

Optimisation géométrique

6.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudie l'optimisation de formes **géométrique** où l'idée principale est de faire varier la position des frontières d'une forme, sans toutefois changer sa topologie qui reste la même que celle de la forme initiale. Par rapport à l'optimisation de formes paramétrique étudiée au chapitre précédent, un certain nombre de difficultés nouvelles se présentent. En particulier, se posent les questions de la **représentation mathématique des formes** et des variations de formes. Par exemple, on peut représenter une forme par la fonction caractéristique de son domaine (qui vaut 1 à l'intérieur et 0 à l'extérieur); mais dans ce cas, comment faire des variations de forme? En effet, une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques n'est pas, en général, une fonction caractéristique. On ne peut donc pas faire de "calcul des variations" dans l'espace des fonctions caractéristiques, et calculer un gradient. Il s'agit d'une difficulté typique de l'optimisation de formes géométrique qu'il est important de contourner pour des raisons théoriques tout autant que numériques.

Pour simplifier la présentation nous utilisons encore le modèle de membrane introduit à la Sous-section 1.2.3 (mais la plupart des résultats s'étendent sans difficulté à des modèles plus complexes, voir la Section 6.5). Au repos, la membrane occupe un domaine de référence Ω dont le bord est divisé en trois parties disjointes (voir la Figure 6.1)

$$\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D,$$

où Γ est la partie **variable** de la frontière, Γ_D est une partie fixe de la frontière sur laquelle la membrane est fixée (condition aux limites de Dirichlet), et Γ_N est aussi une partie fixe de la frontière sur laquelle sont appliqués les efforts $g \in L^2(\Gamma_N)^N$ (condition aux limites de Neumann). Les trois parties de la frontière sont supposées non vides (ou plus précisément de mesures surfaciques non nulles). On suppose que la partie variable Γ de la frontière est libre de

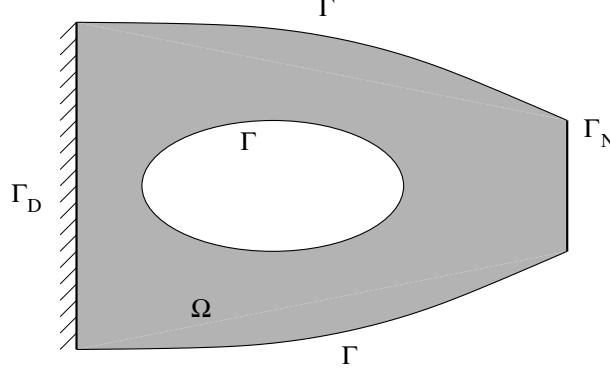


Fig. 6.1. Variation de frontière en optimisation géométrique.

tout effort (condition aux limites de Neumann homogène). Autrement dit, le déplacement vertical u est solution du **modèle de membrane**

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma_N \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (6.1)$$

qui admet bien une unique solution $u \in H^1(\Omega)$. On veut minimiser une fonction coût $J(\Omega)$ qui peut être la compliance

$$J(\Omega) = \int_{\Gamma_N} g u \, dx, \quad (6.2)$$

où un critère de moindres carrés pour obtenir un déplacement cible $u_0(x)$

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} |u - u_0|^2 \, dx. \quad (6.3)$$

Le problème d'optimisation géométrique de forme s'écrit

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega), \quad (6.4)$$

où il reste à définir l'ensemble des formes admissibles $\mathcal{U}_{ad}$. Un exemple “a minima” d'ensemble $\mathcal{U}_{ad}$ est (1.8), mais nous verrons qu'il nous faudra restreindre encore cet ensemble pour obtenir une méthode numérique de calcul de forme optimale.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans la section suivante nous allons très brièvement considérer les questions d'existence de forme optimale. L'idée principale à retenir est que l'existence d'une forme optimale est loin d'être la règle (en l'absence de contraintes géométriques ou de régularité). Cette section permettra aussi d'introduire un cadre de représentation mathématique des

formes qui nous permettra de définir une notion de dérivation par rapport au domaine. Dans la Section 6.3 nous développerons cette théorie de dérivation qui nous permettra d'écrire des conditions d'optimalité à la Section 6.4, et de construire des schémas numériques qui seront présentés dans la Section 6.5.

6.2 Résultats d'existence de solution optimale

Dans cette section à caractère théorique la plupart des résultats seront admis et nous nous contenterons simplement d'évoquer les principales idées de démonstration. Le but n'est pas ici de faire un exposé mathématique rigoureux (rappelons que cet ouvrage est plus consacré à des aspects numériques et applicatifs que d'analyse mathématique), mais plutôt de montrer qu'un certain nombre de difficultés pratiques et numériques (que nous rencontrerons effectivement par la suite) sont en fait des difficultés mathématiques profondes et qu'un minimum de formalisme permet de mieux comprendre la problématique. D'une certaine manière, les théorèmes de cette section sont une explication ou une illustration "théorique" des limitations des méthodes numériques qui seront développées dans la Section 6.5.

Comme pour l'optimisation paramétrique (cf. Chapitre 5) la règle est plutôt **l'absence de forme optimale** que l'existence d'une forme optimale pour (6.4). Nous allons construire un contre-exemple de non-existence de solution optimale très similaire à celui de la Sous-section 5.2.1. Cependant, si l'on rajoute des contraintes supplémentaires de nature géométrique, topologique, ou de régularité, alors il existe une forme optimale dans une classe restreinte de formes admissibles. Tous les résultats qui suivent ne sont valables que pour une condition aux limites de Neumann homogène (bord libre) sur la partie optimisable Γ de la frontière de la forme, comme nous l'avons écrit dans (6.1).

6.2.1 Un contre-exemple de non-existence de forme optimale

Nous décrivons maintenant un contre-exemple de non-existence de forme optimale en modifiant légèrement le modèle afin de simplifier l'analyse. En effet, nous allons supposer que les "trous" ou le vide hors de la forme admissible sont remplis d'un matériau très mou qui "ressemble" à du vide. D'un point de vue mécanique, comme d'un point de vue mathématique, cette approximation est tout à fait loisible et peut être justifiée (du moins dans certains cas, voir [2]). Nous ne le faisons pas ici pour ne pas alourdir la présentation. Cette approximation du vide par un matériau mou n'est valable que pour des conditions aux limites de Neumann homogènes (bords libres) sur les frontières des trous.

Pour simplifier aussi, on se place en dimension d'espace $N = 2$ (mais le raisonnement qui suit s'étend en dimension supérieure). On considère un domaine de travail carré $D =]0, 1[^2$ occupé par un mélange de deux matériaux

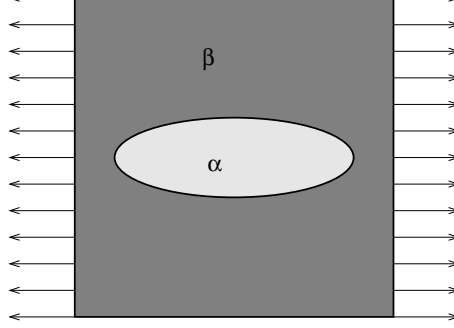


Fig. 6.2. Domaine carré D , occupé par deux matériaux, avec ses conditions aux limites.

homogènes isotropes caractérisés par un coefficient d'élasticité β pour le matériau "solide", et α pour le matériau "mou" avec $\beta > \alpha > 0$ (et même $\beta \gg \alpha$ si le matériau mou est presque équivalent à du vide). Le matériau solide correspond à la forme Ω et le matériau mou aux trous $D \setminus \Omega$ (voir la Figure 6.2). On désigne par $\chi(x)$ la fonction caractéristique du matériau mou α , et on définit le coefficient d'élasticité global de la membrane dans D

$$a_\chi = \alpha\chi + \beta(1 - \chi).$$

Remarque 6.1. On peut aussi interpréter ce mélange de deux matériaux comme une membrane d'épaisseur variable $h(x)$ qui ne peut prendre **que deux** valeurs β et α . Autrement dit, il existe une fonction caractéristique $\chi(x)$ telle que $h(x) = a_\chi(x)$. Ce problème est différent de celui étudié au Chapitre 5 car on y autorisait toutes les valeurs dans l'intervalle $[h_{min}, h_{max}]$ pour l'épaisseur. Le problème du Chapitre 5 était un problème d'optimisation continue, alors qu'ici le problème est discret (ou de nature combinatoire) puisqu'on fait varier la variable d'optimisation χ dans un ensemble de valeurs discrètes. •

On soumet cette membrane à un chargement de contrainte uniforme sur le bord, égale à e_1 , où (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. En l'absence de force volumique, le déplacement de la membrane est solution de l'équation d'état

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a_\chi \nabla u_\chi) = 0 & \text{dans } D \\ a_\chi \nabla u_\chi \cdot n = e_1 \cdot n & \text{sur } \partial D. \end{cases} \quad (6.5)$$

Comme les forces de bord sont compatibles avec l'absence de forces de volumes, c'est-à-dire que

$$\int_{\partial D} e_1 \cdot n \, ds = 0,$$

(6.5) admet une unique solution u_χ dans $H^1(D)/\mathbb{R}$ (c'est-à-dire définie à une constante additive près). Comme fonction objectif nous choisissons la compliance

$$J(\chi) = \int_{\partial D} (e_1 \cdot n) u_\chi ds. \quad (6.6)$$

On fixe le poids total de la membrane, ce qui revient à fixer le volume occupé par la phase α . Par contre, on ne tient compte d'aucune contrainte géométrique ou de régularité sur le mélange des deux matériaux, c'est-à-dire sur la fonction χ . Par conséquent, l'espace des formes admissibles est

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \chi \in L^\infty(D; \{0, 1\}) \text{ tel que } \frac{1}{|D|} \int_D \chi(x) dx = \theta \right\}, \quad (6.7)$$

où $0 < \theta < 1$ est la proportion fixée de α . Le problème d'optimisation de formes est donc

$$\inf_{\chi \in \mathcal{U}_{ad}} J(\chi). \quad (6.8)$$

Physiquement, il est clair que la membrane est la plus solide possible (i.e. la compliance est la plus petite possible) si D n'est rempli que de matériau solide β . Cependant, à cause de la contrainte de volume dans (6.7) il faut aussi utiliser le matériau mou α (moins solide). Il y a donc un compromis à trouver entre ces deux tendances contradictoires. Le résultat de non existence est le suivant.

