Springer-Lehrbuch

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Bearbeitet von
Thorsten Pampel

1. Auflage 2009. Taschenbuch. x, 318 S. Paperback
ISBN 978 3 642 04489 2
Format (B x L): 15,5 x 23,5 cm
Gewicht: 557 g

Weitere Fachgebiete > Mathematik > Numerik und Wissenschaftliches Rechnen > Angewandte Mathematik, Mathematische Modelle

Zu Inhaltsverzeichnis

Kapitel 3
Folgen

Eine Folge reeller Zahlen ordnet natürlichen Zahlen jeweils eine reelle Zahl zu. Liegen beispielsweise volkswirtschaftliche Daten quartalsweise vor, so kann man diese als Folge interpretieren. Als einführende Anwendung wird die Entwicklung des Kontostandes mit Zins-und-Zinseszins-Rechnung als Folge aufgefasst. Im Anwendungsabschnitt 3.4 wird die zeitliche Entwicklung im Solow-Wachstumsmodell anhand der Folgeneigenschaften untersucht. Als wichtiges mathematisches Konzept wird in Abschnitt 3.3 der **Grenzwertbegriff** anhand von Folgen eingeführt.

3.1 Zinsrechnung

Als einführendes Beispiel wird zunächst die Zinsrechnung behandelt, da die Entwicklung des Kontostandes bei Zins-und-Zinseszins-Rechnung als Folge beschrieben werden kann. Die betrachteten Variablen sind

n	Periode	N	Laufzeit
A	Anfangskapital	E	Endvermögen
K_n	Kapital in Periode n		
p	Zinssatz	p^*	effektiver Jahreszins

Der einfachste Fall ist ein Konto, auf das einmalig am Anfang von Periode 0 ein Anfangskapital $A > 0$ eingezahlt wird (mit $A < 0$ lässt sich die Kreditaufnahme modellieren). Das Kapital in Periode 0 ist $K_0 = A$ und wird jeweils nach einer Periode (typischerweise ein Jahr) zu einem Zinssatz p verzinst. Somit ist der Kapitalstand nach einer Periode $K_1 = (1+p)K_0 = (1+p)A$, nach zwei Perioden $K_2 = (1+p)K_1 = (1+p)^2K_0$, nach drei Perioden $K_3 = (1+p)K_2 = (1+p)^3K_0$ und so weiter. Die Entwicklung des Kapitals von Periode n nach Periode $n+1$ ist rekursiv definiert durch $K_{n+1} = (1+p)K_n$ und es gilt $K_n = (1+p)^nK_0$.

Wegen $K_0 = A$ gilt in diesem Fall $K_n = (1+p)^nA$. Bei einer Laufzeit von N Perioden ist K_N gleichzeitig das Endvermögen E. Damit gilt

T. Pampel, *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, Springer-Lehrbuch,
DOI 10.1007/978-3-642-04490-8_3, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010

$$E = K_N = (1+p)^N K_0 = (1+p)^N A.$$

Das notwendige Anfangskapital, um bei gegebenem Zinssatz p und einer Laufzeit N ein Endvermögen E zu erreichen, ergibt sich durch Auflösen der Formel nach A und ist

$$A = \frac{E}{(1+p)^N}.$$

Der **effektive Jahreszins** einer Geldanlage ist derjenige konstante Zinssatz p^*, der – wenn es eine alternative Geldanlage für den selben Anlagezeitraum mit diesem konstanten Zinssatz p^* gäbe – die gleichen Zahlungsströme ermöglichen würde. Bei einer Geldanlage mit jährlichen Zahlungseingang A_i und Auszahlungen E_i müsste p^* folgende Gleichung lösen:

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{E_i - A_i}{(1+p)^i} = 0,$$

wobei insbesondere $A_0 = A$ und $E_N = E$ gilt. Das ist hier einfach, denn es gibt nur eine Einzahlung $A_0 = A$ und eine Auszahlung $E_N = E$. Wegen $\frac{E}{(1+p^*)^N} - A = 0$ gilt damit

$$p^* = \left(\frac{E}{A}\right)^{\frac{1}{N}} - 1.$$

Mit $K_0 = A$ und $E = (1+p)^N A$ ergibt sich – wie erwartet – der effektive Jahreszins $p^* = p$ (das war schließlich auch so angenommen worden).

Anmerkung 3.1. Soll zu einer Geldanlage die **Mindestlaufzeit** bestimmt werden, so muss $E = (1+p)^N K_0$ nach N aufgelöst werden. Im Vorgriff auf die später folgende Behandlung der Logarithmusfunktion wird hier die zugehörige Formel angegeben:

$$N^* = \frac{\log\left(\frac{E}{A}\right)}{\log(1+p)}.$$

Da die Mindestlaufzeit $N \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl ist, wird sie so gewählt, dass $N - 1 < N^* \leq N$ ist.

