Vahlen kompakt

Mathematik in der BWL

Anwendungsorientiert und verständlich

Bearbeitet von
Von Prof. Dr. Korbinian Blanckenburg

2. Auflage 2019. Buch. XIII, 127 S. Softcover
ISBN 978 3 8006 5995 1
Format (B x L): 14,1 x 22,4 cm

Der Graph einer gebrochenrationalen Funktion kann, analog zu den bisher eingeführten Funktionen, verschoben sein.

Definition 12: Verschiebungen einer gebrochenrationalen Funktion

$f(x) = \frac{1}{x+a} + b$ mit $x,a,b \in \mathbb{R}$ und $x + a \neq 0$ ist eine um a nach links oder rechts und um b nach unten oder oben verschobene gebrochenrationale Funktion.

Beispiel:
Eine gebrochenrationale Funktion kann auch ausschließlich einen positiven Wertebereich haben. Dieses gilt beispielsweise für folgende Funktion:
mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

x	$f(x)$
−100	0,0001
−2	$\frac{1}{4}$
−1	1
0	/
1	1
2	$\frac{1}{4}$
100	0,0001

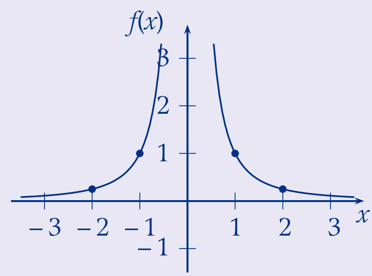


Abbildung 2.11: Beispiel einer gebrochenrationalen Funktion mit positivem Wertebereich

2.3.5 Wurzelfunktionen

Bei einer Wurzelfunktion steht der variable Funktionsterm unter einer Wurzel.

Definition 13: Allgemeine Wurzelfunktion

$f(x) = a\sqrt[n]{bx + c} + d$ mit $x,a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $a,b \neq 0$ ist eine allgemeine Wurzelfunktion vom Typ n. Für gerade n gilt $bx + c \geq 0$. Ist $n = 2$, handelt es sich um eine Quadratwurzelfunktion.

In der Definition wird deutlich, dass unter der Wurzel keine negativen Zahlen stehen dürfen. Der Definitionsbereich muss also entsprechend gewählt werden. Einfachstes Beispiel ist die Quadratwurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$, mit $x \geq 0$ bzw. $D_f = \mathbb{R}_0^+$.

Um diese Funktion zu skizzieren, wird im Folgenden eine Wertetabelle angelegt.

x	$f(x)$
0	0
1	1
2	1,41
4	2
9	3
16	4

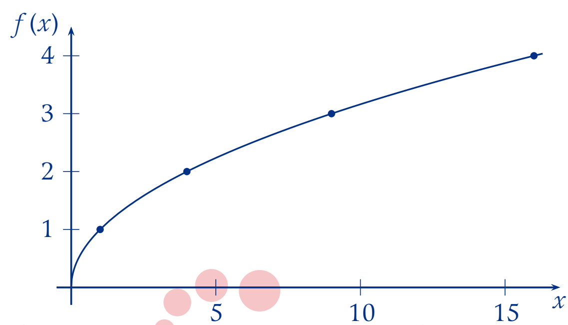


Abbildung 2.12: Beispiel einer Wurzelfunktion

Zu sehen ist der typische Verlauf einer Wurzelfunktion: Anfangs steigt die Funktion stark an, später dann weniger stark.

Ob der Graph einer Wurzelfunktion an der x-Achse gespiegelt, gestreckt oder gestaucht ist, kann am Wert des Parameters a abgelesen werden:

- Bei $a > 0$ läuft der Graph von unten links nach oben rechts.
- Bei $a < 0$ ist der Graph an der x-Achse gespiegelt.
- Bei $|a| > 1$ ist der Graph der Funktion horizontal gestreckt und dadurch schmaler bzw. steiler.
- Bei $|a| < 1$ ist der Graph der Funktion horizontal gestaucht und dadurch breiter bzw. flacher.

