3D-Grafik Programmierung

von
Marius Apetri

Neuausgabe

3D-Grafik Programmierung – Apetri

mitp/bhv 2007

Verlag C.H. Beck im Internet:
www.beck.de
ISBN 978 3 8266 1767 6

mitp

Aus dem Inhalt:

- Mathematische Grundlagen
- Grafikprogrammierung in C++
- 3D-Programmierung
- 3D-Polygonfiguren
- Verwendung von Matrizen
- Projektion und Rasterization
- Schattieralgorithmen
- Texture Mapping
- Semitransparenzeffekte
- Echtzeitdarstellung dreidimensionaler Landschaften

Neu in der 2. Auflage:

- Linsen- und Plasmaeffekte
- Fraktale Grafiken
- Texturparkettierung
- Polygonübergreifende Texturprojektion
- Einführung in OpenGL und Direct3D

Auf der CD:

- CYGWIN Compiler (32 Bit)
- sämtliche Quellcodes
- ca. 150 zusätzliche pdf-Seiten mit den Lösungen und Besprechungen der Übungsaufgaben und Projekte sowie 2 zusätzliche Anhänge

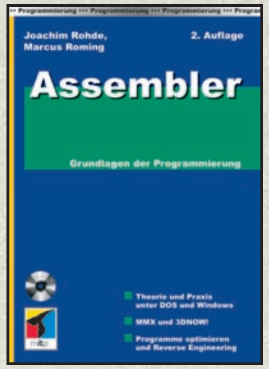
Komplexe dreidimensionale Grafikentwicklung ist die Grundlage vieler neuer Softwareprodukte. Spiele, Animationen für Film- und Videoprojekte, wissenschaftliche Darstellungen oder „virtuelle Realität" in der Technik basieren auf den mathematischen und softwaretechnischen Methoden der 3D-Grafikprogrammierung.

Dieses Buch liefert die ideale Grundlage für den ambitionierten Software-Entwickler in der Grafikprogrammierung, es deckt alle wesentlichen Aspekte des Fachgebietes ab und kann als Lese- und Nachschlagewerk verwendet werden. Alle Themen werden ausführlich und allgemein verständlich behandelt. Die zweite Auflage des Buches wurde neben den vollständig überarbeiteten Texten um zahlreiche neue Themen erweitert wie beispielsweise die Visualisierung einer virtuellen Welt aus der Sicht verschiedener Kameras. Die Erarbeitung der Kenntnisse wird durch zahlreiche Übungsaufgaben und Beispielprogramme unterstützt.

Zusätzlich zur Beschreibung der Themen werden die Techniken und Vorgehensweisen vermittelt, die dem Leser die Formulierung eigener, unabhängiger Algorithmen ermöglichen.

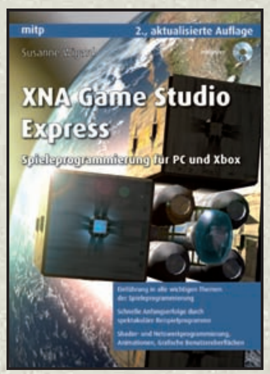
Dank des bewährten didaktischen und thematischen Aufbaus werden komplexe Zusammenhänge einem breiten Publikum nachvollziehbar erklärt. Dieses Buch ist selbst für Nicht-Mathematiker und Leser mit nur wenigen Grundkenntnissen verständlich.

Zum gleichen Thema:



ISBN 978-3-8266-1469-0

ISBN 978-3-8266-5512-8



ISBN 978-3-8266-5945-4

Leserstimmen zur Vorauflage:
„Es ist eines der besten deutschsprachigen Bücher über 3D-Programmierung."
„Wer sich ernsthaft mit Computergrafik beschäftigen will, kommt an diesem Buch nicht vorbei."
Wertung bei amazon.de: ☆ ☆ ☆ ☆ ☆

Probekapitel und Infos erhalten Sie unter:
info@mitp.de
www.mitp.de

Regalsystematik:
Programmierung

(D) € 49,95

ISBN 978-3-8266-1767-6

9 783826 617676

inklusive CD

mitp

3D-Grafik Programmierung

Marius Apetri

1767

48,4 mm

mitp

2. Auflage

Marius Apetri

inklusive CD

3D-Grafik Programmierung

- Alle mathematischen Grundlagen
- Von einfachen Rasteralgorithmen bis hin zu Landscape Generation
- 3D-Grafik in C++, optimaler Einstieg in OpenGL und Direct3D

ISBN 978-3-8266-1767-6_umschlag 02.indd 1 30.11.2010 16:18:54

Kapitel 1

Mathematische Grundlagen

Die Grundideen der Computergrafik sind einfach und lassen sich meist mit wenigen Worten erklären. Das Verständnis dieser Grundideen ermöglicht neben der Erstellung eigener, unabhängiger Programme auch die eigenständige Weiterentwicklung dieser Ideen und damit die Formulierung neuer Algorithmen, die wesentlich effizienter als die bereits bekannten sein können.

Sowohl die einfache Implementierung grundlegender Denkkonzepte in Form eines lauffähigen Programms als auch ihre Weiterentwicklung setzen allerdings das mathematische Grundwissen voraus, das im Verlauf dieses Kapitels vermittelt wird.

1.1 Zuordnungen

Zuordnungen gehören bei Weitem zu den wichtigsten mathematischen Konzepten, die in der Grafikprogrammierung eingesetzt werden. Im Verlauf der folgenden Kapitel werden wir die gesamte komplexe Welt der Computergrafik auf dem einfachen Denkansatz der **proportionalen Zuordnung** aufbauen – diese bildet die Grundlage der *linearen Interpolation*, die ihrerseits überall eingesetzt wird; besonders prominente Beispiele sind:

- Die Darstellung gefüllter Polygone auf dem Bildschirm im 3. Kapitel; dieselbe Technik werden wir in nahezu unveränderter Form im letzten Kapitel einsetzen, bei der hardwarebeschleunigten Visualisierung des sichtbaren Teils einer dreidimensionalen Landschaft.
- Der Aufbau von Farbverläufen, ohne die Polygonschattierung, Plasma-, Feuer- und Semitransparenzeffekte sowie lokale Lichtquellen oder Schatten undenkbar wären.
- Lineare Interpolation bildet die Grundlage perspektivisch korrekter Darstellungen beim Z-Buffering und Clipping entlang beliebiger Ebenen.
- Texture Mapping verleiht den sichtbaren Gegenständen ein besonders realistisches Erscheinungsbild – praktisch gesehen ist diese Technik nichts anderes als die Interpolation zwischen verschiedenen Koordinatensystemen.
- Zuordnungen spielen eine herausragende Rolle bei der praktischen Darstellung mathematisch definierter Kurven und Flächen, der Navigation im Raum sowie der Verwendung beliebiger Darstellungskameras.

Zuordnungen beschäftigen sich in den meisten Fällen mit zwei unterschiedlichen Größen, die voneinander unabhängig sind. Bei diesen Größen handelt es sich beispielsweise um Kombinationen von Lastwagen und transportierte Kisten, Geschwindigkeit und zurückgelegter Weg, Anzahl der Räumfahrzeuge und die erforderliche Zeit, um einen Parkplatz vom Schnee zu befreien.

Die Art der Zuordnung gibt an, wie die diese Beziehung mit Hilfe einer Gleichung ausgedrückt werden kann – wird anschließend ein beliebiges Element der ersten Größe angegeben, lässt sich mit Hilfe der Rechenvorschrift der ihm zugeordnete Wert der zweiten Größe auf einfache Weise ermitteln.

Es ist wichtig, die Grundidee der *Zuordnung* zunächst anhand besonders anschaulicher Beispiele zu verstehen – die beiden Größen, mit denen man in der Computergrafik konfrontiert wird, sind abstrakterer Natur: zweidimensionale Bildschirmkoordinaten von Pixeln und räumliche Z-Koordinaten, Punkte in einem Raster und Texturkoordinaten oder Positionen in einem Array und RGB-Farbwerte. Das Verständnis dieser komplexeren Beziehungen erfordert zusätzlichen Aufwand.

1.1.1 Proportionale Zuordnungen

Von einer proportionalen Zuordnung *spricht man immer dann, wenn zwischen den beiden Größen folgende Beziehung besteht:*

Die Vergrößerung eines Elements der ersten Gruppe ist mit einer Vergrößerung *des dazugehörigen Elements der zweiten Gruppe verbunden.*

Ein Beispiel für eine proportionale Zuordnung bietet die Beförderung von Gütern: angenommen, eine Fabrik möchte ihre in Kisten verpackten Erzeugnisse zum nächsten Handelszentrum mit Hilfe einer Anzahl an Lastwagen transportieren.

