1

Der Goldene Schnitt

Wim Kleijne, Ton Konings

Vorbemerkung der Herausgeber

Der Goldene Schnitt ist ein klassisches Thema der Geometrie mit zahlreichen Anwendungen in anderen mathematischen Gebieten, in Ästhetik und Kunst. Darüber hinaus gibt es eine Beziehung zur Fibonacci-Folge und damit auch zu Wachstumsprozessen. Solche überraschenden Querverbindungen gehören zu den schönsten Erkenntnissen der Mathematik.

An Voraussetzungen benötigt man einige Kenntnisse der klassischen Geometrie (Kongruenz, Pythagoras, ...) und ein wenig Wissen über Folgen (es genügt auch, keine Angst vor Folgen zu haben).

Einleitung

Dieses Kapitel handelt von einem Thema, das seit der Antike großes Interesse auf sich zieht: Der Goldene Schnitt. Es handelt sich dabei um eine Verhältniszahl, die vielfach in der Mathematik, besonders in der Geometrie vorkommt. Weiterhin erweist sich, dass diese Zahl ganz besondere arithmetische Eigenschaften besitzt und in Beziehung zu der Folge der Fibonacci-Zahlen steht. Darüber hinaus ist der Goldene Schnitt oftmals in der Kunst zu finden.

Das Kapitel ist wie folgt aufgebaut: Im ersten Teil wird auf die theoretischen Aspekte des Goldenen Schnitts, auf die Fibonacci-Zahlen und auf die Beziehung zwischen beiden eingegangen. Dazwischen eingefügt sind einige Aufgaben, die zur Vertiefung der hier besprochenen Theorie gedacht sind. Zu jeder Aufgabe gibt es Lösungshinweise. Am Ende des Kapitels befinden sich die Lösungen zu den Aufgaben.

Wir rechnen für das Studium dieser ersten Hälfte mit einem Arbeitsaufwand von etwa zehn Stunden.

F. Verhulst, S. Walcher (eds.), *Das Zebra-Buch zur Geometrie*, Springer-Lehrbuch,
DOI 10.1007/978-3-642-05248-4_1,

In der Wissenschaft, der Kunst und in der Natur sind der Goldene Schnitt und die Fibonacci-Zahlen in überraschenden Zusammenhängen zu finden, ihr Vorkommen wird allerdings auch oft romantisiert. Die zweite Hälfte dieses Kapitels enthält sieben Arbeitsaufträge aus verschiedenen Bereichen (Architektur, Malerei, Biologie, Chemie, Mathematik) mit deren Hilfe diese Anwendungen des Goldenen Schnitts und der Fibonacci-Zahlen diskutiert und näher untersucht werden können. Jede Auftragsbeschreibung enthält viele interessante Informationen. Es ist beabsichtigt, dass Du nachdem Du alle sieben Arbeitsaufträge gelesen hast, einen auswählst, mit dem Du Dich intensiver beschäftigst. Hierfür wird ein Zeitaufwand von etwa zehn Stunden erwartet.

Weitere Informationen über die Themen, die in diesem Buch behandelt werden sind auf der Webseite der Niederländischen Mathematiklehrer-Vereinigung zu finden: **http://www.nvvw.nl**

1.1 Eine göttliche Teilung

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit einer Zahl, die seit Jahrhunderten von großem Interesse ist: der Goldene Schnitt. Es geht dabei um eine besondere Art, eine Strecke in zwei Teile zu zerlegen. Der Goldene Schnitt ist ein Verhältnis, das man wie folgt findet: Schneidet man einen Gegenstand einer bestimmten Länge, zum Beispiel der Länge 1 m (einen Balken, ein Stock, ein Stück Seil) an einer beliebigen Stelle durch, dann erhält man zwei Teile, die in der Regel nicht gleich lang sind. Zwischen den Längen der beiden Teile besteht ein festes Verhältnis. Teilt man zum Beispiel die 100 cm in ein kleines Stück von 40 cm Länge und ein großes Stück, das 60 cm lang ist, dann verhält sich das kleine Stück zum großen wie $40 : 60$ oder $1 : 1,5$.
Zugleich stehen beide Teile in einem festen Verhältnis zur ursprünglichen Länge. Das größere Stück verhält sich zur Gesamtlänge wie $60 : 100$ oder wie $1 : 1,667$. Beachte hierbei, dass $1,667$ größer als $1,5$ ist.
Teilt man nun die 100 cm in ein kleines Stück von 35 cm und ein großes Stück von 65 cm, dann ist das Verhältnis zwischen dem kleinen und dem großen Stück $35 : 65$ oder $1 : 1,857$. Das größere Stück verhält sich zur gesamten, ursprünglichen Länge wie $65 : 100$ oder wie $1 : 1,538$. In diesem Fall ist $1,538$ *kleiner* als $1,857$.
Es muss also auch eine Aufteilung möglich sein, bei der das Verhältnis des kleineren Stücks zum größeren gleich ist dem Verhältnis des größeren Stücks zur Gesamtlänge.

Aufgabe 1.1
Versuche diese Aufteilung zu finden und berechne das dazugehörige Verhältnis so genau wie möglich. Dieses Verhältnis wird „der Goldene Schnitt“ genannt.

Euklid schrieb schon um 300 v. Chr. eine mathematische Abhandlung über dieses Verhältnis, und etwa seit dem Ende des Mittelalters erschienen regelmäßig mathematische Werke zu diesem Thema. Das Verhältnis war nicht immer unter dem Namen „Goldener Schnitt“ bekannt. Euklid nannte es die „Teilung im inneren und äußeren Verhältnis“, zu Ende des Mittelalters und zu Beginn der Renaissance sprach man auch von der Divina Proportio: die Göttliche Teilung.

Der Name Goldener Schnitt, eigentlich das Goldene Verhältnis, entstand erst in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts. All diese Namen zeigen, dass man dieses Verhältnis als etwas sehr Besonderes ansah: „göttlich“ und „golden“. Einer der Gründe für die Faszination, die dieses Verhältnis ausstrahlt, ist die Anwendung des Goldenen Schnittes in vielen, auch nicht-mathematischen Bereichen. So taucht diese berühmte Zahl bei der Untersuchung des Pflanzenwachstums auf. Weiter spielt der Goldene Schnitt vor allem in der Bildenden Kunst und in der Architektur eine große Rolle.

Aufgabe 1.2

Zeichne ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 10 cm. Teile das Quadrat mit einer senkrechten Linie „so schön wie möglich“ in zwei Teile. Miss die Länge und Breite der Rechtecke, die durch diese Teilung entstehen. Berechne das Verhältnis der Länge zur Breite der Rechtecke in der Zeichnung. Zeichne noch ein Quadrat und teile es mit einer vertikalen und einer horizontalen Linie „so schön wie möglich“. Miss die Längen der Stücke, in die das Quadrat unterteilt ist und berechne die Verhältnisse. Sind Verhältnisse dabei, die ungefähr dem Goldenen Schnitt entsprechen?

Experimente dieser Art wurden in der Vergangenheit mit großen Gruppen von Testpersonen unternommen, um festzustellen, welches Verhältnis als das schönste empfunden wird, und so ein absolutes Schönheitsideal zu finden. Man hat oft angenommen, dass es eine „schönste Unterteilung“ einer Strecke (oder eines Quadrats) gibt, und dass diese der Goldene Schnitt ist. Einige Künstler haben ganz bewusst den Goldenen Schnitt in ihren Werken verwendet. Andererseits wird das Vorkommen des Goldenen Schnitts in der Kunst auch oft übertrieben dargestellt. Wahrscheinlich sind die Begriffe „schön“ und „hässlich“ zu vielschichtig, um sie mit einer einzigen Zahl zu beschreiben. Mehr zu diesem Aspekt des Goldenen Schnitts ist im Buch von Albert van der Schoot [10] nachzulesen.

Zurück zur Mathematik. Im Laufe der Zeit wurde der Goldene Schnitt in Verbindung mit einer gewissen Folge von Zahlen gebracht, der Folge der „Fibonacci-Zahlen“. Diese Folge wird erstmals in einem Buch behandelt, das zu Beginn des 13. Jahrhunderts erschien. Man entdeckte dann, dass eine enge Verbindung zwischen den Fibonacci-Zahlen und dem Goldenen Schnitt besteht. Es ist sogar so, dass man den Goldenen Schnitt mit Hilfe dieser Zahlen besser verstehen kann. Deshalb werden wir hier auch die Folge der Fibonacci-Zahlen und den Zusammenhang mit dem Goldenen Schnitt näher betrachten.

1.2 Die Mathematik hinter dem Goldenen Schnitt

1.2.1 Das Pentagramm

An vielen Stellen in der Literatur, in der bildenden Kunst, in der Philosophie und im alltäglichen Leben finden wir das Symbol des fünfzackigen Sterns. So ist zum Beispiel die Figur in Abbildung 1.1 in einem Bogen eines Klostergangs in Alcobaça in Portugal zu sehen.

Abb. 1.1: Kloster in Alcobaça, Portugal (Foto: Wim Kleijne).

In der Magie des Mittelalters war der fünfzackige Stern, Pentagramm genannt, ein Symbol, welches Schutz vor Hexen, bösen Geistern und dem Teufel bot. Ein spätes Relikt davon findet man in Goethes „Faust“. In einer Szene ist Mephisto nämlich nicht in der Lage das Zimmer von Faust zu verlassen, denn

„Gesteh ich’s nur! Dass ich hinausspaziere,
Verbietet mir ein kleines Hindernis,
Der Drudenfuß auf Eurer Schwelle“

worauf Faust fragt:

„Das Pentagramma macht dir Pein?“

Der „Drudenfuß“, das Pentagramm, der regelmäßige fünfzackige Stern, war ein für böse Geister unüberwindliches Hindernis.
Berücksichtigt man dies, so ist es auch verständlich, dass das Pentagramm

in Sakralbauwerken wie im erwähnten Klostergang eingebaut ist: Der Teufel sollte nicht hereinkommen können. An dem Foto des Klosterfensters wird deutlich, dass der Baumeister unter anderem vor dem Problem stand, das Pentagramm in ein rundes Fenster einzubauen. Dafür musste er zuerst ein regelmäßiges Fünfeck, ein sogenanntes Pentagon konstruieren. Die Konstruktion eines Fünfecks spielte im mittelalterlichen Kathedralenbau eine wichtige Rolle, und war nur den Baumeistern vorbehalten. Diese Konstruktion musste ein Baumeister damals allein mit einem Zirkel und einem Lineal ohne Markierungen schaffen.
Es gibt einige zeitgenössische Bilder von Baumeistern mit einem Zirkel und einem Lineal in den Händen, die verdeutlichen sollen, dass solche Konstruktionen allein damit erstellt werden mussten. Ein Relikt davon findet sich heute noch im Symbol der Freimaurer.
Auch heutzutage kommen das Pentagramm und das Pentagon viel öfter vor als man vielleicht denken mag. Versuche einige Beispiele für die Verwendung dieser Symbole in der heutigen Zeit zu finden. Denke zum Beispiel an Gebäude, Flaggen, diverse Firmenlogos usw. Eine gute Möglichkeit solche Beispiele zu finden, ist die Suche im Internet.

Die Konstruktion eines Pentagramms und eines regelmäßigen Fünfecks mit Zirkel und Lineal ist aus mathematischer Sicht sehr interessant. Wir werden uns in diesem Kapitel unter anderem damit befassen. Dabei wollen wir das Pentagramm und das Pentagon auch auf ihre mathematischen Eigenschaften hin untersuchen.

1.2.2 Eine mathematische Eigenschaft

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass der mittelalterliche Baumeister einer Kathedrale vor dem Problem stand, ein Pentagramm in einem runden Fenster nur mit Zirkel und Lineal zu konstruieren. Für die Lösung dieses Problems wird er sehr schnell auf die Idee gekommen sein, das zum Pentagramm gehörende regelmäßige Fünfeck, das Pentagon zu konstruieren (siehe Abb. 1.2). Wenn man von der vollständigen Symmetrie des Sterns ausgeht, ist sofort klar, dass das Fünfeck $ABCDE$, das man durch Verbinden der Eckpunkte des Sterns erhält, regelmäßig ist. Das heißt, dass die Seiten AB, BC, CD, DE und EA gleich lang sind und dass die Winkel an den Eckpunkten A, B, C, D und E ebenfalls gleich groß sind. Die Strecken, die das Pentagramm bilden, sind die Diagonalen des Fünfecks.
Allerdings ist auch die Konstruktion (nur mit Zirkel und Lineal) eines regelmäßigen Fünfecks alles andere als eine leichte Aufgabe. Wir werden deshalb zunächst versuchen, einige Besonderheiten des Sterns und des Fünfecks zu finden. Es liegt auf der Hand, zu untersuchen, an welchen Stellen sich die fünf Strecken schneiden, die den Stern bilden. Um darüber etwas aussagen zu können, muss man beachten, dass diese Strecken die Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks sind. Der Einfachheit halber zeichnen wir nun zunächst nur drei der

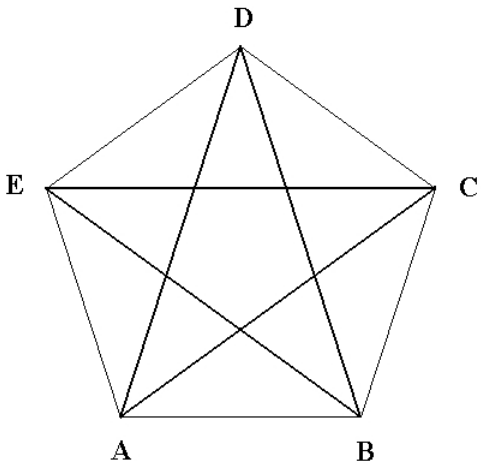


Abb. 1.2: Regelmäßiges Fünfeck und Pentagramm.

fünf Strecken, die das Pentagramm bilden (siehe Abb. 1.3). Was müssen wir wissen, um diese Figur zu konstruieren? Wir sehen bereits auf den ersten Blick drei verschiedene Längen in dieser Zeichnung, kurze (z. B. DS), längere (z. B. AS) und die längsten (z. B. AD oder AC).
Der Punkt in dem sich zwei Strecken schneiden kann bestimmt werden, wenn das Verhältnis der beiden Teile bekannt ist, in die eine Strecke unterteilt ist. Die Frage ist also, was wir über das Verhältnis $DS : SA$ oder $AB : AD$ sagen können.
Wir werden in den folgenden Überlegungen von einigen Eigenschaften ausgehen, die man in Abbildung 1.2 und 1.3 sehen kann. Als erstes haben wir die Symmetrie der Figur, und zweitens die Parallelität zwischen jeweils einer Seite und einer Diagonalen. So ist zum Beispiel ED parallel zu AC und AB parallel zu EC. Insgesamt folgt, dass das Dreieck ACS ähnlich zum Dreieck DES ist.