Proposition 6.2. *Il n'existe pas de point de minimum ou de solution optimale de (6.8) dans l'espace $\mathcal{U}_{ad}$.*

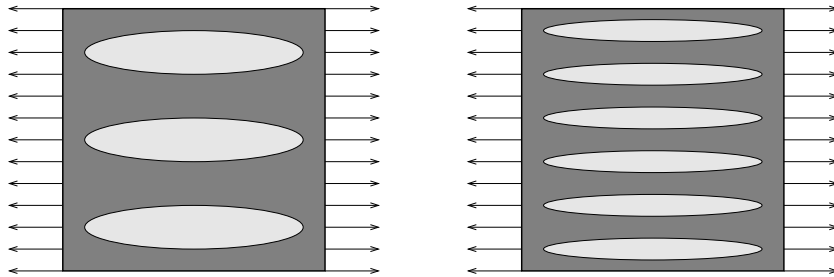


Fig. 6.3. À volume constant, plus de petits trous sont meilleurs que quelques gros trous : la forme de droite est meilleure que celle de gauche.

Expliquons le principe mécanique de ce résultat de non-existence (voir la Figure 6.3). Puisque l'on tire uniformément sur les cotés du domaine D , les contraintes auront tendance à être alignées horizontalement. Il est donc avantageux de créer des trous (ou inclusions de matériau faible) qui seront allongés dans la direction horizontale de manière à ne pas trop perturber ce champ de contraintes. À volume constant il est clair qu'il vaut mieux avoir plus de trous d'épaisseur plus fine que quelques gros trous. En effet, plus les trous sont peu épais, plus les lignes de contraintes peuvent être horizontales et à peine

déformées par la présence des trous. En fait, il n'y a pas de limite à cette amélioration par raffinement de l'épaisseur des trous et par augmentation de leur nombre. Toute forme admissible peut-être améliorée par ce moyen et il n'y a donc pas de solution optimale. Autrement dit, les suites minimisantes de (6.8) correspondent à un mélange de plus en plus fin (ou microscopique) des deux matériaux et elles ne convergent pas vers une forme classique (i.e. une fonction caractéristique). En fait, le point de minimum est atteint par un matériau composite obtenu par mélange microscopique de α et β en proportions respectives θ et $(1 - \theta)$ (nous reviendrons sur ce point de vue "homogénéisé" dans le Chapitre 7).

Démonstration de la Proposition 6.2. Elle est un peu technique et très semblable à la démonstration de la Proposition 5.5, mais elle est encore une fois caractéristique du phénomène de non-existence de solutions et à la base de l'idée de la méthode d'homogénéisation du Chapitre 7. Par le principe de minimisation de l'énergie complémentaire (cf. Théorème 2.22), la compliance s'écrit

$$\int_{\partial D} (e_1 \cdot n) u_\chi ds = \min_{\sigma \in \mathcal{A}} \int_D a_\chi^{-1} \sigma \cdot \sigma dx, \quad (6.9)$$

où l'espace affine $\mathcal{A}$ est défini par

$$\mathcal{A} = \left\{ \sigma \in L^2(D)^N \text{ tel que } \begin{array}{l} \operatorname{div} \sigma = 0 \text{ dans } D \\ \sigma \cdot n = e_1 \cdot n \text{ sur } \partial D \end{array} \right\}.$$

Le minimum dans (6.9) est évidemment atteint par la contrainte $\sigma_\chi = a_\chi \nabla u_\chi$ où u_χ est la solution de (6.5). Le problème d'optimisation de formes (6.8) peut donc se réécrire

$$\inf_{\chi \in \mathcal{U}_{ad}} \inf_{\sigma \in \mathcal{A}} \int_D a_\chi^{-1} \sigma \cdot \sigma dx, \quad (6.10)$$

et l'ordre des deux minimisations peut être inversé. Pour toute fonction $\chi \in \mathcal{U}_{ad}$, on a les moyennes suivantes

$$\theta = \frac{1}{|D|} \int_D \chi(x) dx \quad \text{et} \quad a_0 = \frac{1}{|D|} \int_D a_\chi(x) dx = \alpha\theta + \beta(1 - \theta).$$

Par ailleurs, on remarque que la condition aux limites constante e_1 est aussi la moyenne de n'importe quel σ dans $\mathcal{A}$, c'est-à-dire que

$$e_1 = \frac{1}{|D|} \int_D \sigma(x) dx.$$

En effet, pour tout $\sigma \in \mathcal{A}$, puisque $(\sigma - e_1) \cdot n = 0$ sur ∂D , il n'y a pas de terme de bord dans l'intégration par parties suivante

$$\int_D (\sigma(x) - e_1) \cdot e_i dx = - \int_D \operatorname{div} (\sigma(x) - e_1) x_i dx = 0,$$

car $\nabla x_i = e_i$ où x_i est la i -ème composante de x . En vertu du Lemme 5.8, $\forall x \in D$, on a

$$a_\chi(x)^{-1}|\sigma(x)|^2 \geq a_0^{-1}|e_1|^2 - \frac{(a_\chi(x) - a_0)}{a_0^2}|e_1|^2 + \frac{2}{a_0}e_1 \cdot (\sigma(x) - e_1). \quad (6.11)$$

En intégrant sur D , les deux derniers termes de (6.11) disparaissent puisqu'ils sont de moyenne nulle. Donc

$$\int_D a_\chi^{-1} \sigma \cdot \sigma \, dx \geq (\alpha\theta + \beta(1-\theta))^{-1}|D|, \quad (6.12)$$

qui est donc une borne inférieure pour (6.10) (indépendante de χ). Nous examinons maintenant si cette borne inférieure est atteinte. Dans sa dérivation, la seule inégalité provient de (6.11) pour lequel nous connaissons le reste exact donné par le Lemme 5.8. Supposons qu'il existe $\chi \in \mathcal{U}_{ad}$, et donc $\sigma_\chi \in \mathcal{A}$, tels que

$$J(\chi) = \int_D a_\chi^{-1} \sigma_\chi \cdot \sigma_\chi \, dx = (\alpha\theta + \beta(1-\theta))^{-1}|D|.$$

De (6.11) et (5.20), on déduit en cas d'égalité que, pour tout $x \in D$,

$$a_\chi(x)^{-1} \left| \sigma_\chi(x) - \frac{a_\chi(x)}{a_0} e_1 \right|^2 = 0,$$

ce qui implique

$$\sigma_\chi(x) = \frac{a_\chi(x)}{a_0} e_1 \text{ dans } D.$$

Or χ n'est pas une fonction constante, mais prend les deux valeurs 0 et 1. Par conséquent, σ_χ prend aussi exactement deux valeurs, $(\alpha/a_0)e_1$ et $(\beta/a_0)e_1$, qui sont toutes deux différentes de la condition aux limites e_1 , puisque $\alpha < a_0 = \alpha\theta + \beta(1-\theta) < \beta$. Donc, σ_χ ne peut pas satisfaire les conditions aux limites. Par conséquent, $J(\chi)$ est toujours strictement plus grand que la borne inférieure (6.12).

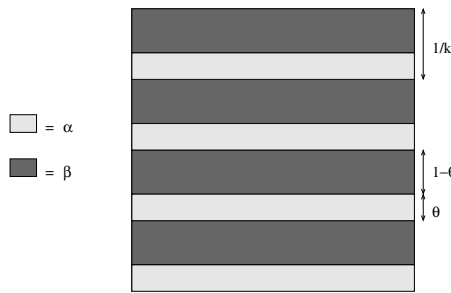


Fig. 6.4. Suite minimisante de mélanges dans le domaine D .