Es kann leicht nachvollzogen werden, dass, je mehr Lastwagen eingesetzt werden, desto mehr Kisten auch befördert werden können. Aus der Praxis ergibt sich folgende Übersicht:

Eingesetzte Lastwagen	Anzahl der transportierten Kisten
7	847
12	1452
14	1694
18	2178

Aus dieser Übersicht geht hervor, dass mit Hilfe von **7** Lastwagen **847** Kisten befördert werden können. Wenn man die Zahl der Lastwagen verdoppelt, muss sich auch die Anzahl an transportierten Kisten verdoppeln. In diesem Zusammenhang ergibt sich folgende Fragestellung: Wie viele Kisten können befördert werden, wenn **t** Lastwagen zur Verfügung stehen? **t** ist hierbei eine beliebige natürliche Zahl.

Proportionale Zuordnungen sind **quotientengleich**. Teilt man ein Element der ersten Größe durch das ihm zugeordnete Element der zweiten Größe, ist das Ergebnis konstant. Im Fall unserer Zuordnung gilt demnach:

$$\frac{847}{7} = \frac{1452}{12} = \frac{1694}{14} = \frac{2178}{18}$$

Schlussfolgerung: Multipliziert man die Anzahl der zur Verfügung stehenden Lastwagen mit dem Wert dieser Brüche, ergibt sich die Anzahl der transportierten Kisten. Die Rechenvorschrift dieser Zuordnung lautet somit:

$$k = \frac{847}{7} * t \qquad k, t \in N$$

Die Variable **k** gibt hierbei die Anzahl der Kisten an, die mit Hilfe von **t** Lastwagen befördert werden können. Wie man anhand dieser Gleichung erkennen kann, sind lediglich zwei einander zugeordnete Werte erforderlich, um die Rechenvorschrift der jeweiligen Zuordnung aufstellen zu können. Eine beliebige proportionale Zuordnung kann folgendermaßen aussehen:

Die Werte **a** $\neq$ **0** und **z(a)** $\neq$ **0**, die verschiedenen Größen angehören und einander zugeordnet werden, sind bekannt. Ein weiterer Wert **x** ist vorgegeben, welcher der ersten Größe angehört. Gesucht ist der ihm zuzuordnende Wert **z(x)**:

1. Größe	2. Größe
a	$z(a)$
x	$z(x)$

Da man weißt, dass es sich hierbei um eine proportionale Zuordnung handelt, kann man aufgrund der Quotientengleichheit folgende Beziehung aufstellen:

$$\frac{z(a)}{a} = \frac{z(x)}{x} \qquad a, x \neq 0$$

Hieraus lässt sich die allgemeine Rechenvorschrift beliebiger proportionaler Zuordnungen ableiten:

$$z(x) = \frac{z(a)}{a} * x \qquad \textit{für } a,\ z(a),\ x \in R,\ a \neq 0$$

Der Gedanke, der sich hinter dieser Formel befindet, ist bereits während der Formulierung des Lastwagenproblems eindeutig gewesen. Der Ausdruck:

$$\frac{z(a)}{a}$$

gibt in diesem Fall die Zahl der Kisten an, die von *einem* Lastwagen transportiert werden können. Dieser Wert braucht dann nur noch mit der Anzahl **x** der zur Verfügung stehenden Lastwagen multipliziert zu werden.

> *Übungsaufgabe 1.1:*
>
> Die proportionale Zuordnung stellt auch die Grundlage für ein sehr wichtiges Verhältnis zwischen Länge und Höhe von Rechtecken, das als *Goldener Schnitt* bezeichnet wird. Dieses Längenverhältnis lässt sich beispielsweise in den Fassaden griechischer Tempel und der Architektur mittelalterlicher Kathedralen finden.
>
> Dieses Verhältnis lässt sich folgendermaßen beschreiben: Die kurze Seite des Rechtecks verhält sich zur langen Seite wie die lange Seite zur Summe der Längen der beiden Seiten.
>
> Angenommen, die kurze Seite des Rechtecks hat die Länge 1; wie groß muss dann die lange Seite ϕ sein?

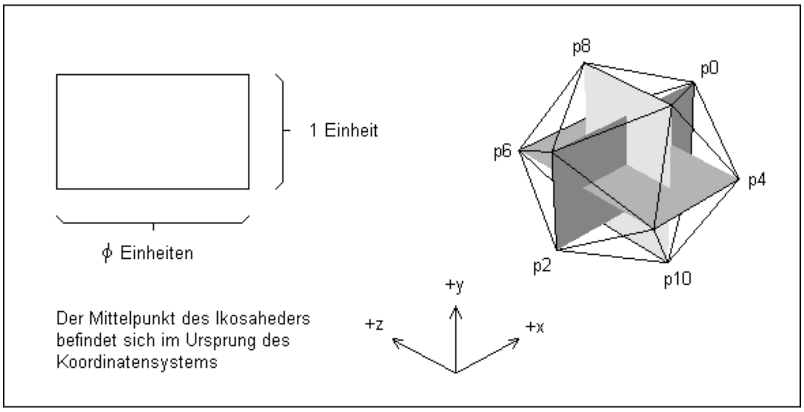


Abb. 1.1: Links: Ein Rechteck, dessen Seitenverhältnis dem goldenen Schnitt entspricht. Rechts: Ein Ikosaheder lässt sich aus drei entsprechend ausgerichteten Rechtecken dieser Art modellieren.

1.1.2 Antiproportionale Zuordnungen

Es gibt noch eine weitere Art von Zuordnungen, die sich hinsichtlich des Zusammenhangs zwischen den beiden Größen von den proportionalen unterscheidet.

Hierzu ein Beispiel: Ein 75-MHz-Prozessor benötigt 180 Sekunden, um eine bestimmte Aufgabe lösen zu können. Ein doppelt so schneller Prozessor braucht nur die Hälfte dieser Zeit, um dieselbe Aufgabe zu berechnen. Eine 500-MHz-CPU schafft die Aufgabe schließlich in nur 27 Sekunden. Die tabellarische Anordnung dieser Größen sieht folgendermaßen aus:

Taktfrequenz in MHz	Benötigte Zeit
75	180
150	90
500	27

Hierbei fällt folgende Regelmäßigkeit auf:

Die Vergrößerung eines Elements der ersten Gruppe ist mit der Verkleinerung *des ihm zugeordneten Elements der zweiten Gruppe verbunden.*

In unserem Fall gilt, dass, je schneller der eingesetzte Prozessor ist, desto weniger Zeit wird für eine bestimmte Berechnung in Anspruch genommen. Diese Art von Zuordnungen wird als **antiproportional** bezeichnet. In diesem Zusammenhang tritt die Frage auf, wie viel Zeit für dieselbe Berechnung benötigt wird, wenn ein Prozessor mit **t** $\in$ **R**, t $\neq$ 0 MHz zum Einsatz kommt.

Antiproportionale Zuordnungen sind **produktgleich**. Multipliziert man die Werte der einander zugeordneten Elemente, tritt stets das gleiche Ergebnis auf:

75*180 = 150*90 = 500*27

Der Wert eines gesuchten Elements kann demnach ermittelt werden, indem dieses Produkt durch den Wert des gegebenen Elements geteilt wird.

$$s = \frac{75*180}{t} \qquad \text{für } t \in R, t \neq 0$$

Die Konstante **s** gibt hierbei die Zeit in Sekunden an, welche eine CPU mit **t** MHz für die Berechnung benötigt. Genau wie es bei den proportionalen Zuordnungen der Fall ist, werden für die Berechnung dieses Produkts lediglich zwei zusammengehörende Werte einer Zuordnung benötigt. Aus einer beliebigen antiproportionalen Zuordnung wie:

1. Größe	2. Größe
a	$z(a)$
x	$z(x)$

kann demnach unter Verwendung der Produktgleichheit die allgemeine Rechenvorschrift für antiproportionale Zuordnungen abgeleitet werden:

$$z(x) = \frac{a * z(a)}{x} \qquad \textit{für } a,\, z(a),\, x \in R,\, x \neq 0$$

1.1.3 Beliebige lineare Zuordnungen

In der Computergrafik gibt es auch Zuordnungen, die auf den ersten Blick die Kriterien erfüllen, um in die Kategorie proportionaler bzw. antiproportionaler Zuordnungen eingeteilt zu werden. Bei einer genauen Betrachtung fällt jedoch auf, dass weder die vermeintlich proportionale Zuordnung noch die anscheinend antiproportionale die vorgegebene Quotienten- bzw. Produktgleichheit erfüllt. Diese Zuordnungen treten beispielsweise im Zusammenhang mit Farbverläufen, Semitransparenzeffekten oder der Darstellung von Nebeleffekten auf. Zwei Beispiele:

1. Größe	2. Größe
-8	99
-4	98
0	97
4	96

Zuordnung 1: Produktgleichheit wird nicht erfüllt.