Anders ausgedrückt: $\triangle ACS \sim \triangle DES$. Somit ist

$$DS : AS = DE : AC \tag{1.1}$$

Da $EC||AB$ und $AD||BC$, ist das Viereck $ABCS$ ein Parallelogramm, also gilt $BC = AS$.
Da $DE = BC$ gilt also auch

$$DE = AS \tag{1.2}$$

Wegen der Symmetrie des Sterns ist

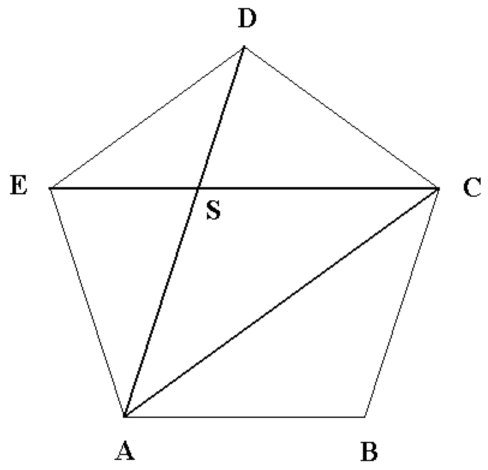


Abb. 1.3: Diagonalen im regelmäßigen Fünfeck.

$$AC = AD \tag{1.3}$$

Setze jetzt (1.2) und (1.3) in (1.1) ein. Man erhält

$$DS : AS = AS : AD = AB : AD \tag{1.4}$$

Das ist ein wichtiges Ergebnis: das Verhältnis der beiden Teile, in die eine Diagonale des Fünfecks durch eine andere Diagonale geteilt wird ist gleich dem Verhältnis von einem der beiden Teile zur ganzen Diagonale. Oder etwas genauer ausgedrückt:
Das kleinere Stück verhält sich zum größeren Stück, wie das größere Stück zur ganzen Diagonale.

Mit Hilfe dieses Verhältnisses, das wir soeben bestimmt haben, können wir nun einige Berechnungen anstellen. Zuerst werden wir die Länge einer Diagonalen berechnen.
Zunächst sei die Länge einer Seite des Fünfecks gleich 1. Das heißt in Abbildung 1.3 gilt $BC = AS = 1$. Wenn wir die Länge einer Diagonalen d nennen, dann kann Gleichung (1.4) wie folgt geschrieben werden:

$$(d - 1) : 1 = 1 : d.$$

Daraus folgt

$$(d - 1) \cdot d = 1$$

oder auch

$$d^2 - d - 1 = 0 \tag{1.5}$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung ist $d = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$.

Da d die Länge einer Strecke ist, kann d nicht negativ sein. Also folgt aus unserer Rechnung

$$d = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1,61803.$$

Wir werden diese Rechnung nun auch für den allgemeinen Fall, also für ein regelmäßiges Fünfeck, dessen Seitenlänge nicht unbedingt gleich 1 ist, durchführen. Wir bezeichnen das kleinere Teilstück einer Diagonalen des Fünfecks mit k und das größere Teilstück mit g (siehe Abbildung 1.4).

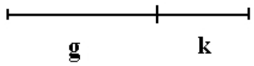


Abb. 1.4: Goldener Schnitt.

Das Verhältnis aus Gleichung (1.4) können wir jetzt schreiben als

$$k : g = g : (k + g).$$

Daraus folgt: $g^2 = k \cdot (k + g)$, ausmultipliziert: $g^2 = k^2 + kg$. Wenn man nun auf beiden Seiten durch k^2 teilt und anschließend alles auf eine Seite bringt erhält man:

$$(g/k)^2 - g/k - 1 = 0$$

woraus wie eben folgt: $g/k = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Das Minuszeichen würde eine negative Zahl für ein Verhältnis zweier Längen liefern, was unmöglich ist. Also gilt

$$g/k = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1,61803. \tag{1.6}$$

Beachte, dass dann

$$k/g = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) \approx 0,61803.$$

Zusammengefasst haben wir also folgendes herausgefunden:
(Z ist hierbei die Länge einer Seite des Fünfecks, g ist das größere und k das kleinere der beiden Teile, in die die Diagonale unterteilt wird.)

- Wenn $Z = g = 1$ dann ist $d = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1,61803$ und $k = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) \approx 0,61803$.
- Wenn allgemein $Z = g$ dann ist $g/k = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1,61803$ und $k/g = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) \approx 0,61803$.

Elementare „goldene Algebra“

Wenn eine Strecke in zwei Teile geteilt ist, sodass die Teile in dem oben beschriebenen Verhältnis zueinander stehen (siehe (1.4) und (1.6)) sprechen wir vom „Goldenen Schnitt“ oder „Goldenen Verhältnis“. Man verwendet auch manchmal die Bezeichnungen „göttliches Teilverhältnis“ und „Teilung im inneren und äußeren Verhältnis“.
Die Tatsache, dass ein so einfaches Verhältnis so viele verschiedene rühmende Namen erhalten hat deutet darauf hin, dass es damit etwas Besonderes auf sich hat. Das ist tatsächlich der Fall, wie wir im Folgenden sehen werden. Dabei werden wir feststellen, dass man dieses Verhältnis oft (näherungsweise) unter anderem in der Bildenden Kunst und in der Natur wieder findet. Auch im alten Griechenland war dieses Verhältnis bereits bekannt. Euklid erwähnt es in seiner „Stoicheia“ (übersetzt „Elemente“): dreizehn Bücher, in denen er um das Jahr 300 v. Chr. die gesamte damals bekannte Mathematik beschrieb. In diesen Büchern verwendet Euklid für diese Unterteilung einer Strecke die Bezeichnung „Teilung im inneren und äußeren Verhältnis“. Da wir im Folgenden viel mit der Zahl $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ rechnen werden, bezeichnen wir diese mit dem griechischen Buchstaben φ („phi“). Also

$$\varphi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$

Zunächst zeigen wir in der folgenden Aufgabe einige wichtige Eigenschaften von φ. Einige der Ergebnisse aus Aufgabe 1.3 werden im Folgenden benötigt.

Aufgabe 1.3

Zeige, dass folgende Gleichungen gelten:
a. $\varphi^2 = \varphi + 1$
b. $1/\varphi = \varphi - 1$
c. $\varphi + 1/\varphi = \sqrt{5}$
d. $\varphi^2 + 1/\varphi^2 = 3$

(Hinweis zur Lösung von Aufgabe 1.3: Setze den Wert von φ in die Gleichungen ein oder forme Gleichung (1.5) geschickt um)

„Goldene Konstruktionen“

Im letzten Abschnitt haben wir untersucht, in welchem Verhältnis sich die Diagonalen eines regelmäßigen Fünfecks teilen. Wir stießen dabei auf den sogenannten „Goldenen Schnitt“.
Sind wir jetzt umgekehrt auch in der Lage, eine gegebene Strecke mit Hilfe von Zirkel und Lineal in zwei Teile zu teilen, die zueinander das Verhältnis des Goldenen Schnitts haben? Ein Problem hierbei ist, dass dieses Verhältnis durch eine irrationale Zahl (also eine Zahl, die nicht als Bruch mit ganzzahligem Zähler und Nenner, geschrieben werden kann) gegeben ist, nämlich $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Wir werden nun mit einer klassischen Konstruktion eine Strecke im Verhältnis des Goldenen Schnitts teilen. Unter einer *klassischen Konstruktion*

verstehen wir eine Zeichnung, die nur mit Verwendung eines Zirkels und eines Lineals ohne Markierungen erstellt wird (wie es die alten Griechen taten, daher die Bezeichnung „klassisch“, und wie der mittelalterliche Baumeister vorgehen musste). Das heißt, dass wir bei der Konstruktion nur von Geraden und Kreisbögen Gebrauch machen werden.

Konstruktion des Goldenen Schnitts auf der Strecke AB (siehe Abbildung 1.5):

1. Konstruiere die Strecke $BC = \frac{1}{2}AB$, sodass sie senkrecht auf AB steht.
2. Zeichne einen Kreis mit Mittelpunkt C und Radius BC. Der Schnittpunkt mit AC wird D genannt.
3. Zeichne einen Kreis mit Mittelpunkt A und Radius AD. Der Schnittpunkt mit AB wird S genannt.

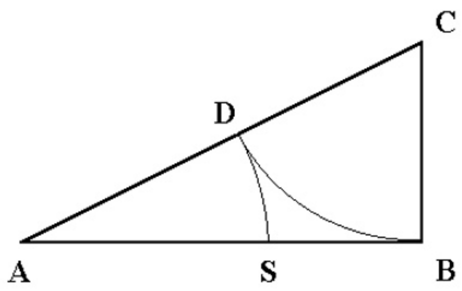


Abb. 1.5: Konstruktion des Goldenen Schnitts.

Aufgabe 1.4
Zeige, dass $BS : AS = AS : AB$

(Hinweis zur Lösung von Aufgabe 1.4: Bezeichne die Länge von AB mit a und drücke die Längen der Strecken BC, AC, AD und AS durch a aus. Zeige weiter, dass $AB/AS = \varphi$. Daraus folgt dann, dass S die Strecke AB gemäß dem Goldenen Schnitt unterteilt, dass also $BS : AS = AS : AB$).

In den folgenden beiden Aufgaben werden noch zwei weitere Konstruktionen des Goldenen Schnitts behandelt.

Aufgabe 1.5
Zeige, dass in Abbildung 1.6 der Punkt S_1 die Strecke AB im Goldenen Schnitt unterteilt. Für $AB = 1$ gilt also $AS_1 = 1/\varphi \approx 0,618$

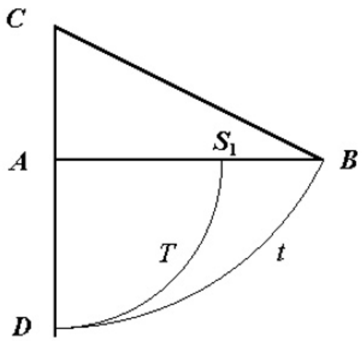


Abb. 1.6: Weitere Konstruktion des Goldenen Schnitts: $AC = \frac{1}{2}AB$. Mit t wird der Kreisbogen (C, BC) mit Mittelpunkt C und Radius BC bezeichnet. Mit T wird der Kreisbogen (A, AD) bezeichnet.

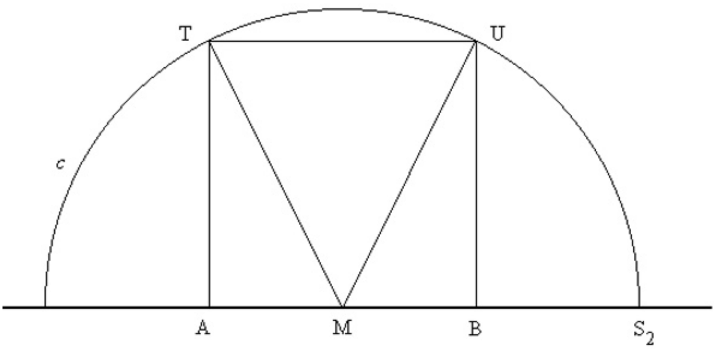


Abb. 1.7: Weitere Konstruktion des Goldenen Schnitts: c ist der Kreisbogen (M, MT). $ABUT$ ist ein Quadrat. $AM = MB$, der Punkt S_2 ist der Schnittpunkt von c mit der Strecke durch A und B.

(Hinweis zur Lösung von Aufgabe 1.5: Drücke die Länge der Strecke AD in Abhängigkeit der Länge von AB aus und berechne dann AS_1/AB.)

Aufgabe 1.6
Zeige, dass in Abbildung 1.7 die Strecke AS_2 durch Punkt B im Goldenen Schnitt unterteilt wird.

(Hinweis zur Lösung von Aufgabe 1.6: Drücke nacheinander die Längen der Strecken MU, MS_2, AS_2, und AB durch die Länge von AM aus und berechne dann AS_2/AB.)

Algebra mit φ

Wir sind ausgegangen von einer gründlichen geometrischen Untersuchung des Pentagramms. Dabei sind wir schnell auf die Zahl $\varphi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ gestoßen. In diesem Abschnitt führen wir nun eine genauere algebraische Untersuchung dieser Zahl durch.

Der Goldene Schnitt lässt sich als Verhältnis mit drei verschiedenen Zahlen auffassen: a, b und $a+b$. Es gilt nämlich $a : b = b : (a+b)$. Dieses Verhältnis besitzt eine sehr spezielle Struktur: nacheinander steht zunächst eine Zahl, dann zweimal die andere Zahl und zum Schluss die Summe der ersten beiden. Wenn wir die Verhältnisgleichung nach diesem Muster fortführen, erhalten wir:

$$a : b = b : (a+b) = (a+b) : (a+2b) = (a+2b) : (2a+3b) = \dots$$

(Überprüfen wir zum Beispiel die letzte Verhältnisgleichung: Die erste Zahl darin ist $a+b$, die zweite und dritte Zahl ist $a+2b$ und die vierte Zahl ist die Summe der ersten beiden, nämlich $(a+b)+(a+2b) = 2a+3b$.)

Auf diese Weise entsteht eine Folge immer größer werdender, positiver Zahlen der Form

$$a, b, a+b, a+2b, 2a+3b, 3a+5b, \dots,$$

wobei wegen der Gleichheit aller Verhältnisse von je zwei aufeinander folgenden Zahlen außerdem gilt, dass dieses Verhältnis gleich φ ist. Das Besondere an dieser Zahlenfolge ist, dass jede Zahl die Summe der zwei vorherigen Zahlen ist. Eine Zahlenfolge mit der Eigenschaft, dass jede Zahl der Folge gleich der Summe der zwei vorherigen Zahlen ist, heißt in der mathematischen Literatur Lucas-Folge, nach E. Lucas (1842 - 1891). Nennt man die erste Zahl einer Lucas-Folge $f(0)$, die zweite $f(1)$ usw., gilt also:

$$f(n+1) = f(n) + f(n-1), \text{ für alle } n \geq 1$$

Ein Beispiel für eine Lucas-Folge, auf das wir in diesem Buch noch öfter zurück kommen werden, ist die Folge:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

Diese Folge ist eine Lucas-Folge, da $2 = 1+1$; $3 = 1+2$; $5 = 3+2$; $8 = 3+5$; $13 = 5+8$; $\dots$. Die Verhältnisse aufeinander folgender Elemente dieser Folge sind jedoch nicht gleich dem Goldenen Schnitt, denn $2/1 = 2 \neq \varphi$; $3/2 = 1{,}5 \neq \varphi \dots$. Eine Lucas-Folge hat also nicht notwendigerweise die Goldene-Schnitt-Eigenschaft. Das heißt, dass das Verhältnis zwischen zwei aufeinander folgenden Zahlen einer Lucas-Folge nicht unbedingt φ entspricht.

