Springer-Lehrbuch

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Bearbeitet von
Thorsten Pampel

1. Auflage 2009. Taschenbuch. x, 318 S. Paperback
ISBN 978 3 642 04489 2
Format (B x L): 15,5 x 23,5 cm
Gewicht: 557 g

Kapitel 2
Mathematische Vorgehensweise

Um neue Ergebnisse zu erzielen, ist es häufig notwendig, Aussagen präzise zu formulieren und zu **beweisen**. Daher werden in diesem Kapitel die mathematische Begriffsbildungen und Vorgehensweisen zusammengestellt, die benötigt werden, um mathematische Texte zu verstehen oder selber zu schreiben.

2.1 Mathematische Logik

Um Aussagen mathematisch präzise zu formulieren, ist dieser Abschnitt über „mathematische Logik“ angefügt.

Definition 2.1. Eine (mathematische) **Aussage** $\mathscr{P}$ ist ein Satz, der entweder **wahr** oder **falsch** ist. Die **Negation** $\neg\mathscr{P}$ einer Aussage $\mathscr{P}$ ist genau dann wahr, wenn $\mathscr{P}$ falsch ist und genau dann falsch, wenn $\mathscr{P}$ wahr ist.

Bezogen auf die Vierecke in Abb. 2.1 soll entschieden werden, welche der Sätze mathematische Aussagen sind und ob die Aussagen „wahr“ oder „falsch“ sind.

- „Das Viereck aus Abb. 2.1 hat gleiche Seitenlängen.“
  Das ist **keine** mathematische Aussage (welches Viereck?).
- „Die Vierecke *A* und *D* haben je gleiche Seitenlängen.“
  Das ist eine mathematische Aussage, die **wahr** ist.
- „Alle Vierecke aus Abb. 2.1 haben je gleiche Seitenlängen.“
  Das ist eine mathematische Aussage, die **falsch** ist.
- „Mindestens ein Viereck aus Abb. 2.1 hat gleiche Seitenlängen.“
  Das ist eine mathematische Aussage, die **wahr** ist (A oder D).
- „Wie viele Vierecke aus Abb. 2.1 sind Rechtecke?“
  Das ist **keine** mathematische Aussage (sondern eine Frage).

T. Pampel, *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, Springer-Lehrbuch,

DOI 10.1007/978-3-642-04490-8_2,

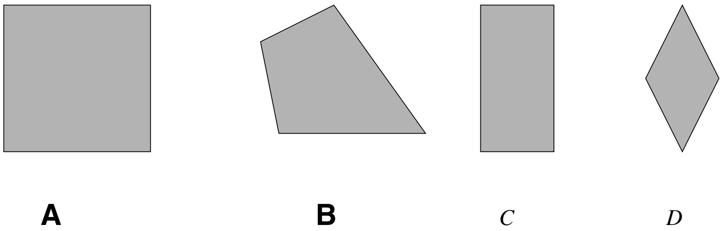

Abb. 2.1 Verschiedene Vierecke

Anmerkung 2.1. Entscheidend dafür, ob ein Satz eine mathematische Aussage ist, ist auch, dass die auftretenden Begriffe bekannt sind. Beispielsweise ist keiner der obigen Sätze eine mathematische Aussage, wenn Ihnen nicht bekannt ist, was ein Viereck ist.

Nun werden die Negationen zu einigen Aussagen angegeben:

- „Jedes Auto auf dem Parkplatz ist rot.“
  Die Negation lautet: „Auf dem Parkplatz steht mindestens ein Auto, das nicht rot ist.“
- „Auf dem Parkplatz steht (mindestens) ein rotes Auto.“
  Die Negation lautet: „Auf dem Parkplatz steht kein rotes Auto.“
- „Auf dem Parkplatz steht genau ein rotes Auto.“
  Die Negation lautet: „Auf dem Parkplatz steht entweder kein rotes Auto oder es stehen mindestens zwei rote Autos auf dem Parkplatz.“

In vielen Fällen sind mathematische Aussagen von der Form „**Wenn** … gilt, **dann** gilt auch …“. Solche Aussagen werden als **Implikation** bezeichnet.