1. Größe	2. Größe
15 = **a**	49 = **z(a)**
17 = **b**	52 = **z(b)**
19	55
21	58
23 = **x**	61 = **z(x)**
25	64

Zuordnung 2: Quotientengleichheit ist nicht vorhanden.

Bei einem genauen Blick auf die beiden Zuordnungen fällt jedoch auf, dass bei der Veränderung beider Größen eine Regelmäßigkeit zu finden ist. Die erste Größe der ersten Zuordnung steigt von oben nach unten mit dem Wert **4**, während das Wachstum der zweiten Größe **(–1)** beträgt. In der zweiten Zuordnung steigen die beiden Größen durch *Addition* der konstanten Werte **2** bzw. **3** an. Aufgrund der Tatsache, dass der jeweils nächste Wert durch Addition einer Konstanten zum aktuellen berechnet wird, bezeichnet man diese Art von Zuordnungen als **beliebig linear**.

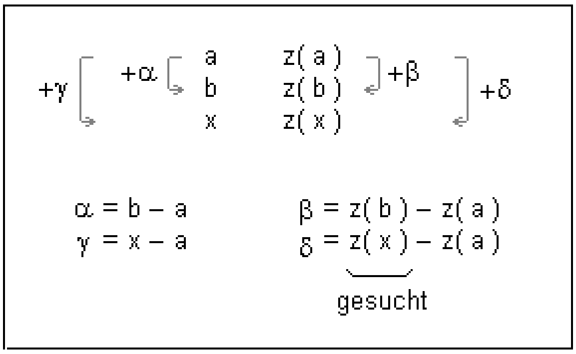


Abb. 1.2: Das Wachstum der beiden Größen einer beliebigen linearen Zuordnung erfüllt die Gesetzmäßigkeiten der proportionalen Zuordnung.

Zunächst definieren wir zwei Werte γ und δ, für die gilt:

a + γ = **x** und **z(a)** + δ = **z(x)**

a und **z(a)** sind die ersten beiden einander zugeordneten Werte der Tabelle, **x** steht an einer beliebigen Stelle auf der Seite der ersten Größe. Bemerkenswert ist folgender Zusammenhang, der sich aus der Anordnung der einander entsprechenden Zahlen ergibt: Je größer der Wert von γ ist, desto größer muss auch der Wert von δ sein – das bedeutet, dass das Wachstum der beiden Abstände γ und δ proportional ist.

Angenommen, man kennt zwei Paare **a** und **z(a)** sowie **b** und **z(b)** aus einer bestimmten Zuordnung. Gesucht ist der Wert **z(x)**, der einem ebenfalls vorgegebenen **x** zugeordnet wird.

Aus den beiden vorgegebenen Paaren lassen sich α und β wie in Abbildung 1.2 berechnen. Da **x** bekannt ist, ist auch γ bekannt. Durch die beschriebene proportionale Zuordnung lässt sich der unbekannte Abstand δ wie folgt berechnen:

Abstände der 1. Größe	Abstände der 2. Größe
$\alpha = b - a$	$\beta = z(b) - z(a)$
$\gamma = x - a$	$\delta = z(x) - z(a)$

$$\Rightarrow \qquad \delta = \frac{\beta}{\alpha} * \gamma = \frac{z(b) - z(a)}{b - a} * (x - a)$$

Da noch zusätzlich gilt: $\delta = z(x) - z(a)$, ergibt sich für eine beliebige regelmäßige Zuordnung folgende Übersicht:

1. Größe	2. Größe
a	$z(a)$
b	$z(b)$
x	$z(x)$

wobei:

$$z(x) \quad = \quad z(a) + \frac{z(b) - z(a)}{b - a} * (x - a)$$

Bemerkenswert an dieser Formel ist, dass das Element **b** nicht unbedingt der direkte Nachfolger von **a** sein muss; diese beiden Elemente können sich an beliebigen Stellen innerhalb der ersten Größe der Zuordnung befinden, wobei die Position von **x** vor, hinter oder sogar zwischen **a** und **b** liegen kann.

Eine beliebige lineare Zuordnung ist nur eine komplexere Form der gewöhnlichen proportionalen Zuordnung, bei der jedoch *zwei* Wertpaare vorgegeben sein müssen. In der Praxis kommen beliebige regelmäßige Zuordnungen nicht allzu häufig vor, und aus der besonderen Formulierung der Problemstellungen, deren Lösung solche Zuordnungen erfordern, lassen sie sich klar identifizieren. Verwechslungen mit proportionalen oder antiproportionalen Zuordnungen kommen nicht vor.

Formelle Definition beliebiger linearer Zuordnungen

Die Überprüfung, ob eine in der Praxis auftretende Zuordnung als beliebig linear angesehen werden darf, erfolgt auf der Grundlage der folgenden formellen Definition:

> *Gegeben sei die Zuordnung der Werte* $[\, a_i, z(a_i) \,]$ *für* $a_i \in \mathbf{R}$ *und* $i \in \mathbf{Z}$. *Diese Zuordnung nennt man* beliebig linear, *wenn die Werte* a_i *derart* angeordnet *werden können, dass zwei* reelle Konstanten $\alpha \neq 0$ *und* $\beta \neq 0$ *existieren, für die gilt:*
>
> $$a_{i+1} = a_i + \alpha \qquad \textit{und} \qquad z(\, a_{i+1} \,) = z(\, a_i \,) + \beta$$

In unserer letzten Zuordnung, die wir als Grundlage der Herleitung der allgemeinen Formel eingesetzt haben, gilt beispielsweise: $\alpha = 2$ und $\beta = 3$. Die in der Tabelle angezeigten Werte sind bereits so angeordnet, dass man diese Konstanten leicht erkennen kann.

In der Praxis ist zunächst lediglich die feste Verbindung zwischen den Werten $\mathbf{a_i}$ und $\mathbf{z(a_i)}$ erkennbar, beispielsweise zwischen **15** und **49**, **19** und **55**, **25** und **64** usw. Dass die Elemente der ersten Größe, zu denen **15**, **19** und **25** gehören, so angeordnet werden können, dass sich zwischen ihnen der Abstand $\alpha = 2$ ergibt, ist Gegenstand weiterer Überlegungen.

In jeder Anordnung müssen die ursprünglichen Wertpaare unverändert bleiben. Die räumliche Position des Paares **(15, 49)** innerhalb der Zuordnung ist an sich unbedeutend – wichtig ist, dass **15** nur mit **49** verbunden sein darf, eine Beziehung wie beispielsweise **(15, 64)** ist unzulässig. Dasselbe gilt auch für alle anderen Wertpaare.

Ein weiterer wichtiger Punkt ist, dass sich in jeder beliebigen linearen Zuordnung die richtige Anordnung der Elemente der zweiten Größe *von selbst* ergibt, wenn man die Werte der ersten Größe so anordnet, dass zwischen ihnen der konstante Abstand α erkennbar wird. Lassen sich in einer Zuordnung die Elemente der ersten Größe wie beschrieben anordnen, während zwischen den entsprechenden benachbarten Vertretern der zweiten Größe kein konstanter Abstand β zu verzeichnen ist, dann ist diese Zuordnung keine beliebig lineare.

1.2 Der Mengenbegriff nach Cantor

In der Computergrafik gibt es Gegenstände, die eine besondere Rolle spielen; herausragende Beispiele hierfür sind Linien, Polygone sowie die mannigfaltigen Einheiten, die sich daraus aufbauen lassen. Jeder kennt mittlerweile die Drahtgitterdarstellung dreidimensionaler Modelle, deren Kanten unter Verwendung von Linien gezeichnet werden. Es gibt auch eindrucksvolle Bilder von Fahrzeugen oder Alltagsgegenständen, an denen sich nicht feststellen lässt, ob es sich um Fotos realer Objekte oder um gute Visualisierungen virtueller Gegenstände handelt, die letztendlich nur aus Polygonen bestehen.