Nun sollen die Formeln für eine leichte Modifikation hergeleitet werden. Es sei angenommen, dass auf die Geldanlage ein Ausgabeaufschlag aA, $a \in [0,1)$ zu bezahlen ist, so dass $K_0 = (1-a)A$ ist. Das Kapital in Periode n ist dann

$$K_n = (1+p)^n K_0 = (1+p)^n (1-a)A,$$

das Endvermögen ist somit

$$E = (1+p)^N K_0 = (1+p)^N (1-a)A.$$

Das notwendige Anfangskapital A um E zu erreichen ist $A = \frac{E}{(1+p)^N(1-a)}$, und der effektive Jahreszins ist

$$p^* = \left(\frac{E}{A}\right)^{\frac{1}{N}} - 1 = (1+p)(1-a)^{\frac{1}{N}} - 1.$$

Bei den meisten Größen ist die Wirkung so, als ob entsprechend weniger Geld angelegt wurde. Interessant ist der effektive Jahreszins, da dieser jetzt von der Laufzeit abhängt. Für kleine N kann er sogar negativ werden und für große N nähert er sich p. Um Geldanlagen zu vergleichen, ist der effektive Jahreszins sehr gut geeignet, allerdings müssen alle Zahlungsströme berücksichtigt werden.

Die Zinsrechnung ist ein Teil der Finanzmathematik. Weitere Anwendungen sind: die Berechnung von Renten, die Berechnung von Schuldentilgung und die Investitionsrechnung.

3.2 Folgen

In diesem Abschnitt werden **Folgen** definiert und Eigenschaften wie **Beschränktheit** oder **Monotonie** behandelt. Eine Folge ist eine Aneinanderreihung von reellen Zahlen, so dass jeder natürlichen Zahl $i \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl $a_i \in \mathbb{R}$ zugeordnet wird. Formal ist dies eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$.

Definition 3.1. Eine **Folge** (oder Zahlenfolge) $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, die jeder natürlichen Zahl $i \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl $a_i \in \mathbb{R}$ zuordnet. Die Zahl a_i heißt ***i*-tes Folgenglied**.
Ist $n_0 \geq 0$, so ist $\{a_i\}_{i=n_0}^{\infty}$ eine **Folge**, die bei n_0 beginnt.

Wenn der Anfangsindex n_0 klar sind, schreibt man statt $\{a_i\}_{i=n_0}^{\infty}$ auch kurz $\{a_i\}$.

Beispiel 3.1.

1. Die **arithmetische Folge** mit $a_{i+1} = a_i + d$, a_0 gegeben:
   $\{a_0 + id\}_{i=0}^{\infty} = \{a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, a_0 + 3d, \ldots\}$ mit $a_i = a_0 + id$.
2. Die **geometrische Folge** mit $a_{i+1} = a_i q$, a_0 gegeben:
   $\left\{a_0 q^i\right\}_{i=0}^{\infty} = \{a_0, a_0 q, a_0 q^2, a_0 q^3, \ldots\}$ mit $a_i = a_0 q^i$.
3. Die **Fibonacci-Zahlen** mit $a_{i+2} = a_{i+1} + a_i$, $a_0 = 0, a_1 = 1$:
   $\{a_i\}_{i=0}^{\infty} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots\}$.
4. Die Folge $\left\{\frac{i}{i+1}\right\}_{i=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right\}$ mit $n_0 = 1$ und $a_i = \frac{i}{i+1}$, $i \geq 1$.
5. Die **natürlichen Zahlen** $\{i\}_{i=0}^{\infty} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$ mit $a_i = i$, $i \geq 0$.
6. Die **alternierende Folge** $\left\{(-1)^i\right\}_{i=0}^{\infty} = \{1, -1, 1, -1, \ldots\}$ mit $a_i = (-1)^i$, $i \geq 0$.
7. Die **konstante Folge** $\{1\}_{i=0}^{\infty} = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots\}$ mit $a_i = 1$, $i \geq 0$.

Bei der Folge der Fibonacci-Zahlen wird ein Folgenglied aus den vorherigen Folgengliedern bestimmt. Eine solche Folge heißt **rekursiv** (oder **induktiv**) **definiert**. Das Prinzip ist wie bei der vollständigen Induktion. Es wird ein Anfangswert a_0 (bei den Fibonacci-Zahlen zwei Anfangswerte $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$) festgelegt und eine Regel angegeben, wie aus den bisherigen Folgengliedern a_0 bis a_n das Folgenglied a_{n+1} bestimmt wird. Bei der arithmetischen und der geometrischen Folge ist neben der rekursiven Bestimmung auch eine Formel angegeben, wie die Folgenglieder direkt bestimmt werden können.

