Große Sätze und schöne Beweise der Mathematik

Identität des Schönen, Allgemeinen, Anwendbaren

von
Josef Naas, Wolfgang Tutschke

3., korr. u. erw. Aufl.

Große Sätze und schöne Beweise der Mathematik – Naas / Tutschke

schnell und portofrei erhältlich bei beck-shop.de DIE FACHBUCHHANDLUNG

Thematische Gliederung:

Populäre Darstellungen der Mathematik

Harri Deutsch 2009

Verlag C.H. Beck im Internet:
www.beck.de
ISBN 978 3 8171 1822 9

Josef Naas
Wolfgang Tutschke

Große Sätze und schöne Beweise der Mathematik

Identität des Schönen, Allgemeinen, Anwendbaren

Verlag
Harri
Deutsch

Dr. Josef Naas (†) war Professor für Mathematik an der Akademie der Wissenschaften in Berlin.

Dr. Wolfgang Tutschke ist emeritierter Professor für Mathematik an der Technischen Universität Graz.

Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH
Gräfstraße 47
60486 Frankfurt am Main
verlag@harri-deutsch.de
www.harri-deutsch.de

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN 978-3-8171-1822-9

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches – oder von Teilen daraus – sind vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet werden.
Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.
Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autor und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler keine Haftung.

3., korrigierte und erweitere Auflage 2009
©Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, Frankfurt am Main, 2009

Druck: betz-druck GmbH, Darmstadt <www.betz-druck.de>
Printed in Germany

10 Lösbarkeit nichtlinearer Gleichungen in endlich-dimensionalen Räumen. Der Fixpunktsatz von Brouwer

Es sei f eine auf dem durch $a \leq x \leq b$ definierten Intervall der x-Achse gegebene reellwertige und stetige Funktion, die das Intervall in sich abbilden soll. Letzteres bedeutet, dass auch $a \leq f(x) \leq b$ für jedes betrachtete x gilt. Einen Punkt x_0 nennt man *Fixpunkt* der Abbildung f, wenn er mit seinem Bild $f(x_0)$ übereinstimmt, d. h., wenn $f(x_0) = x_0$ gilt.

Definiert man nun durch

$$\varphi(x) = f(x) - x$$

eine weitere Funktion, so ist

$$\varphi(a) \geq 0 \quad \text{und} \quad \varphi(b) \leq 0\,.$$

Ist $\varphi(a) = 0$ oder $\varphi(b) = 0$, so ist $f(a) = a$ bzw. $f(b) = b$, so dass $x_0 = a$ bzw. $x_0 = b$ Fixpunkte von f sind. Andernfalls ist $\varphi(a) > 0$ und $\varphi(b) < 0$.

Da mit f auch φ stetig ist, muss φ nach dem Zwischenwertsatz wenigstens eine Nullstelle x_0 besitzen, so dass $\varphi(x_0) = 0$ und also $f(x_0) = x_0$ gilt. In allen Fällen gilt daher:

Bildet die stetige Funktion f das durch $a \leq x \leq b$ definierte Intervall der x-Achse in sich ab, so besitzt f wenigstens einen Fixpunkt.

Diese Aussage lässt sich in der folgenden Weise auf den n-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ übertragen:

Brouwerscher Fixpunktsatz für Kugeln *Ist $\mathcal{K}$ eine abgeschlossene Kugel des $\mathbb{R}^n$, so besitzt jede stetige Selbstabbildung f von $\mathcal{K}$ in sich wenigstens einen Fixpunkt.*

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass der Mittelpunkt der Kugel der Ursprung $x = O$ des Koordinatensystems und der Radius der Kugel gleich 1 ist. Bezeichnet man den Abstand eine variablen Punktes x vom Ursprung (die Norm) mit $\|x\|$, so wird $\mathcal{K}$ also durch $\mathcal{K} = \{x\colon \|x\| \leq 1\}$ definiert.

Im folgenden soll für den Satz von Brouwer ein schöner Beweis gegeben werden, der rein analytisch ist und – im Gegensatz zu manchen anderen möglichen Beweisen –

keine geometrischen Überlegungen erfordert. Dieser Beweis lehnt sich eng an eine von K. Gröger [16] gegebene Beweisanordnung an.[1]

Diese benutzt neben dem Approximationssatz von Weierstrass und Stone (vgl. Kapitel 6), dem Satz von der lokalen Umkehrbarkeit eines Funktionensystems bei nichtverschwindender Funktionaldeterminante und der Umrechnungsformel von räumlichen Integralen bei Koordinatenwechsel nur elementare Schlussweisen.