Die Erzeugung dieser Art von Ausgaben setzt eine leicht nachvollziehbare und eindeutige Definition dieser Gegenstände voraus. Diese Definition erfolgt unter Verwendung grundlegender Begriffe der *Mengenlehre*. Wie wir noch sehen werden, lassen sich Linien und Polygone beispielsweise auf eine sehr anschauliche Weise als Mengen von Punkten definieren. Cantor hat den Begriff der **Menge** folgendermaßen definiert:

> *Eine* Menge *ist die Zusammenfassung von Gegenständen unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem neuen Ganzen. Die Gegenstände müssen sich eindeutig voneinander unterscheiden. In einer Menge darf jedes Element nur ein einziges Mal auftreten.*

Gegeben seien die Punkte **a**, **b**, **c** und **d**, die sich durch ihre verschiedenen Positionen im Raum unterscheiden. Diese Punkte werden als Teil eines größeren Objekts stärker als alle anderen von einer Lichtquelle beleuchtet, und müssen daher im Zuge einer realistischen Darstellung des Gegenstands einen helleren Farbton erhalten. Fasst man diese Punkte zu einer neuen Menge zusammen, der Menge **M** der beleuchteten Punkte, lässt sich **M** folgendermaßen definieren:

$$M = \{ a, b, c, d \}$$

Hat man eine größere Auswahl von Punkten sowie eine Menge **M**, die einige davon enthält, besitzt die Beziehung *Element von* große Wichtigkeit. **c** ist z.B. Element von **M**, daher schreibt man:

$$c \in M$$

Der Punkt **e** ist in **M** nicht enthalten; für die Beziehung *nicht Element von* verwendet man folgende Notation:

$$c \notin M$$

Angenommen, bei der Darstellung des oben beschriebenen Gegenstands wird eine zweite, schwächere Lichtquelle berücksichtigt. Die Punkte **c**, **d** und **e**, die davon beleuchtet werden, bilden eine weitere Menge **N** und müssen ebenfalls eine helleren Farbwert annehmen:

$$N = \{ c, d, e \}$$

V, die Menge der Punkte, die überhaupt beleuchtet werden, lässt sich auf der Grundlage von **M** und **N** mit Hilfe einer Operation bilden, die man *Mengenvereinigung* nennt:

$$V = M \cup N = \{ p \mid p \in M \ oder \ p \in N \}$$

Dieser Ausdruck liest sich wie folgt: **V** ist die Menge aller Punkte **p**, für die gilt: **p** ist Element von **M** oder **p** ist Element von **N**. **p** darf durchaus in beiden Mengen enthalten sein, wie es für den Punkt **c** der Fall ist. **V** besitzt folgendes Aussehen:

$$V = \{ a, b, c, d \} \cup \{ c, d, e \} = \{ a, b, c, d, e \}$$

Die Cantorsche Definition legt fest, dass jedes Element einer Menge nur **einmal** auftreten darf; diese Bedingung gewährleistet eine größere Einfachheit der Ausdrücke. Ein direktes Zusammenfügen der beiden Mengen würde einen umständlichen Ausdruck ergeben, der mathematisch falsch ist:

$$V = \{ a, b, c, c, d, d, e \} \qquad \textit{falsch}$$

Bemerkenswert ist, dass die Reihenfolge der Elemente innerhalb einer Menge ohne Bedeutung ist. Die Menge ist lediglich als Zusammenfassung von Gegenständen zu einem neuen Ganzen definiert – da jeder Gegenstand sich von den anderen unterscheidet, ist es hierbei gleichgültig, wie die einzelnen Elemente innerhalb dieser Zusammenfassung angeordnet sind. Da die Reihenfolge der Elemente aus **M** und **N** irrelevant ist, ergeben sich auch für **V** mehrere gültige Schreibweisen:

$$V = \{ a, b, c, d, e \} = \{ c, b, e, d, a \} = \{ b, d, e, c, a \} = \ldots$$

Möchte man eine möglichst realistische Ausgabe erzielen, müssen sich die Punkte hinsichtlich der Stärke ihrer Beleuchtung unterscheiden. Punkte, die von beiden Lichtquellen bestrahlt werden, erhalten hierbei den hellsten Farbton. Die Menge **S** dieser Punkte wird ebenfalls aus **M** und **N** mit Hilfe einer elementaren Mengenoperation gebildet, dem *Mengenschnitt*:

$$M \cap N = \{\ p \mid p \in M \ und \ \ p \in N\ \}$$

wobei

$$S = \{\ a, b, c, d\ \} \cap \{\ c, d, e\ \} = \{\ b, c\ \}$$

Die Menge **S** besteht lediglich aus Elementen der Menge **M**, und es existiert ein Element in **M**, das in **S** nicht enthalten ist. Man sagt, **S** ist eine *echte Teilmenge* von **M**:

$$S \subset M$$

Hat man eine Menge **T**, von der man nicht sagen kann, ob sie eine echte Teilmenge von **M** ist oder ob sämtliche Elemente von **M** auch in **T** vorhanden sind, benutzt man den Operator *Teilmenge gleich*, der wie folgt definiert ist:

$$T \subseteq M \quad \Leftrightarrow \quad für\ alle\ t \in T\ gilt : t \in M$$

Interessant ist hierbei die enge Verwandtschaft zwischen '$\subset$' sowie '$\subseteq$' und den bekannten Vergleichsoperatoren '<' und '$\leq$', die mit reellen Zahlen arbeiten.

Zum Schluss wollen wir noch eine letzte elementare Operation kennen lernen, die *Mengendifferenz*. In unserem Beispiel kommt sie zum Einsatz, wenn die Menge **H** der Punkte ermittelt werden soll, die *nur* von der starken Lichtquelle beleuchtet werden, das heißt alle Punkte, die zwar in **M** enthalten sind, aber nicht in **N**. Diesen Punkten wird eine mittlere Helligkeit zugeordnet.

$$M \setminus N = \{\ p \mid p \in M \ und \ \ p \notin N\ \}$$

wobei

$$H = \{\ a, b, c, d\ \} \setminus \{\ c, d, e\ \} = \{\ a, b\ \}$$

Übungsaufgabe 1.2:

Wie ist die Menge **I** der Punkte definiert, die nur von der schwachen Lichtquelle beleuchtet werden, und wie groß ist in etwa die ihnen zuzuordnende Helligkeit?

Bemerkenswert ist, dass Mengenvereinigung und -schnitt kommutativ sind, das heißt $\mathbf{M} \cup \mathbf{N} = \mathbf{N} \cup \mathbf{M}$ und $\mathbf{M} \cap \mathbf{N} = \mathbf{N} \cap \mathbf{M}$, was für den Mengenschnitt im Allgemeinen jedoch nicht der Fall ist. Dieselben Vorgehensweisen, die wir anhand der einfachen Mengen **M** und **N** kennen gelernt haben, werden auch auf weitaus komplexere Mengen angewandt – Beispiele sind Definitionen von Begriffen wie *Linie*, *Polygon* oder *Polyeder*.

Am Ende dieser Einführung werden noch zwei wichtige Dinge vorgestellt, die man beim Umgang mit Mengen zu beachten hat. Erstens ist die Verwendung von Mengen bei der Modellierung beliebiger Gegenstände nicht immer geeignet. Aus der bisherigen Theorie ergeben sich zwei Eigenschaften des Mengenbegriffs, die sich manchmal als Nachteil erweisen können:

- Jedes Element einer Menge darf nur ein einziges Mal auftreten.
- Die Reihenfolge der Elemente in einer Menge spielt keine Rolle.

Worte lassen sich beispielsweise schlecht als einfache Mengen von Buchstaben definieren. In einem Wort darf derselbe Buchstabe durchaus mehrmals vorkommen, und die Reihenfolge der Buchstaben ist von zentraler Bedeutung – durch die Änderung dieser Anordnung lässt sich das Wort im Allgemeinen nicht mehr lesen. Später werden wir eine Lösung für diese Art von Problemstellungen kennen lernen.