Definition 2.2. Eine **Implikation** ist eine Aussage der Form

„**Wenn** $\mathscr{P}$ gilt, **dann** gilt auch $\mathscr{Q}$“,

wobei $\mathscr{P}$ und $\mathscr{Q}$ zwei Aussagen sind. Die mathematische Beschreibung hierfür ist

$$\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}.$$

Wichtig ist es, textliche Umschreibungen von $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ zu erkennen.

Textliche Beschreibungen einer Implikation:

- „**Wenn** $\mathscr{P}$ gilt, **dann** gilt auch $\mathscr{Q}$.“
- „**Aus** $\mathscr{P}$ **folgt** $\mathscr{Q}$.“
- „$\mathscr{P}$ ist eine **hinreichende Bedingung** für $\mathscr{Q}$.“
- „$\mathscr{Q}$ ist eine **notwendige Bedingung** für $\mathscr{P}$.“

Als Beispiel wird eine Implikation nun auf verschiedene Weise beschrieben:

- **Wenn** ein Viereck A ein Quadrat ist, **dann** hat A gleiche Seitenlängen.
- **Daraus**, dass ein Viereck A ein Quadrat ist, **folgt**, dass A gleiche Seitenlängen besitzt.
- Eine **notwendige Bedingung** dafür, dass ein Viereck A ein Quadrat ist, ist, dass A gleiche Seitenlängen besitzt.
- Eine **hinreichende Bedingung** dafür, dass ein Viereck A gleiche Seitenlängen besitzt, ist, dass es ein Quadrat ist.

In vielen Fällen soll eine Aussage durch eine andere **äquivalente** Aussage ersetzt werden; insbesondere wenn bei der anderen Aussage bekannt ist, dass sie wahr ist.

Definition 2.3. Zwei Aussagen $\mathscr{P}$ und $\mathscr{Q}$ heißen **äquivalent**, wenn sowohl $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ als auch $\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}$ gilt. Die mathematische Beschreibung hierfür ist

$$\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q}.$$

Auch für $\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q}$ gibt es verschiedene textliche Umschreibungen.

Textliche Beschreibungen von Äquivalenz:

- „$\mathscr{P}$ gilt **genau dann, wenn** $\mathscr{Q}$ gilt“,
- „$\mathscr{P}$ gilt **dann und nur dann, wenn** $\mathscr{Q}$ gilt“,
- „$\mathscr{P}$ ist **notwendig und hinreichend** für $\mathscr{Q}$“.

Beispiel 2.1.
- Ein Viereck ist **genau dann** ein Quadrat, **wenn** es ein Rechteck ist und gleiche Seitenlängen hat.
- Ein Viereck ist **dann und nur dann** ein Quadrat, **wenn** es ein Rechteck ist und gleiche Seitenlängen hat.
- **Notwendig und hinreichend** dafür, dass ein Viereck ein Quadrat ist, ist, dass es ein Rechteck mit gleichen Seitenlängen ist.

2.2 Definition, Satz, Lemma, Korollar

Eine ausführliche Zusammenstellung und Erläuterung mathematischer Begriffe und viele weitere Hinweise zum Umgang mit den typischen Bezeichnungen der Mathematik finden sich in Beutelspacher (1992). In diesem kurzen Abschnitt werden wenige typische Begriffe erklärt, die bei mathematischen Argumentationen – auch in diesem Buch – häufig auftreten.

- Neue Begriffe werden durch **Definitionen** eingeführt.
- Zusammenhänge und Folgerungen aus bisher Bekanntem werden möglichst präzise in einem **Satz** beschrieben. Zu einem Satz gehört auch ein **Beweis**, in dem nachgewiesen wird, dass die Aussage des Satzes richtig ist. Synonym werden oft auch die Begriffe **Proposition** oder **Theorem** benutzt, wobei **Theorem** oft auch im Sinne von „zentraler Satz" gebraucht wird.
- Ein **Lemma** lässt sich meist als **technischer Hilfssatz** umschreiben. Es präzisiert Teilergebnisse, die für den eigentlichen Satz oder einen Beweis benötigt werden. Eine andere Bedeutung – **Hauptgedanke**, z. B. Lemma von Zorn – tritt hauptsächlich in mathematischen Texten auf und selten in Anwendungen.
- Ein **Korollar** ist eine direkte **Folgerung** aus einem vorangegangen Ergebnis und bezieht sich oft auf einen Spezialfall, der von dem allgemeineren Ergebnis bereits abgedeckt ist.