Der Nachweis der Existenz wenigstens eines Fixpunktes wird indirekt gezeigt, d. h., es wird ein Widerspruch hergeleitet aus der Annahme, dass eine die Voraussetzungen des Satzes erfüllende Abbildung keinen Fixpunkt besitzt. Dieser Widerspruch wird in drei Beweisschritten hergeleitet:

Im ersten wird eine Hilfsabbildung h definiert, falls f keinen Fixpunkt besitzt; im zweiten Schritt werden erforderliche Eigenschaften von h zusammengestellt; im dritten Beweisschritt schließlich wird h als Koordinatentransformation verwendet, und es wird dabei der gewünschte Widerspruch hergeleitet.

Erster Beweisschritt. Nehmen wir also an, dass f eine stetige Abbildung von $\mathcal{K}$ in sich sei, die keinen Fixpunkt besitzt. Für jedes x von $\mathcal{K}$ ist dann der Bildpunkt $f(x)$ von x verschieden, so dass es einen eindeutig bestimmten, in $f(x)$ beginnenden und durch x hindurchgehenden Strahl gibt. Es sei $r(x)$ derjenige eindeutig bestimmte Punkt auf dem Rande $\partial\mathcal{K}$ von $\mathcal{K}$, in dem dieser Strahl die Kugel $\mathcal{K}$ verlässt (vgl. Abb. 10.1). Da $f(x)$ und folglich auch der Strahl stetig von x abhängt, hängt auch $r(x)$ stetig von x ab. Liegt x selbst auf dem Rand $\partial\mathcal{K}$, so ist $r(x) = x$, unabhängig davon, ob $f(x)$ im Innern von $\mathcal{K}$ oder etwa auch auf dem Rand $\partial\mathcal{K}$ liegt. Damit erweist sich die durch $r(x)$ definierte Abbildung als eine stetige Abbildung der ganzen abgeschlossenen Kugel $\mathcal{K}$ auf den Rand $\partial\mathcal{K}$, wobei der Rand punktweise fest gelassen wird.[2]

Definiert man noch

$$r(x) = \frac{1}{\|x\|}x$$

für Punkte x außerhalb von $\mathcal{K}$ (für solche Punkte ist $\|x\| > 1$), so liefert $r(x)$ eine stetige Abbildung des ganzen $\mathbb{R}^n$ auf den Rand $\partial\mathcal{K}$ der Einheitskugel.

Auf diese Abbildung wird nun in der abgeschlossenen Kugel um $x = O$ mit dem Radius 2 der Approximationssatz von Weierstrass und Stone (vgl. Kapitel 6)

[1] Der hier gegebene Beweis ist wesentlich umfangreicher als der ursprüngliche Beweis von K. Gröger, da alle Beweisschritte ausführlich erläutert werden. – Ein Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes, der dem von K. Gröger gegebenem ähnlich ist, wurde auch von C. A. Rogers in [49], bzw. von H. Heuser in seinem Buch [18] gegeben.

[2] Eine solche Abbildung wird auch als *Retrakt* bezeichnet.

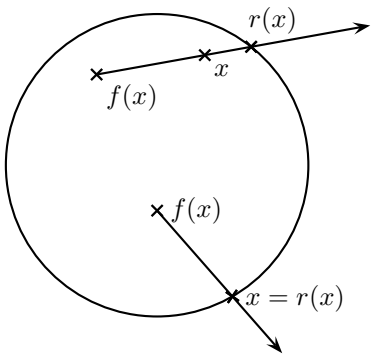

Abbildung 10.1 Abbildung auf den Rand der Kugel

angewandt. Nach diesem gibt es ein $p(x)$, dessen Komponenten Polynome in den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ sind, so dass

$$\|r(x) - p(x)\| < 1$$

für alle x mit $\|x\| \leq 2$ gilt.

Im folgenden soll $p(x)$ außerhalb einer Kugel mit dem Mittelpunkt O und dem Radius $\frac{3}{2}$ so abgeändert werden, dass die Funktionswerte der abgeänderten Funktion außerhalb der Kugel mit dem Radius 2 gleich $r(x)$ sind, dass dabei aber die abgeänderte Funktion überall stetig differenzierbar ist. Dazu benötigen wir als Hilfsfunktion eine reellwertige und stetig differenzierbare Funktion $\lambda = \lambda(\tau)$ einer reellen Variablen τ, die für alle τ mit $\tau \leq \frac{3}{2}$ identisch 0 ist, die zwischen $\frac{3}{2}$ und 2 monoton von 0 auf 1 wächst und danach, d. h. für alle τ mit $\tau \geq 2$, den konstanten Wert 1 annimmt. Zwischen $\frac{3}{2}$ und 2 versuchen wir diese Funktion als Polynom in τ anzusetzen. Damit das gesuchte $\lambda = \lambda(\tau)$ überall stetig differenzierbar ist, muss das gesuchte Polynom im Punkt $\tau = \frac{3}{2}$ den Wert 0, in $\tau = 2$ den Wert 1 und in beiden Punkten die Ableitung 0 besitzen. Somit sind vier Bedingungen zu erfüllen. Da ein Polynom dritten Grades vier Koeffizienten besitzt, kann man die gesuchte Funktion als Polynom dritten Grades wählen. Man bestätigt leicht, dass