Der zweite wichtige Punkt ist, dass die von Cantor formulierte Definition des Mengenbegriffes **nicht sinnvoll** ist, da der Aufbau von Mengen unter Verwendung beliebiger Bedingungen in manchen Fällen zu Widersprüchen führt. Beispiele hierfür sind die *Antinomie von Russell* oder Ausdrücke wie: »Die Menge aller Mengen, die sich selbst nicht enthalten«.

Trotz dieser Probleme wird die Definition von Cantor auch weiterhin aufgrund ihrer Einfachheit verwendet. Auf diese Widersprüche werden wir hier nicht näher eingehen, da die Mengen, die wir im weiteren Verlauf noch definieren werden, zu keinen Problemen dieser Art führen. Tatsächlich existiert in der modernen Mengenlehre keine explizite Definition des Begriffs **Menge**. Es gibt lediglich eine Reihe von Axiomen, anhand derer man überprüfen kann, ob es sich bei einem gegebenen Ausdruck **K** um eine Menge handelt oder nicht.

1.3 Punkte in der Ebene und im Raum

Besonders in der Grafikprogrammierung ist es von großer Wichtigkeit, die Position eines Gegenstands eindeutig, das heißt ohne dass Verwechslungssituationen auftreten, beschreiben zu können. Positionen werden im Zweidimensionalen mit Hilfe von **Punkten** angegeben, die Descartes folgendermaßen definiert hat:

> *Ein* Punkt *ist ein geordnetes Paar reeller Zahlen; die Anzahl der Elemente des geordneten Paares ist gleich der Dimension des Raumes, der den Punkt enthält.*

Der zweidimensionale Raum **R²** lässt sich somit als eine Menge von Punkten folgendermaßen definieren:

$$R^2 = \{\, (x, y) \mid x \in R \; und \; y \in R \,\}$$

wobei **R** die Menge der reellen Zahlen ist. Der Begriff *geordnetes* Paar bedeutet, dass die Reihenfolge, in der **x** und **y** innerhalb des Tupels stehen, von großer Bedeutung ist – hat man beispielsweise zwei reelle Zahlen **a** und **b**, handelt es sich bei den beiden Tupeln **(a, b)** und **(b, a)** im Allgemeinen um verschiedene Positionen innerhalb des 2D-Raumes.

Die Definition des dreidimensionalen Raumes erfolgt nach demselben Prinzip, man arbeitet bloß mit dreielementigen geordneten Paaren:

$$R^3 = \{\, (x, y, z) \mid x \in R \; und \; y \in R \; und \; z \in R \,\}$$

Anders als die einfachen Mengen aus dem vorangegangenen Abschnitt besitzen der **R²** und der **R³** eine bestimmte Struktur, die man unter Verwendung von *Koordinatenachsen* anschaulich darstellt. Für die Anordnung dieser Achsen gibt es jedoch mehrere Möglichkeiten. Während man im zweidimensionalen Koordinatensystem noch einheitlich die erste Achse nach links und die zweite nach oben verlaufen lässt, wird im Dreidimensionalen wahlweise auf eines von insgesamt zwei unterschiedlichen Koordinatensystemen zurückgegriffen.

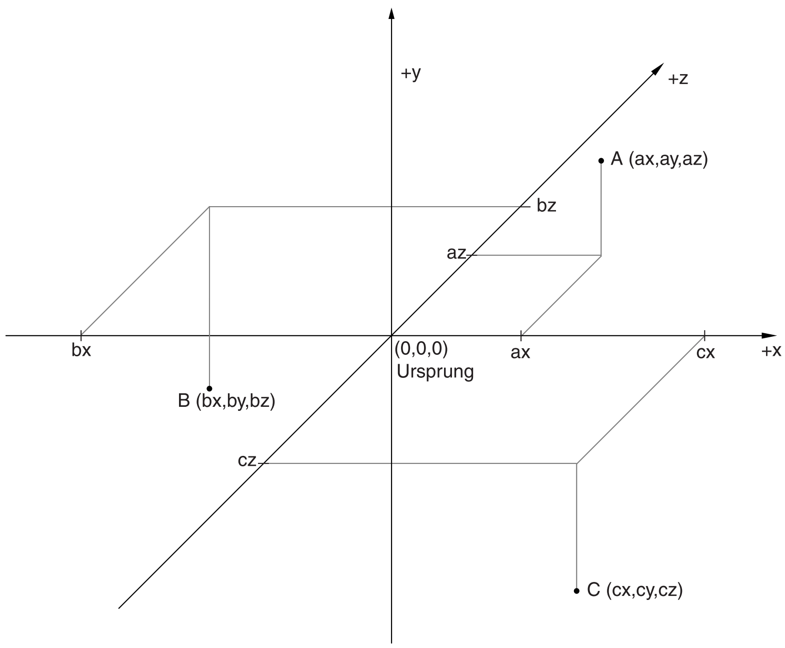


Abb. 1.3: Die Lage der Punkte **A**, **B** und **C** innerhalb einer dreidimensionalen Umgebung

In Abbildung 1.3 wird beispielsweise ein *linkshändiges* Koordinatensystem verwendet; diese Bezeichnung kommt daher, dass die Richtungen der einzelnen Achsen mit Hilfe der Finger der linken Hand wiedergegeben werden können. Hierzu müssen der linke Daumen nach rechts, der Zeigefinger nach oben und der Mittelfinger nach vorne gestreckt werden.

Daneben gibt es noch eine *rechtshändige* Anordnung der Koordinatenachsen: Werden Daumen und Zeigefinder der rechten Hand nach rechts bzw. nach oben gerichtet, kann der rechte Mittelfinger aufgrund anatomischer Gegebenheiten nur nach hinten gerichtet werden. Diese beiden Arten von Koordinatensystemen sind inAbbildung 1.4 dargestellt.

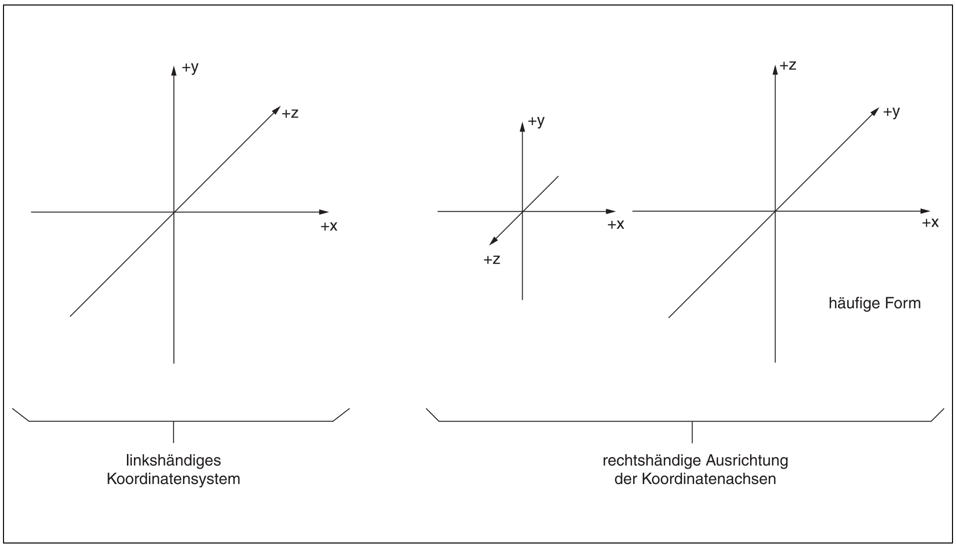


Abb. 1.4: Der Unterschied zwischen links- und rechtshändigen Koordinatensystemen

Es spielt keine Rolle, ob Punkte in den eigenen Programmen auf der Grundlage rechts- oder linkshändiger Koordinatensysteme definiert werden. Wichtig ist nur, dass in einem Programm nur auf eine einzige Anordnung der Koordinatenachsen zurückgegriffen werden darf; ansonsten können Verwechslungssituationen auftreten, die zu schwer auffindbaren Fehlern führen. Im weiteren Verlauf werden sämtliche Sachverhalte zwar anhand linkshändiger Koordinatensysteme vorgestellt, die Erklärungen können aber problemlos auf die rechtshändige Anordnung übertragen werden.

Später, im Zusammenhang mit der Modellierung der Sicht beliebig orientierter Kameras, werden wir neben einem globalen Koordinatensystem, auf das sich die

Koordinaten aller Punkte in unserer dreidimensionalen Welt beziehen, noch mehrere lokale Koordinatensysteme verwenden.