Betrachte die Folge:

$$1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \dots$$

Das Verhältnis zwischen je zwei aufeinander folgenden Zahlen ist gleich φ; die Reihe hat also die Goldene-Schnitt-Eigenschaft. Wir wollen nun untersuchen, ob jede Zahl auch gleich der Summe der zwei vorangehenden Zahlen ist. In Aufgabe 1.3 haben wir bewiesen, dass $\varphi^2 = \varphi + 1$. Daraus folgt

$\varphi^3 = \varphi \cdot \varphi^2 = \varphi \cdot (\varphi + 1) = \varphi^2 + \varphi$ und $\varphi^4 = \varphi \cdot \varphi^3 = \varphi \cdot (\varphi^2 + \varphi) = \varphi^3 + \varphi^2$. Es scheint, dass diese Folge eine Lucas-Folge ist. Wir können uns dessen allerdings noch nicht sicher sein: Dass die ersten fünf Zahlen dieser Folge die Eigenschaften einer Lucas-Folge haben, heißt nicht, dass alle Zahlen dieser Folge diese Eigenschaften besitzen. Bisher haben wir den Beweis wie folgt aufgebaut. Wir wussten bereits, dass die Eigenschaft für φ^2 gilt und haben damit beweisen, dass sie auch für φ^3 gilt. Davon ausgehend, dass die Lucas-Eigenschaft für den Exponenten 3 gilt, konnten wir diese auch für den Exponenten 4 von φ zeigen. Dies können wir unendlich oft fortsetzen. Da wir so allerdings zu keinem Ende kommen würden, suchen wir einen kürzeren Weg. Wir versuchen allgemein zu beweisen: Wenn wir von der Gültigkeit der Eigenschaft für den Exponenten n ausgehen, gilt diese Eigenschaft auch für den Exponenten $n+1$. Das würde bedeuten, dass aus dem eben für den Exponenten 4 Gezeigten dieselbe Eigenschaft auch für den Exponenten 5 gilt. Und weiter folgt dann aus der Gültigkeit der Eigenschaft für den Exponenten 5, dasselbe für den Exponenten 6 und so weiter. Damit wäre also bewiesen, dass die Lucas-Eigenschaft für jeden Exponenten von φ, also für jede Zahl der Folge gilt.
Dazu müssen wir jetzt den allgemeinen Schritt beweisen. Wir gehen also davon aus, dass die Eigenschaft für φ^n gilt:

$$\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2} \tag{1.7}$$

und zeigen damit die Gültigkeit der Gleichung $\varphi^{n+1} = \varphi^n + \varphi^{n-1}$
Es gilt

$$\begin{aligned} \varphi^{n+1} &= \varphi \cdot \varphi^n \\ &= \varphi \cdot (\varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}) \text{ (wegen (1.7))} \\ &= \varphi^n + \varphi^{n-1} \end{aligned}$$

Also gilt die Eigenschaft auch für φ^{n+1}. Damit ist bewiesen, dass die Lucas-Eigenschaft für alle Zahlen dieser Folge gilt, mit anderen Worten: Jede Zahl dieser Folge ist die Summe der beiden vorangehenden Zahlen.

Die Folge $1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \ldots$ ist also eine Lucas-Folge mit der Goldene-Schnitt-Eigenschaft. Mit Hilfe von Aufgabe 1.3 sind wir auch in der Lage, die Zahlen dieser Folge wie folgt aufzuschreiben:

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\varphi^3 = \varphi \cdot \varphi^2 = \varphi \cdot (\varphi + 1) = \varphi^2 + \varphi = \varphi + 1 + \varphi = 2\varphi + 1$$

Aufgabe 1.7
a. Führe diese Rechnung fort und zeige, dass unsere Folge geschrieben werden kann als:

$$1,\ \varphi,\ \varphi+1,\ 2\varphi+1,\ 3\varphi+2,\ldots$$

b. Die allgemeine Gestalt einer Zahl dieser Folge ist $A(n)\cdot\varphi+B(n)$. Zeige, dass die Zahlenwerte, die $A(n)$ annimmt, sowie die Zahlenwerte, die durch $B(n)$ gegeben sind, Lucas-Folgen bilden.

(Hinweis zur Lösung von Aufgabe 1.7: Verwende die eben beschriebene Methode.)

Zurück zu der Folge $1,1,2,3,5,8,13,\ldots$. Wir wissen bereits, dass diese Folge eine Lucas-Folge ist, deren aufeinander folgende Zahlen nicht im Verhältnis des Goldenen Schnitts zueinander stehen. Das Verhältnis zweier aufeinander folgender Zahlen ist also ungleich φ. Berechne nun die ersten Verhältnisse von je zwei aufeinander folgenden Zahlen dieser Folge.

$$\begin{aligned} f(n) &= 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \ldots \\ f(n+1)/f(n) &= 1;\ 2;\ 1{,}5;\ \ldots \end{aligned}$$

Aufgabe 1.8
Berechne die weiteren Verhältnisse $f(n+1)/f(n)$ der ersten oben aufgeführten Zahlen dieser Folge.

Wenn man nun die Folge der eben berechneten Verhältnisse betrachtet, scheint diese gegen $1{,}61803\ldots\ (=\varphi)$ zu konvergieren. Anders ausgedrückt, scheint der Grenzwert dieser Folge der Verhältnisse gleich φ zu sein. Das ist tatsächlich der Fall. Der Beweis dazu ist nicht so einfach und wird hier deshalb nicht weiter ausgeführt. Man kommt jedoch sehr schnell darauf, dass der Grenzwert φ sein muss, wenn es überhaupt einen Grenzwert gibt: Wir gehen davon aus, dass das Verhältnis $f(n+1)/f(n)$ gegen einen Grenzwert L konvergiert. Wir gehen von der Definition einer Lucas-Reihe aus:

$$f(n+1) = f(n) + f(n-1).$$

Division beider Seiten durch $f(n)$ liefert:

$$f(n+1)/f(n) = 1 + f(n-1)/f(n)$$

Im Grenzfall kann man $f(n+1)/f(n)$ durch L und $f(n-1)/f(n)$ durch $1/L$ ersetzen (Warum?). Man erhält:

$$\begin{aligned} &L = 1 + 1/L, \quad \text{oder} \\ &L^2 - L - 1 = 0 \end{aligned}$$

woraus bereits folgt, dass $L=\varphi$, denn sicher ist $L>0$.

Also gibt es eine bemerkenswerte Verbindung zwischen dem Goldenen Schnitt und der Folge

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

Wir haben in unserem Beweis nur verwendet, dass diese Folge eine Lucas-Folge ist. Unser Ergebnis, der Zusammenhang mit dem Goldenen Schnitt, ist also nicht abhängig von der speziellen Folge $1, 1, 2, 3, 5, \ldots$. Der gleiche Zusammenhang gilt allgemein: Für eine Lucas-Folge positiver Zahlen ist der Grenzwert der Folge der Verhältnisse von je zwei aufeinander folgenden Zahlen gleich φ.

Die Fibonacci-Folge In der Geschichte der Mathematik ist die Folge

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

aus dem letzten Abschnitt berühmt geworden. Die Folge ist bekannt unter dem Namen „Fibonacci-Folge“ und die Zahlen dieser Folge werden „Fibonacci-Zahlen“ genannt. Fibonacci (wörtlich „Sohn des Bonacci“), 1175 geboren und auch bekannt unter dem Namen Leonardo von Pisa, verfasste 1202 das Buch „Liber abaci“ (Buch der Rechenkunst, abacus = Rechenbrett, also ein Buch über Zahlen, zählen und rechnen). In diesem Buch beschrieb er unter anderem das folgende Problem:
Wie viele Nachkommen hat ein Kaninchenpaar, das die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Jedes Kaninchenpaar ist ab einem Alter von zwei Monaten geschlechtsreif.
2. Jedes Kaninchenpaar bringt ab diesem Alter (von zwei Monaten) monatlich ein neues Kaninchenpaar zur Welt.
3. Kein Kaninchen stirbt.

Zur Lösung dieses Problems ist es hilfreich, ein Baumdiagramm der Nachkommen des ersten Kaninchenpaars aufzustellen.

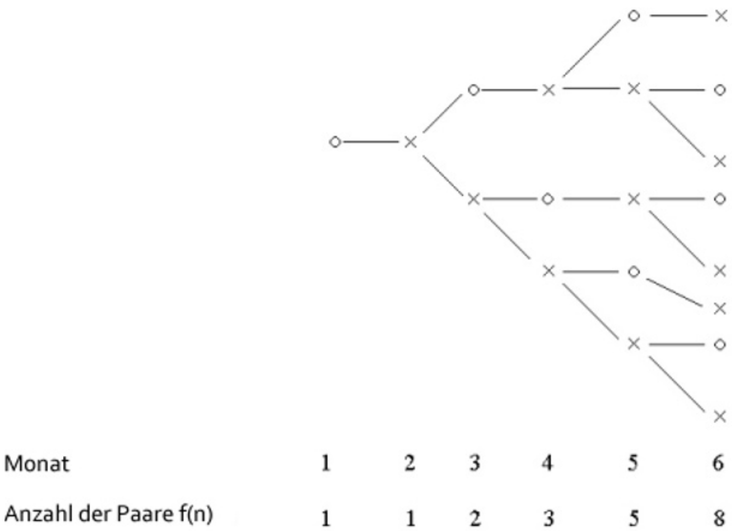


Abb. 1.8: Der Anfang der Fibonacci-Folge. Hierbei bedeutet O nicht geschlechtsreif, X geschlechtsreif.

Aufgabe 1.9
Zeige, dass durch Fortsetzung dieses Schemas die Fibonacci-Folge entsteht.

(Hinweis zur Lösung von Aufgabe 1.9: Es ist also zu zeigen, dass jede Zahl die Summe der beiden vorangehenden ist. Im allgemeinen Fall also $f(n+1) = f(n)+f(n-1)$. Im Monat n gibt es $f(n)$ Kaninchenpaare. Ermittele zunächst wie viele geschlechtsreife Paare darunter sind. Diese bringen im Monat $n+1$ je ein neues Kaninchenpaar zur Welt. Berechne so $f(n+1)$.)

Die Fibonacci-Zahlen und der Goldene Schnitt
Für die Goldene Zahlenfolge gibt es eine geschlossene Formel, mit der man die n-te Zahl der Folge berechnen kann. Das heißt, die n-te Zahl dieser Folge lässt sich als Funktion in Abhängigkeit von n ausdrücken: $t(n) = \varphi^n$.
Die Fibonacci-Folge ist rekursiv über die folgenden Formeln definiert:

$$f(n+1) = f(n) + f(n-1) \tag{1.8}$$

$$f(0) = 1, f(1) = 1 \tag{1.9}$$

Der Ausdruck *rekursiv* bedeutet, dass man jedes Element der Folge aus den vorangehenden berechnen kann. So kann man $f(2)$ berechnen, in dem man in der Gleichung (1.8) $n = 1$ einsetzt. Man erhält: $f(2) = f(1)+f(0) = 1+1 = 2$.

Auf diese Weise kann man nun $f(3)$, danach $f(4)$ usw. berechnen. Ein Problem bei dieser Art der Berechnung von einzelnen Folgengliedern ist, dass man zum Beispiel für die Berechnung von $f(100)$ die Werte $f(2)$ bis $f(99)$ benötigt. Es wäre sehr praktisch wenn man, wie bei der Goldenen Zahlenfolge, eine Formel für die Fibonacci-Zahlen hätte, in die man nur den Wert von n einsetzen müsste. In diesem Abschnitt werden wir eine solche Formel mit Hilfe von zwei Lucas-Folgen herleiten.

Man sieht schnell, dass die Folge,

$$a, a \cdot \varphi, a \cdot \varphi^2, a \cdot \varphi^3, \dots$$

die man durch Multiplikation jeder Zahl der Goldenen Zahlenfolge mit der (beliebigen) festen Zahl a erhält, eine Lucas-Folge ist. Den allgemeinen Funktionsterm, der uns die Zahlen der obigen Folge liefert nennen wir $u(n)$, für $n = 0, 1, 2, \dots$.
Die Folge

$$b, -b \cdot 1/\varphi, b \cdot 1/\varphi^2, -b \cdot 1/\varphi^3, \dots$$

ist ebenfalls eine Lucas-Folge (bitte nachrechnen!). Den allgemeinen Funktionsterm für die Zahlen dieser Folge bezeichnen wir mit $v(n)$ für $n = 0, 1, 2, \dots$.
Weiter ist dann auch die Folge $w(n) = u(n) - v(n)$ für $n = 0, 1, 2, \dots$ eine Lucas-Folge, denn

$$\begin{aligned} w(n+1) &= u(n+1) - v(n+1) \\ &= u(n-1) + u(n) - v(n-1) - v(n) \\ &= u(n-1) - v(n-1) + u(n) - v(n) \\ &= w(n-1) + w(n) \end{aligned}$$

Für verschiedene Zahlen a und b erhält man viele verschiedene Lucas-Folgen, deren Werte sich mit Hilfe der Funktion $w(n)$ berechnen lassen. Man könnte auf die Idee kommen, Zahlen a und b zu bestimmen, für die man mit der w-Folge die Fibonacci-Folge erhält. Solche Zahlen gibt es tatsächlich. Wenn man nämlich a und b so wählt, dass die ersten zwei Zahlen der w-Folge gleich 1 sind, dann erhält man für diese a und b die Fibonacci-Folge. Die Lucas-Eigenschaft der Folge sorgt für den Rest: $1, 1, \dots$ liefert mit der Lucas-Eigenschaft $2, 3, 5$, usw.
Wir suchen also zwei Zahlen a und b, die die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} w(0) &= a - b = 1 \\ w(1) &= a \cdot \varphi + b \cdot 1/\varphi = 1 \end{aligned}$$

Das heißt, dass

$$\begin{aligned} a - b &= 1 \\ a \cdot \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) + b \cdot \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) &= 1 \end{aligned}$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist

$$\begin{aligned} a &= 1/\sqrt{5} \cdot \varphi \approx 0,724 \\ b &= 1/\sqrt{5} \cdot (-1/\varphi) \approx -0,276 \end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir eine Formel, mit der man alle Fibonacci-Zahlen berechnen kann. Die Formel lautet also

$$\begin{aligned} f(n) &= 1/\sqrt{5} \cdot \varphi \cdot \varphi^n - 1/\sqrt{5} \cdot (-1/\varphi) \cdot (-1/\varphi)^n && \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ &= 1/\sqrt{5} \cdot \varphi^{n+1} - 1/\sqrt{5} \cdot (-1/\varphi)^{n+1} && \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Damit haben wir eine schöne Verbindung zwischen dem Goldenen Schnitt und den Fibonacci-Zahlen gefunden. Diese Formel ist in der mathematischen Literatur bekannt unter dem Namen „Formel von Binet“, benannt nach J.P.M Binet, der um die Mitte des 19. Jahrhunderts lebte.