Bei ökonomischen Anwendungen, wie beispielsweise bei der Behandlung von Wachstumsmodellen, wird die zeitliche Entwicklung häufig durch Folgen beschrieben, wobei der Hauptarbeitsaufwand die Ermittlung einer rekursiven Beschreibung ist.

Besonders häufig tritt die geometrische Folge auf. Dabei ist zu beachten, dass das Vorzeichen der Folgenglieder immer wechselt, wenn $q < 0$ ist. Ferner werden die Folgenglieder betragsmäßig beliebig groß, wenn $|q| > 1$ ist und betragsmäßig beliebig klein, wenn $|q| < 1$ ist. Als Beispiel werden die geometrischen Folgen in Abb. 3.1 für $q = \frac{4}{3}$ (divergent) und in Abb. 3.2 für $q = -\frac{3}{4}$ (konvergent) dargestellt.

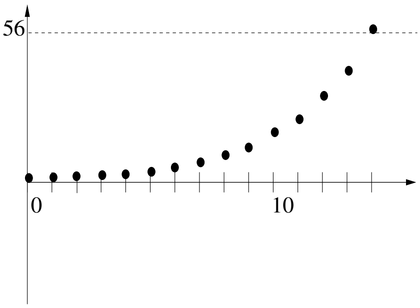

Abb. 3.1 Divergente geometrische Folge mit $q = \frac{4}{3}$

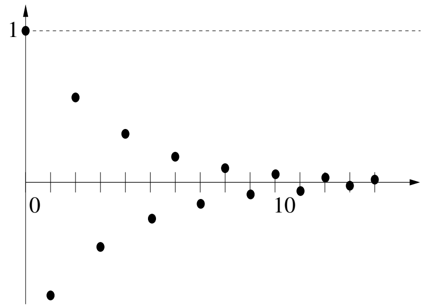

Abb. 3.2 Konvergente geometrische Folge mit $q = -\frac{3}{4}$

Eine wichtige Frage bei Folgen ist, ob die Folgenglieder beliebig groß werden können oder ob sie beschränkt sind, d. h. einen bestimmten Wert nicht über- oder unterschreiten.

Definition 3.2. Eine Folge $\{a_i\}_{i=n_0}^{\infty}$ heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine **obere Schranke** $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass alle Folgenglieder kleiner als c sind, d. h.,

$$a_i \leq c \text{ für alle } i \geq n_0.$$

Eine Folge heißt **nach unten beschränkt**, wenn es eine **unter Schranke** $d \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$a_i \geq d \text{ für alle } i \geq n_0 \text{ gilt.}$$

Eine Folge heißt **beschränkt**, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

Definition 3.3. Ist eine Folge nach unten beschränkt, dann heißt die größte unter Schranke das **Infimum** der Folge. Wird das Infimum von einem Folgenglied angenommen, so ist es das **Minimum** der Folge.

Ist eine Folge nach oben beschränkt, dann heißt die kleinste obere Schranke das **Supremum** der Folge. Wird das Supremum von einem Folgenglied angenommen, so ist es das **Maximum** der Folge.

Diese Eigenschaften werden anhand der Folgen aus Beispiel 3.1 untersucht.

1. Die arithmetische Folge mit $d \neq 0$ ist nicht beschränkt. Allerdings ist sie für $d > 0$ ($d < 0$) nach unten (oben) beschränkt durch jede Zahl $c \leq a_0$ ($c \geq a_0$), d. h., a_0 ist das Infimum (Supremum) und gleichzeitig auch das Minimum (Maximum).
2. Die geometrische Folge mit $|q| \leq 1$ ist durch $|a_0|$ beschränkt. Für $|q| > 1$ ist sie nicht beschränkt. Für $q = -1$ ergibt sich eine **alternierende** Folge wie im Fall 6. und für $q = 1$ eine **konstante** Folge wie im Fall 7.
3. Die Folge der Fibonacci-Zahlen ist nicht beschränkt.
4. Die Folge $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\}$ ist beschränkt mit Minimum $\frac{1}{2}$ (ein Infimum das durch a_1 angenommen wird) und Supremum 1 (das nicht erreicht wird).
5. Die Folge natürlicher Zahlen $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$ ist nicht beschränkt.
6. Die alternierende Folge $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots\}$ ist beschränkt mit Infimum und Minimum -1 sowie Supremum und Maximum 1.
7. Die konstante Folge $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots\}$ ist beschränkt, wobei 1 sowohl Infimum als auch Supremum ist.

Eine weitere wichtige Eigenschaft von Folgen ist die **Monotonie**.