Diese Systeme werden keineswegs verwendet, um Positionen anzugeben – mit ihrer Hilfe wird die Ausrichtung der jeweiligen Kameras festgelegt. Hierbei ist es von großer Wichtigkeit, dass die Achsen der lokalen Systeme genauso angeordnet sind wie die Achsen des globalen Systems – in unserem Fall werden sie demnach linkshändig sein.

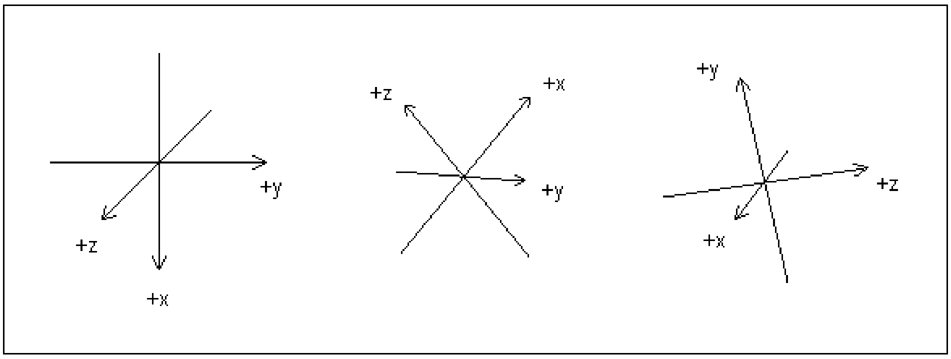


Abb. 1.5: Beliebig ausgerichtete lokale Koordinatensysteme. Die Koordinaten ihrer Mittelpunkte sind beliebig und beziehen sich auf ein nicht dargestelltes globales Koordinatensystem.

Übungsaufgabe 1.3:

1. Die Punkte, die in Abbildung 1.6 auf der Oberfläche und im Innern eines Quadrates liegen, stellen eine Untermenge **Q** des zweidimensionalen Raumes dar. Geben Sie eine Definition der Menge **Q** an. Hinweis: Für die x-Koordinate eines beliebigen Punktes $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$ gilt: $\mathbf{x} \geq 2$ und $\mathbf{x} \leq 4$. Was muss für die y-Koordinaten gelten?
2. Geben Sie eine Definition der Menge **L** an.
3. Welche der in Abbildung 1.6 gegebenen Systeme sind rechts- und welche sind linkshändig?
4. Im Abschnitt über proportionale Zuordnungen haben wir die Beziehung des goldenen Schnittes kennen gelernt. Geben Sie die Koordinaten der 12 Eckpunkte des in Abbildung 1.1 dargestellten Ikosaheders an. Gehen Sie davon aus, dass die drei Rechtecke parallel zu den Hauptebenen ausgerichtet sind – das erste Rechteck liegt in der xy-Ebene, die z-Koordinate der ersten vier Punkte ist somit 0.

   Diese Koordinaten werden wir im vierten Kapitel einsetzen, um den Ikosaheder auf dem Bildschirm zu zeichnen.

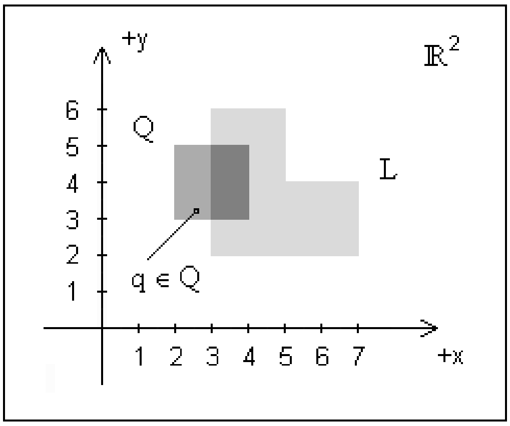


Abb. 1.6: **Q** und **L** als Teilmengen des zweidimensionalen Raumes

1.4 Vektoren

Neben den Punkten sind **Vektoren** ein weiteres Denkmodell, das für die Beschreibung einer dreidimensionalen Welt unbedingt erforderlich ist. Vektoren werden in erster Linie dazu verwendet, um *Richtungen* anzugeben; Richtungen wiederum ermöglichen die Beschreibung wesentlich komplexerer Sachverhalte wie:

- die Ausrichtung von Polygonen und Lichtvektoren im 3D-Raum – dies ermöglicht die Entwicklung von Algorithmen der Polygonschattierung oder der Darstellung realistischer Schatten
- die Position von Farben im RGB-Farbsystem, und damit die Bildung von Farbpaletten
- beliebige Verschiebungen von Texturen auf der Oberfläche von Polygonen, beispielsweise bei der Modellierung einer Wasseroberfläche
- die Ausrichtung ganzer Gruppen von Polygonen, und damit Darstellungen mit beliebigen Sichtkameras sowie Navigation im dreidimensionalen Raum

Zunächst wird die Verwendung von Vektoren an einem praktischen Beispiel demonstriert. Das Problem besteht darin, einen bekannten Punkt **p = (1, 4, 5)** nach *rechts* zu verschieben. Diese Problemstellung, die lediglich eine richtige Lösung besitzt, ist in Abbildung 1.7 grafisch dargestellt.

Versucht man dieses Problem intuitiv zu lösen, können keine eindeutigen Ergebnisse erzielt werden: Die Beschreibung »Verschiebung nach rechts« passt auf jede der drei verschiedenen Richtungen, in die **p** auf der linken Seite der Abbildung 1.7 versetzt wird. Aus diesem Grund kann nicht festgestellt werden, ob es sich bei $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, oder $\mathbf{p}_3$ um den gesuchten Zielpunkt handelt.

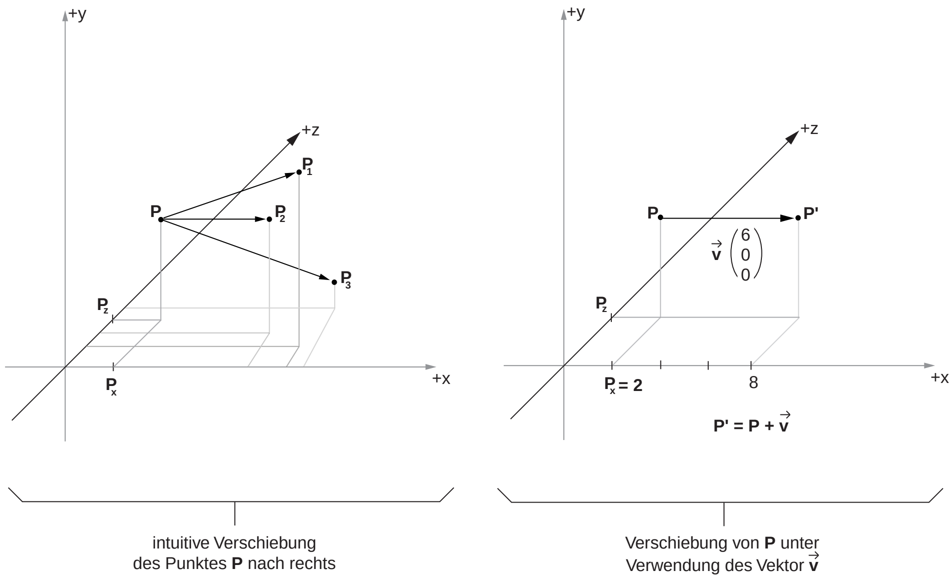


Abb. 1.7: Die Richtung, in welcher ein Punkt verschoben werden soll, kann nur mit Hilfe eines Vektors eindeutig definiert werden.

Vektoren werden folgendermaßen definiert:

Ein Vektor *ist die Einheit, die einem Punkt hinzuaddiert werden muss, um den Punkt in eine bestimmte Richtung zu verschieben.*

Aufgrund dessen, dass Punkte drei Koordinaten besitzen, müssen Vektoren ebenfalls über eine x-, y- und z-Komponente verfügen. Um die eigentliche Verschiebung durchzuführen, müssen den drei Koordinaten lediglich die entsprechenden Komponenten des Vektors hinzuaddiert werden.