Aufgabe 1.10
Berechne die ersten sieben Fibonacci-Zahlen mit der Formel von Binet. Überprüfe Deine Ergebnisse mit der Rekursionsformel (1.8) und (1.9).

Goldenes Dreieck und regelmäßiges Zehneck
Im letzten Abschnitt haben wir eine Verbindung zwischen einem geometrischen Verhältnis (dem Goldenen Schnitt) und einer Zahlenfolge gefunden, also einen Zusammenhang zwischen diesem geometrischen Verhältnis und algebraischen Eigenschaften der Zahl φ. Nun gehen wir noch einmal zurück zum Anfang, wo wir den Goldenen Schnitt im regelmäßigen Fünfeck und damit auch im Pentagramm fanden. In Abbildung 1.9 ist ein regelmäßiges Fünfeck zu sehen. Das Dreieck ABC ist zweimal abgebildet, einmal mit der Winkelhalbierenden des Innenwinkels $\angle B$ bei B und einmal mit dem Mittelpunkt M des Umkreises (der hier nicht abgebildet ist).

Mit Hilfe von Abbildung 1.9 werden wir zeigen, dass für die Winkel im Dreieck ABC gilt:

$$\angle C = 36°; \;\; \angle A = \angle B = 72°; \;\; \angle B1 = \angle B2 = 36°; \;\; \text{also } \angle D1 = 72°.$$

AB ist eine Seite eines regelmäßigen Fünfecks, woraus folgt, dass $\angle M1$ gleich einem Fünftel von 360° ist, also $\angle M1 = 72°$. Wegen der Symmetrie ist dann $\angle M2 = \angle M3 = 144°$ (denn $(360° - 72°)/2 = 144°$). Die Dreiecke AMC und BMC sind beide gleichschenklig (da $AM = CM = BM$ gleich dem Radius des Umkreises), woraus folgt, dass $\angle C1 = \angle C2 = 18°$ (da $(180° - 144°)/2 = 18°$). Also gilt weiter $\angle C = \angle C1 + \angle C2 = 18° + 18° = 36°$. $\triangle ABC$ ist gleichschenklig, also ist $\angle A = \angle B = (180° - 36°)/2 = 72°$. Die Winkel des Dreiecks ABC haben also jeweils die gleiche Größe wie die Winkel des Dreiecks ADB, woraus folgt, dass diese beiden Dreiecke ähnlich zueinander sind. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt

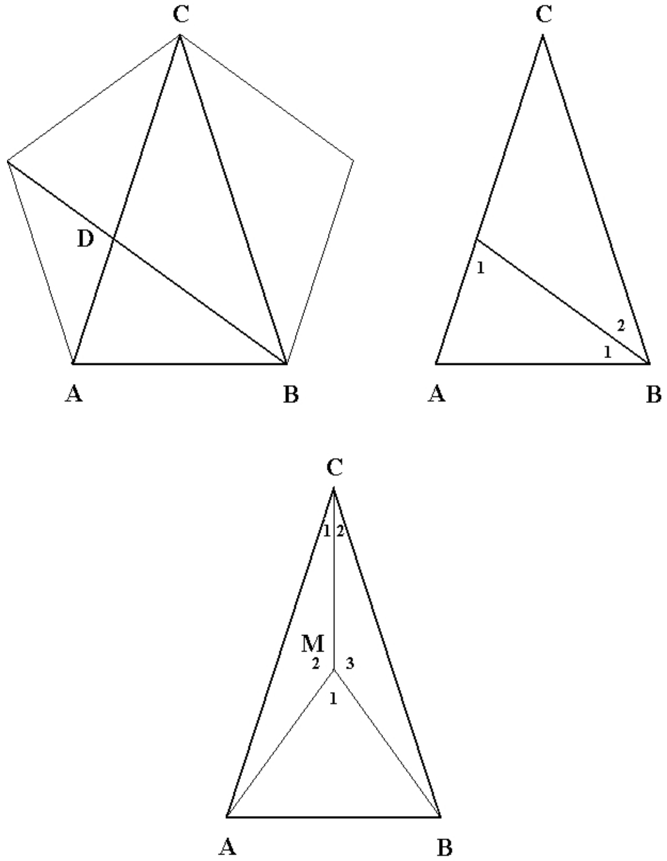


Abb. 1.9: Regelmäßiges Fünfeck und Goldenes Dreieck.

$$AD : AB = AB : AC$$

Da $AB = DC$ folgt weiter, dass

$$AD : DC = DC : AC$$

Hier steht gerade die Teilung der Strecke AC im Goldenen Schnitt. Wir haben hier also einen zweiten Beweis dafür geliefert, dass die Diagonalen eines regelmäßigen Fünfecks durch die Schnittpunkte mit anderen Diagonalen im Verhältnis

Da das Verhältnis des Goldenen Schnitts in einem gleichschenkligen Dreieck mit einem Winkel von 36° an der Spitze so einfach zu finden ist, wird ein solches Dreieck „Goldenes Dreieck“ genannt. Die Winkelhalbierende eines Basiswinkels teilt die gegenüberliegende Seite im Goldenen Schnitt. Außerdem entsteht so ein neues Goldenes Dreieck, in dem die Winkelhalbierende eines Basiswinkels die gegenüberliegende Seite ebenfalls im Goldenen Schnitt teilt. Indem man ein gleichschenkliges Dreieck stets wieder mit einer neuen Winkelhalbierenden eines der beiden Basiswinkel unterteilt, erhält man eine Folge von ähnlichen Dreiecken mit Ähnlichkeitsfaktor φ oder je nach der Reihenfolge, in der man die Dreiecke betrachtet $1/\varphi$. In Abbildung 1.10 ist das hier beschriebene Vorgehen dargestellt. Es sind nur die ersten Schritte abgebildet, man sieht jedoch deutlich, dass diese Unterteilung beliebig oft wiederholt werden kann.

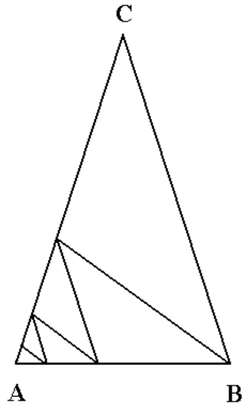


Abb. 1.10: Eine Folge Goldener Dreiecke.

Die Konstruktion eines Pentagramms

Eine schöne Anwendung des Goldenen Dreiecks ist in Abbildung 1.11 dargestellt, wobei x die Länge einer Seite des regelmäßigen Zehnecks bezeichnet. Das abgebildete Dreieck ist ein Goldenes Dreieck.
Mit dem Goldenen Schnitt folgt für ein Goldenes Dreieck $AC = \varphi \cdot AB$. Das heißt, dass

$$R = \varphi \cdot x.$$

Also ist

$$x = 1/\varphi \cdot R = \frac{1}{2} R \cdot (-1 + \sqrt{5}),$$

da wir bereits in Aufgabe 1.3 gesehen haben, dass

$$1/\varphi = \varphi - 1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}).$$

R ist der Radius des Umkreises des regelmäßigen Zehnecks. Wir sind also in der Lage, die Länge einer Seite eines regelmäßigen Zehnecks in Abhängigkeit vom Radius des Umkreises und von φ auszudrücken. Das heißt auch, dass

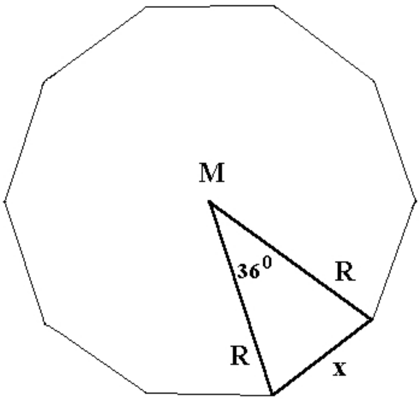


Abb. 1.11: Goldenes Dreieck und regelmäßiges Zehneck.

wir nun in der Lage sind, in einem gegebenen Kreis ein regelmäßiges Zehneck zu konstruieren, indem wir ausschließlich Zirkel und Lineal verwenden. (Der gegebene Kreis ist dabei der Umkreis des Zehnecks, das konstruiert werden soll.)

Aufgabe 1.11
Führe diese Konstruktion durch.

(Hinweis zu Aufgabe 1.11: Beachte, dass für die Seite x des regelmäßigen Zehnecks gilt $R = \varphi \cdot x$ und vergleiche dies mit $AC = \varphi \cdot AB$ aus Abbildung 1.9. Führe dann eine der Konstruktionen des Goldenen Schnitts aus.)

Jetzt können wir auch das Problem des Baumeisters aus dem ersten Kapitel lösen. Es ging darum, ein Pentagramm in einem runden Fenster nur mit Zirkel und Lineal zu konstruieren. Das Problem ist gelöst, wenn man in dem runden Fenster ein regelmäßiges Fünfeck konstruieren kann. Das Pentagramm besteht dann aus den fünf Diagonalen des Fünfecks. In Aufgabe 1.11 haben wir in einem Kreis ein regelmäßiges Zehneck konstruiert. Wenn man je zwei Ecken des Zehnecks bei Auslassen der dazwischen liegenden Ecke der Reihe nach verbindet, erhält man das gesuchte regelmäßige Fünfeck, das Pentagon, das der Baumeister benötigte. Siehe Abbildung 1.12.
Wie so oft in der Mathematik, ist dies nicht die einzige Lösung des Problems, mit Zirkel und Lineal ein regelmäßiges Fünfeck ein einem gegebenen Kreis zu konstruieren. Von den vielen anderen Lösungen folgt hier eine weitere.
In Abbildung 1.9 haben wir gesehen, dass in einem Kreis der Mittelpunktswinkel der Seite eines einbeschriebenen regelmäßigen Fünfecks 72° beträgt. Wenn man nun berücksichtigt, dass die Basiswinkel eines Goldenen Dreiecks 72° betragen, und dass ein Goldenes Dreieck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, muss das Problem auf diesem Wege gelöst werden können.

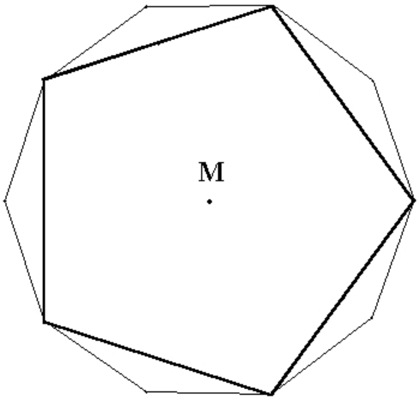


Abb. 1.12: Regelmäßiges Zehneck und regelmäßiges Fünfeck.

Aufgabe 1.12
Konstruiere mit Zirkel und Lineal einen Mittelpunktswinkel von 72° in einem gegebenen Kreis. Konstruiere dann in diesem Kreis ein regelmäßiges Fünfeck.

(Hinweise zur Lösung von Aufgabe 1.12:
1. Konstruiere den Goldenen Schnitt auf einem Radius AM des Kreises. (AC ist das größere und CM das kleinere Stück).
2. Zeichne die Kreisbögen (C, CA) und (M, CA) und nenne den Schnittpunkt der beiden B.
3. $\angle AMB = 72°$.)

Eine Fraktal-Konstruktion mit Hilfe von φ
Im vorigen Abschnitt haben wir eine Folge zueinander ähnlicher Dreiecke konstruiert. Tatsächlich erhält man auf diese Weise eine Figur, die aus unendlich vielen zueinander ähnlichen Bestandteilen (Dreiecken) zusammengesetzt ist. Anders ausgedrückt: das gleiche Dreieck wird mit abnehmender Größe unendlich oft reproduziert.
Mit dieser Formulierung wird sofort deutlich, dass ein Zusammenhang zu dem besteht, was wir *Fraktal* nennen. Ein Beispiel für ein sehr schönes Fraktal ist in Abbildung 1.13 zu sehen.
Wenn man diese Figur genau betrachtet, erkennt man, dass ihre Bestandteile immer wieder in kleinerem Maßstab reproduziert werden. Genauer gesagt, sind alle Teile, die so entstehen, ähnlich zueinander. In Abbildung 1.14 ist ein Schema dargestellt, das dem Fraktal aus Abbildung 1.13 sehr ähnlich sieht. Mit Hilfe dieses Schemas kann man ein Fraktal konstruieren, das dem aus

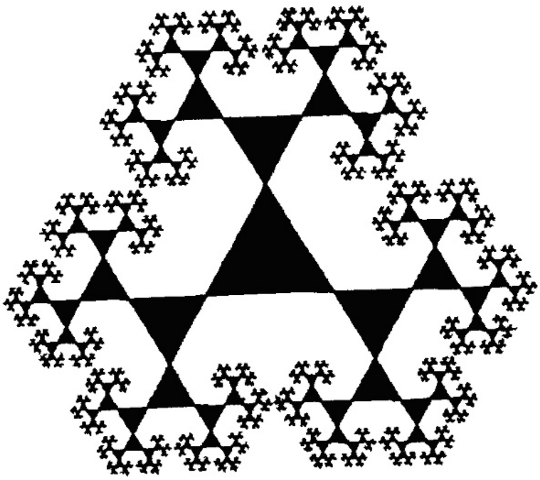


Abb. 1.13: Ein Fraktal.

Abbildung 1.13 ähnelt. Der Aufbau des Fraktals kann durch den folgenden Konstruktions-Algorithmus beschrieben werden:

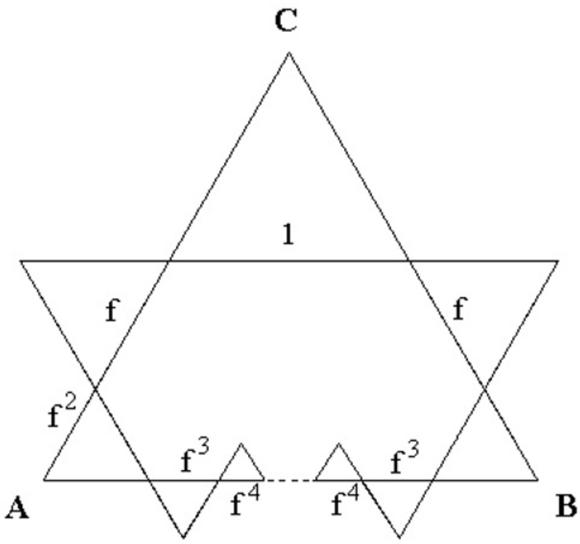


Abb. 1.14: Konstruktion eines Fraktals.