$$-16\Big(\tau - \tfrac{3}{2}\Big)^2\Big(\tau - \tfrac{9}{4}\Big)$$

das gesuchte Polynom ist. Da seine Ableitung ein Polynom zweiten Grades ist und folglich außer in $\tau = \frac{3}{2}$ und $\tau = 2$ keine weiteren Nullstellen haben kann, muss das angegebene Polynom zwischen $\tau = \frac{3}{2}$ und $\tau = 2$ tatsächlich (sogar im engeren Sinne) monoton wachsen. Setzt man daher

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \tau \leq \frac{3}{2}\,, \\ -16\Big(\tau - \frac{3}{2}\Big)^2\Big(\tau - \frac{9}{4}\Big) & \text{für} \quad \frac{3}{2} \leq \tau \leq 2\,, \\ 1 & \text{für} \quad \tau \geq 2\,, \end{cases}$$

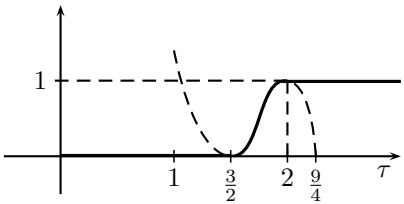

Abbildung 10.2 Wahl der Hilfsfunktion $\lambda(\tau)$

so erhält man eine für alle reellen τ definierte, stetig differenzierbare Funktion, die zwischen $\frac{3}{2}$ und 2 monoton von 0 bis 1 wächst (vgl. Abb. 10.2). Mit deren Hilfe definieren wir nun, indem wir $\tau = \|x\|$ setzen, durch

$$q(x) = \lambda(\|x\|)r(x) + [1 - \lambda(\|x\|)]p(x) \tag{10.1}$$

eine ebenfalls im ganzen $\mathbb{R}^n$ definierte Funktion. Aus dieser Definition folgt sofort, dass für jedes x die Punkte $q(x)$ auf der Verbindungsstrecke von $r(x)$ und $p(x)$ liegen. Der Summand mit $r(x)$ tritt nur dann auf, falls $\lambda(\|x\|) > 0$ ist; dies ist nur für x mit $\|x\| > \frac{3}{2}$ der Fall. Für solche x ist aber $r(x)$ stetig differenzierbar. Da auch $\|x\|$ für $x \neq O$ eine stetig differenzierbare Funktion ist, ist damit zunächst gezeigt, dass der erste Summand auf der rechten Seite von (10.1) stetig differenzierbar von x abhängt. Diese Eigenschaft hat aber auch der zweite Summand, da $p(x)$ definitionsgemäß im ganzen $\mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar von x abhängt. Insgesamt hängt $q(x)$ im ganzen $\mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar von x ab. Für alle x des $\mathbb{R}^n$ ist

$$\|r(x)\| = 1\,,$$

für x mit $\|x\| \geq 2$ ist zusätzlich

$$q(x) = r(x) = \frac{1}{\|x\|}x\,. \tag{10.2}$$

Nun kann (10.1) auch in der Form

$$q(x) = r(x) - \big(1 - \lambda(\|x\|)\big) \cdot [r(x) - p(x)]$$

geschrieben werden, also folgt

$$\|q(x)\| \geq 1 - \big(1 - \lambda(\|x\|)\big)\|r(x) - p(x)\|\,.$$

Da bei $\|x\| < 2$ sowohl $\|r(x) - p(x)\| < 1$ als auch $1 \geq 1 - \lambda(\|x\|) > 0$ ist, folgt damit für diese x auch

$$\|q(x)\| > 1 - \big(1 - \lambda(\|x\|)\big) \cdot 1 = \lambda(\|x\|) \geq 0\,,$$

so dass

$$q(x) \neq 0$$

auch bei $\|x\| < 2$ folgt. Daher kann für alle x

$$g(x) = \frac{q(2x)}{\|q(2x)\|}$$

definiert werden. Diese Funktion ist daher überall stetig differenzierbar, und es ist überall

$$\|g(x)\| = 1\,. \tag{10.3}$$

Wegen (10.2) gilt darüber hinaus bei $\|x\| = 1$

$$q(2x) = \frac{1}{\|2x\|}2x = x\,,$$

also auch

$$g(x) = x\,. \tag{10.4}$$

Damit ist aber im ganzen $\mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung konstruiert worden, die die Punkte x des Randes $\partial\mathcal{K}$ in sich abbildet.