Das Problem der unterschiedlichen Lösungen wird vermieden, indem die drei verschiedenen Richtungen auf der rechten Seite der Abbildung 1.7 in Form von drei unterschiedlichen Vektoren angegeben werden. In diesem Fall können die Koordinaten des verschobenen Punktes **p'** leicht ermittelt werden:

$$p + \vec{v} = p' \qquad \Leftrightarrow \qquad (1, 4, 5) + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (4, 4, 5)$$

Über Vektornamen wird ein waagerechter Pfeil gezeichnet, und Komponenten von Vektoren werden untereinander geschrieben – der einzige Zweck dieser beiden in der Literatur nicht immer eingehaltenen Vereinbarungen besteht lediglich darin, Vektoren und Punkte leichter voneinander unterscheiden zu können.

Die allgemeine Formel für die Verschiebung eines Punktes **p = (px, py, pz)** unter Verwendung eines Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} vx \\ vy \\ vz \end{pmatrix}$ besitzt demnach folgenden Aufbau:

$$(px,\ py,\ pz) + \begin{pmatrix} vx \\ vy \\ vz \end{pmatrix} = \left[(px + vx), (py + vy), (pz + vz)\right]$$

Bemerkenswert ist, dass sich diese Operation auch umkehren lässt: Subtrahiert man den Punkt **p** aus Abbildung 1.7 von **p'**, ist das Ergebnis der Vektor $\vec{v}$. Der Grund hierfür besteht darin, dass durch die Addition von $\vec{v}$ und **p** = $(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}, \mathbf{z_1})$ die Position von **p'** = $(\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2}, \mathbf{z_2})$ ermittelt wird:

$$p' - p = \vec{v} \qquad \Leftrightarrow \qquad (x_2,\ y_2,\ z_2) - (x_1,\ y_1,\ z_1) = \begin{pmatrix} vx \\ vy \\ vz \end{pmatrix}$$

1.4.1 Die Länge eines Vektors

Beim Umgang mit Vektoren ist die Verschiebungsrichtung nicht die einzige Information, die berücksichtigt werden muss. In Abbildung 1.7 wird ein Punkt unter Verwendung von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach »rechts« verschoben; eine Verschiebung in dieselbe Richtung lässt sich jedoch auch mit dem Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, bzw. mit jedem anderen Vektor erreichen, dessen x-Komponente positiv und die beiden anderen Null sind. Um die Verschiebungsoperation eindeutig zu gestalten, muss neben der Richtung auch die *Entfernung* berücksichtigt werden, die angibt, wie weit der Punkt versetzt werden soll.

Diese Information, die man *Länge* bzw. *Betrag des Vektors* nennt, lässt sich anhand der Vektorkomponenten ermitteln. Gegeben sei ein beliebiger Vektor

$\vec{v} = \begin{pmatrix} vx \\ vy \\ vz \end{pmatrix}$ mit **vx**, **vy**, **vz** $\in$ **R**³. Gesucht ist eine Methode, die angibt, um wie viele Einheiten ein beliebiger Punkt verschoben wird, addiert man diesem $\vec{v}$ hinzu. Die hierfür eingesetzte Vorgehensweise ist identisch mit der Berechnung der Raumdiagonalen eines Quaders.

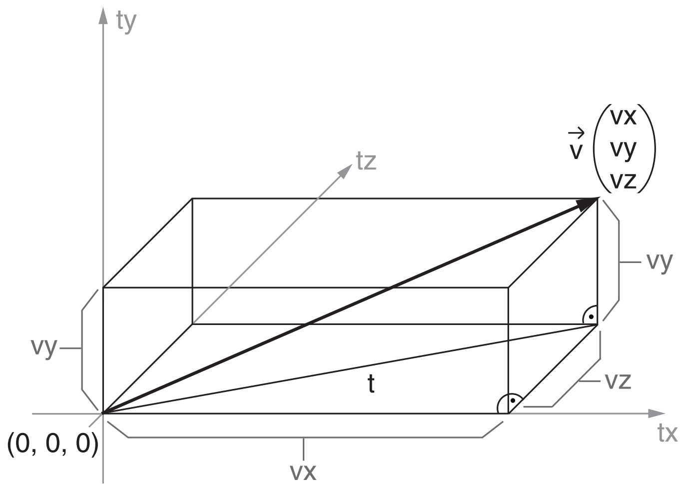


Abb. 1.8: Grafischer Ansatz zur Berechnung der Länge eines beliebigen Vektors

Die Länge des in Abbildung 1.8 dargestellten Vektors $\vec{v}$, dessen mathematische Notation $|\vec{v}|$ lautet, kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras ermittelt werden. Hierzu gilt:

$$|\vec{v}|^2 = vy^2 + t^2$$

Bei der Konstanten **t** handelt es sich um die Diagonale auf dem Boden des Quaders aus Abbildung 1.8. Wie man anhand der Abbildung feststellen kann, lässt sich diese Konstante auch mit Hilfe der Komponenten **vx** und **vz** beschreiben:

$$t^2 = vx^2 + vz^2$$

Setzt man diese Beziehung in die obere Gleichung ein, folgt schließlich:

$$|\vec{v}|^2 = vy^2 + (vx^2 + vz^2) \quad \Leftrightarrow$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{vx^2 + vy^2 + vz^2}$$

Übungsaufgabe 1.4:

Berechnen Sie die Länge des Vektors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ist es erforderlich, den Sonderfall zu beachten, dass die Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen werden könnte?

1.4.2 Operationen mit Vektoren

In der Praxis gibt es Situationen, in denen die Länge eines Vektors verändert werden muss; seine Richtung soll jedoch unbeeinträchtigt bleiben. In anderen Fällen können mehrere Vektoren zu einem einzigen zusammengefasst werden – beispielsweise dann, wenn ein Punkt durch mehrere Vektoren gleichzeitig verschoben werden muss. Diese Situationen sind das Thema der nächsten beiden Abschnitte.

Skalarmultiplikation

In einem Flugsimulator wird die Position eines Flugzeuges mit Hilfe eines Punktes dargestellt. Verändert man die Koordinaten dieses Punktes, verändert sich auch die räumliche Position des Fluggerätes. In jeder Sekunde muss das Flugzeug in die Richtung bewegt werden, die durch den Vektor $\vec{v}$ mit den reellen Komponenten **x**, **y**, **z** angegeben ist. Die Werte der Komponenten sind bekannt, dieses Vorhaben kann demnach leicht durch eine wiederholte Verschiebung des beschriebenen Punktes unter Verwendung von $\vec{v}$ realisiert werden.

Daraus folgt, dass die Strecke, die das Flugzeug in einer Sekunde zurücklegt, dem Betrag des Vektors entspricht. In der realen Welt lässt sich die Geschwindigkeit gemäß den Vorgaben des Piloten regulieren, ohne die Flugrichtung zu verändern. Gesucht ist eine Möglichkeit, den Betrag, nicht aber die Richtung, eines beliebigen Vektors zu verändern.

In der Mathematik wird diese Problemstellung durch eine Operation gelöst, welche die Bezeichnung *Skalarmultiplikation* trägt. Hierbei müssen alle Komponenten des zu verändernden Vektors mit einem *Skalar*, das heißt mit einer reelen Zahl wie folgt multipliziert werden:

$$t * \vec{v} = \vec{v}' \quad \Leftrightarrow \quad t * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t * x \\ t * y \\ t * z \end{pmatrix} \qquad t \in R$$

Mit Hilfe von Abbildung 1.9 kann festgestellt werden, dass die Größe des Skalars im direkten Zusammenhang mit dem Betrag des zu verändernden Vektors steht.

Eine Multiplikation mit dem Wert 2 verdoppelt beispielsweise den Betrag des Vektors. Wenn der Skalar den Wert **0.1** besitzt, wird der Vektor auf ein Zehntel seiner ursprünglichen Länge verkürzt. Allgemein gilt, dass die Richtung eines Vektors nicht verändert wird, wenn der Skalar größer **0.0** ist.