Ob der Graph nach links oder rechts verschoben ist, wird durch c bestimmt:

- Ist $c > 0$, ist der Graph nach links verschoben.
- Ist $c < 0$, ist der Graph nach rechts verschoben.

Ob der Graph nach unten oder oben verschoben ist, wird durch d bestimmt:

- Bei $d > 0$ ist der Graph nach oben verschoben.
- Bei $d < 0$ ist der Graph nach unten verschoben.
- Bei $d = 0$ verläuft der Graph durch den Ursprung.

Bei der Umformung von Wurzelfunktionen werden häufig die Rechengesetze für Wurzeln benötigt. Daher sind diese hier noch einmal aufgeführt:

Formel 11: Rechengesetze für Wurzelfunktionen

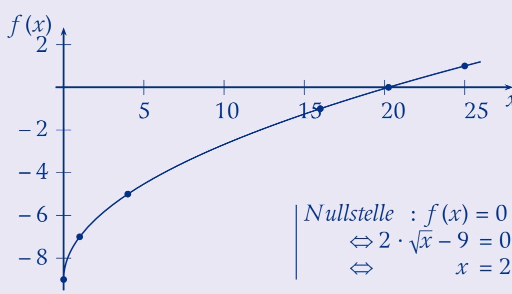
Für positive Zahlen a, b und n, m, $k \in \mathbb{N}$ gelten die folgenden Rechengesetze:

- Produktregel: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- Quotientenregel: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- Verschachtelungsregel oder Iterationsregel: $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[k\cdot n]{a}$
- Definition für gebrochene Exponenten: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$
- Bei gleichem Radikand gilt: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = \sqrt[n\cdot m]{a^{n+m}}$

Beispiel

Zeichnen Sie die Funktion $f(x) = 2\sqrt{x} - 9$ mit $D_f = \mathbb{R}_0^+$ und berechnen Sie die Nullstelle.

x	$f(x)$
0	-9
1	-7
4	-5
9	-3
16	-1
25	1



$$\begin{aligned} \text{Nullstelle} &: f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow 2 \cdot \sqrt{x} - 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x &= 20{,}25 \end{aligned}$$

Abbildung 2.13: Beispiel einer Wurzelfunktion mit Nullstelle

2.3.6 Exponentialfunktionen

Eine Exponentialfunktion ist allgemein wie folgt definiert:

Definition 14: Exponentialfunktion

$f(x) = a^x + b$ mit $x,a,b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $a \neq 1$ ist eine Exponentialfunktion.

Exponentialfunktionen sind im Grunde schon aus Kapitel 1.3 (Geometrische Folgen) bekannt. Eine geometrische Folge der Form $a_n = a_0 \cdot q^n$ ist bei einem bekannten q eine Exponentialfunktion. So kann der Kapitalendwert einer Geldanlage von 30 € bei einem Zinssatz von 2 % pro Jahr im Laufe der Jahre (mit Zinseszins) über die Exponentialfunktion $K_n = 30\text{ €} \cdot 1{,}02^n$ berechnet werden.

Ob der Graph einer Exponentialfunktion verschoben ist, kann am Parameter b abgelesen werden:

- Bei $b > 0$ ist der Graph nach oben verschoben.
- Bei $b < 0$ ist der Graph nach unten verschoben.

Ferner gilt für $f(x) = a^x + b$ mit $a > 1$

- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$,

  d. h. die Funktion $f(x)$ geht bei immer größer werdenden x-Werten gegen Unendlich.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$,

  d. h. die Funktion $f(x)$ geht bei immer kleiner werdenden x-Werten gegen b.

Beispiel: $f(x) = 2^x$

x	$f(x)$
−2	0,25
−1	0,5
0	1
1	2
2	4

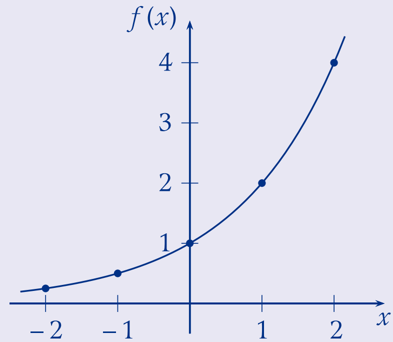


Abbildung 2.14: Beispiel einer Exponentialfunktion

Wenn $0 < a < 1$ liegt, handelt es sich auch um eine Exponentialfunktion, allerdings um eine exponentiell fallende. Ein finanzmathematisches Beispiel hierfür sind geometrische Abschreibungen (siehe Kapitel 1.4.2.4).