Definition 3.4. Eine Folge $\{a_i\}_{i=n_0}^{\infty}$ heißt **streng monoton steigend**, wenn

$$a_{i+1} > a_i$$

für alle $i \geq n_0$ gilt, und **streng monoton fallend**, wenn

$$a_{i+1} < a_i$$

für alle $i \geq n_0$ gilt. Eine Folge $\{a_i\}_{i=n_0}^{\infty}$ heißt **monoton steigend**, wenn

$$a_{i+1} \geq a_i$$

für alle $i \geq n_0$ gilt, und **monoton fallend**, wenn

$$a_{i+1} \leq a_i$$

für alle $i \geq n_0$ gilt. Eine Folge heißt **monoton**, wenn sie monoton fallend oder steigend ist.

Auch die Monotonie wird anhand der Folgen aus Beispiel 3.1 untersucht.

1. Die arithmetische Folge ist streng monoton steigend, wenn $d > 0$ ist und streng monoton fallend, wenn $d < 0$ ist.
2. Die geometrische Folge mit $0 < q < 1$ ist streng monoton fallend, wenn $a_0 > 0$ ist. Für $a_0 < 0$ sind alle Folgenglieder negativ und die Folge ist streng monoton steigend (die Beträge der Folgenglieder werden allerdings kleiner).
   Die geometrische Folge mit $q > 1$ ist streng monoton steigend, wenn $a_0 > 0$ ist und streng monoton fallend, wenn $a_0 < 0$ ist.
   Die geometrische Folge mit $q < 0$ ist nicht monoton, da die Folgenglieder jedesmal das Vorzeichen wechseln.
3. Die Folge der Fibonacci-Zahlen ist streng monoton steigend.
4. Die Folge $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\}$ ist streng monoton steigend.
5. Die Folge der natürlichen Zahlen ist streng monoton steigend.
6. Die alternierende Folge $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots\}$ ist nicht monoton.
7. Die Folge $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots\}$ ist monoton fallend **und (!)** monoton steigend[1], aber nicht streng monoton.

3.3 Grenzwerte von Folgen

In vielen Anwendungen spielt der **Grenzwert einer Folge** eine wichtige Rolle. Die Konvergenz einer Folge gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ bedeutet, dass die Folgenglieder letztendlich in der Nähe von a liegen, wobei „Nähe“ so erklärt wird, dass die Abweichung höchstens $\varepsilon > 0$ beträgt. In Wachstumsmodellen bedeutet die **Konvergenz** gegen einen Grenzwert, dass langfristig ein stationärer Zustand erreicht wird.

Definition 3.5. Die Folge $\{a_i\}_{i=n_0}^{\infty}$ **konvergiert** gegen eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jeder positiven Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ gibt, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt. Die Zahl a heißt **Grenzwert** der Folge $\{a_i\}_{i=n_0}^{\infty}$ und man schreibt

$$\lim_{i \to \infty} a_i = a.$$

Ist der Grenzwert 0, so heißt sie **Nullfolge**.

Eine Folge $\{a_i\}_{i=n_0}^{\infty}$, die nicht konvergiert, heißt **divergent**.

---

[1] Das mag überraschen, entspricht aber der Definition. Bisweilen wird aus diesem Grund die Eigenschaft „monoton steigend“ als „monoton nicht-fallend“ bezeichnet und dann „streng monoton steigend“ einfach als „monoton steigend“ definiert.

Wird durch $U_\varepsilon(a) := (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ eine **ε-Umgebung** von a definiert, so bedeutet die Konvergenz gegen a, dass zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ letztendlich alle Folgenglieder in der ε-Umgebung von a sind. Dies wird in Abb. 3.3 illustriert.

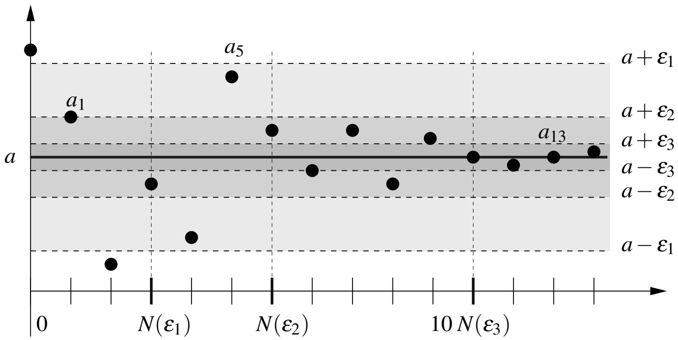

Abb. 3.3 Eine Folge mit Grenzwert a und der Darstellung von drei ε-Umgebungen $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ von a sowie der zugehörigen (kleinstmöglichen) Zahl $N(\varepsilon)$