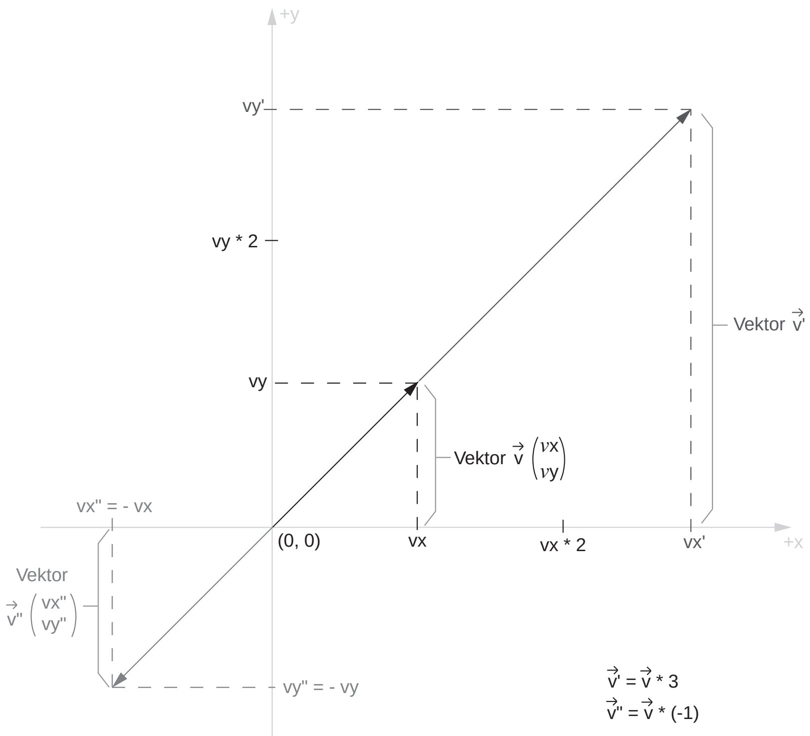


Abb. 1.9: Grafische Darstellung der Skalarmultiplikation eines Vektors $\vec{v}$ mit den Konstanten t = 2 und t = **-1**

Skalare sind reelle Zahlen und können somit auch negative Werte annehmen. Was den Betrag des zu verändernden Vektors betrifft, spielt das Vorzeichen des Skalars keine Rolle: Gleichgültig, ob der Skalar den Wert **3** oder **(–3)** besitzt, die ursprüngliche Länge des zu verändernden Vektors wird verdreifacht. Anhand Abbildung 1.9 lässt sich jedoch erkennen, dass negative Skalare die Richtung des Vektors umkehren. Nach der Multiplikation mit dem Wert **(–1)** verändert sich der Betrag von $\vec{v}$ zwar nicht, der Vektor $\vec{v}''$ zeigt jedoch in die genau entgegengesetzte Richtung.

Übungsaufgabe 1.5:

Geben Sie eine rechnerische Begründung der folgenden allgemeinen Beziehung: Bei der Multiplikation eines beliebigen Vektors $\vec{v}$ mit einem Skalar **t** ∈ **R** vergrößert sich der Betrag von $\vec{v}$ um den Betrag des Wertes **t**:

$|t * \vec{v}| = |t| * |\vec{v}|$

Beachten Sie die eingesetzte Schreibweise: Das Zeichen '*' auf der linken Seite der Gleichung kennzeichnet die Skalarmultiplikation, die eine reelle Zahl und einen Vektor entgegennimmt und als Ergebnis einen Vektor ausgibt. Auf der rechten Seite der Gleichung steht dasselbe Zeichen für die gewöhnliche Multiplikation, die zwei reelle Zahlen entgegennimmt und eine reelle Zahl berechnet. Entsprechendes gilt auch für die Schreibweisen $|\vec{v}|$, die *Länge eines Vektors* und $|t|$, den *Betrag einer reellen Zahl*.

Angenommen, ein virtuelles Flugzeug besitzt eine Möglichkeit, seine Geschwindigkeit beliebig zu regulieren, während es stets in dieselbe Richtung fliegt. Mathematisch gesehen ist nach einer Möglichkeit gesucht, die Länge eines gegebenen Vektors $\vec{v}$ auf einen bekannten Wert **n** zu setzen. Wie wir gesehen haben, verändert die Skalarmultiplikation mit einem Wert **t** > 0 die Richtung des Vektors nicht – diese Operation ist somit die Lösung dieses Problems:

> *Übungsaufgabe 1.6:*
>
> Gegeben sei ein Vektor $\vec{v}$ mit reellen Komponenten und beliebiger Länge sowie eine reelle Zahl $\mathbf{n} \geq 0$. Gesucht ist ein $\mathbf{t} \in \mathbf{R}$ mit:
>
> $|t * \vec{v}| = n$

Addition von Vektoren

Es gibt auch Situationen, in denen Vektoren miteinander in Wechselwirkung treten müssen. Ein gutes Beispiel hierfür ist ein Flugzeug, das sich in Richtung des bekannten Vektors $\vec{r} = \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix}$ fortbewegt. Ein Seitenwind, der das Flugzeug beispielsweise von links trifft, verändert die Flugbahn der Maschine. Das Problem besteht darin, die neue Flugrichtung $\vec{r}'$ zu ermitteln.

Richtung und Geschwindigkeit des Windes sind ebenfalls vorgegeben und bilden den Vektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} sx \\ sy \\ sz \end{pmatrix}$. Die neue Flugbahn ergibt sich aus der Addition der beiden Vektoren, die komponentenweise erfolgt:

$$\vec{r} + \vec{s} = \vec{r}' \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} sx \\ sy \\ sz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx + sx \\ ry + sy \\ rz + sz \end{pmatrix}$$

Die Abbildung 1.10 enthält die grafische Darstellung einer Vektoraddition, unter Verwendung konstanter Zahlen durchgeführt wird. Die Auswirkungen dieser einfachen

Operation sind besonders auf der linken Seite deutlich: Wenn man einen Punkt gleichzeitig in zwei unterschiedlichen Richtungen verschiebt, muss die Bewegung des Punktes unter Verwendung eines neuen Vektors angegeben werden, welcher ein »Mittelweg« zwischen den beiden Verschiebungsrichtungen darstellt.

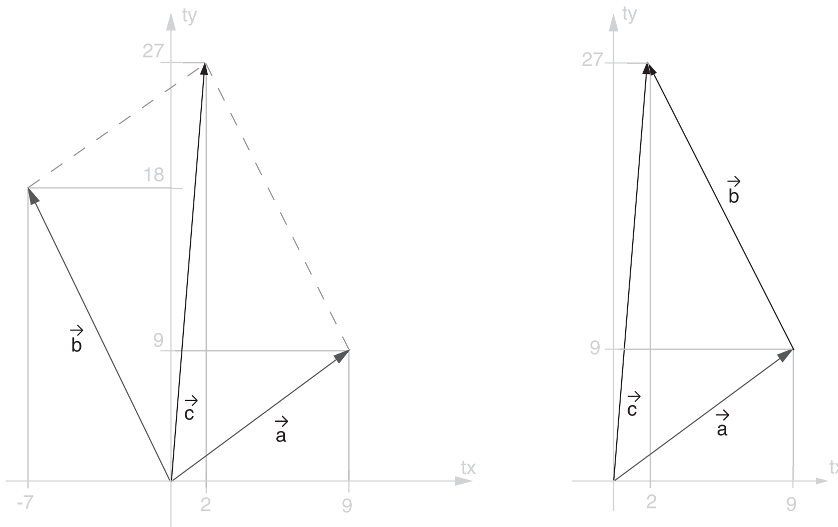


Abb. 1.10: Grafische Darstellung der Vektoraddition, links im Kräfteparallelogramm

Bemerkenswert ist, dass man Vektoren auch voneinander subtrahieren kann – hierbei handelt es sich um die *inverse Operation* der Vektoraddition. Ein anschauliches Beispiel hierfür sieht wie folgt aus: Aufgrund eines Instrumentenfehlers weiß der Pilot des Flugzeugs nichts über vorherrschenden Seitenwind. Er merkt jedoch, dass $\vec{r}\,'$, seine tatsächliche Bewegungsrichtung, sich von der vorgegebenen Richtung $\vec{r}$ unterscheidet. Daraus lassen sich die unbekannte Richtung und Stärke des Seitenwindes $\vec{s}$ leicht berechnen:

$$\vec{r} + \vec{s} = \vec{r}\,' \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{s} = \vec{r}\,' - \vec{r}$$

Der zunächst noch undefinierte Ausdruck $\vec{s} = \vec{r}\,' - \vec{r}$ lässt sich unter Verwendung der Skalarmultiplikation auflösen:

$$\vec{s} = \vec{r}\,' - \vec{r} \qquad \Leftrightarrow$$
$$\vec{s} = \vec{r}\,' + (-1) * \vec{r} \qquad \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} sx \\ sy \\ sz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx' \\ ry' \\ rz' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx' \\ ry' \\ rz' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -rx \\ -ry \\ -rz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx'-rx \\ ry'-ry \\ rz'-rz \end{pmatrix}$$