Ist nun noch t ein nicht negativer reeller Parameter, so wird für jedes fest gewählte t durch

$$h(x,t) = x + tg(x) \tag{10.5}$$

schließlich noch eine weitere stetig differenzierbare Abbildung des $\mathbb{R}^n$ in sich definiert.

Zweiter Beweisschritt. Jetzt sollen fünf Eigenschaften der soeben definierten Abbildung h hergeleitet werden:

a) Ist $\|x\| < 1$, d. h., x ist aus dem Innern der Kugel $\mathcal{K}$, so ist wegen (10.3)

$$\|h(x,t)\| \le \|x\| + t\|g(x)\| < 1 + t\,,$$

d. h., das Innere von $\mathcal{K}$ wird auf das Innere der Kugel $\mathcal{K}_{1+t}$ mit dem Mittelpunkt $x = 0$ und dem Radius $1 + t$ abgebildet.

b) Ist $\|x\| = 1$, d. h., liegt x auf dem Rand $\partial\mathcal{K}$ der Kugel $\mathcal{K}$, so ergibt sich unter Beachtung von (10.4)

$$h(x,t) = x + tx = (1+t)x\,,$$

so dass der Rand $\partial\mathcal{K}$ von $\mathcal{K}$, durch h eineindeutig auf den Rand $\partial\mathcal{K}_{1+t}$ von $\mathcal{K}_{1+t}$ abgebildet wird.

c) Ebenso wie $x = (x_1, \ldots, x_n)$ sind auch g und h Vektoren:

$$g = (g_1, \ldots, g_n)\,, \qquad h = (h_1, \ldots, h_n)\,.$$

Schreibt man (10.5) komponentenweise auf, so ergibt sich

$$h_j(x,t) = x_j + t g_j(t)\,.$$

Die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(h_1, \ldots, h_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

hat folglich die Gestalt

$$\begin{vmatrix} 1 + t\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & t\frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \ldots & t\frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ t\frac{\partial g_2}{\partial x_1} & 1 + t\frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \ldots & t\frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t\frac{\partial g_n}{\partial x_1} & t\frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \ldots & 1 + t\frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \tag{10.6}$$

Da g stetig differenzierbar ist, sind alle Ableitungen insbesondere auf der (abgeschlossenen) Kugel $\mathcal{K}$ beschränkt. Andererseits hat die Determinante (10.6) für $t = 0$ den Wert 1, so dass damit gezeigt ist, dass die Determinante (10.6) auch für hinreichend kleine t von Null verschieden ist. Ist nun y_0 irgendein Bildpunkt, den h im Innern von $\mathcal{K}$ annimmt, und ist x_0 ein zugehöriges Urbild, also $h(x_0) = y_0$, so folgt aus dem Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante, dass alle y aus einer gewissen Umgebung von y_0 durch wenigstens ein x aus einer Umgebung von x_0 bei der Abbildung h realisiert werden. Letzteres bedeutet aber, dass bei hinreichend kleinem t das Bild vom Innern der Kugel $\mathcal{K}$ eine offene Punktmenge ist.

d) Zusätzlich zu der in a) nachgewiesenen Eigenschaft von h wird jetzt gezeigt, dass h das Innere von $\mathcal{K}$ auf das *ganze* Innere von $\mathcal{K}_{1+t}$ abbildet. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so wäre das Bild des Innern von $\mathcal{K}$ nur ein echter Teil des Innern von $\mathcal{K}_{1+t}$. Es gäbe also auch wenigstens einen Randpunkt y^* der Bildmenge, der ganz im Innern von $\mathcal{K}_{1+t}$ läge. Als Randpunkt kann y^* durch Punkte y_k approximiert werden, die zum Bild gehören, d. h. zu denen jeweils wenigstens ein x_k aus dem Innern von $\mathcal{K}$ mit $h(x_k, t) = y_k$ existiert. Aus der Folge $x_1, x_2, \ldots$ wähle man nun eine konvergente Teilfolge $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots$ aus, die gegen ein x^* konvergiert. Daraus ergibt sich die Konvergenz der zugehörigen $y_{k_1}, y_{k_2}, \ldots$ gegen $h(x^*, t)$. Da die $y_{k_1}, y_{k_2}, \ldots$ aber auch gegen y^* konvergieren, muss $y^* = h(x^*, t)$ sein. Weil nach c) das Innere von $\mathcal{K}$ in eine offene Punktmenge übergeht, y^* aber zum Rand der Bildmenge gehört, kann x^* nicht zum Innern von $\mathcal{K}$ gehören. Andererseits kann x^* aber auch nicht auf dem Rand $\partial\mathcal{K}$ liegen, weil dessen Bildpunkte nach b) auf dem Rand der Kugel $\mathcal{K}_{1+t}$ liegen, während y^* aber im Innern der Kugel $\mathcal{K}_{1+t}$ liegen sollte. Damit ist insgesamt gezeigt, dass durch die Abbildung h jeder Punkt von $\mathcal{K}_{1+t}$ Bild wenigstens eines Punktes von $\mathcal{K}$ ist.