2.3 Der mathematische Beweis

Auch in vielen ökonomischen Arbeiten werden Aussagen mathematisch **bewiesen**. Aus diesem Grund ist es notwendig, die wichtigsten **Beweistechniken** zu kennen. Diese werden nun kurz beschrieben.

1. **Direkter Beweis**
   Benutze mathematische Aussagen, von denen bekannt ist, dass sie „wahr" sind und folgere hieraus die behauptete Aussage.
2. **Indirekter Beweis** oder **Beweis durch Widerspruch**
   Nimm das Gegenteil der behaupteten Aussage an, bzw. nimm an, dass die behauptete Aussage „falsch" ist. Folgere, dass dann ein Widerspruch auftritt, z. B. dass eine „falsche" mathematische Aussage gelten müsste. Damit kann die behauptete Aussage nicht „falsch" sein, sie muss also „wahr" sein.
3. **Induktionsbeweis** (nur für natürliche Zahlen)
   Induktionsanfang: Zeige: Die Aussage gilt für eine natürliche Zahl n_0.
   Induktionsschritt: Zeige: Wenn die Aussage für eine natürliche Zahl n gilt, dann ist die Aussage auch für $n+1$ „wahr".
   Damit ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ gezeigt.

Diese Beweistechniken werden nun anhand von Beispielen erläutert.

1. Der Nachweis von $\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}$, der Regel für Binomialkoeffizienten auf Seite 23, war ein Beispiel für einen **direkten Beweis**. Diese Gleichung wurde aus den Definitionen der Fakultät und des Binomialkoeffizienten sowie aus den Rechenregeln hergeleitet.

   Als weiteres Beispiel wird **direkt** beweisen, dass $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $q \neq 1$ ist. Mit den bisherigen Rechenregeln und einigen (geschickten) Umformungen ergibt sich:

$$\begin{aligned}(1-q)\sum_{i=0}^{n} q^i &= \sum_{i=0}^{n}(1-q)q^i = \sum_{i=0}^{n}(q^i - q^{i+1})\\ &= (q^0-q^1)+(q^1-q^2)+\ldots+(q^{n-1}-q^n)+(q^n-q^{n+1})\\ &= q^0 \underbrace{-q^1+q^1}_{=0}\underbrace{-q^2+q^2}_{=0}\underbrace{-q^3+\ldots+q^{n-1}}_{=0}\underbrace{-q^n+q^n}_{=0}-q^{n+1}\\ &= 1-q^{n+1}.\end{aligned}$$

Dividieren dieser Gleichung durch $(1-q)$ ergibt die Behauptung.

2. Als Beispiel für einen Beweis durch Widerspruch wird gezeigt, dass $x^2 = 2$ keine rationale Lösung besitzt.

   Angenommen es gibt eine rationale Lösung von $x^2 = 2$. Dann gibt es natürliche Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$, die **keinen gemeinsamen Teiler besitzen** (soweit wie möglich gekürzt), so dass $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ gilt. Dann gilt auch $p^2 = 2q^2$ und p^2 ist gerade. Somit ist auch p gerade (eigentlich wäre dies auch zu zeigen) und $k := \frac{p}{2} \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $(2k)^2 = 2q^2$ und $2k^2 = q^2$. Das impliziert, dass auch q gerade ist. Folglich besitzen p und q **den gemeinsamen Teiler 2**, was ein Widerspruch ist (Annahme: p und q haben keinen gemeinsamen Teiler, siehe oben). Damit kann die Annahme, es gebe eine rationale Lösung von $x^2 = 2$, **nicht wahr** sein und das Gegenteil muss gelten.

3. Ein Beispiel für einen Induktionsbeweis (bzw. eine Beweisskizze) trat beim Beweis von Satz 1.1 (Seite 24) auf.

   Nun beweisen wir die Aussage $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $q \neq 1$ noch einmal; diesmal mit **vollständiger Induktion**.