Pour terminer la démonstration, il reste à montrer que la borne inférieure (6.12) est précisément l'infimum de $J(\chi)$. Pour cela, on construit une suite

minimisante $(\chi_k)_{k \geq 1}$ de (6.8). On introduit une fonction 1-périodique $\chi(x_2)$ définie par

$$\chi(x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x_2 < \theta \\ 0 & \text{si } \theta \leq x_2 < 1 \end{cases},$$

dont la moyenne est précisément θ . On pose alors

$$\chi_k(x) = \chi(kx_2) \in \mathcal{U}_{ad},$$

qui appartient bien à $\mathcal{U}_{ad}$ et qui conduit au mélange représenté à la Figure 6.4. On utilise alors le Théorème 7.5 d'homogénéisation et le Lemme 7.9 sur les matériaux composites, dits laminés simples. Ces résultats affirment que la suite minimisante a_{χ_k} converge "au sens de l'homogénéisation" vers un tenseur effectif anisotrope

$$A^* = \begin{pmatrix} \alpha\theta + \beta(1-\theta) & 0 \\ 0 & (\alpha^{-1}\theta + \beta^{-1}(1-\theta))^{-1} \end{pmatrix},$$

ce qui implique, en particulier, que la suite des compliances pour χ_k converge vers la compliance homogénéisée pour A^*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\partial D} e_1 \cdot n u_k ds = \int_{\partial D} e_1 \cdot n u_* ds,$$

où u_* est la solution du **problème homogénéisé**

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^* \nabla u_*) = 0 & \text{dans } D \\ A^* \nabla u_* \cdot n = e_1 \cdot n & \text{sur } \partial D. \end{cases}$$

Comme A^* est constant, il est facile de vérifier que le vecteur des contraintes homogénéisées est constant $\sigma_* = A^* \nabla u_* = e_1$, et donc que la compliance homogénéisée vaut

$$\int_{\partial D} e_1 \cdot n u_* ds = (\alpha\theta + \beta(1-\theta))^{-1} |D|,$$

ce qui prouve

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} J(\chi_k) = (\alpha\theta + \beta(1-\theta))^{-1} |D| = \inf_{\chi \in \mathcal{U}_{ad}} J(\chi),$$

et le minimum n'est donc pas atteint. $\square$

6.2.2 Existence sous une condition géométrique

On reprend le modèle de membrane élastique décrit dans l'introduction de ce chapitre, pour lequel l'optimisation de forme s'écrit

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega).$$

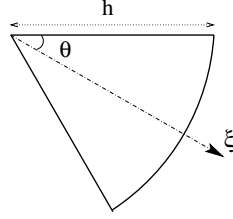


Fig. 6.5. Cône d'angle θ , de hauteur h et de direction ξ .

Par rapport à la définition minimale (1.8) de $\mathcal{U}_{ad}$, nous allons introduire une **contrainte supplémentaire de nature géométrique** qui est essentielle pour obtenir un résultat d'existence d'une forme optimale (nous reprenons ici une idée de D. Chenaïs [43]). Pour cela nous introduisons quelques notations.

Définition 6.3. Soit un angle $\theta \in]0, \pi/2[$, une hauteur $h > 0$, et une direction ξ , c'est-à-dire un vecteur unité de $\mathbb{R}^N$. On appelle cône d'angle θ , de hauteur h et de direction ξ l'ouvert $C(\theta, h, \xi)$ défini par (voir la Figure 6.5)

$$C(\theta, h, \xi) = \{x \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } x \cdot \xi > \|x\| \cos \theta \text{ et } \|x\| < h\}.$$

Pour $y \in \mathbb{R}^N$, on appelle cône de sommet y l'ouvert, noté $y + C(\theta, h, \xi)$, défini par

$$y + C(\theta, h, \xi) = \{y + x \text{ tel que } x \in C(\theta, h, \xi)\}.$$

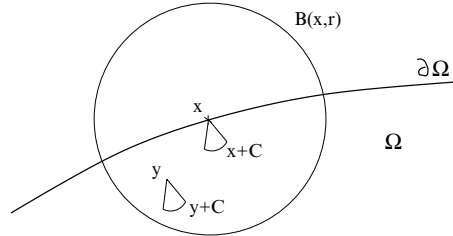


Fig. 6.6. Propriété du cône uniforme.

Définition 6.4. Soit un angle $\theta \in]0, \pi/2[$, une hauteur $h > 0$, et un rayon $r > 0$. Un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ est dit “**vérifier la propriété du cône uniforme**” si pour tout point de son bord $x \in \partial\Omega$ il existe un vecteur unité ξ_x tel que, pour tout point y dans l'intersection de Ω et d'une boule de centre x et de rayon r , le cône de sommet y , d'angle θ , de hauteur h et de direction ξ_x est inclus dans Ω , c'est-à-dire (voir la Figure 6.6)

$$\forall y \in B(x, r) \cap \Omega, \quad y + C(\theta, h, \xi_x) \subset \Omega.$$

Remarque 6.5. Il est essentiel de voir que dans la Définition 6.4 l'angle et la taille du cône sont les mêmes pour tout point du bord. Cela implique, par exemple, que différents "morceaux" du bord ne peuvent s'approcher à moins d'une distance de l'ordre de $r + h$, ou que le bord ne peut avoir des "coins" d'angle plus petit que θ . En d'autres mots, la frontière de Ω ne peut pas trop "osciller" et il ne peut y avoir de "trous" dans Ω de taille plus petite que r . La propriété du cône uniforme impose donc certaines conditions géométriques mais n'implique pas nécessairement que l'ouvert qui la vérifie est régulier (c'est-à-dire que son bord est une surface régulière). Par exemple, Ω peut vérifier la propriété du cône uniforme et avoir des "coins". •

Nous pouvons maintenant définir un ensemble de formes admissibles. On se fixe un domaine de travail D , que l'on suppose être un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, dans lequel on va chercher la forme optimale. On se donne aussi des paramètres $\theta \in]0, \pi/2[$, $h > 0$, et $r > 0$ qui permettent de définir l'ensemble d'ouverts

$$\mathcal{C}(\theta, h, r) = \left\{ \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ qui vérifie la propriété du cône uniforme pour } (\theta, h, r) \right\}.$$

On pose alors

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \Omega \subset D \text{ tel que } \Omega \in \mathcal{C}(\theta, h, r), \Gamma_D \cup \Gamma_N \subset \partial\Omega \text{ et } \int_{\Omega} dx = V_0 \right\}, \quad (6.13)$$

où V_0 est un volume imposé (compatible avec les données et notamment le volume de D). Nous pouvons alors énoncer un résultat d'existence de forme optimale.

Théorème 6.6. *On suppose que $\mathcal{U}_{ad}$ est défini par (6.13). Pour la fonction objectif (6.2) ou (6.3), le problème d'optimisation de formes*

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega), \quad (6.14)$$

admet au moins un point de minimum (ou forme optimale).

La démonstration de ce théorème est due à D. Chenais [43]. Elle dépasse le cadre de ce cours et nous nous contentons d'en exposer les enjeux principaux. Tout d'abord, rappelons que les fonctions objectifs (6.2) et (6.3) ne sont pas convexes, ne serait-ce que parce qu'il n'existe pas de notion de combinaison convexe de domaines Ω . Par conséquent, la démonstration du Théorème 6.6 repose sur un autre argument, dit de **compacité**. En premier lieu, on introduit une topologie sur l'ensemble des formes admissibles $\mathcal{U}_{ad}$: on dit qu'une suite d'ouverts $(\Omega_n)_{n \geq 1}$ converge vers un ensemble limite Ω si la suite des fonctions caractéristiques $(\chi_{\Omega_n})_{n \geq 1}$ converge vers la fonction caractéristique χ_{Ω} pour la norme de $L^2(\mathbb{R}^N)$ (par définition, la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable ω prend la valeur 1 aux points $x \in \omega$ et 0 ailleurs). On montre

assez facilement que la fonction J est continue pour cette topologie. Le point difficile est l'argument de compacité qui montre que l'on peut extraire de toute suite minimisante de (6.14) une sous-suite qui converge pour cette topologie. On conclut alors aisément que la limite est un point de minimum de J sur $\mathcal{U}_{ad}$. Il faut bien avoir à l'esprit que cette "compacité" est directement liée à la propriété du "cône uniforme" que nous avons mise dans la définition de $\mathcal{U}_{ad}$. Plus précisément, cette propriété empêche les suites $(\Omega_n)_{n \geq 1}$ d'avoir des frontières "oscillantes" ou de développer de plus en plus de "trous". Sans cette restriction de nature géométrique, le Théorème 6.6 est faux en général.

Remarque 6.7. Bien que le résultat d'existence du Théorème 6.6 soit très satisfaisant d'un point de vue théorique, il est inutilisable d'un point de vue pratique ou numérique. En effet, la propriété du "cône uniforme" est trop difficile à mettre en oeuvre numériquement comme une contrainte que doivent satisfaire les formes admissibles. •

Remarque 6.8. Le Théorème 6.6 s'étend à d'autres modèles que celui de la membrane élastique. En particulier, il est aussi valide pour le système de l'élasticité linéarisée. •

6.2.3 Existence sous une condition topologique

On reprend le problème d'optimisation de formes (6.14) pour le modèle de membrane élastique mais avec une nouvelle définition de l'ensemble des formes admissibles $\mathcal{U}_{ad}$. Par rapport à la définition minimale (1.8), nous introduisons une **contrainte supplémentaire de nature topologique** qui permet en deux dimensions d'espace d'obtenir un résultat d'existence d'une forme optimale (malheureusement il n'y a pas de résultat équivalent en dimension supérieure). Il s'agit d'une idée de V. Sverak [174] qui a été étendue au cas de l'élasticité par A. Chambolle [40].