e) Als fünfte und letzte Eigenschaft von h wird schließlich gezeigt, dass – wieder bei hinreichend kleinem t – keine zwei voneinander verschiedenen Punkte $\tilde{x}$ und $\hat{x}$ von $\mathcal{K}$ den gleichen Bildpunkt haben können. Haben nämlich zwei Punkte $\tilde{x}$, $\hat{x}$ dasselbe Bild, so ist

$$h(\tilde{x},t) = h(\hat{x},t)\,, \quad \text{d. h.} \quad \tilde{x} + tg(\tilde{x}) = \hat{x} + tg(\hat{x})$$

und folglich auch

$$\tilde{x} - \hat{x} = t[g(\hat{x}) - g(\tilde{x})]\,.$$

Schreibt man dies komponentenweise auf, so folgt

$$\tilde{x}_j - \hat{x}_j = t[g_j(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) - g_j(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)]\,.$$

Die auf der rechten Seite stehende Differenz wird nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung in der Form

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_\nu}(\ldots)(\tilde{x}_\nu - \hat{x}_\nu)$$

geschrieben, wobei die Ableitungen in einem auf der Verbindungsstrecke von $\tilde{x}$ und $\hat{x}$ liegendem Punkt zu nehmen sind.

Ist C eine Schranke der Beträge der Ableitungen $\frac{\partial g_j}{\partial x_\nu}$ in $\mathcal{K}$ und beachtet man

$$|\tilde{x}_\nu - \hat{x}_\nu| \leq \|\tilde{x} - \hat{x}\|\,,$$

so folgt

$$|\tilde{x}_j - \hat{x}_j| \leq tnC\|\tilde{x} - \hat{x}\|\,.$$

Damit folgt schließlich wegen

$$\sum_{j=1}^{n} |\tilde{x}_j - \hat{x}_j|^2 = \|\tilde{x} - \hat{x}\|^2$$

die Abschätzung

$$\|\tilde{x} - \hat{x}\| \leq tn\sqrt{n}C\|\tilde{x} - \hat{x}\|\,.$$

Bei hinreichend kleinem t ist diese Abschätzung jedoch nur möglich, wenn $\|\tilde{x} - \hat{x}\| = 0$, d. h. $\tilde{x} = \hat{x}$ ist.

Fasst man alle fünf Eigenschaften a) bis e) von h zusammen, so ist damit gezeigt:

Die Abbildung h ist im ganzen $\mathbb{R}^n$ definiert und stetig differenzierbar. Bei hinreichend kleinem t bildet sie die abgeschlossene Kugel $\mathcal{K}$ eineindeutig auf die Kugel $\mathcal{K}_{1+t}$ ab.

Dritter Beweisschritt. Die soeben hergeleiteten Eigenschaften von h reichen aus, um jetzt den angekündigten Widerspruch herzuleiten.

Das Volumen der Kugel $\mathcal{K}_{1+t}$ kann man zunächst als Raumintegral

$$\int_{\mathcal{K}_{1+t}} 1 \cdot \mathrm{d}y$$

schreiben. Beachtet man, dass $\mathcal{K}_{1+t}$ das eineindeutige Bild von $\mathcal{K}$ bei der Abbildung $y = h(x,t)$ ist, so kann man dieses Raumintegral auch in der Form

$$\int_{\mathcal{K}} 1 \cdot \frac{\partial(h_1,\ldots,h_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\,\mathrm{d}x \tag{10.7}$$

schreiben. Aus der Darstellung (10.6) der im Integranden stehende Funktionaldeterminante folgt, dass diese ein Polynom in t ist, wobei t^n die höchste auftretenden t-Potenz ist und der Koeffizient von t^n gleich

$$\frac{\partial(g_1,\ldots,g_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$$

ist. Setzt man dies in (10.7) ein, so folgt für das betrachtete Raumintegral die Darstellung

$$t^n \int_{\mathcal{K}} \frac{\partial(g_1,\ldots,g_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\,\mathrm{d}x + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu t^\nu\,, \tag{10.8}$$

wobei die a_ν nicht weiter interessierende Konstanten sind, die sich übrigens ebenfalls als Integrale schreiben lassen (in deren Integranden die partiellen Ableitungen $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ eingehen). Weiterhin ist der Radius von $\mathcal{K}_{1+t}$ gleich $1+t$, so dass das Volumen gleich dem $(1+t)^n$-fachen des Volumens von $\mathcal{K}$ ist. Das bedeutet, dass das Volumen auch in der Form

$$(1+t)^n \int_{\mathcal{K}} 1 \cdot \mathrm{d}x \tag{10.9}$$

dargestellt werden kann. Auch (10.9) ist ein Polynom in t, wobei der Koeffizient von t^n gleich

$$\int_{\mathcal{K}} 1 \cdot \mathrm{d}x$$

ist. Da (10.8) und (10.9) für alle (hinreichend kleine) t-Werte gleich sind, müssen beide Polynome gleiche Koeffizienten besitzen, so dass insbesondere

$$\int_{\mathcal{K}} \frac{\partial(g_1,\ldots,g_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{K}} 1 \cdot \mathrm{d}x \neq 0 \tag{10.10}$$