Für $f(x) = a^x + b$ mit $0 < a < 1$ gilt

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$,
  d. h. die Funktion $f(x)$ geht bei immer größer werdenden x-Werten gegen b.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$,
  d. h. die Funktion $f(x)$ geht bei immer kleiner werdenden x-Werten gegen Unendlich.

Beispiel: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$f(x)$
−2	4
−1	2
0	1
1	0,5
2	0,25

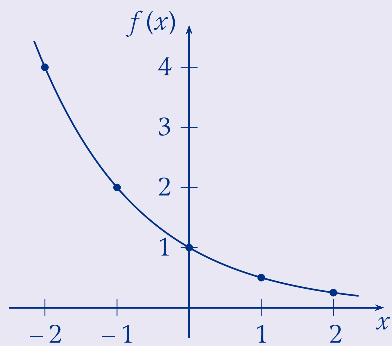


Abbildung 2.15: Beispiel einer Exponentialfunktion mit kleiner Basis

Eine sehr bedeutende Exponentialfunktion hat als Basis die Eulersche Zahl $e = 2{,}7182$ […]. Sie wird häufig auch als e-Funktion bezeichnet. Die einfachste e-Funktion lautet $f(x) = e^x$. Benannt wurde die Eulersche Zahl nach ihrem Entdecker und Namensgeber Leonhard Euler (1707–1783).

Beispiel: $f(x) = e^x$ (Eulersche Zahl $e^1 = 2{,}718281\ldots$)

x	$f(x)$
−2	0,135
−1	0,368
0	1
1	2,718
1,5	4,482

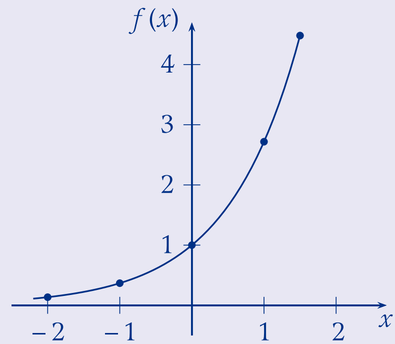


Abbildung 2.16: Beispiel einer e-Funktion

Die ersten Stellen der Eulerschen Zahl wurden schon von Bernoulli (1655–1705) in einer spannenden finanzmathematischen Anwendung gefunden. So resultiert die Eulersche Zahl, wenn ein bestimmter Betrag unendlich oft unterjährig verzinst wird:

Nachfolgend wird das Kapital nach einem Jahr bei einem Zinssatz von 100 % berechnet. Das Startkapital beträgt € 10.

$$K_1 = K_0 \cdot q^n \rightarrow K_1 = 10 \cdot (1 + 1)^1 = 20$$

Aus € 10 wird also € 20. Doch nun werden die Zinsen nicht nach einem Jahr gezahlt, sondern zweimal nach 6 Monaten. Allerdings dann nicht 100 %, sondern die anteiligen Zinsen am Jahr (also 50 %). Dieses ist das Prinzip der unterjährigen Verzinsung. Die Zinsen der ersten 6 Monate verzinsen sich das restliche Jahr weiter, daher kommt es zu einem höheren Endwert:

$$K_1 = 10 \cdot (1 + 0{,}5)^2 = 22{,}5.$$

Jetzt wird die Anzahl der unterjährigen Verzinsungszeitpunkte weiter erhöht. Beispielsweise auf eine tägliche Verzinsung:

$$K_1 = 10 \cdot (1 + \tfrac{1}{365})^{365} \approx 27{,}15$$

Und so sähe es aus bei minütlicher Verzinsung (ein normales Jahr hat 525600 Minuten):