Nous nous limitons donc à la dimension deux d'espace. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine de travail borné. Pour tout ouvert $\Omega \subset D$ on définit le nombre de composantes connexes de son complémentaire dans D que l'on note

$$\#cc(D \setminus \Omega).$$

En particulier, ce nombre est un majorant du nombre de trous dans Ω (il peut en différer car il peut y avoir des parties de $D \setminus \Omega$ "à l'extérieur" de Ω). On se fixe un entier $k \in \mathbb{N}$ et on définit la classe d'ouverts de D

$$\mathcal{C}(D, k) = \{\Omega \subset D \text{ tel que } \#cc(D \setminus \Omega) \leq k\}. \quad (6.15)$$

On pose alors

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \Omega \in \mathcal{C}(D, k), \Gamma_D \cup \Gamma_N \subset \partial\Omega \text{ et } \int_{\Omega} dx = V_0 \right\}, \quad (6.16)$$

où V_0 est un volume imposé (compatible avec les données et notamment le volume de D). Nous pouvons alors énoncer un résultat d'existence de forme optimale.

Théorème 6.9. *On suppose que $\mathcal{U}_{ad}$ est défini par (6.16). Pour la fonction objectif (6.2) ou (6.3), le problème d'optimisation de formes*

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega),$$

admet au moins un point de minimum (ou forme optimale).

La démonstration de ce théorème est due à V. Sverak [174] pour le modèle de membrane et A. Chambolle [40] pour celui de l'élasticité. Elle dépasse très largement le cadre de ce cours et est restreinte à la dimension deux d'espace (non seulement à cause de la définition de la topologie mais aussi à cause des outils utilisés, principalement la théorie du potentiel et des quasi-ouverts). Comme pour le Théorème 6.6, l'absence de convexité du problème conduit à l'utilisation d'un argument de **compacité**.

Dans la définition (6.15) il est essentiel de comprendre que le nombre de trous des formes admissibles est **uniformément borné** par k . En particulier, cette borne de nature topologique empêche l'apparition de suites minimisantes comme celles construites pour le contre-exemple de la Sous-section 6.2.1 (où le nombre de trous croît indéfiniment).

Remarque 6.10. Comme pour le Théorème 6.6, le Théorème 6.9 donne un résultat d'existence satisfaisant d'un point de vue théorique, mais difficilement utilisable d'un point de vue pratique ou numérique. En effet, on ne sait pas imposer numériquement la borne topologique dans (6.15). Néanmoins nous verrons qu'un certain nombre de résultats numériques confortent, ou du moins illustrent parfaitement, ce théorème. Plus précisément, pour différentes valeurs de k (ou du nombre de trous de la forme optimale) nous obtiendrons différentes formes optimales. •

6.2.4 Existence sous une condition de régularité

On propose un autre cadre théorique (dû principalement à F. Murat et J. Simon [132], [133]) pour démontrer un résultat d'existence de forme optimale. Nous reprendrons ce cadre plus loin pour établir une notion de dérivation par rapport au domaine.

On se donne un **domaine de référence** Ω_0 , que l'on suppose être un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Comme dans l'introduction de ce chapitre on suppose que le bord de Ω_0 est divisé en trois parties disjointes (non vides)

$$\partial\Omega_0 = \Gamma_0 \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D,$$

où Γ_D et Γ_N sont fixes et seule Γ_0 est variable.

L'idée principale est de définir un ensemble de formes admissibles $\mathcal{U}_{ad}$ dont tout élément Ω s'obtient par application d'un difféomorphisme régulier au domaine de référence Ω_0 . On restreint ainsi très significativement l'espace des formes admissibles (par rapport à la situation des Sous-sections 6.2.2 et 6.2.3), mais on y gagne une représentation très simple des formes en termes de difféomorphismes.

Rappelons tout d'abord que $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ est l'espace des fonctions lipschitziennes ϕ de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ telles que ϕ et $\nabla\phi$ sont uniformément bornés sur $\mathbb{R}^N$ (cf. les définitions (2.6) et (5.22)). On le munit de la norme

$$\|\phi\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (|\phi(x)|_{\mathbb{R}^N} + |\nabla\phi(x)|_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N}),$$

qui en fait un espace de Banach (on désigne par $|\cdot|_{\mathbb{R}^N}$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^N$ et par $|\cdot|_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N}$ une norme matricielle sur $\mathbb{R}^N$). On définit alors un espace de **difféomorphismes** (ou bijections dérivables d'inverses dérivables) sur $\mathbb{R}^N$ par

$$\mathcal{T} = \{T \text{ tel que } (T - \text{Id}) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N), (T^{-1} - \text{Id}) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)\}. \quad (6.17)$$

On peut voir en quelque sorte les difféomorphismes de $\mathcal{T}$ comme des perturbations de l'identité Id (autrement dit, l'application $x \rightarrow x$). On peut alors introduire un espace de **formes admissibles obtenues par déformation de Ω_0**

$$\mathcal{C}(\Omega_0) = \{\Omega \text{ tel qu'il existe } T \in \mathcal{T}, \Omega = T(\Omega_0)\}. \quad (6.18)$$

Chaque forme admissible $\Omega \in \mathcal{C}(\Omega_0)$ est donc représentée par un difféomorphisme $T \in \mathcal{T}$. Cette représentation n'est pas unique car il se peut que deux difféomorphismes $T_1 \neq T_2 \in \mathcal{T}$ conduisent au même ouvert $\Omega = T_1(\Omega_0) = T_2(\Omega_0)$. Comme les fonctions de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ sont continues (voir la Remarque 2.13), les applications T de $\mathcal{T}$ sont aussi des **homéomorphismes** (ou bijections continues d'inverses continus), ce qui entraîne qu'ils préservent la topologie des domaines auxquels ils s'appliquent. Ainsi, toutes les formes admissibles de $\mathcal{C}(\Omega_0)$ ont la **même topologie** que Ω_0 : cette approche ne permet donc pas d'optimiser la topologie (nombre de trous ou de composantes connexes du bord). On peut introduire une pseudo-distance sur $\mathcal{C}(\Omega_0)$ (elle ne vérifie qu'une version affaiblie de l'inégalité triangulaire)

$$d(\Omega_1, \Omega_2) = \inf_{T \in \mathcal{T} | T(\Omega_1) = \Omega_2} (\|T - \text{Id}\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)} + \|T^{-1} - \text{Id}\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)}). \quad (6.19)$$

On peut maintenant définir une **condition de régularité uniforme** des formes admissibles en se limitant à des ouverts Ω **proches** de Ω_0 au sens de cette pseudo-distance d . Plus précisément, pour $R > 0$ on pose

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \Omega \in \mathcal{C}(\Omega_0) \text{ tel que } d(\Omega, \Omega_0) \leq R, \Gamma_D \cup \Gamma_N \subset \partial\Omega \text{ et } \int_{\Omega} dx = V_0 \right\}. \quad (6.20)$$

Évidemment, comme dans la Sous-section 5.2.3 le choix de la constante de régularité R est arbitraire de même que le choix du domaine de référence Ω_0 .

Théorème 6.11. *On suppose que $\mathcal{U}_{ad}$ est défini par (6.20). Pour les fonctions objectifs (6.2) ou (6.3), le problème d'optimisation de formes*

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega), \quad (6.21)$$

admet au moins un point de minimum (ou forme optimale).

La démonstration de ce théorème (qui dépasse, encore une fois, le cadre de ce cours) est due à F. Murat et J. Simon [133]. Elle repose, comme précédemment, sur un argument de compacité. L'idée essentielle est que les formes admissibles de $\mathcal{U}_{ad}$ ne peuvent pas changer de topologie, et que la borne de régularité uniforme R empêche les frontières de la forme Ω d'être trop oscillantes (sinon la pente des vecteurs tangents, mesurée grosso modo par $\|T - \text{Id}\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)} + \|T^{-1} - \text{Id}\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)}$, serait trop grande).

Remarque 6.12. Comme pour les théorèmes précédents, le Théorème 6.11 donne un résultat d'existence satisfaisant d'un point de vue théorique, mais inutilisable d'un point de vue pratique ou numérique. En effet, il est très difficile de vérifier numériquement la contrainte de régularité que doivent satisfaire les formes admissibles. Cependant, nous verrons plus loin que l'idée de représenter les formes admissibles par des difféomorphismes est utile pour définir une notion de dérivation par rapport au domaine. •

6.3 Différentiation par rapport au domaine

Dans cette section on reprend la paramétrisation des formes, introduite dans la Sous-section 6.2.4, qui va permettre de définir très naturellement une notion de dérivation "par rapport au domaine". Dès lors que l'on saura ainsi différencier, on pourra écrire des conditions d'optimalité pour caractériser les formes optimales et calculer des gradients pour mettre en oeuvre une méthode numérique d'optimisation. Il s'agit donc d'une notion fondamentale aussi bien du point de vue théorique que pratique.

6.3.1 Définition

La méthode de variation de frontières que nous allons décrire est très classique. Historiquement elle remonte au moins à J. Hadamard en 1907 [86]. De très nombreux auteurs ont travaillé sur ce sujet (voir par exemple [58], [100], [143], [170], [183]). On reprend ici la présentation de F. Murat et J. Simon [132], [133], déjà introduite lors de la Sous-section 6.2.4 précédente.