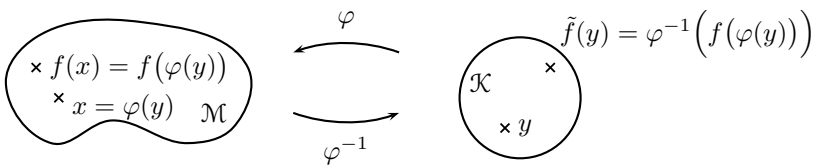

Abbildung 10.3 Satz von Brouwer für topologische Bilder von Kugeln

folgt. Andererseits ist $\|g(x)\| = 1$ für alle x, d. h., die Abbildung g bildet den ganzen Raum auf den Rand von $\mathcal{K}$ ab. Daher muss

$$\frac{\partial(g_1, \ldots, g_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = 0 \tag{10.11}$$

in allen Punkten sein, weil bei von Null verschiedener Funktionaldeterminante die Abbildung g umkehrbar sein müsste, d. h. auf eine volle Umgebung der entsprechenden Bildpunkte abbilden müsste. Die Gleichung (10.11) widerspricht aber der Ungleichung (10.10), womit der Brouwersche Fixpunktsatz bewiesen ist.

Wir bemerken schließlich noch, dass auch folgende allgemeinere Fassung des Brouwerschen Fixpunktsatzes gilt:

Ist $\mathcal{M}$ das eineindeutige und in beiden Richtungen stetige (also, wie man auch sagt, das topologische) *Bild einer Kugel, so besitzt jede stetige Abbildung f von $\mathcal{M}$ in sich wenigstens einen Fixpunkt.*

Diese Aussage lässt sich wie folgt auf den oben bewiesenen Brouwerschen Fixpunktsatz für Kugeln zurückführen:

Es sei f die gegebene Abbildung der Menge $\mathcal{M}$ in sich, φ bilde die abgeschlossene Kugel $\mathcal{K}$ eineindeutig und umkehrbar stetig auf $\mathcal{M}$ ab (vgl. Abb. 10.3). Jedem y von $\mathcal{K}$ wird durch φ eineindeutig ein $x = \varphi(y)$ von $\mathcal{M}$ zugeordnet. Auf dieses wird die in $\mathcal{M}$ gegebene Abbildung f angewandt, so dass man zum Element $f(x) = f\big(\varphi(y)\big)$ von $\mathcal{M}$ kommt. Durch die ebenfalls stetige Umkehrung φ^{-1} von φ wird dem Bildelement $f\big(\varphi(y)\big)$ schließlich wieder ein Element $\varphi^{-1}\Big(f\big(\varphi(y)\big)\Big)$ in $\mathcal{K}$ zugeordnet. Bezeichnet man dieses Element mit $\tilde{f}(y)$, so ist insgesamt eine Abbildung $\tilde{f}$ von $\mathcal{K}$ in sich definiert. Als Zusammensetzung $\tilde{f} = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ dreier stetiger Abbildungen ist f selbst stetig und besitzt daher wenigstens einen Fixpunkt: Es gibt also wenigstens ein y in $\mathcal{K}$ mit $\tilde{f}(y) = y$, also mit $\varphi^{-1}\Big(f\big(\varphi(y)\big)\Big) = y$ oder

$$f\big(\varphi(y)\big) = \varphi(y)\,.$$

Setzt man $\varphi(y) = x$, so ist $f(x) = x$, d. h., x ist Fixpunkt von f.