Definition 3.6. Eine Folge $\{a_i\}_{i=n_0}^{\infty}$ heißt **bestimmt divergent** oder **uneigentlich konvergent** gegen $+\infty$, wenn es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ eine natürliche Zahl $N(K)$ gibt, so dass

$$a_n > K \text{ für alle } n \geq N(K)$$

gilt. Man schreibt

$$\lim_{i\to\infty} a_i = \infty.$$

Eine Folge heißt **bestimmt divergent** oder **uneigentlich konvergent** gegen $-\infty$, wenn es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ eine natürliche Zahl $N(K)$ gibt, so dass

$$a_n < K \text{ für alle } n \geq N(K)$$

gilt. Man schreibt

$$\lim_{i\to\infty} a_i = -\infty.$$

Die Folgen aus Beispiel 3.1 haben folgende Konvergenzeigenschaften:

1. Die arithmetische Folge mit $d \neq 0$ ist bestimmt divergent gegen ∞, falls $d > 0$, und gegen $-\infty$, falls $d < 0$ ist.
2. Die geometrische Folge mit $|q| < 1$ ist eine Nullfolge.
   Die geometrische Folge mit $q = 1$ konvergiert gegen a_0 (alle $a_i = a_0$).
   Die geometrische Folge mit $q = -1$ ist divergent (abwechselnd a_0 und $-a_0$).

Die geometrische Folge mit $q > 1$ ist bestimmt divergent gegen ∞, falls $a_0 > 0$, und bestimmt divergent gegen $-\infty$, falls $a_0 < 0$ ist.
Die geometrische Folge mit $q < -1$ ist divergent.
3. Die Folge der Fibonacci-Zahlen ist bestimmt divergent gegen ∞.
4. Die Folge $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\}$ konvergiert gegen 1.
5. Die Folge der natürlichen Zahlen ist bestimmt divergent gegen ∞.
6. Die Folge $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots\}$ ist divergent.
7. Die Folge $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots\}$ konvergiert gegen 1.

Im Zusammenhang mit dem Grenzwert einer Folge ist es wichtig, dass er (wenn es ihn gibt) eindeutig ist. Das besagt der folgende Satz.

Satz 3.1. *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.*

Ein ausführlicher Beweis findet sich in Forster (2008a). Die Beweisidee ist folgende: Angenommen, es gibt zwei Grenzwerte $a \neq b$, dann sind für $\varepsilon := \frac{|a-b|}{3} > 0$ die ε-Umgebungen disjunkt, d. h. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon) = \emptyset$. Es ist demnach nicht möglich, dass die Folge gleichzeitig gegen a und gegen b konvergiert.

Desweiteren ist es möglich, folgenden Zusammenhang zwischen Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz zu erhalten:

Satz 3.2. *Jede* ***konvergente*** *Folge ist* ***beschränkt****. Jede* ***monoton steigende (monoton fallende)*** *nach* ***oben (unten)*** *beschränkte Folge konvergiert gegen eine reelle Zahl.*

Der Beweis des ersten Teils beruht darauf, dass für ein $\varepsilon > 0$ alle Folgenglieder a_i mit $i \geq N(\varepsilon)$ durch $a+\varepsilon$ nach oben beschränkt sind. Dann ist das Maximum der endlich vielen Folgenelemente a_i, $i = n_0, \ldots, N(\varepsilon)-1$ und der Zahl $a+\varepsilon$ eine obere Schranke der Folge. Eine untere Schranke ergibt sich analog. Ein formaler Beweis des Satzes – auch des zweiten Teils – findet sich in Forster (2008a).

Anmerkung 3.2. Wirtschaftswissenschaftler sollten diesen Satz kennen, den folgenden mathematischen Hintergrund dagegen **nicht** unbedingt (Details finden sich in Forster (2008a) über mehrere Sätze verteilt). Zusammengefasst gilt:
Der zweite Teil gilt aufgrund der **Vollständigkeit** der reellen Zahlen (der Satz gilt **nicht** für $\mathbb{Q}$, da der Grenzwert möglicherweise nicht rational ist). Vollständigkeit bedeutet, dass jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert, wobei $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge ist, wenn es zu jeder positiven Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ gibt, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N(\varepsilon)$ ist. Desweiteren besagt der Satz von Bolzano und Weierstraß, dass jede beschränkte Folge konvergente Teilfolgen besitzt, d. h. eine konvergente Folge $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, wobei $n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < n_5 \ldots$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen ist. Zusammen mit der Monotonieeigenschaft ergibt sich die Konvergenz der ganzen Folge gegen den Grenzwert der Teilfolge.

Einige spezielle Grenzwerte:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,
- $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$,
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$,
- $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$,
- $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{p}{n}\right)^n = \mathrm{e}^p$,
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.
- Seien $b_k \neq 0$ und $c_l \neq 0$ und $\pm$ das Vorzeichen von $\frac{b_k}{c_l}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \ldots + b_1 n + b_0}{c_l n^l + c_{l-1}n^{l-1} + \ldots + c_1 n + c_0} = \begin{cases} \pm\infty, & \text{wenn } k > l, \\ \frac{b_k}{c_l}, & \text{wenn } k = l \\ 0, & \text{wenn } k < l. \end{cases}$$

Ist der führende Exponent im Zähler größer, dann ist die Quotientenfolge bestimmt divergent. Ist der führende Exponent im Nenner größer, dann ist es eine Nullfolgen. Sind die führenden Exponenten gleich, dann ist der Quotient der Vorfaktoren der Grenzwert.