On se donne un domaine de référence Ω_0 , que l'on suppose être un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Rappelons que l'on avait défini par (6.18) une classe

de formes admissibles $\mathcal{C}(\Omega_0)$ composée des ouverts $\Omega = T(\Omega_0)$, où T est un difféomorphisme lipschitzien. Comme on compare T à l'identité (voir par exemple la définition (6.19) de la pseudo-distance sur $\mathcal{C}(\Omega_0)$), il est naturel de considérer plutôt la variable θ définie par

$$T = \text{Id} + \theta \quad \text{avec} \quad \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N),$$

où Id désigne l'application identité, $x \rightarrow x$ dans $\mathbb{R}^N$. Avec cette notation l'ensemble $\Omega = (\text{Id} + \theta)(\Omega_0)$ est défini par

$$\Omega = \{x + \theta(x) \text{ tel que } x \in \Omega_0\}.$$

On peut donc voir $\theta(x)$ comme un champ de vecteur qui transporte ou déplace le domaine de référence Ω_0 (c'est le même principe que le champ de déplacement $u(x) : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^N$ en élasticité linéarisée, voir la Figure 6.7). Autrement dit, on **représente chaque forme admissible $\Omega \in \mathcal{C}(\Omega_0)$ par un champ de vecteurs $\theta(x)$ de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$** . On pourra alors définir une notion de différentiabilité en Ω_0 en utilisant la dérivation par rapport à θ . Commençons par un lemme qui garantit que si θ est assez petit alors $T = \text{Id} + \theta$ est bien un difféomorphisme et appartient bien à l'ensemble $\mathcal{T}$ des difféomorphismes sur $\mathbb{R}^N$ défini par (6.17).

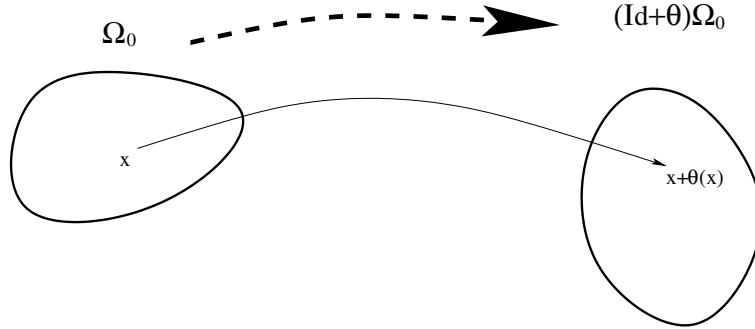


Fig. 6.7. Définition d'un domaine transporté par un champ de vecteur θ .

Lemme 6.13. *Pour tout $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ vérifiant $\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)} < 1$, l'application $T = \text{Id} + \theta$ est une bijection de $\mathbb{R}^N$ qui appartient à l'ensemble $\mathcal{T}$ défini par (6.17).*

Démonstration. Montrons tout d'abord que $T = \text{Id} + \theta$ est une bijection de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$. À partir de la formule

$$\theta(x) - \theta(y) = \int_0^1 (x - y) \cdot \nabla \theta(y + t(x - y)) dt,$$

on obtient que $|\theta(x) - \theta(y)| \leq \|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)} |x - y|$, et donc θ est strictement contractante. Pour tout vecteur $b \in \mathbb{R}^N$ on introduit l'application $K(x) = b - \theta(x)$ qui est aussi strictement contractante

$$|K(x) - K(y)| \leq c|x - y| \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^N, \text{ avec } c < 1.$$

On en déduit que pour tout x , la suite des itérées $\{K^n(x)\}_{n \geq 1}$ est convergente, car elle vérifie le critère de Cauchy (pour $n > p$)

$$\begin{aligned} |K^n(x) - K^p(x)| &\leq \sum_{i=p+1}^n |K^i(x) - K^{i-1}(x)| \leq c^p \sum_{i=1}^{n-p} c^{i-1} |K(x) - x| \\ &\leq \frac{c^p}{1-c} |K(x) - x|. \end{aligned}$$

La suite $\{K^n(x)\}_{n \geq 1}$ converge vers une limite y qui est l'unique point fixe de K , c'est-à-dire qui vérifie $K(y) = y$, et donc $b = T(y)$. Ainsi T est une bijection de $\mathbb{R}^N$.

Vérifions maintenant que $T \in \mathcal{T}$, c'est-à-dire que $(T - \text{Id})$ et $(T^{-1} - \text{Id})$ appartiennent à $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. Comme $T^{-1} - \text{Id} = (\text{Id} - T) \circ T^{-1}$, on a bien $\|T^{-1} - \text{Id}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)} < 1$. D'autre part, $\nabla T = I + \nabla \theta$, où $I = \nabla \text{Id}$ est la matrice identité constante (à ne pas confondre avec l'application identité Id , $x \rightarrow x$ dans $\mathbb{R}^N$) et comme la norme de la matrice $\nabla \theta$ est strictement plus petite que 1, ∇T est inversible et on a

$$(\nabla T)^{-1} = (I + \nabla \theta)^{-1} = \sum_{i \geq 0} (-\nabla \theta)^i,$$

ainsi que

$$|(\nabla T)^{-1} - I| \leq \frac{|\nabla \theta|}{1 - |\nabla \theta|}.$$

Par conséquent, T^{-1} est différentiable de dérivée $\nabla(T^{-1}) = ((\nabla T)^t)^{-1} \circ T^{-1}$. Finalement, on a

$$\nabla(T^{-1} - \text{Id}) = ((\nabla T)^t)^{-1} \circ T^{-1} - I = \left(((\nabla T)^t)^{-1} - I \right) \circ T^{-1},$$

ce qui implique que $\nabla(T^{-1} - \text{Id})$ est borné dans $L^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. On en déduit donc que $(T^{-1} - \text{Id})$ appartient bien à $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, et $T \in \mathcal{T}$. $\square$

Remarque 6.14. Il est usuel et naturel de considérer l'espace $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ pour les champs de vecteur θ . Pour ceux qui préfèrent les fonctions régulières on peut faire la même théorie avec l'espace $C_b^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ des champs de vecteur continûment différentiables et uniformément bornés ainsi que leur gradient. Rappelons au passage que les fonctions de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ sont tout de même continues. $\bullet$

Définition 6.15. Soit $J(\Omega)$ une application de l'ensemble des formes admissibles $\mathcal{C}(\Omega_0)$ dans $\mathbb{R}$. On dit que J est **différentiable par rapport au domaine** en Ω_0 si la fonction

$$\theta \rightarrow J((\text{Id} + \theta)(\Omega_0))$$

est différentiable en 0 dans l'espace de Banach $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$.

Remarque 6.16. La Définition 6.15 s'applique aussi bien à la différentiabilité au sens de Fréchet qu'au sens de Gâteaux. Rappelons dans ce contexte la différentiabilité au sens de Fréchet : il existe L , une forme linéaire continue sur $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ telle que

$$J((\text{Id} + \theta)(\Omega_0)) = J(\Omega_0) + L(\theta) + o(\theta), \quad \text{avec} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{o(\theta)}{\|\theta\|_{W^{1,\infty}}} = 0.$$

Dans la suite on notera $L = J'(\Omega_0)$. Remarquons aussi que la Définition 6.15 s'applique aussi si J est une application de $\mathcal{C}(\Omega_0)$ dans un espace de Banach. •

Une propriété surprenante de la dérivée par rapport au domaine $J'(\Omega_0)$ découle du fait que la représentation d'un domaine Ω de $\mathcal{C}(\Omega_0)$ par un difféomorphisme n'est pas unique. Autrement dit, il peut exister $\theta_1 \neq \theta_2$ tels que $(\text{Id} + \theta_1)(\Omega_0) = (\text{Id} + \theta_2)(\Omega_0)$. Par exemple, si $\theta_1 = 0$ et θ_2 est à support compact dans Ω_0 et de norme suffisamment petite, alors les difféomorphismes $(\text{Id} + \theta_1)$ et $(\text{Id} + \theta_2)$ laissent invariant chaque point du bord $\partial\Omega_0$ et ont la même image globale de l'intérieur Ω_0 . Plus généralement, nous allons montrer que la forme linéaire $\theta \rightarrow J'(\Omega_0)(\theta)$ ne dépend que de la **composante normale de θ sur le bord** de Ω_0 .

Proposition 6.17. Soit Ω_0 un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit J une application différentiable en Ω_0 . Si $\theta_1, \theta_2 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ sont tels que $\theta_2 - \theta_1 \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ et $\theta_1 \cdot n = \theta_2 \cdot n$ sur $\partial\Omega_0$, alors la dérivée $J'(\Omega_0)$ vérifie

$$J'(\Omega_0)(\theta_1) = J'(\Omega_0)(\theta_2).$$

Remarque 6.18. Ce résultat s'interprète géométriquement en disant que, si θ_1 et θ_2 sont petits, les domaines $(\text{Id} + \theta_1)(\Omega_0)$ et $(\text{Id} + \theta_2)(\Omega_0)$ sont égaux au second ordre près dès que $\theta_1 \cdot n = \theta_2 \cdot n$ sur $\partial\Omega_0$ (voir la Figure 6.8).

Du point de vue numérique la Proposition 6.17 est aussi très naturelle. En effet, si on maille le domaine Ω_0 , alors tous les noeuds du maillage sont transportés par le champ de vecteurs θ . Mais si θ est suffisamment petit (de manière à ce qu'aucun des noeuds intérieurs à Ω_0 ne se retrouve sur le bord), alors seuls comptent les noeuds du bord dont le déplacement donne la frontière du nouveau domaine Ω . •

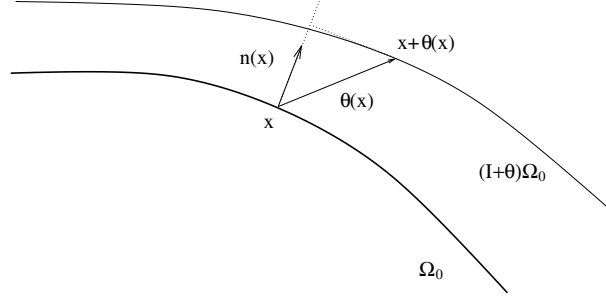


Fig. 6.8. Variation d'un domaine par un champ de vecteur θ .

