wir schon einmal eine surjektive Funktion $\check{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^2$.

Nun bleibt noch das Problem mit den nicht eindeutigen Urbildern, z. B. 2 und -2 sind zwei verschiedene Urbilder von 4. In diesem Beispiel stellen wir fest, dass jede nicht-negative Zahl außer null genau zwei Urbilder hat, ein positives und ein negatives. In ökonomischen Anwendungen haben die positiven Zahlen häufig eine vernünftigere Interpretation. Wenn wir nun einfach den Definitionsbereich der Funktion f auf die positiven Zahlen und die Null einschränken, dann erhalten wir eine injektive Funktion $\hat{f}\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$.

Tun wir beides, also Einschränken des Werte- und des Definitionsbereichs, dann erhalten wir schließlich die bijektive Funktion $\tilde{f}\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^2$, deren Umkehrfunktion Sie alle kennen: Es handelt sich um die Wurzelfunktion $\tilde{f}^{-1}\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \sqrt{x}$.

1.4 Komposition von Funktionen

Wir hatten im vorigen Abschnitt die Komposition von Funktionen schon stillschweigend verwendet, als wir sagten, dass $p\big(\tilde{N}(p)\big) = p$ gilt: Wir haben auf einen Preis p erst die bijektive Nachfragefunktion $\tilde{N}$ und dann die Umkehrfunktion $\tilde{N}^{-1} = p$ angewendet. Heraus kam die identische Funktion, die jedem Preis p wieder p zuordnet.

Aber nicht nur in diesem Spezialfall ist die Komposition von Funktionen interessant. Wir nehmen an, wir wollen den Preis für unsere Brötchen über die Zeit anpassen (z. B. reduzieren). Das bedeutet, für jeden Zeitpunkt t haben wir einen Preis $p(t)$ festgesetzt. Nun wollen wir wissen, wie die Nachfrage zu einem bestimmten Zeitpunkt ist, wobei wir die Nachfragefunktion $\tilde{N}$ schon kennen.

Beispielfrage:

Wie hoch ist die Nachfrage zum Zeitpunkt t, wenn der Preis p gemäß der Funktion $p(t)$ von t abhängt und die Nachfrage gemäß der Funktion $\tilde{N}(p)$ von p?

Die beste Antwort auf diese Frage wäre eine Formel, mit der wir die Nachfrage direkt aus t ausrechnen könnten. Nehmen wir an, unser Produkt-Marketing hat für uns aus uns unbekannten Erwägungen eine Preisverlaufsfunktion ermittelt, die den Preis in GE angibt, wobei der Zeitpunkt null den Verkaufsstart bezeichnen soll und die Zeit in Tagen gemessen wird.

$$p\colon \begin{cases} [0,10] & \to & [0,10]\,, \\ t & \mapsto & 10-t\,. \end{cases}$$

Beachte: Wir nennen die Preisverlaufsfunktion wieder suggestiv $p = p(t)$, obwohl es nicht dieselbe Funktion ist, wie die Umkehrfunktion $p = p(\tilde{N})$ der Nachfragefunktion im vorigen Abschnitt. Mit dem Definitions- und Wertebereich haben wir schon gut aufgepasst: Negative Zeitpunkte und negative Preise sollen nicht entstehen.

Naiv betrachtet, brauchen wir nun nur noch den aus der Zeit berechneten Preis in die Nachfragefunktion einzusetzen und erhalten eine Formel für die Nachfrage, wenn der Zeitpunkt im Definitionsbereich der Preisverlaufsfunktion liegt. Oder? Versuchen wir es.

$$\tilde{N}(t) = \tilde{N}\big(p(t)\big) = 60 - 10(10-t) = 60 - 100 + 10t = -40 + 10t\,.$$

Nur, welche t dürfen wir jetzt in die Formel einsetzen? Wenn wir den ganzen Definitionsbereich von p benutzen würden, dann erhielten wir für $t = 0$:

$$\tilde{N}(t) = \tilde{N}\big(p(t)\big) = -40 + 10\cdot 0 = -40\,.$$

Also: Unsinn. Was ging schief? Obwohl 0 im Definitionsbereich D_p der Funktion p liegt, liegt der Wert $p(0) = 10$ nicht im Definitionsbereich $D_{\tilde{N}} = [0,6]$ der Nachfragefunktion $\tilde{N}$, und schon ist das Resultat nicht sinnvoll. Wir wollen aber dem Nutzer einer Funktion wie sonst auch genaue Informationen über den Geltungsbereich der Formel mitgeben. Also müssen wir für die Berechnung der Nachfrage aus Preisverlaufsfunktion und Nachfragefunktion einen kleineren Definitionsbereich angeben, so dass die Preisverlaufsfunktion für jeden Wert ihres Definitionsbereichs einen Wert im Definitionsbereich der Nachfragefunktion liefert. Der größtmögliche Definitionsbereich für die Zeitverlaufsfunktion ist hier $[4,10]$, denn dann entstehen nur Preise im Intervall $[0,6]$, dem Definitionsbereich der Nachfragefunktion.

Zusammengefasst haben wir uns überlegt:

Merksatz:

Funktionen können dann hintereinandergeschaltet werden, wenn die erste anzuwendende Funktion nur Werte im Definitionsbereich der zweiten anzuwendenden Funktion hat.

Mit

$$\tilde{p}\colon \begin{cases} [4,10] & \to & [0,6]\,, \\ t & \mapsto & 10-t\,, \end{cases}$$