1. Man beginnt mit einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge 1.

2. Wie in Abbildung 1.14 dargestellt, werden nun an den beiden Basis-Eckpunkten gleichseitige Dreiecke mit Streckungsfaktor f (bezüglich des ersten Dreiecks) konstruiert, wobei $0 < f < 1$ gelten soll. Der Wert von f ist noch nicht bekannt, wir berechnen diesen später (er ist vermutlich leicht zu erraten).

3. An diesen beiden Dreiecken werden dann auf diese Weise weitere ähnliche

Wir möchten mit unserer Konstruktion ein gleichseitiges Dreieck ABC erhalten, also muss $AC = AB$ gelten. In Abbildung 1.14 erkennt man, dass $AC = 1 + f + f^2$ gilt. Man sieht außerdem, dass $AB = 2 \cdot (f^2 + f^3 + f^4 + \dots)$. Wir erhalten also die Gleichung:

$$1 + f + f^2 = 2 \cdot (f^2 + f^3 + f^4 + \dots) \tag{1.10}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine unendliche Reihe. Man kann jedoch mit Hilfe der Summenformel für die geometrische Reihe zeigen, dass

$$f^2 + f^3 + f^4 + \cdots = f^2/(1 - f). \tag{1.11}$$

Somit können wir (1.10) als

$$1 + f + f^2 = 2 \cdot f^2/(1 - f)$$

schreiben, wonach folgt

$$f^3 + 2 \cdot f^2 - 1 = 0 \tag{1.12}$$

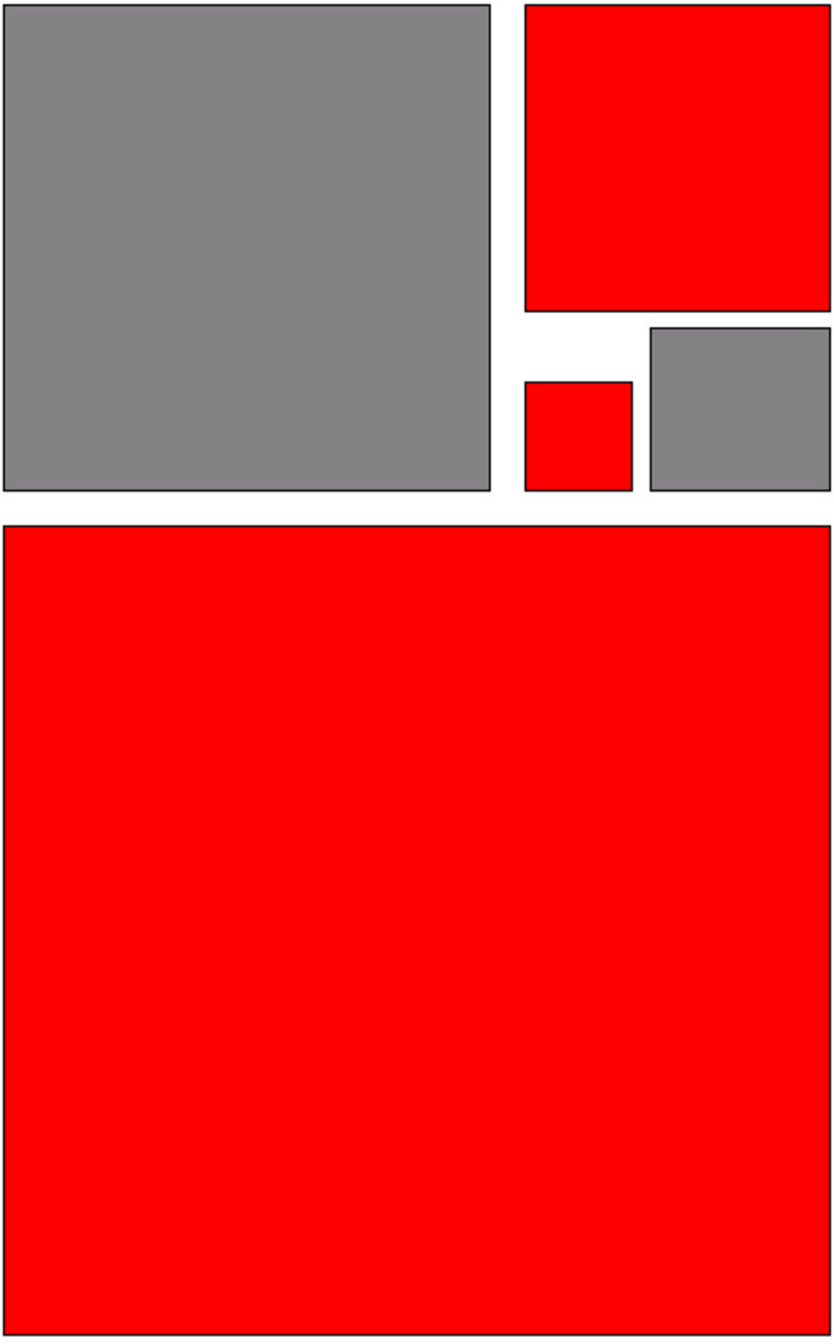
Aufgabe 1.13
a. Zeige, dass (1.11) und (1.12) gelten.
b. Zeige, dass $f = -1$, $f = -\varphi$ und $f = 1/\varphi$ die Lösungen der Gleichung (1.12) sind.

(Hinweis zur Lösung von Aufgabe 1.13a): Die Summenformel für die geometrische Reihe lautet für $-1 < f < 1$:

$$1 + f + f^2 + f^3 + f^4 + \cdots = 1/(1 - f)$$

zu Aufgabe 1.13b): Setze die genannten Zahlen in der Gleichung für f ein.)

Da f positiv sein muss, ist die Lösung $f = 1/\varphi$. Somit haben wir wieder den gleichen Streckungsfaktor wie bei der Folge von Goldenen Dreiecken gefunden.



1.3 Arbeitsaufträge

Vorbemerkung: Es wird erwartet, dass die Schülerinnen und Schüler etwa 10 Stunden für einen der folgenden Arbeitsaufträge aufwenden, in denen sie sich der Untersuchung eines der Probleme und den zugehörigen Aufgabenstellungen widmen. Die meisten Aufträge sind so umfangreich, dass sie auch für Gruppen von zwei bis drei Schülern geeignet sind.

Zu jedem Thema gibt es:

- Allgemeine Informationen zum Problem
- Eine Erkundung des Problems

Von den Schülern wird erwartet:

- Weitere Aufteilung der Problemstellung in Teilprobleme und Planung des weiteren Vorgehens
- Bearbeitung der Problemstellung
- Zusammenfassung, Schlussfolgerungen
- Fragen zur weiteren Vertiefung

Zu jedem Thema sollte eine schriftliche Ausarbeitung verfasst werden, die die oben genannten Punkte enthält.
Es kann aus den folgenden Arbeitsaufträgen gewählt werden:

1. **Der Modulor von Le Corbusier**
   Maßsysteme in der Architektur
2. **Der Goldene Schnitt als Schönheitsideal?**
   Untersuchung ästhetischer Vorlieben in der Malerei
3. **Phyllotaxis**
   Fibonacci-Zahlen und Spiralen in der Natur
4. **Nabelschau von Kopf bis Fuß**
   Ist der Goldene Schnitt ein menschliches Maß?
5. **Rätseln mit der Fibonacci-Folge**
   Rätsel aus dem „Vierkant voor Wiskunde“-Kalender 1999 [4]
6. **Die Goldene Spirale**
   Berührt oder schneidet diese Spirale den Rand der Goldenen Rechteck-Spirale?
7. **Optimierung eines chemischen Prozesses**
   Wie kann man mit möglichst wenigen Messungen auskommen?

1.3.1 Wahlmöglichkeit 1: Der Modulor von Le Corbusier
Maßsysteme in der Architektur

Allgemeines zum Problem:
Für einen Architekten ist es aus praktischer und auch aus ästhetischer Sicht

sehr wichtig, beim Entwurf eines Gebäudes eine bestimmte Menge von Maßen zu verwenden. Die verwendeten Maße kann man als Zahlenfolge auffassen. Gesetzmäßigkeiten einer solchen Maßfolge könnten sein:

- Für jedes Maß, das verwendet wird, muss auch die Hälfte davon verwendbar sein. Diese Regel könnte zum Beispiel für das Halbieren eines Türrahmens benötigt werden, in den man zwei gleich große Türen einbauen möchte.
- Wenn zwei Maße vorkommen, muss ihre Summe auch vorkommen: Zwei Fenster unterschiedlicher Größe müssen zusammen in einen Fensterrahmen passen.
- Für das Unterteilen einer Fläche, oder eines Raumes muss so weit wie möglich gelten: Für die entstandenen Teile müssen die selben Verhältnisse gelten, wie für die gesamte Fläche. Beim Teilen einer rechteckigen Ebene in Teilrechtecke kann man versuchen, bestimmte Teilverhältnisse zwischen den entstandenen Rechtecken einzuhalten. Dadurch, dass man alle Maße als Folge auffasst, ist das garantiert: aufeinander folgende Zahlen haben ein festes Verhältnis zueinander.
- Die Verwendung von „schönen“ Unterteilungen, wie dem Goldenen Schnitt.

Ein bekanntes Beispiel für eine Maßfolge außerhalb der Architektur sind die Papierformate A0, A1, ... A4, ... In der Architektur sind Maßfolgen der Renaissance-Architekten Palladio und Alberti sehr bekannt.

Wir werden uns vor allem mit den „Modulor-Maßen“ befassen, die der französische Architekt Le Corbusier 1945 - 1946 entwarf. Dieses Proportionssystem basiert auf Längenverhältnissen des menschlichen Körpers und ist ähnlich wie eine Fibonacci-Folge aufgebaut. Es ist eine Kombination von zwei Folgen: Die rote Folge, ausgehend von einer Körpergröße von $1,83$ m und Goldener-Schnitt-Verhältnissen:

$$\ldots 1,829 \text{ m}; 1,130 \text{ m}; 0,689 \text{ m}; 0,432 \text{ m}; \ldots$$

und die blaue Folge, ausgehend von einer Körpergröße mit ausgestrecktem Arm von $2,26$ m und dem Goldenen Schnitt:

$$\ldots 2,260 \text{ m}; 1,397 \text{ m}; 0,863 \text{ m}; 0,534 \text{ m}; \ldots .$$

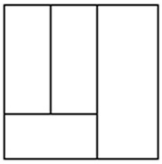
Durch Zusammenfügen der roten und blauen Folge erhält man die gesamte Modulor-Folge:

$$\ldots 0,432 \text{ m}; 0,534 \text{ m}; 0,698 \text{ m}; 0,863 \text{ m}; 1,130 \text{ m}; 1,397 \text{ m}; \\ 1,829 \text{ m}; 2,260 \text{ m}; \ldots$$

Durch Runden erhält man also die Folge:

$$a_1 = 43 \text{ cm (oder mm)}, a_2 = 54, a_3 = 70, a_4 = 86, a_5 = 113, a_6 = 140, \\ a_7 = 183, a_8 = 226, \ldots$$

Abbildung 1.15 illustriert diese Folge noch einmal. Abbildung 1.16 zeigt ein Beispiel für einen Entwurf, in dem alle Rechtecke und Zusammenstellungen von Rechtecken Maße aus der Modulor-Folge haben. Welche Eigenschaften und Möglichkeiten hat dieses Maßsystem?



Erkunden der Problemstellung:

- In der Modulor-Folge gilt:
$$a_i = 2 \cdot a_{i-3}$$
und außerdem
$$a_i = a_{i-2} + a_{i-4}$$
Welches Element der Modulor-Folge muss man zu a_{i-1} addieren um a_i zu erhalten? Welche weiteren Eigenschaften hat die Modulor-Folge? Auf wie viele Arten kann man $a_{10} = 366$ mit den Werten a_1 bis a_9 aufteilen?
- Bei dem Rechtecksystem in Abbildung 1.17 haben aufeinander folgende Längen und Breiten der Rechtecke Werte aus der Modulor-Folge. Führt eine Aufteilung von Rechtecken aus diesem System zu einer Kombination von kleineren Rechtecken aus diesem System, die immer passt? Hat also, falls drei Rechtecke Modulor-Maße haben, das vierte Rechteck ebenfalls Modulor-Maße? Stell Dir das Rechteck-System aus Abbildung 1.17 als Schachtel mit rechteckigen Plättchen darin vor. Mit einigen solcher Schachteln kann ein Architekt nach Herzenslust puzzeln und kombinieren. Es liefert Mondrian-artige Flächenaufteilungen (obwohl Mondrian immer intuitiv ans Werk ging). Lege ein paar „schöne" Rechteck-Kombinationen. Du kannst dafür die Rechtecke mit den Maßen a_1 bis a_9 auf ein Papier zeichnen und ausschneiden.
- Der niederländische Architekt H. van der Laan (ein Priester, der vor allem Kloster und Kirchen entwarf und heute über die „Bossche School" viele Epigonen im Wohnungsbau hat) kritisierte die Modulor-Maße. Er war der Meinung, dass das Modulor-Maßsystem nur für die Aufteilung von zweidimensionalen Flächen geeignet war. Van der Laan entwickelte ein 3D-Maßsystem, das die Gesetzmäßigkeiten $a_i = a_{i-2} + a_{i-3}$ und $a_i = p \cdot a_{i-1}$ erfüllt. Das führte zur „plastischen Zahl" p, vergleichbar mit dem Goldenen Schnitt. Folgere aus den zwei genannten Gesetzen, dass die plastische Zahl etwa $1,325$ ist. Nimm an, dass das kleinste Maß dieses Systems 10 cm ist. Welche weiteren Maße würden sich dann aus den obigen beiden Gesetzmäßigkeiten ableiten lassen? Dieses Maßsystem enthält Maße für Quader (jeder Quader hat drei Maße: Länge, Breite und Höhe). Kannst Du einen Baukasten mit verschiedenen Quadern entwerfen, mit denen ein Architekt spielen könnte? Und dann einen Entwurf für ein Gebäude daraus erstellen?