$$K_1 = 10 \cdot \left(1 + \frac{1}{525600}\right)^{525600} = 27{,}182685$$

Der Endwert erhöht sich durch die minütliche Verzinsung nicht mehr viel. Das wird noch weniger, wenn die Verzinsungszeitpunkte weiter erhöht werden. Es ist (mathematisch) ein so genannter Grenzwert erreicht. Das Verhältnis von Endwert zu Startwert entspricht bei unendlich vielen Verzinsungszeitpunkten genau der Eulerschen Zahl (bei minütlicher Verzinsung stimmt die Zahl schon auf vier Nachkommastellen: $\frac{27{,}182685}{10} = 2{,}7182685 \approx e$).

2.3.7 Logarithmusfunktionen

Der Logarithmus einer Zahl a ist definiert als jener Exponent, mit dem eine bestimmte Zahl b (die so genannte Basis) potenziert werden muss, um die Zahl a zu erhalten.

Definition 15: Logarithmus

Seien $a,b \in \mathbb{R}^+$, dann gilt für $a = b^x$ auch $x = log_b a$.

Für $a = 2$ und $b = 3$ kann bei $2 = 3^x$ der Wert für x also mit Hilfe des Logarithmus berechnet werden: $x = \log_3 2 \approx 0{,}6309$.

Der Logarithmus zur Basis der Eulerschen Zahl e wird auch als natürlicher Logarithmus bezeichnet:

Definition 16: Natürlicher Logarithmus

Sei $a \in \mathbb{R}^+$, dann gilt für $a = e^x$ auch $x = log_e a = ln(a)$.

Die Funktion des natürlichen Logarithmus ist also genau die Umkehrfunktion zur e-Funktion. Demnach ist bei $f(x) = e^x$ beispielsweise der Wert für $x = 1$, also $f(1) = e^1 \approx 2{,}72$. Gleichzeitig ist bei $f(x) = ln(x)$ der Wert für $x = e^1$, also $f(e^1) = ln(e^1) = 1$.

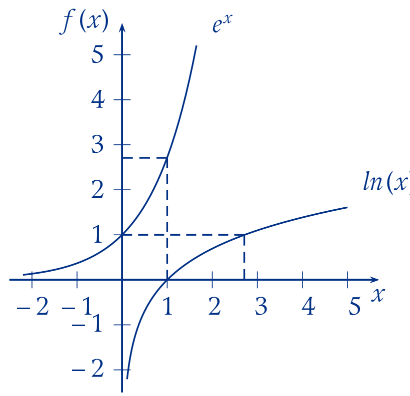


Abbildung 2.17: e-Funktion und Logarithmusfunktion

Für $f(x) = ln(x)$ mit $x > 0$ gilt

- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$,
  d. h. die Funktion $f(x)$ geht bei immer größer werdenden x-Werten gegen Unendlich.
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$,
  d. h. die Funktion $f(x)$ geht bei positiven, immer kleiner werdenden x-Werten gegen unendlich Negativ.

Beispiel:
$f(x) = ln(x)$ mit $D_f = \mathbb{R}^+$

x	$f(x)$
0,001	− 6,91
0,5	− 0,69
1	0
2	0,69
10	2,3

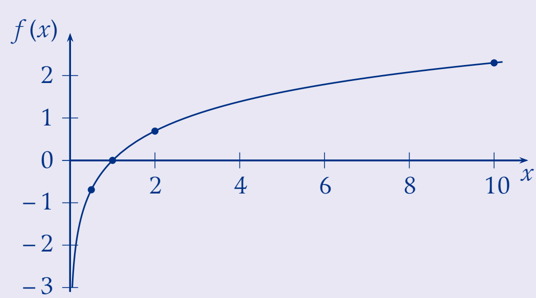


Abbildung 2.18: Beispiel einer Logarithmusfunktion

$ln(x)$ ist die Umkehrfunktion zu e^x,

z. B. $ln(5) \approx 1{,}61$
$e^{1{,}61} \approx 5$