Remarque 6.19. L'approche ci-dessus généralise (et simplifie, notamment pour les hypothèses de régularité) la méthode originale de J. Hadamard [86] qui consiste à faire varier la frontière d'un domaine le long de sa normale. Soit Ω_0 un domaine régulier de frontière $\partial\Omega_0$ paramétrée par une variable s et de normale unité $n(s)$. Soit une fonction $g(s)$ à valeurs réelles. Pour tout paramètre $t \geq 0$ suffisamment petit on définit un domaine $\Omega(t)$ par sa frontière

$$\partial\Omega(t) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \exists s \in \partial\Omega_0, x = s + t g(s) n(s)\}.$$

On peut alors dériver une fonction $J(\Omega(t))$ par rapport au paramètre réel t en 0, ce qui est un cas particulier de la Définition 6.15 pour $\theta \cdot n = g(s)$. Néanmoins la méthode d'Hadamard est moins pratique car elle nécessite une paramétrisation du bord et $\Omega(t)$ est moins régulier que Ω_0 puisque $n(s)$ contient des dérivées de la paramétrisation de $\partial\Omega_0$. •

Pour démontrer la Proposition 6.17 nous avons besoin d'un lemme préliminaire sur le flot d'un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^N$. Soit un champ de vecteurs $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ et une donnée initiale $x \in \mathbb{R}^N$. On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = \theta(y(t)) \\ y(0) = x \end{cases} \quad (6.22)$$

qui possède une solution unique $t \rightarrow y(t, x, \theta)$ dans $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$. La solution de (6.22) vérifie immédiatement les propriétés

$$\begin{aligned} y(t + t', x, \theta) &= y(t, y(t', x, \theta), \theta) \quad \text{pour tout } t, t' \in \mathbb{R} \\ y(\lambda t, x, \theta) &= y(t, x, \lambda\theta) \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (6.23)$$

On introduit alors la notation e^θ pour l'application de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ définie par

$$x \rightarrow e^\theta(x) = y(1, x, \theta) \quad (6.24)$$

qui est une bijection d'inverse $e^{-\theta}$ d'après (6.23), qui vérifie $e^0 = \text{Id}$ et $t \rightarrow e^{t\theta}(x)$ est solution de (6.22).

Lemme 6.20. Soit Ω_0 un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ tel que $\theta \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega_0$. Alors la bijection e^θ , définie par (6.24), vérifie $e^{t\theta}(\Omega_0) = \Omega_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Comme le champ de vecteur θ est tangent à la surface $\partial\Omega_0$, il est classique que, si $x \in \partial\Omega_0$, alors la solution $e^{t\theta}(x)$ de (6.22) appartient à $\partial\Omega_0$ pour tout t . On en déduit donc que $e^{t\theta}(\partial\Omega_0) \subset \partial\Omega_0$ et $e^{-t\theta}(\partial\Omega_0) \subset \partial\Omega_0$, et donc, par composition, que $\partial\Omega_0 = e^{t\theta}(e^{-t\theta}(\partial\Omega_0)) \subset e^{t\theta}(\partial\Omega_0)$, d'où l'égalité $\partial\Omega_0 = e^{t\theta}(\partial\Omega_0)$.

Soit maintenant $x \in \Omega_0$. Si l'on considère le chemin $(e^{s\theta}(x))_{0 \leq s \leq t}$, il est clair qu'il ne peut traverser $\partial\Omega_0$ d'après ce qui précède. Donc il reste dans Ω_0 , c'est-à-dire que $e^{t\theta}(\Omega_0) \subset \Omega_0$. Le même raisonnement que ci-dessus, en utilisant l'identité $\Omega_0 = e^{t\theta}(e^{-t\theta}(\Omega_0))$, permet de conclure à l'égalité $e^{t\theta}(\Omega_0) = \Omega_0$. $\square$

Démonstration de la Proposition 6.17. On pose $\theta = \theta_2 - \theta_1$ dont la trace normale est nulle sur le bord. En vertu du Lemme 6.20 on sait que $e^{t\theta}(\Omega_0) = \Omega_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc la fonction J est constante le long de ce chemin, et on a

$$\frac{dJ(e^{t\theta}(\Omega_0))}{dt}(0) = 0.$$

Or, par définition, la solution $e^{t\theta}(x)$ de (6.22) vérifie

$$\frac{de^{t\theta}(x)}{dt}(0) = \theta(x).$$

Formellement, par dérivation composée (il faudrait justifier ce point, ce qui est possible mais ne présente pas d'intérêt ; c'est à cet endroit que l'on utilise l'hypothèse θ de classe C^1 , voir [133]), on en déduit

$$\frac{dJ(e^{t\theta}(\Omega_0))}{dt}(0) = J'(\Omega_0) \left(\frac{de^{t\theta}}{dt} \right) (0) = J'(\Omega_0) (\theta) = 0,$$

ce qui donne le résultat par linéarité en θ . $\square$

6.3.2 Dérivation d'intégrales

On applique la Définition 6.15 de différentiabilité par rapport au domaine à des intégrales de volume ou de surface. À chaque fois l'idée principale est la même : on se ramène, par un changement de variables, à un calcul sur le domaine fixe Ω_0 . Pour ne pas alourdir la présentation, nous supposons dans toutes les démonstrations que les fonctions considérées sont suffisamment régulières pour pouvoir opérer toutes les dérivations ou intégrations par parties nécessaires. Nous commençons par rappeler un lemme classique sur le changement de variables dans les intégrales [100], [133].

Lemme 6.21. Soit Ω_0 un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soit $T \in \mathcal{T}$, un difféomorphisme de $\mathbb{R}^N$, où $\mathcal{T}$ est l'espace défini par (6.17). Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Alors $f \in L^p(T(\Omega_0))$ si et seulement si $f \circ T \in L^p(\Omega_0)$, et on a

$$\int_{T(\Omega_0)} f \, dx = \int_{\Omega_0} f \circ T |\det \nabla T| \, dx \quad \text{et} \quad \int_{T(\Omega_0)} f |\det(\nabla T)^{-1}| \, dx = \int_{\Omega_0} f \circ T \, dx.$$

D'autre part, $f \in W^{1,p}(T(\Omega_0))$ si et seulement si $f \circ T \in W^{1,p}(\Omega_0)$, et on a

$$(\nabla f) \circ T = ((\nabla T)^{-1})^t \nabla(f \circ T).$$

(On rappelle que l'on désigne par A^t la matrice adjointe ou transposée d'une matrice réelle A .) La dérivée de l'intégrale d'une fonction par rapport au domaine est donnée par la proposition suivante.

Proposition 6.22. Soit Ω_0 un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ et soit J l'application de $\mathcal{C}(\Omega_0)$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} f(x) \, dx.$$

Alors J est différentiable en Ω_0 et on a

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\Omega_0} \operatorname{div}(\theta(x) f(x)) \, dx = \int_{\partial\Omega_0} \theta(x) \cdot n(x) f(x) \, ds$$

pour tout $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$.

Démonstration. On réécrit $J(\Omega)$ comme une intégrale sur le domaine fixe Ω_0

$$J((\operatorname{Id} + \theta)(\Omega_0)) = \int_{\Omega_0} f \circ (\operatorname{Id} + \theta) |\det(I + \nabla \theta)| \, dx,$$

où $I = \nabla \operatorname{Id}$ est la matrice identité constante. L'application $\theta \rightarrow \det(I + \nabla \theta)$ est dérivable de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ car

$$\det(I + \nabla \theta) = 1 + \operatorname{div} \theta + o(\theta) \quad \text{avec} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\|o(\theta)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)}} = 0.$$

D'autre part, si $f(x) \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$, l'application $\theta \rightarrow f \circ (\operatorname{Id} + \theta)$ est dérivable de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ car

$$f \circ (\operatorname{Id} + \theta)(x) = f(x) + \nabla f(x) \cdot \theta(x) + o(\theta) \quad \text{avec} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\|o(\theta)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}}{\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)}} = 0.$$

Par composition de ces deux dérivées on obtient le résultat. $\square$

Rappelons maintenant un autre lemme classique sur le changement de variables dans les intégrales de surface [100], [133].

Lemme 6.23. Soit Ω_0 un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit T un difféomorphisme de $\mathbb{R}^N$, de classe C^1 et qui appartient à $\mathcal{T}$, défini par (6.17). Soit $f \in L^1(\partial T(\Omega_0))$, alors $f \circ T \in L^1(\partial\Omega_0)$, et on a

$$\int_{\partial T(\Omega_0)} f \, ds = \int_{\partial\Omega_0} f \circ T |\det \nabla T| \left| ((\nabla T)^{-1})^t n \right|_{\mathbb{R}^N} ds,$$

où n est la normale extérieure à $\partial\Omega_0$.

La dérivée de l'intégrale de surface d'une fonction par rapport au domaine est donnée par la proposition suivante.