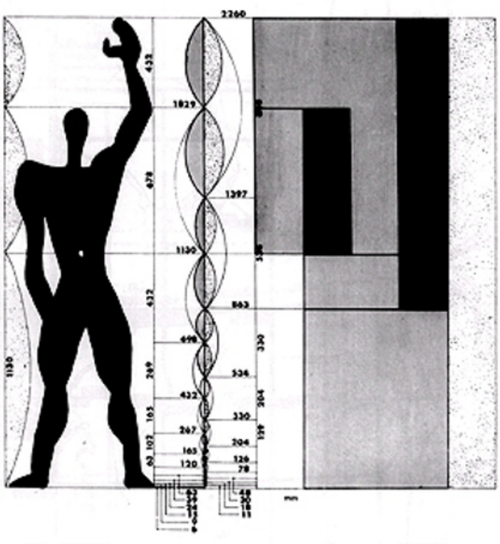


Abb. 1.15: Le Corbusier, Modulor.

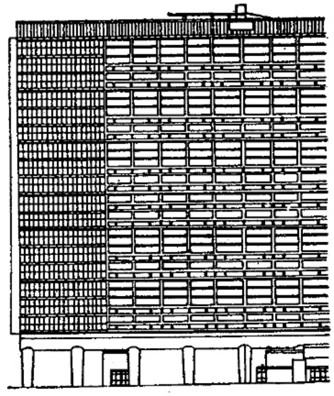


Abb. 1.16: Ein Entwurf mit Hilfe des Modulors.

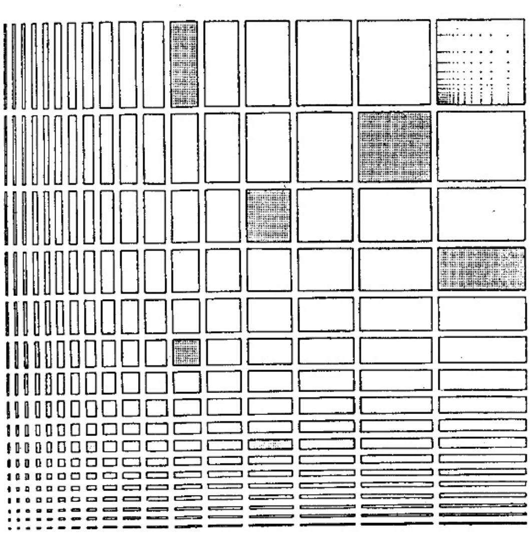


Abb. 1.17: System von Rechtecken im Modulor.

1.3.2 Wahlmöglichkeit 2: Der Goldene Schnitt als Schönheitsideal? Untersuchung ästhetischer Präferenzen in der Malerei

Allgemeines zum Problem:
Zeichne ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 10 cm. Teile das Quadrat (dem Gefühl nach) mit einer vertikalen Linie „so schön wie möglich“ in zwei Teile. Miss die Längen, die durch diese Aufteilung entstanden sind.
Zeichne ein weiteres Quadrat und teile dieses mit einer horizontalen Linie „so schön wie möglich“. Miss auch hier die entstandenen Längen. Experimente dieser Art wurden auf der Suche nach einem Schönheitsideal in der Vergangenheit mit großen Gruppen von Testpersonen gemacht um festzustellen, welches Verhältnis als das schönste empfunden wird.
Außerdem wurden viele Analysen von Bildern vorgenommen. Wenn man Linien im Verhältnis des Goldenen Schnitts durch das Bild zog, erwies sich oft (oder schien sich zu erweisen), dass diese Linien mit wichtigen Linien des Bildes zusammenfielen, oder dass sie durch zentrale Punkte des Bildes verliefen. Zeichne in Abbildung 1.18 einige Linien im Verhältnis des Goldenen Schnitts ein. Auch in dem Bild „Die Nachtwache“ von Rembrandt ist der Goldene Schnitt zu finden. Dazu muss man allerdings das ursprüngliche Format und das gesamte Bild, einschließlich später entfernten Rändern betrachten. Siehe Abbildung 1.19, in der einige wichtige Diagonalen bis an den Rand des ursprünglichen Bildes fortgesetzt, und Goldene Linien senkrecht eingezeichnet sind.

Abb. 1.18: Les Bergers D'Arcadie von Nicolas Poussin.

Abb. 1.19: Analyse von Rembrandts Nachtwache.

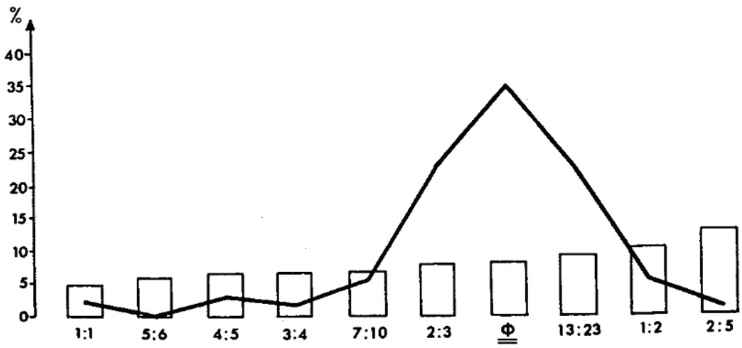


Abb. 1.20: Fechners Graphik

Gibt es ein Schönheitsideal? Eine ideale Proportion? Würde man diese immer wieder antreffen, wenn man Testpersonen verschiedene Formen vorlegt? Haben Künstler den Goldenen Schnitt intuitiv getroffen? Oder haben sie vielleicht bewusst den Goldenen Schnitt verwendet, wie Le Corbusier?

Erkunden der Problemstellung
Albert van der Schoot diskutiert in seinem Buch [10] ausführlich die oben angeführten Fragen. Er zeigt auf überzeugende Weise, dass der Goldene Schnitt als ästhetisches Ideal erst in der Romantik (19. Jahrhundert) entdeckt wurde. Ausgehend vom voreingenommenen Standpunkt der Romantik, wurde der Goldene Schnitt, oft mit fragwürdigen Methoden, auch in Werken der Antike und der Renaissance „entdeckt". Die Erforschung ästhetischer Vorlieben nach 1850 führte zu einer schönen Reihe von bemerkenswerten Entdeckungen und diversen Einwendungen. So untersuchte G.T. Fechner zum Beispiel die Vorliebe für Rechtecke mit bestimmten Seitenverhältnissen. Diese Rechtecke waren aus weißer Pappe, alle mit dem gleichen Flächeninhalt von 64 cm^2. Die Seitenverhältnisse umfassten Quadrate ($1:1$) und auch langgezogene Rechtecke ($2:5$). Er ließ Testpersonen das schönste Rechteck auswählen. Abbildung 1.20 zeigt das Ergebnis seiner Untersuchung. Er schloss daraus, dass das Goldene Rechteck, sowie Rechtecke, die nur wenig davon abweichen, die höchste Wertschätzung genießen. In Kapitel 6 des Buches von van der Schoot [10] sind viele darauf aufbauende Untersuchungen beschrieben. Er bezeichnet diese Untersuchungen am Ende des Kapitels als „Treibsand der empirischen Forschung", der wenig Klarheit verschafft hat.
Wenn Du an den Methoden solcher Forschung interessiert bist, wirst Du an diesem Kapitel Deine Freude haben. Gib eine Zusammenfassung, wie die Forschungsergebnisse von Fechner später bestätigt, widerlegt und ergänzt wurden.
Du kannst auch berühmte Bilder untersuchen: Wo befinden sich für Dich wich-

tige Linien in den Kunstwerken, wo verlaufen Goldene Linien. Vergleiche diese. Zu welcher Schlussfolgerung gelangst Du?

1.3.3 Wahlmöglichkeit 3: Phyllotaxis
Fibonacci-Zahlen und Spiralen in der Natur

Allgemeines zum Problem:
In Sonnenblumen, Gänseblümchen und vielen anderen Blumen und Früchten sind spiralförmige Muster zu finden. Für das menschliche Auge bestehen diese Muster meistens aus zwei Gruppen von Spiralen: Die eine Gruppe läuft mit dem Uhrzeigersinn, die andere gegen den Uhrzeigersinn. Wenn man nachzählt, wie viele Spiralen mit dem Uhrzeigersinn laufen, und wie viel dagegen, kommt man auf Anzahlen wie „21 linksdrehend und 34 rechtsdrehend“, oder „34 und 55“. Das sind aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen, in Ausnahmefällen auch Zahlen aus der „abweichenden Folge“ $4, 7, 11, 18, 29, 47, \ldots$. Bei Tannenzapfen und Ananas findet man Muster mit Gruppen von Spiralen mit 3 aufeinander folgenden Fibonacci-Zahlen, zum Beispiel 5 linksdrehende Spiralen, 8 rechtsdrehende Spiralen, 13 Spiralen, die „schräg nach oben“ verlaufen.
Gibt es eine Erklärung für dieses Wachstum in verschiedenen Spiralen? Warum findet man dort aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen?

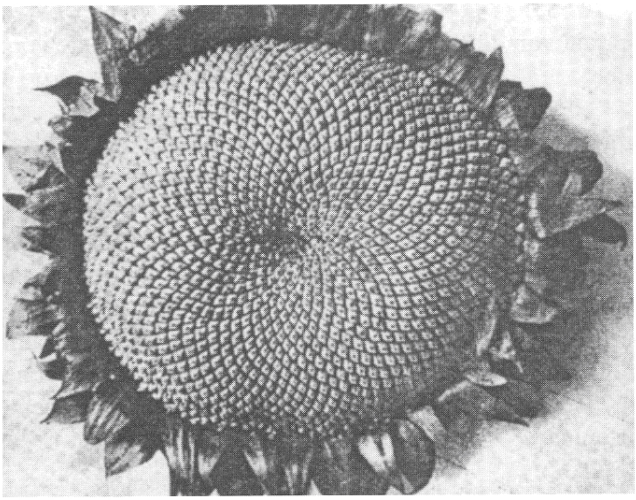


Abb. 1.21: Spiralmuster in Sonnenblumen.

Erkunden der Problemstellung:
Beim Wachstumsvorgang einer Pflanze entstehen an der Spitze der Pflanze oder in der Knospe neue Primordien, aus denen sich z. B. Blätter bilden. Die Brüder Auguste und Louis Bravais entdeckten bereits 1837, dass die neuen

Blattansätze an vorhersagbaren Stellen entstehen. Es stellte sich heraus, dass der Winkel zwischen aufeinander folgenden Blattansätzen im Allgemeinen nahe bei $137,5°$ liegt. Das gilt auch für den Stand aufeinander folgender Blätter an einem Ast und für die Blätter eines Rotkohls. (Schneide einen Rotkohl der Länge nach durch, und sieh Dir die Hälften von innen an). Der Querschnitt einer Selleriepflanze in Abbildung 1.22 illustriert dieses Prinzip sehr schön. Der Winkel zwischen 1 und 2 ist links $137,5° = 0,382\ldots \cdot 360°$ und rechts $222,5° = 0,618\ldots \cdot 360°$. Der Winkel $137,5°$ oder genauer $137°30'28''$ wird auch der Goldene Winkel genannt. Das Entstehen von Spiralen mit Fibonacci-Zahlen hängt mit diesem Winkel zusammen.
Man stelle sich vor, dass der Winkel zwischen aufeinanderfolgenden Blattansätzen nicht genau der Goldene Winkel sondern $8/21 \cdot 360° = 0,38095 \cdot 360°$ ist, dann entsteht ein Muster von 21 kreisförmig angeordneten Strahlen; siehe die mittlere Zeichnung in Abbildung 1.23. In der Natur wäre das keine effiziente Nutzung des Raumes. Wählt man den Winkel etwas größer oder kleiner, entstehen Spiralen.

Abb. 1.22: Querschnitt einer Selleriepflanze.

Mit einem graphischen Taschenrechner (oder einem Grafikprogramm am Computer) kann man solche Zeichnungen machen. Die Option „Polarkoordinaten“ ist sehr praktisch dafür. So genügt die Spirale in der Mitte von Abbildung 1.23 der Gleichung in Polarkoordinaten:

$$r = \Theta/360,$$

dabei ist Θ der Winkel gegenüber der x-Achse und r ist der Abstand zum Zentrum. Das Festlegen des Bildbereichs, etwa über die Option „window“ ist wichtig. Lasse alle Punkte (dots) auf dem Bildschirm abbilden, die x- und y-Achse kannst Du ausblenden. Du kannst bei der rotierenden Bewegung Punkte

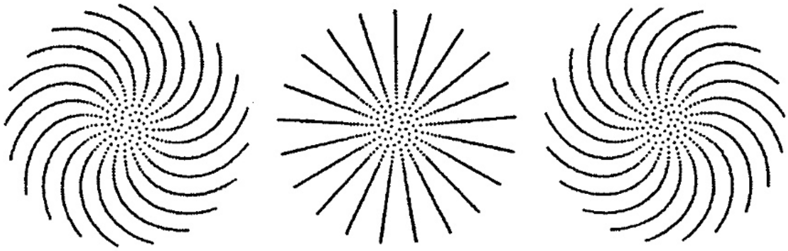


Abb. 1.23: Schematische Darstellung des Wachstums aufeinanderfolgender Primordien im Winkelabstand $D \cdot 360°$; von links nach rechts für $D = 0,381100$; $D = 0,380952$; $D = 0,380800$.

(dots) mit einer Schrittweite von $0,38095 \cdot 360° = 137,14°$ anzeigen lassen. Fertige auf diese Weise das mittlere Bild an.
Vergrößert man nun die Schrittweite ein wenig, erhält man eine linksdrehende Spirale. Bei einer etwas kleineren Schrittweite erhält man eine rechtsdrehende Spirale. Bei einer Schrittweite von $0,382 \cdot 360°$ erhält man das Innere einer Sonnenblume: sich überlagernde rechts- und linksdrehende Spiralen. Jetzt kann das Experiment beginnen. Fertige einige Bilder mit dem Sonnenblumenmotiv an und drucke diese aus. Kannst Du auch dafür sorgen, dass das Wachstum nach außen hin stärker wird? Fertige einige Muster an und schreibe die jeweilige Formel dazu auf. Unter welchen Bedingungen erhält man 5 und 8 Spiralen? Und wann sind es 8 und 13, 13 und 21, usw?