Dabei ist e die **Eulersche Zahl** $\mathrm{e} \approx 2.718281828459\ldots$ Sie ist eine reelle Zahl, die nicht rational ist. Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{p}{n}\right)^n = \mathrm{e}^p$ spielt eine Rolle bei der Zinsrechnung. Ist $p = 0.036$ der jährliche Zinssatz, so muss das Anfangskapital mit $1 + p = 1.036$ multipliziert werden. Erhält man halbjährlich einen Zinssatz $\frac{p}{2} = 0.018$, so sind die jährlichen Zinsen (inklusive Zinseszins) $\left(1+\frac{p}{2}\right)^2 = 1.036324$. Bei monatlicher Verzinsung mit $\frac{p}{12} = 0.003$ sind die jährlichen Zinsen (inklusive Zinseszins) $\left(1+\frac{p}{12}\right)^{12} = 1.03659998\ldots$ Für beliebiges n sind die Jahreszinsen $\left(1+\frac{p}{n}\right)^n$. Die Betrachtung für $n \to \infty$ ist gleichbedeutend damit, dass beliebig kleine Zeitintervalle betrachtet werden. Der Grenzwert $\mathrm{e}^p = 1.036655846\ldots$ beschreibt die **stetige Verzinsung** durch e^{pt}, $t \in \mathbb{R}_+$.

Fazit: Wenn Banken Schulden vierteljährlich abrechnen und Guthaben jährlich, so würden sie sogar Gewinne machen, wenn die Zinssätze „gleich“ sind.

Die Grenzwerte komplizierterer Folgen lassen sich häufig aufgrund folgender Grenzwertsätze berechnen:

Satz 3.3. *Seien $\{a_i\}_{i=n_0}^{\infty}$ und $\{b_i\}_{i=n_0}^{\infty}$ zwei konvergente Folgen mit Grenzwerten $\lim_{i\to\infty} a_i = a$ und $\lim_{i\to\infty} b_i = b$ und $z \in \mathbb{R}$, dann gilt:*

1. *Ist $a_i \leq b_i$ für alle $i \geq n_0$, so gilt $a \leq b$,*
2. $\lim_{i\to\infty}(a_i \pm z) = a \pm z$,
3. $\lim_{i\to\infty}(z a_i) = z a$,
4. $\lim_{i\to\infty}(a_i \pm b_i) = a \pm b$,
5. $\lim_{i\to\infty}(a_i b_i) = ab$.
6. $\lim_{i\to\infty} \frac{a_i}{b_i} = \frac{a}{b}$, *falls* $\lim_{i\to\infty} b_i = b \neq 0$ *ist.*

Beweise finden sich in Forster (2008a). Exemplarisch wird $\lim_{i\to\infty}(a_ib_i) = ab$ gezeigt. Da die Folgen $\{a_i\}_{i=n_0}^{\infty}$ und $\{b_i\}_{i=n_0}^{\infty}$ konvergieren, sind sie auch beschränkt (siehe Satz 3.2) und es gibt ein $K > 0$, so dass $|a_i| \leq K$ und $|b_i| \leq K$ für alle i. Insbesondere gilt auch $|b| \leq K$ und $|a| \leq K$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es wegen der Konvergenz beider Folgen ein $N(\varepsilon) := \max\left\{N_a\left(\frac{\varepsilon}{2K}\right), N_b\left(\frac{\varepsilon}{2K}\right)\right\} \in \mathbb{N}$, so dass $|a_i - a| < \frac{\varepsilon}{2K}$ und $|b_i - b| < \frac{\varepsilon}{2K}$ für alle $i \geq N(\varepsilon)$ gilt. Somit gilt nach Dreiecksungleichung (siehe Rechenregeln für Beträge auf Seite 29)

$$|a_ib_i - ab| = |a_i(b_i - b) - b(a - a_i)| \leq |a_i|\,|b_i - b| + |b|\,|a_i - a| < K\frac{\varepsilon}{2K} + K\frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon$$

und es ist bewiesen, dass die Folge $\{a_ib_i\}_{i=1}^{\infty}$ gegen ab konvergiert.

Komplizierter ist es, wenn bei Quotienten die Folge im Nenner eine Nullfolge ist oder eine Folge bestimmt divergiert.

Satz 3.4. *Sei* $\{a_i\}_{i=n_0}^{\infty}$ *eine konvergente Folge mit* $\lim_{i\to\infty} a_i = a \neq 0$.