Ein für Anwendungen wichtiger Spezialfall der soeben bewiesenen allgemeineren Fassung des Brouwerschen Fixpunktsatzes trifft auf Mengen $\mathcal{M}$ des $\mathbb{R}^n$ zu, die abge-

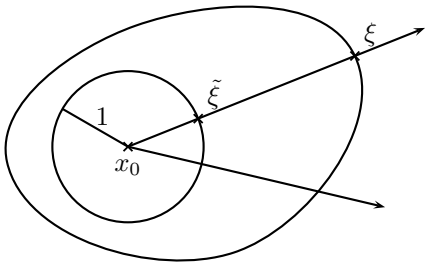

Abbildung 10.4 Satz von Brouwer für konvexe Mengen

schlossen, beschränkt und konvex[3] sind (und wenigstens einen inneren Punkt besitzen). Man kann nämlich zeigen, dass sich solche Mengen eineindeutig und umkehrbar stetig auf abgeschlossene Kugeln abbilden lassen: Ist x_0 ein (nach Voraussetzung existierender) innerer Punkt von $\mathcal{M}$, so kann man leicht zeigen, dass jeder in x_0 beginnende Strahl den Rand von $\mathcal{M}$ in genau einem Randpunkt ξ schneidet und dass dieser Schnittpunkt ξ stetig vom Strahl abhängt. Bildet man nun auf jedem Strahl die Strecke zwischen x_0 und ξ linear auf die Strecke zwischen x_0 und $\tilde{\xi}$ ab, wobei $\tilde{\xi}$ auf demselben Strahl liegt und von x_0 den Abstand 1 besitzt, so wird dadurch $\mathcal{M}$ insgesamt eineindeutig und umkehrbar stetig auf die abgeschlossene Kugel von x_0 mit dem Radius 1 abgebildet (vgl. Abb. 10.4).

Damit ist gezeigt, dass der *Brouwersche Fixpunktsatz* insbesondere auch *für abgeschlossene, beschränkte und konvexe Mengen* von $\mathbb{R}^n$ gilt. Die oben formulierte und verwendete Behauptung bezüglich der stetigen Abhängigkeit des eindeutig bestimmten Randpunktes vom Strahl beweist man wie folgt:

Verbindet man einen auf dem Strahl gelegenen Randpunkt ξ mit allen Punkten einer Umgebung von x_0, so erhält man einen Kegel mit der Spitze in ξ (Abb. 10.5). Da alle zu diesem Kegel gehörenden Strecken wegen der Konvexität von $\mathcal{K}$ zu $\mathcal{K}$ gehören, müssen alle zwischen x_0 und ξ gelegenen Punkte des Strahls innere Punkte von $\mathcal{K}$ sein. Aus diesem Grunde kann auf jedem Strahl nur ein Randpunkt liegen, so dass auch alle in Strahlrichtung hinter ξ kommenden Punkte außerhalb von $\mathcal{K}$ liegen müssen. Nun wird jeder Strahl durch denjenigen auf ihm liegenden Punkt $\tilde{\xi}$ charakterisiert, der von x_0 den Abstand 1 hat (vgl. Abb. 10.6). Der Punkt ξ hängt stetig von $\tilde{\xi}$ ab: Andernfalls gäbe es nämlich eine Folge von Punkten $\tilde{\xi}_n$ mit $\tilde{\xi}_n \to \tilde{\xi}$, so dass die zugehörigen ξ_n nicht gegen ξ konvergierten. Für wenigstens eine Teilfolge $\{\xi_{n_k}\}_{k=1,2,\ldots}$ müsste dann aber $\xi_{n_k} \to \xi^* \neq \xi$, bei $k \to \infty$ gelten. Da alle ξ_n Randpunkte sind, kann man Punkte ξ'_n aus dem Innern und außerdem nicht zu $\mathcal{K}$ gehörende Punkte ξ''_n so wählen, dass diese von den ξ_n um weniger als $\frac{1}{n}$ entfernt sind. Das bedeutet aber auch $\xi'_{n_k} \to \xi^*$ und $\xi''_{n_k} \to \xi^*$ bei $k \to \infty$. Demzufolge muss aber ξ^* ein Randpunkt und folglich $\xi^* = \xi$ sein. Damit ist die behauptete stetige Abhängigkeit des Punktes ξ

[3] Bekanntlich heißt eine Menge im $\mathbb{R}^n$ (oder allgemeiner in einem linearen Raum) *konvex*, wenn mit je zwei voneinander verschiedenen Punkten auch deren Verbindungsstrecke ganz in dieser Menge enthalten ist.