Mit den obigen Untersuchungen, ist der Kern dieses Phänomens jedoch noch nicht erfasst: Warum verwendet die Natur den Goldenen Winkel? Besitzen alle Pflanzen in der DNA einen Code, der den Goldenen Winkel enthält? Das liegt außerhalb des Umfangs dieses Arbeitsauftrags und geht vermutlich über die Möglichkeiten eines Schülers hinaus. Darum erwähnen wir hier einige Forschungsergebnisse.
Die französischen Physiker Yves Couder und Stéphane Douady haben 1992 das „Verhalten“ der Blattansätze beim Knospenwachstum mit toter Materie nachgestellt: Tropfen flüssigen Metalls in einer mit Silikon gefüllten Schale formten die uns bereits bekannten Spiral-Muster.
F. van der Linden, Mathematiker an der TU Eindhoven, simulierte 1991 diese Blumenmuster in einer Computerzeichnung mit einem einfachen Wachstums-Algorithmus. Der zentrale jüngste „Kern“ wurde auf die Stelle mit dem meisten verfügbaren Platz gesetzt. Dabei entstanden das Spiral-Muster und der Goldene Winkel. Ein simpler Verdrängungsmechanismus verwendet als Drehwinkel ein irrationales Vielfaches von 360° und liefert diese schönen Muster. In dem Buch „Op een goudschaal“ von Jelske Kuiper [6] (auch als Zusatzmaterial für Oberstufenschüler gedacht) wird eine mathematische Erklärung geliefert: Es wird hergeleitet, dass der Goldene Schnitt die „irrationalste Zahl“ ist und des-

halb, anders als rationale Zahlen, die ein kreisförmiges Strahlenmuster liefern, am besten für eine optimale Raumverteilung der Kerne sorgt.

1.3.4 Wahlmöglichkeit 4: Nabelschau von Kopf bis Fuß
Ist der Goldene Schnitt ein menschliches Maß?

Allgemeines zum Problem:
1854 veröffentlichte der deutsche Philosoph Adolf Zeising sein Buch „Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers", in dem er den menschlichen Körper bis ins Detail nach dem Goldenen Schnitt proportioniert sieht, siehe Abbildung 1.24. In seinem Buch gibt er der Gesamtlänge des Körpers die Verhältniszahl 1000. Den einzelnen Unterteilungen des Körpers hat er Buchstaben dem Alphabet nach zugeordnet, wobei sich die Vokale „überraschender Weise" an wichtigen Stellen des Körpers befinden. Später sieht Zeising überall im Tierreich und bei den Planeten unseres Sonnensystems den Goldenen Schnitt.
Der Titel dieses Arbeitsauftrags ist einer Kapitelüberschrift des Buches „De ontstelling van Pythagoras" [10] entlehnt. In Abschnitt 5.2 dieses Buches erläutert Albert van der Schoot, dass bei Zeising die normative Vorgabe des Goldenen Schnitts und die Beobachtung desselben völlig durcheinander laufen.
Die „Neue Lehre" hat ihre Spuren in vielen Büchern von Autoren hinterlassen, die kritiklos das gleiche Thema weiterverfolgen. Die Allgegenwärtigkeit des Goldenen Schnitts in der Natur wäre gleichzeitig eine Erklärung für die ästhetischen Vorlieben/Erkennung in der Kunst.
Wie ist es möglich, dass so viele Menschen, von denen viele ein Studium naturwissenschaftlicher Fächer absolviert haben, Behauptungen wie denen von Zeising anhingen?

Erkunden der Problemstellung:
Albert van der Schoot liefert zufrieden stellende, vor allem kulturphilosophische Argumente, die erklären, warum Zeisings Lehre in der Romantik zu einem Kult um den Goldenen Schnitt führte. Trotzdem scheint es doch interessant zu sein, mit Messungen am menschlichen Körper Zeisings Aufteilung desselben nach dem Goldenen Schnitt noch einmal zu überprüfen. Dabei kann man darauf abzielen, seine Erkenntnisse zu widerlegen. Es wäre aber auch denkbar, eine Untersuchung seiner Ergebnisse durchzuführen, mit dem Ziel diese zu untermauern. Wie groß ist der Einfluss einer voreingenommenen Ausgangsposition?

1.3.5 Wahlmöglichkeit 5: Rätseln mit der Fibonacci-Folge
Rätsel aus dem „Vierkant"-Kalender 1999

Allgemeines zum Problem:
In den vorangehenden Kapiteln haben wir gesehen, dass die Fibonacci-Zahlen

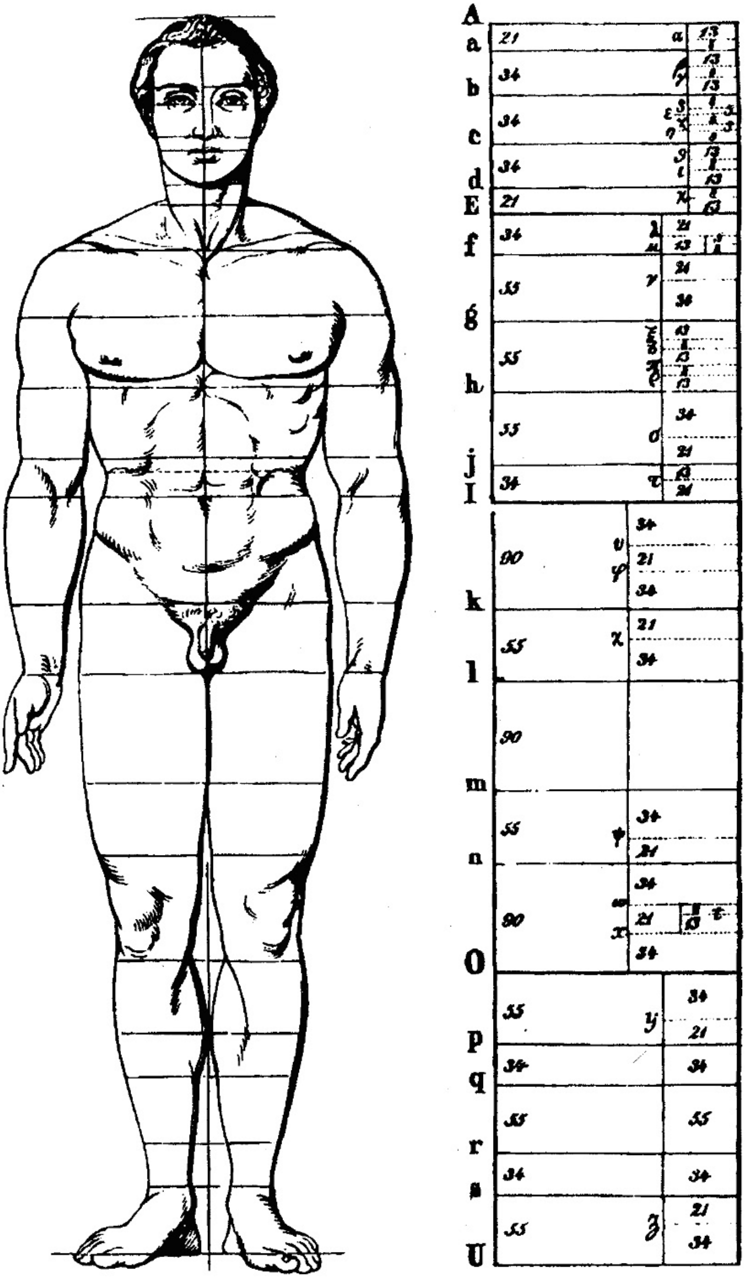


Abb. 1.24: Illustration von Zeising: Die Proportionen beim menschlichen Körper entsprechen dem Goldenen Schnitt.

zahlreiche überraschende Eigenschaften haben. Denen können noch viele weitere hinzugefügt werden. Es gibt sogar eine Zeitschrift „The Fibonacci Quarterly“, in der zahlreiche neue Erkenntnisse präsentiert werden. Welche Eigenschaften gibt es noch, und ist es möglich, selber neue Eigenschaften der Fibonacci-Zahlen zu entdecken?

Abb. 1.25: Titellogo des „Fibonacci Quarterly“.

Erkunden der Problemstellung:
Wenn man aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen addiert, zum Beispiel

$$1+1+2+3+5+8=20=21-1$$

scheint die folgende Gleichung zu gelten:

$$F_1+F_2+F_3+\cdots+F_n=F_{n+2}-1.$$

Das ist auch sehr einfach zu beweisen, unter Benutzung von: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.
Die folgende Seite kommt aus dem Kalender, den die Stiftung „Vierkant“ 1999 herausgab [4]. Finde die geforderten Formeln und beweise sie. Versuche dann einige weitere Formeln selbstständig zu finden. Ein Graphikrechner kann Dir bei der Suche oder zur Unterstützung einer Vermutung behilflich sein. Dazu musst Du Dich allerdings zunächst über die Möglichkeiten eines Graphikrechners für das Arbeiten mit rekursiven Folgen und das Addieren von Folgen informieren. Versuche auch die gefundenen Eigenschaften zu beweisen.

1.3.6 Wahlmöglichkeit 6: Die Goldene Spirale

Berührt oder schneidet diese Spirale den Rand der Goldenen Rechteck-Spirale?

Allgemeines zum Problem:
Wenn man von einem Goldenen Rechteck $ABCD$ ein Quadrat $AEFD$ abtrennt, erhält man ein neues Goldenes Rechteck $BCFE$, von dem man wieder ein Quadrat abtrennen kann, und so weiter.
Die aufeinander folgenden Quadrate bilden eine nach innen laufende Spirale. Durch die Punkte $D, E, G, J, \ldots$ kann man eine Spirale zeichnen, welche die

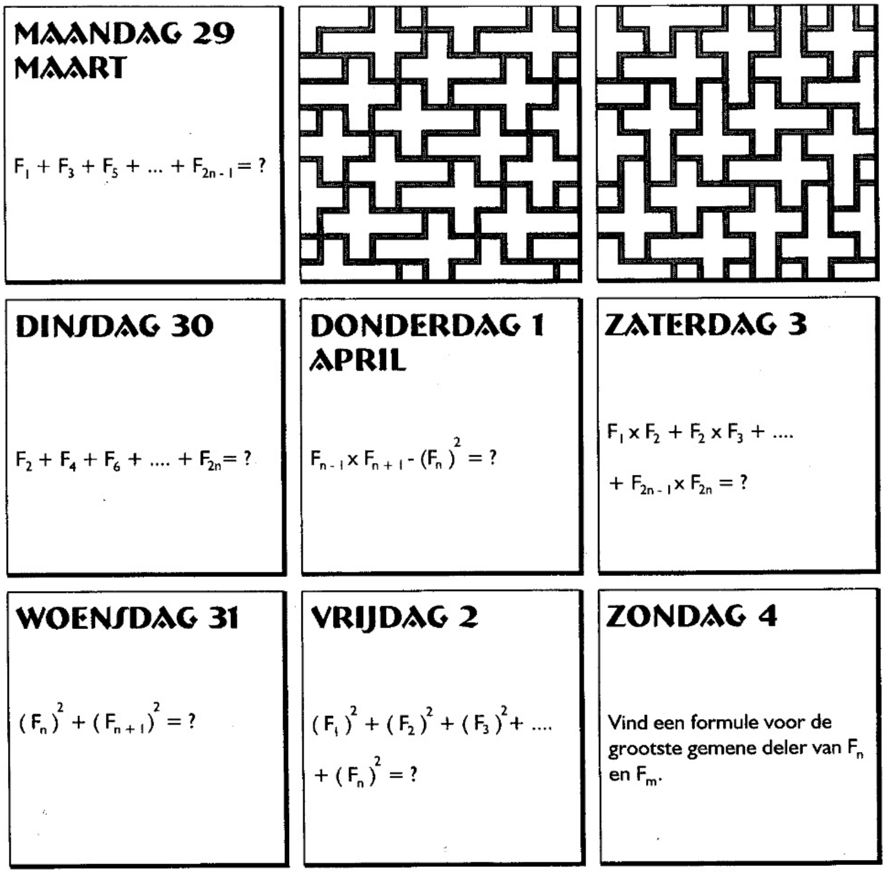


Abb. 1.26: Seite aus dem Vierkant-Kalender 1999.

Goldene Spirale genannt wird. Oft wird diese Spirale, wie in Abbildung 1.26, näherungsweise gezeichnet indem man sie aus Viertelkreisen in den aufeinanderfolgenden Quadraten zusammensetzt. Das Zentrum dieser angenäherten Spirale wechselt bei jedem Schritt. Eine Formel für diese angenäherte Spirale würde in diesem Fall auch aus Formeln für die verschiedenen Teile zusammengesetzt sein.

Die Goldene Spirale ist eine völlig glatte Kurve, die mit einer schönen Formel beschrieben werden kann. Mit welcher Formel? Und berührt die Goldene Spirale dann die Goldenen Rechtecke, oder schneidet sie diese?

Erläuterung der Problemstellung:

Beachte, dass die Diagonalen AC und BF sich senkrecht im Zentrum der Spirale schneiden. Von diesem Zentrum aus, kann man Geraden zu den aufeinan-

der folgenden Punkten $D, E, G, \ldots$ der Spirale zeichnen. Diese Strecken haben dann Längen, die immer um demselben Faktor abnehmen: $1/\varphi = 0,618\ldots$. Man kann die Spirale natürlich auch von innen nach außen betrachten, dann haben diese Strecken vom Zentrum O zu den Punkten $G, E, D, \ldots$ Längen, die sich je um den Streckungsfaktor φ vergrößern.
In Polarkoordinaten (siehe auch 1.3.3) ist die Formel dann:

$$r(\Theta) = r_0 \cdot \varphi^{\Theta/90}$$

wobei Θ der Drehwinkel in Grad und r_0 die Länge der Verbindungsstrecke des Zentrums zu dem Eckpunkt ist, mit dem man beginnt. Die Goldene Spirale gehört zur Menge der logarithmischen Spiralen (wobei exponentielle Spiralen ein besserer Name wäre). Eine allgemeine Formel für logarithmische Spiralen ist: $r(\Theta) = p \cdot g^{\Theta}$, wobei r der Abstand zum Zentrum, p der Startwert, g der Streckungsfaktor und Θ der Drehwinkel ist. Mit der Option „Polarkoordinaten“ am Graphikrechner kann man diverse logarithmische Spiralen darstellen. Diese Spiralen kann man auch gleichwinklige Spiralen nennen, da der Winkel α zwischen dem Fahrstrahl (wie z. B. die Strecken OA, OB, OC in Abb. 1.26) und Tangente der Spirale überall gleich ist.