1. *Ist* $\lim_{i\to\infty} b_i = 0$ *und* $\frac{a_i}{b_i} > 0$ *ab einem bestimmten Folgenglied, dann ist die Quotientenfolge bestimmt divergent und es gilt* $\lim_{i\to\infty} \frac{a_i}{b_i} = \infty$.
2. *Ist* $\lim_{i\to\infty} b_i = 0$ *und* $\frac{a_i}{b_i} < 0$ *ab einem bestimmten Folgenglied, dann ist die Quotientenfolge bestimmt divergent und es gilt* $\lim_{i\to\infty} \frac{a_i}{b_i} = -\infty$.
3. *Ist* $\lim_{i\to\infty} b_i = \pm\infty$, *dann gilt* $\lim_{i\to\infty} \frac{a_i}{b_i} = 0$.

Auch diese Ergebnisse finden sich in Forster (2008a).

3.4 Anwendung: Das Solow-Modell

Eine Anwendung von Folgen und deren Eigenschaften ist die Modellierung und Analyse zeitlicher Entwicklungen in Wachstumsmodellen[2]. Die Ideen werden nun für eine einfache Variante des Solow-Modells vermittelt[3].

Im Solow-Modell wird die Entwicklung einer Volkswirtschaft in Abhängigkeit von der Kapitalintensität k – Kapitaleinheiten pro Arbeitseinheit – dargestellt.

Durch verschiedene Annahmen, die in Kapitel 14 behandelt werden (lineare Homogenität und Quasikonkavität), lässt sich die Arbeitsproduktivität y – Produktion pro Arbeitseinheit – als (konkave) Funktion der Kapitalintensität k schreiben, d. h. $y = f(k)$. Speziell wird hier die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion betrachtet, so dass $y = Ak^{\alpha}$, mit $\alpha \in (0,1)$ und $A > 0$, ist.

[2] Dieses Anwendungsbeispiel soll aufzeigen, wie die bisherigen mathematischen Methoden genutzt werden können. Typischerweise werden die Ergebnisse Literatur nicht so formal hergeleitet.

[3] In dieser Version werden Zeitperioden – z. B. Quartal oder Jahr – betrachtet und der Übergang von einer Periode zur nächsten modelliert. Dies ist ein Modell in diskreter Zeit.

Im Solow-Modell wird angenommen, dass ein fester Anteil $s \in (0,1)$ der Produktion in Form von neuen Investitionen gespart wird. Damit ergeben sich als Investitionen pro Arbeitseinheit $sf(k) = sAk^\alpha$. Zusätzlich wird hier vereinfachend angenommen, dass alles Kapital bei der Produktion verbraucht wird und dass die Arbeitsmenge konstant ist.

Mit diesen Annahmen sind in einer Periode t alle volkswirtschaftlich relevanten Größen Funktionen der Kapitalintensität k_t. Ist in einer Anfangsperiode $t = 0$ die Kapitalintensität k_0, dann ist die Folge der Kapitalintensitäten $\{k_t\}_{t=0}^\infty$ für die Entwicklung der Volkswirtschaft entscheidend. Diese Entwicklung wird im Solow-Modell rekursiv beschrieben durch

$$k_{t+1} = sf(k_t) = sAk_t^\alpha.$$

Anhand der folgenden Äquivalenzumformungen lässt sich die Dynamik des Solow-Modells beschreiben.

$$k_{t+1} \gtreqless k_t \iff sAk_t^\alpha \gtreqless k_t \iff sA \gtreqless k_t^{1-\alpha} \iff (sA)^{\frac{1}{1-\alpha}} \gtreqless k_t \iff \bar{k} \gtreqless k_t.$$

mit $\bar{k} := (sA)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Bei den Umformungen ist $\gtreqless$ so zu lesen, dass immer nur ein Zeichen gilt ($>$, $=$ oder $<$). Der mittlere Fall „$=$“ besagt, dass für $k_t = \bar{k}$ auch $k_{t+1} = k_t = \bar{k}$ ist. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ergibt der Anfangswert $k_0 = \bar{k}$ die konstante Folge mit $k_t = \bar{k}$ für alle $t \geq 0$. Der Wert $\bar{k}$ heißt **Fixpunkt** oder **steady state** des Systems.

Nun wird die zeitliche Entwicklung bei Anfangswerten $k_0 \in (0,\bar{k})$ systematisch mit den bisher eingeführten Methoden untersucht.