Proposition 6.24. Soit Ω_0 un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit $f(x) \in W^{2,1}(\mathbb{R}^N)$ et soit J l'application de $\mathcal{C}(\Omega_0)$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$J(\Omega) = \int_{\partial\Omega} f(x) \, ds.$$

Alors J est différentiable en Ω_0 et, pour tout $\theta \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, on a

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\partial\Omega_0} \left(\nabla f \cdot \theta + f (\operatorname{div} \theta - \nabla \theta n \cdot n) \right) ds = \int_{\partial\Omega_0} \theta \cdot n \left(\frac{\partial f}{\partial n} + H f \right) ds,$$

où H est la courbure moyenne de $\partial\Omega_0$ définie par $H = \operatorname{div} n$.

Démonstration. Après changement de variable on a

$$J((\operatorname{Id} + \theta)(\Omega_0)) = \int_{\partial\Omega_0} f \circ (\operatorname{Id} + \theta) |\det(I + \nabla \theta)| \left| ((I + \nabla \theta)^{-1})^t n \right|_{\mathbb{R}^N} ds.$$

Remarquons que l'on a besoin de θ de classe C^1 et pas seulement appartenant à $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ car il faut pouvoir définir la trace de $\nabla \theta$ sur $\partial\Omega_0$. Par conséquent, on démontre la différentiabilité par rapport au domaine en remplaçant $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ par $C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ dans la Définition 6.15. On sait déjà que les applications $\theta \rightarrow \det(I + \nabla \theta)$ et $\theta \rightarrow f \circ (\operatorname{Id} + \theta)$ sont dérivables avec les hypothèses faites. Par ailleurs, on vérifie que l'application $\theta \rightarrow ((I + \nabla \theta)^{-1})^t n$ est dérivable de $C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ dans $L^\infty(\partial\Omega_0; \mathbb{R}^N)$ car

$$((I + \nabla \theta)^{-1})^t n = n - (\nabla \theta)^t n + o(\theta) \quad \text{avec} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\|o(\theta)\|_{L^\infty(\partial\Omega_0; \mathbb{R}^N)}}{\|\theta\|_{C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)}} = 0.$$

Par composition avec la dérivée de l'application $g \rightarrow |g|_{\mathbb{R}^N}$, on en déduit

$$\left| ((I + \nabla \theta)^{-1})^t n \right|_{\mathbb{R}^N} = 1 - (\nabla \theta)^t n \cdot n + o(\theta) \quad \text{avec} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\|o(\theta)\|_{L^\infty(\partial\Omega_0)}}{\|\theta\|_{C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)}} = 0.$$

Par composition de ces trois dérivées on obtient le résultat. La formule avec la courbure est alors le produit d'une intégration par parties sur la surface $\partial\Omega_0$ donnée par le Lemme 6.25. $\square$

Rappelons maintenant un lemme classique (quoique délicat [100], [133]) sur l'intégration par parties dans les intégrales de surface.

Lemme 6.25. Soit Ω_0 un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit $\theta \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ et $f \in W^{2,1}(\Omega_0)$. On a

$$\int_{\partial\Omega_0} (\theta \cdot \nabla f + f \operatorname{div} \theta - f(\nabla \theta \cdot n)) ds = \int_{\partial\Omega_0} \theta \cdot n \left(\frac{\partial f}{\partial n} + Hf \right) ds,$$

où n est la normale extérieure et H la courbure de $\partial\Omega_0$.

Remarque 6.26. Si le bord $\partial\Omega_0$ est représenté localement par une surface $x_N = \psi(x')$ avec $x' = (x_1, \dots, x_{N-1})$ et que Ω_0 correspond à $x_N > \psi(x')$, on a les formules suivantes pour le vecteur normal

$$n = \frac{1}{(1 + |\nabla \psi|^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} \nabla \psi \\ -1 \end{pmatrix}$$

et pour la courbure moyenne

$$H = \frac{\Delta \psi (N-1 + |\nabla \psi|^2) - (\nabla \nabla \psi) \nabla \psi \cdot \nabla \psi}{(1 + |\nabla \psi|^2)^{3/2}}.$$

Dans cette représentation locale, le Lemme 6.25 se démontre par un calcul simple mais fastidieux. •

6.3.3 Dérivation d'une fonction dépendant du domaine

Soit une fonction $u(x)$ ou, plus précisément, $u(\Omega, x)$, définie pour tout $x \in \Omega$, et qui dépend aussi du domaine Ω . Typiquement, il peut s'agir de la solution d'une équation aux dérivées partielles posée dans Ω . Nous voulons dériver cette fonction par rapport au domaine Ω .

Il existe en fait deux types de dérivées : une **dérivée eulérienne** que nous noterons U (qu'on appelle aussi dérivée de forme), et une **dérivée lagrangienne** que nous noterons Y (qu'on appelle aussi dérivée matérielle). Cette distinction est identique à celle que l'on fait classiquement en mécanique des milieux continus entre formalisme eulérien (dans un repère fixe) et formalisme lagrangien (dans un repère mobile). Expliquons brièvement et formellement comment l'on définit ces deux types de dérivées.

Le concept le plus simple, a priori, est celui de dérivée eulérienne. En un point x appartenant à la fois au domaine de référence Ω_0 et au domaine déformé $\Omega = (\operatorname{Id} + \theta)(\Omega_0)$, on peut calculer la différentielle de $u(\Omega, x)$ (la valeur de la fonction $u(\Omega)$ au point x)

$$u((\operatorname{Id} + \theta)(\Omega_0), x) = u(\Omega_0, x) + U(\theta, x) + o(\theta), \quad \text{avec} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\|o(\theta)\|}{\|\theta\|} = 0, \quad (6.25)$$

où $U(\theta, x)$ est une forme linéaire continue en θ qu'on appelle dérivée eulérienne. Plus précisément, U est une dérivée directionnelle dans la direction θ . En fait, la définition (6.25) est locale et a un sens pour tous les points x

dans l'ouvert Ω_0 (car pour θ suffisamment petit x appartient aussi à Ω), mais elle pose problème pour les points x du bord : en effet, si $x \in \partial\Omega_0$ il n'est pas sûr que x appartiennent à $\Omega = (\text{Id} + \theta)(\Omega_0)$. Une autre façon de voir cette difficulté est de dire que $u(\Omega)$ appartient typiquement à un espace (de Sobolev) défini sur Ω et que si on varie Ω on ne peut pas comparer $u(\Omega)$ et $u(\Omega_0)$ qui appartiennent à des espaces différents. Il s'agit là d'une difficulté sérieuse qui conduit souvent à préférer une deuxième notion de dérivation.

Un concept plus fiable, quoique plus compliqué, est celui de dérivée lagrangienne. L'idée est de se ramener, par un changement de variable à des fonctions définies sur le domaine de référence Ω_0 . Si $u(\Omega)$ est définie sur le domaine Ω , on construit sa **transportée** $\bar{u}(\theta)$ sur le domaine de référence Ω_0 par le simple changement de variable, pour tout $x \in \Omega_0$,

$$\bar{u}(\theta, x) = u((\text{Id} + \theta)(\Omega_0)) \circ (\text{Id} + \theta) = u((\text{Id} + \theta)(\Omega_0), x + \theta(x)). \quad (6.26)$$

Lorsque θ varie, toutes les fonctions $\bar{u}(\theta, x)$ sont définies sur le même domaine Ω_0 (ou dans le même espace fonctionnel), ce qui rend facile leur dérivation par rapport à θ : en particulier, il n'y a plus de difficulté pour les points x du bord $\partial\Omega_0$. On obtient la dérivée lagrangienne Y en dérivant la fonction $\bar{u}(\theta, x)$ par rapport à θ

$$\bar{u}(\theta, x) = \bar{u}(0, x) + Y(\theta, x) + o(\theta), \quad \text{avec} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\|o(\theta)\|}{\|\theta\|} = 0, \quad (6.27)$$

où $\bar{u}(0, x) = u(\Omega_0, x)$ et $Y(\theta, x)$ est une forme linéaire continue en θ (une dérivée directionnelle dans la direction θ).

Il y a bien sûr un lien entre les deux notions. En appliquant la règle de dérivation composée à (6.26) on obtient

$$Y(\theta, x) = U(\theta, x) + \theta(x) \cdot \nabla u(\Omega_0, x). \quad (6.28)$$

Remarque 6.27. Les définitions (6.25) et (6.27) des dérivées eulériennes et lagrangiennes sont simplement formelles. En effet, pour les rendre rigoureuses il faudrait préciser à quels espaces appartiennent les diverses fonctions qui apparaissent dans ces formules. Nous rendront cela rigoureux dans la Sous-section 6.3.4. •

En adaptant les démonstrations des Propositions 6.22 et 6.24 il est facile de les généraliser pour obtenir le résultat suivant de dérivation composée d'une intégrale de fonction dépendant du domaine.