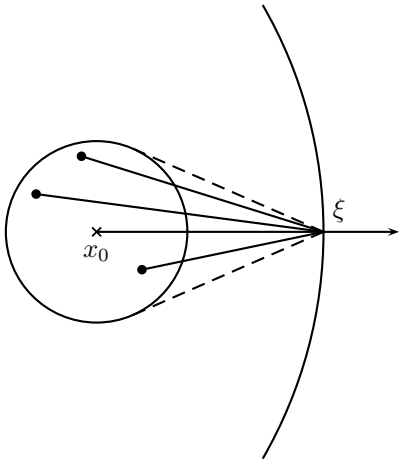

Abbildung 10.5 Eindeutigkeit von ξ

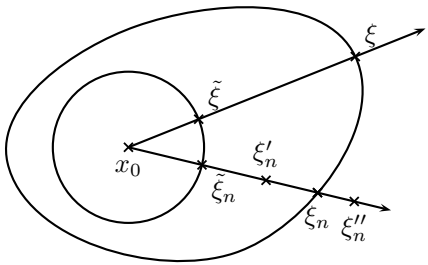

Abbildung 10.6 Stetigkeit von ξ

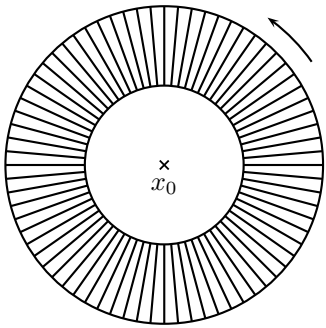

Abbildung 10.7
Abbildungen ohne Fixpunkt

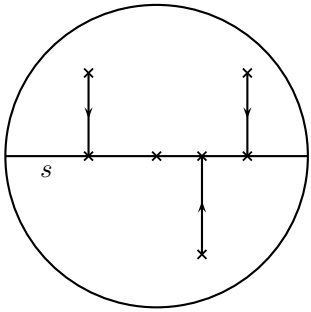

Abbildung 10.8
Abbildungen mit unendlich vielen Fixpunkten

von $\tilde{\xi}$ bewiesen. Bei Mengen, die nicht konvex und auch nicht topologisches Bild einer Kugel sind, braucht eine stetige Abbildung der Menge in sich nicht notwendig einen Fixpunkt zu besitzen. Dreht man beispielsweise einen konzentrischen Kreisring um einen zwischen 0 und 2π liegenden Winkel um den Mittelpunkt des Kreisringes, so besitzt die dadurch definierte Abbildung keinen Fixpunkt (vgl. Abb. 10.7).

Dass – auch unter den Voraussetzungen des Brouwerschen Fixpunktsatzes – *mehrere* Fixpunkte existieren können, zeigt das Beispiel einer Kreisscheibe, bei der alle Punkte durch senkrechte Orthogonalprojektion auf die Punkte einer durch den Mittelpunkt gehenden Strecke s abgebildet werden. Hierbei sind alle Punkte von s Fixpunkte (vgl. Abb. 10.8).

Abschließend soll noch eine Anwendung des Brouwerschen Fixpunktsatzes auf nichtlineare algebraische Gleichungssysteme der Form

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} a_{ij} x_1^i x_2^j &= 0\,, \\ \sum_{i,j} b_{ij} x_1^i x_2^j &= 0 \end{aligned} \tag{10.12}$$

gegeben werden. Hierbei sind x_1 und x_2 zwei gesuchte reelle Variable; die Summationen sind über jeweils endlich viele Indexpaare (i, j) mit nichtnegativen i, j zu erstrecken, und die a_{ij} wie auch die b_{ij} seien (endlich viele) gegebene reelle Koeffizienten, wobei $a_{10} \neq 0$ und $b_{01} \neq 0$ vorausgesetzt wird. Das System (10.12) kann man dann auch in der Form

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{a_{10}} \sum_{(i,j)\neq(1,0)} a_{ij} x_1^i x_2^j\,, \\ x_2 &= -\frac{1}{b_{01}} \sum_{(i,j)\neq(0,1)} b_{ij} x_1^i x_2^j \end{aligned} \tag{10.13}$$

schreiben. Damit ist (x_1, x_2) genau dann Lösung, wenn es Fixpunkt derjenigen Abbildung f ist, die jedem Punkt (x_1, x_2) der (x_1, x_2)-Ebene den durch die rechten Seiten von (10.13) definierten Bildpunkt (X_1, X_2) zuordnet. Falls es positive Zahlen r_1, r_2 so gibt, dass

$$\frac{1}{|a_{10}|} \sum_{(i,j)\neq(1,0)} |a_{ij}| r_1^i r_2^j \leq r_1$$

und

$$\frac{1}{|b_{01}|} \sum_{(i,j)\neq(0,1)} |b_{ij}| r_1^i r_2^j \leq r_2$$

ist, bildet f das (abgeschlossene) Rechteck

$$\mathcal{M} = \{(x_1, x_2)\colon |x_1| \leq r_1, |x_2| \leq r_2\}$$

in sich ab. Unter dieser (hinreichenden) Bedingung besitzt f nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz wenigstens einen Fixpunkt in $\mathcal{M}$, und das ursprünglich gegebene Gleichungssystem (10.12) besitzt folglich auch wenigstens eine Lösung in $\mathcal{M}$.

Eine weitere Anwendung des Brouwerschen Fixpunktsatzes wird beim Beweis des Schauderschen Fixpunktsatzes gegeben werden, der seinerseits als Übertragung des Brouwerschen Fixpunktsatzes auf Banachräume angesehen werden kann.