• Durch vollständige Induktion wird für $k_0 \in (0,\bar{k})$ gezeigt:

$$0 < k_t < \bar{k} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Induktionsanfang: Für $t = 0$ gilt $0 < k_0 < \bar{k}$ nach Voraussetzung.
Beim **Induktionsschritt** wird folgendermaßen argumentiert:
Ist $0 < k_t < \bar{k}$ für $t \in \mathbb{N}$, so gilt auch $k_{t+1} = sk_t^\alpha < sA\bar{k}^\alpha = \bar{k}$, wobei bei „$<$“ die Induktionsvoraussetzung $k_t < \bar{k}$ eingeht. Ebenso gilt $k_{t+1} = sAk_t^\alpha > 0$ bei $k_t > 0$. Damit wurde gezeigt, dass $k_t \in (0,\bar{k})$ für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt, wenn $k_0 \in (0,\bar{k})$ ist.

• Wegen $k_{t+1} > k_t \iff \bar{k} > k_t$ ist die Folge $\{k_t\}_{t=0}^\infty$ monoton steigend.

• Da die Folge monoton steigend und nach oben durch $\bar{k}$ beschränkt ist, ist sie konvergent (siehe Satz 3.2).

• In der Tat konvergiert die Folge gegen den einzigen Fixpunkt $\bar{k}$. Um das zu zeigen, sind allerdings zusätzliche Argumente notwendig.

• Eine analoge Argumentation ergibt für $k_t > \bar{k}$ eine monoton fallende Folge, die ebenfalls gegen $\bar{k}$ konvergiert.

Diese Argumente wurden für eine spezielle Produktionsfunktion, bei konstantem Arbeitsangebot und ohne Abschreibung von Kapital erläutert. Sie gelten aber auch allgemeiner, es muss nur sichergestellt werden, dass es überhaupt einen Fixpunkt gibt.

Das Fazit aus dieser Analyse ist, dass die Dynamik im Solow-Modell immer monoton gegen den Fixpunkt des Systems konvergiert, wenn es überhaupt einen Fixpunkt gibt.

Aufgaben zu Kapitel 3

Aufgaben zu Abschnitt 3.1

3.1. Erkundigen Sie sich bei Geldinstituten oder im Internet nach einer Geldanlage von $A = 5000$ Euro bei 5 Jahren Laufzeit.

a) Bestimmen Sie jeweils den Kapitalbestand K_i am Ende der Jahre $i = 0,1,2,3,4,5$ sowie das Endvermögen E (Achtung, bei Ausgabeaufschlägen oder Abschlussgebühren kann $K_0 \neq A$ sein).
b) Berechnen Sie jeweils den effektiven Jahreszins p^*.
c) Vergleichen Sie die Geldanlagen anhand des effektiven Jahreszins.

3.2. Sie können Geld zu einem Zinssatz von 2.5% anlegen (d. h., $p = 0.025$) und wollen in 40 Jahren 1 000 000 Euro ausgezahlt bekommen. Wie viel Geld müssen Sie heute einzahlen?

3.3. Betrachten Sie eine Geldanlage, bei der neben den Zinsen noch am Laufzeitende ein Bonus B ausgezahlt wird. Modifizieren Sie die Zinsformeln so, dass Sie Endvermögen, Anfangskapital, effektiven Jahreszins und Mindestlaufzeit bestimmen können.

Aufgaben zu Abschnitt 3.3

3.4. Bestimmen Sie (wenn möglich) die Grenzwerte der Folgen:

a) $a_n = 2 + (-1)^n \frac{1}{n}$ b) $a_n = 2(-1)^n + \frac{1}{n}$ c) $a_n = \frac{1+2n^2}{n^2+3n-1}$
d) $a_n = \frac{1+2n}{2+n}$ e) $a_n = \frac{1+2n^2}{n}$ f) $a_n = \frac{1-(0.5)^n}{0.5}$

3.5. Zeigen Sie anhand der Definition von Konvergenz, dass für zwei Folgen $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ mit $\lim_{i\to\infty} a_i = a$ und $\lim_{i\to\infty} b_i = b$ stets $\lim_{i\to\infty}(a_i + b_i) = a + b$ gilt.

Aufgaben zu Abschnitt 3.1

3.6. Folgern Sie für das Wachstumsmodell, dass für $k_0 > \bar{k}$ eine monoton fallende, nach unten durch $\bar{k}$ beschränkte Folge vorliegt, die konvergiert.

3.7. Betrachten Sie das Solow-Modell mit $s = \frac{1}{2}, 4 = \frac{1}{2}$ und $\alpha = \frac{1}{2}$.

a) Bestimmen Sie den Fixpunkt.
b) Bestimmen Sie $k_0, k_1, \ldots, k_6$ jeweils für $k_0 = 1$ und $k_0 = 16$.
c) Skizzieren Sie beide Zeitreihen in einem Diagramm mit der Zeit t auf einer Achse und den Kapitalintensitäten k_t auf der anderen.

http://www.springer.com/978-3-642-04489-2

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler
Pampel, T.
2010, X, 318 S. 95 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-642-04489-2