   - **Induktionsanfang:** Für $n = 0$ gilt offensichtlich

   $$\sum_{i=0}^{0} q^i = q^0 = 1 = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}.$$

   - **Induktionsschritt:** Angenommen $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ gilt für n, dann gilt für $n+1$:

   $$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} q^i &= q^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} q^i \qquad \text{(aus der Induktionsvoraussetzung folgt)}\\ &= q^{n+1} + \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} + \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}.\end{aligned}$$

   Also gilt die Formel für $n+1$, wenn sie für n gilt. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt sie somit für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$.

Manchmal ist es einfacher zu zeigen, dass eine bestimmte Aussage nicht gilt. In solchen Fällen ist folgender Zusammenhang – der Kontraposition oder Umkehrschluss genannt wird – hilfreich:

Satz 2.1. *Seien $\mathscr{P}$ und $\mathscr{Q}$ zwei Aussagen, dann gilt*

$$\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q} \text{ genau dann, wenn } \neg\mathscr{Q} \Longrightarrow \neg\mathscr{P},$$

und

$$\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q} \text{ genau dann, wenn } \neg\mathscr{Q} \Longleftrightarrow \neg\mathscr{P}.$$

Dieser Zusammenhang wurde beispielsweise in Definition 1.5 benutzt, als

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

und

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

als äquivalent angegeben wurden.

Aufgaben zu Kapitel 2

Aufgaben zu Abschnitt 2.1

2.1. Welche der folgenden Sätze sind mathematische Aussagen? Geben Sie zu den Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind. Geben Sie die Negation an.

a) „Jede Woche hat 7 Tage.“ b) „Der Monat hat 30 Tage.“
c) „Jedes Jahr hat 365 Tage.“ d) „Jede Nacht hat 12 bis 13 Stunden.“
e) „Hat der Januar 31 Tage?“ f) „Es gibt Monate mit weniger als 30 Tagen.“

2.2. Betrachte ein Viereck A und folgende Aussagen:

- $\mathscr{P}$ = „Das Viereck A ist ein Parallelogramm.“
- $\mathscr{Q}$ = „Das Viereck A ist ein Quadrat.“
- $\mathscr{R}$ = „Das Viereck A ist ein Rechteck.“
- $\mathscr{S}$ = „Das Viereck A hat gleiche Seitenlängen.“

Welche der folgenden Implikationen oder Äquivalenzen sind richtig?

a) $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$
b) $\mathscr{Q} \Longleftrightarrow \mathscr{R}$ und $\mathscr{S}$
c) $\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}$
d) $\mathscr{Q} \Longleftrightarrow \mathscr{P}$ und $\mathscr{S}$
e) $\neg\mathscr{P} \Longleftrightarrow \neg\mathscr{Q}$

Aufgaben zu Abschnitt 2.3

2.3. Zeigen Sie durch vollständige Induktion

a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
b) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \frac{n}{n+1}$
c) $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$

Teil II
Folgen und Reihen

In diesem Teil werden Folgen und Reihen behandelt. **Folgen** spielen eine wichtige Rolle, wenn zeitliche Entwicklungen beschrieben werden. Typische Beispiele sind die Beschreibung von Kontenentwicklungen oder die Analyse von Quartalszahlen einer Volkswirtschaft. Desweiteren lässt sich der **Grenzwertbegriff** gut anhand von Folgen erklären.

Neben den Folgengliedern interessiert manchmal auch ihre Summe. Solche aufsummierten Folgenglieder definieren eine **Reihe**. Ein Beispiel hierfür ist der Gegenwartswert einer Geldanlage, die über mehrere Perioden einen Ertrag liefert. Ein anderes Beispiel ist bei Wachstumsmodellen der diskontierte zukünftige Nutzen, über den optimiert wird. Desweiteren kann die – in den Wirtschaftswissenschaften wichtige – **Exponentialfunktion** über Reihen definiert werden.

Springer

http://www.springer.com/978-3-642-04489-2

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler
Pampel, T.
2010, X, 318 S. 95 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-642-04489-2