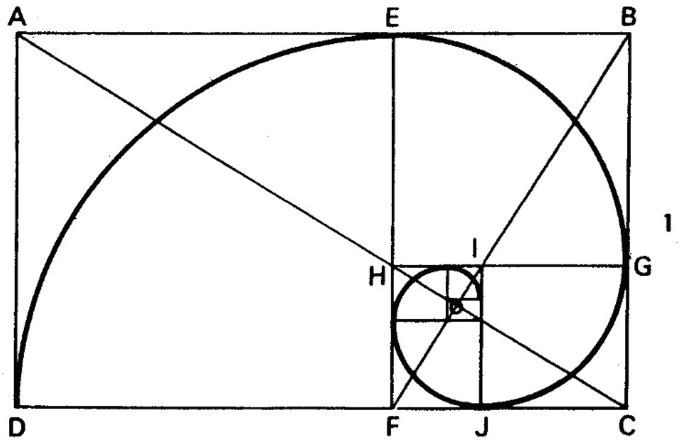


Abb. 1.27: Näherungsweise Konstruktion der Goldenen Spirale.

Das wird auch deutlich, wenn man in Abbildung 1.27 die aufeinander folgenden ähnlichen Dreiecke $OFC, OCB, OBA, \ldots$ betrachtet und darin die Strecken $OJ, OG, OE, \ldots$. Bei der Bestimmung des Winkels α ist Abbildung 1.28 hilfreich: $OP = r(\Theta)$, dr ist die Zunahme von $r(\Theta)$ bei einer Zunahme des Winkels Θ um $d\Theta$. Im Grenzfall gilt, dass $OP = OM = r(\Theta)$ und $MP = r(\Theta) \cdot d\Theta$. Dann gilt im Dreieck QMP, dass $\tan(\alpha) = (r(\Theta) \cdot d\Theta)/dr(\Theta)$, oder $dr(\Theta)/d\Theta = r(\Theta)/\tan(\alpha)$.

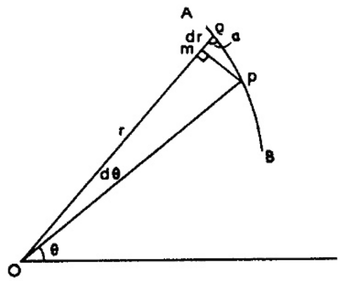


Abb. 1.28: Zur Beziehung zwischen θ und g.

Bestimme nun aus dieser letzten Gleichung zusammen mit den oben genannten Formeln für $r(\Theta)$ Beziehungen zwischen diesem konstanten Winkel (in Grad und/oder Rad), dem Streckungsfaktor g und φ.
Welchen Winkel bilden Tangenten der Goldenen Spirale mit den Strecken, die durch den Mittelpunkt verlaufen? Ist in diesem Winkel auch der Goldene Schnitt versteckt? Und wie sieht es mit der Problemstellung von oben aus?

1.3.7 Wahlmöglichkeit 7: Optimierung eines chemischen Prozesses

Wie kann man mit möglichst wenigen Messungen auskommen?

Allgemeines zum Problem:
Bei einem chemischen Prozess in einer größeren Anlage entsteht bei der Produktion eines Stoffes eine bestimmte Menge umweltverschmutzender Nebenprodukte. Dieser Effekt ist von der Temperatur abhängig. Die Beziehung zwischen Temperatur und Menge der Verunreinigungen ist global bekannt: Es gibt genau ein Extremum, ein Minimum zwischen zwei bekannten Temperaturen a und b, siehe Abbildung 1.29. Nur durch das Experimentieren mit dem chemischen Prozess kann man eine gute Näherung für die Temperatur mit der minimalen Menge an Verunreinigungen finden.

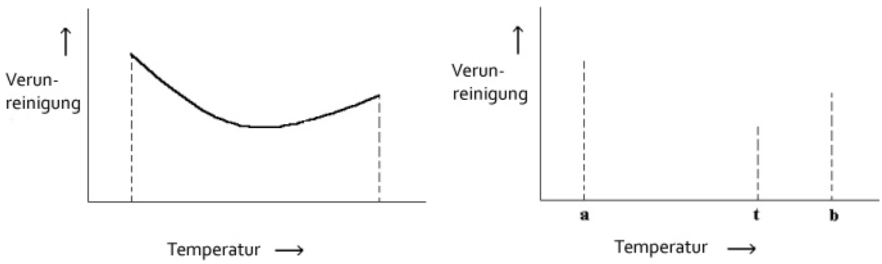


Abb. 1.29: Qualitative Darstellung des Graphen der Funktion, welche den Zusammenhang von Temperatur und Verschmutzung beschreibt, sowie eines Messvorgangs.

Erkunden der Problemstellung: Bezeichne die Funktion, die den Zusammenhang zwischen Temperatur und Stärke der Verunreinigung beschreibt, mit $f(x)$. Nimm an, dass bekannt ist, dass das Minimum zwischen a und b liegt, und dass $f(a)$ und $f(b)$ bekannt sind. Nun erhält man experimentell für die

Temperatur t den Funktionswert $f(t)$, siehe Abbildung 1.29, weiß allerdings noch nicht, ob das Minimum zwischen a und t oder zwischen t und b liegt. Dazu ist noch eine Messung für eine weitere Temperatur u erforderlich.
Sei $u > t$. Wenn $f(u) < f(t)$, dann liegt das Minimum im Intervall (t, b). Falls $f(u) > f(t)$, kann man das Intervall mit dem gesuchten Minimum auf (a, u) reduzieren. Danach wiederholt man dieses Experiment in dem neuen, verkleinerten Intervall, und so weiter. Mit Hilfe von zwei Messungen, durch die das Intervall (a, b) in drei gleiche Teile unterteilt wird kann man dieses Intervall also auf $2/3$ der ursprünglichen Größe reduzieren. Zeige, dass mit einem dritten Experiment entweder ein Drittel oder die Hälfte des ursprünglichen Intervalls (a, b) übrig bleibt. Mit diesem Verfahren ist 50% die bestmögliche Reduktion des Intervalls, die mit drei Messungen garantiert werden kann. Zeige, dass die Wahl aufeinander folgender Temperaturen, die das Intervall (a, b) nach dem Goldenen Schnitt unterteilen, eine konstante Reduktion pro Experiment sichert. Verarbeite diese Idee in einem detaillierten Forschungsplan. Illustriere diesen Plan durch Anwendung dieser Methode auf verschiedene (auch auf weniger regelmäßige) Funktionen mit einem Minimum in (a, b). Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Anzahl nötiger Experimente und einer vorab festgelegten Reduktion auf $p\%$ des ursprünglichen Intervalls? Ist das also der beste Forschungsplan?

1.4 Bildnachweise

Abbildung 15:	Passen en meten, aanbiedingstekst eindexamen Kunstgeschiedenis vwo 1994, Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen, 1993, S. 23
Abbildung 16:	Le Corbusier, The Modulor, Faber and Faber, London,1954
Abbildung 17:	idem, S.89
Abbildung 18:	Blij, F.van der, De meetkunde van de Nachtwacht, in Wiskunst, publicatie bij de Nationale Wiskundedagen, Freudenthal Instituut, Utrecht, 1995, S.27
Abbildung 19:	idem, S.26
Abbildung 20:	Huntley, H.E., The Divine Proportion, Dover, New York, 1970, S.64
Abbildung 21:	Snijders, C.J., De Gulden Snede, De Driehoek, Amsterdam, 1969, S. 53
Abbildung 22:	Stevens, G., Patterns in Nature, Peters, Little, Brown and Company, Boston, 1974, S.157
Abbildung 23:	Schoot, A.van der, De ontstelling van Pythagoras, Kok Agora, Kampen, 1998, S.227
Abbildung 24:	idem, S.183
Abbildung 25:	Göbel, F. en Roelofs, R., Vierkant voor Wiskunde 1999, kalender, Stichting Vierkant, Amsterdam, 1999
Abbildung 26:	Huntley, H.E., The Divine Proportion, Dover, New York, 1970, S.101
Abbildung 27:	idem, S.172

1.5 Websites und Literatur

Neben den folgenden Büchern, findet man auch viele Informationen zum Goldenen Schnitt und zu verwandten Themen im Internet. Auf der Seite der Niederländischen Mathematiklehrer-Vereinigung: http://www.nvvw.nl gibt es einige Links dazu.

Bibliografie

1. Beutelspacher, A., Petri, B.: Der Goldene Schnitt. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim (1989)
2. Blij, F. van der: De meetkunde van de Nachtwacht, in Wiskunst. Veröffentlicht zu den Nationalen Wiskundedagen, Freudenthal Instituut, Utrecht (1995)
3. Coxeter, H.S.H.: Introduction to geometry. John Wiley & Sons, New York (1961)
4. Göbel, F., Roelofs, R.: Vierkant voor Wiskunde 1999, Kalender. Stichting Vierkant, Amsterdam (1999)
5. Huntley, H.E.: The Divine Proportion. Dover, New York (1970)
6. Kuiper, J.: Op een goudschaal. Wolters Noordhoff (1999)
7. Le Corbusier: The Modulor. Faber and Faber, London (1954)
8. Linden, F. van der: De hoek van 137°. NRC, 24. Januar 1991.
9. Poortenaar, J.: De Guldene Snede en Goddelijke Verhouding. Naarden (1941)
10. Schoot, A. van der: De ontstelling van Pythagoras. Kok Agora, Kampen (1998)
11. Snijders, C.J.: De Guldene Snede. De Driehoek, Amsterdam (1969)
12. Stevens, G.: Patterns in Nature. Peters, Little, Brown and Company, Boston (1974)
13. Stevens, G.: The Reasoning Architect. McGraw-Hill Publ. Company, New York (1990)
14. Stewart, I.: Het magisch labyrint. Uitgeverij Nieuwezijds, Amsterdam (1998)
Englische Ausgabe:
Stewart, I.: The Magical Maze: Seeing the World Through Mathematical Eyes. Wiley & Sons (1999)

1.6 Lösungen

1.1

Teile die 100 cm in Stücke mit Längen von (ungefähr) $61,8$ und $38,2$ cm. Dann ist das Verhältnis des kleineren Stücks zum größeren $38,2 : 61,8$ oder $1 : 1,618$ und das Verhältnis des größeren Stücks zur Gesamtlänge $61,8 : 100$ oder $1 : 1,618$. Bei einer solchen Konstruktion zur Annäherung des Goldenen Schnitts erhält man für diesen also die Zahl $1,618$.

1.3

a) φ erfüllt die Gleichung $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, also ist $\varphi^2 = \varphi + 1$.

b) Beginne mit der Gleichung $1 = \varphi^2 - \varphi$. Links und rechts durch φ geteilt liefert diese: $1/\varphi = \varphi - 1$.

c) Aus b) folgt dass $\varphi + 1/\varphi = \varphi + \varphi - 1 = 2 \cdot \varphi - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{5}) - 1 = 1 + \sqrt{5} - 1 = \sqrt{5}$.

d) Aus a) und b) folgt $\varphi^2 + \frac{1}{\varphi^2} = \varphi + 1 + (\varphi - 1)^2 = \varphi + 1 + \varphi^2 - 2 \cdot \varphi + 1 = \varphi^2 - \varphi + 2 = (\varphi^2 - \varphi - 1) + 3 = 3$.

1.4

$AB = a$, $BC = \frac{1}{2} \cdot a$, $AC = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot a$, $AD = AC - DC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot a - \frac{1}{2} \cdot a = a \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1) = \frac{1}{\varphi} \cdot a$, $AS = AD = \frac{1}{\varphi}$, also $\frac{AB}{AS} = \frac{a}{a \cdot 1/\varphi} = \varphi$.

1.5

$AB = a$, $AC = \frac{1}{2} \cdot a$, $CB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot a$, $CD = CB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot a$, $AD = CD - CA = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot a - \frac{1}{2} \cdot a = a \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1) = a \cdot \frac{1}{\varphi}$, $AS_1 = AD = a \cdot \frac{1}{\varphi}$. Also $\frac{AB}{AS_1} = \frac{a}{a \cdot 1/\varphi} = \varphi$.

1.6

$AM = a$, $MB = a$, $MU = \sqrt{5} \cdot a$, $MS_2 = MU = \sqrt{5} \cdot a$, $AS_2 = AM + MS_2 = a + \sqrt{5} \cdot a = a \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} + 1) = a \cdot 2 \cdot \varphi$. Also $\frac{AS_2}{AB} = a \cdot 2 \cdot \frac{\varphi}{2} = \varphi$.

1.7

a) Es ist zu zeigen, dass für jedes n gilt: $\varphi^n = a \cdot \varphi + b$, für gewisse Werte von a und b. Die Gleichung gilt für $n = 0$ (mit $a = 0$ und $b = 1$). Gelte die Gleichung nun für n. Dann ist $\varphi^{n+1} = \varphi \cdot \varphi^n = \varphi \cdot (a \cdot \varphi + b) = a \cdot \varphi^2 + b \cdot \varphi = a \cdot (\varphi + 1) + b \cdot \varphi = (a + b) \cdot \varphi + a$. Diese Gleichung hat die geforderte Form, also ist die Aussage für alle n gezeigt.

b) Aus a) folgt, dass $A(n+1) = A(n) + B(n)$ und $B(n+1) = A(n)$. Diese letzte Gleichung kann man auch als $B(n) = A(n-1)$ schreiben. Einsetzen in die erste Gleichung liefert: $A(n+1) = A(n) + A(n-1)$. Die erste Gleichung kann auch geschrieben werden als: $A(n) = A(n-1) + B(n-1) = B(n) + B(n-1)$. Durch Einsetzen in die zweite Gleichung erhält man $B(n+1) = B(n) + B(n-1)$.

1.9

Im Monat n sind von den $f(n)$ Kaninchenpaaren nur diejenigen geschlechtsreif, die in der vorherigen Generation oder davor geboren wurden. Das sind genau $f(n-1)$. Diese sorgen für den Nachwuchs im Monat $n+1$. Im Monat $n+1$ gibt es also die Paare, die bereits da waren, nämlich $f(n)$, plus die neuen Kaninchenpaare, nämlich $f(n-1)$. Als Gleichung: $f(n+1) = f(n) + f(n-1)$.

1.13

a) Da

$$1 + f + f^2 + f^3 + f^4 + \cdots = 1/(1-f),$$

ist

$$\begin{aligned} f^2 + f^3 + f^4 + \ldots &= 1/(1-f) - (1+f) \\ &= 1/(1-f) - (1+f) \cdot (1-f)/(1-f) \\ &= 1/(1-f) - (1-f^2)/(1-f) = f^2/(1-f). \end{aligned}$$

Die Gleichung $1+f+f^2 = 2 \cdot f^2/(1-f)$ links und rechts mit $(1-f)$ multipliziert liefert: $(1+f+f^2) \cdot (1-f) = 2 \cdot f^2$. Durch Ausmultiplizieren und Vereinfachen erhält man also: $f^3 + 2 \cdot f - 1 = 0$.