Proposition 6.28. *Soit Ω_0 un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit $u(\Omega)$ une application de $\mathcal{C}(\Omega_0)$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$. On définit sa transportée de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$*

$$\bar{u}(\theta) = u((\text{Id} + \theta)(\Omega_0)) \circ (\text{Id} + \theta), \quad (6.29)$$

que l'on suppose être dérivable en 0 de dérivée Y (la dérivée lagrangienne de $u(\Omega)$). Alors l'application J_1 de $\mathcal{C}(\Omega_0)$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$J_1(\Omega) = \int_{\Omega} u(\Omega) dx$$

est différentiable en Ω_0 et, pour tout $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, on a

$$J'_1(\Omega_0)(\theta) = \int_{\Omega_0} \left(u(\Omega_0) \operatorname{div} \theta + Y(\theta) \right) dx.$$

De même, si $\bar{u}(\theta)$ est dérivable en 0 comme application de $C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ dans $L^1(\partial\Omega_0)$, alors l'application J_2 définie par

$$J_2(\Omega) = \int_{\partial\Omega} u(\Omega) dx$$

est différentiable en Ω_0 et, pour tout $\theta \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, on a

$$J'_2(\Omega_0)(\theta) = \int_{\partial\Omega_0} \left(u(\Omega_0) (\operatorname{div} \theta - \nabla \theta n \cdot n) + Y(\theta) \right) ds.$$

Remarque 6.29. On peut réécrire les résultats de la Proposition 6.28 avec la dérivée eulérienne U au lieu de la dérivée lagrangienne Y . On obtient alors

$$J'_1(\Omega_0)(\theta) = \int_{\Omega_0} \left(U(\theta) + \operatorname{div}(u(\Omega_0)\theta) \right) dx$$

et

$$J'_2(\Omega_0)(\theta) = \int_{\partial\Omega_0} \left(U(\theta) + \theta \cdot n \left(\frac{\partial u(\Omega_0)}{\partial n} + H u(\Omega_0) \right) \right) dx,$$

qui sont bien les dérivées composées que l'on pouvait attendre. •

6.3.4 Dérivation d'une équation par rapport au domaine

Nous abordons maintenant un point délicat qui concerne la dérivation par rapport au domaine de la solution d'une équation aux dérivées partielles (solution que nous noterons indifféremment u ou $u(\Omega)$). Les démonstrations qui suivent sont parfois assez fastidieuses, mais fort heureusement nous verrons plus loin dans la Sous-section 6.4.3 que nous pourrions souvent nous en passer (si on se satisfait d'un calcul formel). Néanmoins il est bon de connaître au moins l'existence des résultats qui suivent.

En pratique le calcul de la dérivée lagrangienne est à la fois le plus sûr (peu de risques d'erreurs) et le plus rigoureux, mais l'expression de la dérivée eulérienne est souvent plus simple. Par conséquent nous calculerons la dérivée lagrangienne Y puis nous utiliserons la formule (6.28) pour en déduire la dérivée eulérienne U . Les résultats étant assez différents, nous traitons séparément les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann.

Condition aux limites de Dirichlet.

Soit Ω_0 un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Pour $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ suffisamment petit, on pose $\Omega = (\text{Id} + \theta)(\Omega_0)$. Pour $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in H^3(\mathbb{R}^N)$ on considère l'équation suivante avec conditions aux limites de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.30)$$

qui admet une unique solution $u(\Omega)$ telle que $(u - g) \in H_0^1(\Omega)$. Pour trouver une formulation variationnelle de (6.30) il faut d'abord "relever" la condition aux limites inhomogène, c'est-à-dire faire le changement d'inconnue $w(\Omega) = u(\Omega) - g$, qui vérifie

$$\begin{cases} -\Delta w = f + \Delta g & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.31)$$

La formulation variationnelle de (6.31) est simplement : trouver $w \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\Omega} (f + \Delta g) \phi \, dx \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \quad (6.32)$$

Nous calculons d'abord la dérivée lagrangienne Y en se ramenant au domaine fixe Ω_0 par un changement de variable.

Proposition 6.30. *Soit $\Omega = (\text{Id} + \theta)(\Omega_0)$, $u(\Omega)$ la solution de (6.30) et $w(\Omega)$ celle de (6.31). On définit leurs transportées sur Ω_0 par*

$$\begin{aligned} \bar{u}(\theta) &= u\left((\text{Id} + \theta)(\Omega_0)\right) \circ (\text{Id} + \theta) \in H^1(\Omega_0), \\ \bar{w}(\theta) &= w\left((\text{Id} + \theta)(\Omega_0)\right) \circ (\text{Id} + \theta) \in H_0^1(\Omega_0), \end{aligned}$$

qui vérifient $\bar{u}(\theta) = \bar{w}(\theta) + g \circ (\text{Id} + \theta)$. Les applications $\theta \rightarrow \bar{u}(\theta), \bar{w}(\theta)$, de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ dans $H^1(\Omega_0)$, sont différentiables en 0, et leurs dérivées dans la direction θ , appelées **dérivées lagrangiennes ou matérielles** de u et w respectivement, sont

$$Y = \langle \bar{u}'(0), \theta \rangle \quad \text{et} \quad W = \langle \bar{w}'(0), \theta \rangle,$$

avec $Y = W + \theta \cdot \nabla g$, où $W \in H_0^1(\Omega_0)$ est la solution unique de

$$\begin{cases} -\Delta W = -\Delta(\theta \cdot \nabla(u(\Omega_0) - g)) & \text{dans } \Omega_0 \\ W = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0. \end{cases} \quad (6.33)$$

Remarque 6.31. Le problème aux limites (6.33) est bien posé car le second membre appartient au moins à $H^{-1}(\Omega_0)$ puisque, par régularité, $u(\Omega_0)$ et g appartiennent au moins à $H^2(\Omega_0)$. •

Démonstration. Le principe est de dériver la formulation variationnelle (6.32) où l'on choisit une fonction test qui dépend de θ , $\phi = \psi \circ (\text{Id} + \theta)^{-1}$. Avant de dériver on se ramène au domaine fixe Ω_0 en faisant le changement de variables $x = y + \theta(y)$ avec $y \in \Omega_0$ et $x \in \Omega$. Grâce au Lemme 6.21, la formulation variationnelle (6.32) devient trouver $\bar{w} \in H_0^1(\Omega_0)$ tel que, pour tout $\psi \in H_0^1(\Omega_0)$,

$$\int_{\Omega_0} A(\theta) \nabla \bar{w}(\theta) \cdot \nabla \psi \, dy = \int_{\Omega_0} (f + \Delta g) \circ (\text{Id} + \theta) \psi \, |\det(I + \nabla \theta)| \, dy \quad (6.34)$$

avec

$$A(\theta) = |\det(I + \nabla \theta)| (I + \nabla \theta)^{-1} ((I + \nabla \theta)^{-1})^t.$$

On remarque que le choix judicieux $\phi(x) = \psi \circ (\text{Id} + \theta)^{-1}(x) = \psi(y)$ conduit à une fonction test ψ indépendante de θ dans (6.34). On dérive par rapport à θ en 0 la formulation variationnelle (6.34). L'application $\theta \rightarrow A(\theta)$, de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N^2})$, est dérivable en 0 car

$$A(\theta) = (1 + \text{div} \theta) I - \nabla \theta - (\nabla \theta)^t + o(\theta) \quad \text{avec} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\|o(\theta)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N^2})}}{\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)}} = 0.$$

Par ailleurs, des arguments identiques à ceux de la démonstration de la Proposition 6.22 montrent que le membre de droite de (6.34) est dérivable. Par conséquent, en notant $W = \langle \bar{w}'(0), \theta \rangle$ la dérivée en 0 de $\bar{w}$ dans la direction θ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \nabla W \cdot \nabla \psi \, dy + \int_{\Omega_0} \left(\text{div} \theta I - \nabla \theta - (\nabla \theta)^t \right) \nabla \bar{w}(0) \cdot \nabla \psi \, dy \\ = \int_{\Omega_0} \text{div} \left((f + \Delta g) \theta \right) \psi \, dy \end{aligned} \quad (6.35)$$

avec $\bar{w}(0) = w(\Omega_0)$. Comme $\bar{w}(\theta) \in H_0^1(\Omega_0)$, sa dérivée lagrangienne W appartient aussi à $H_0^1(\Omega_0)$. Donc W est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta W = \text{div} \left[\left(\text{div} \theta I - \nabla \theta - (\nabla \theta)^t \right) \nabla w(\Omega_0) \right] + \text{div} \left((f + \Delta g) \theta \right) & \text{dans } \Omega_0 \\ W = 0 & \text{sur } \partial \Omega_0. \end{cases}$$

On utilise alors les relations $w(\Omega_0) = u(\Omega_0) - g$, et $\Delta u(\Omega_0) = -f$ dans Ω_0 , ainsi que l'identité suivante (qui se démontre par simple identification pour tout $v \in H^1(\Omega_0)$ tel que $\Delta v \in L^2(\Omega_0)$)

$$\Delta(\nabla v \cdot \theta) = \text{div} \left((\Delta v) \theta - (\text{div} \theta) \nabla v + \left(\nabla \theta + (\nabla \theta)^t \right) \nabla v \right), \quad (6.36)$$

pour en déduire (6.33). Finalement, comme $\bar{u}(\theta) = \bar{w}(\theta) + g \circ (\text{Id} + \theta)$ et que, selon la Proposition 6.22, la dérivée de $g \circ (\text{Id} + \theta)$ est $\theta \cdot \nabla g$, on en déduit que $Y = W + \theta \cdot \nabla g$. $\square$

Corollaire 6.32. *Suivant la formule (6.28) on définit la **dérivée eulérienne** ou de forme U de la solution $u(\Omega)$ de (6.30) par la formule*

$$U = Y - \theta \cdot \nabla u(\Omega_0). \quad (6.37)$$

Alors U est solution dans $H^1(\Omega_0)$ de

$$\begin{cases} -\Delta U = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ U = -(\theta \cdot n) \frac{\partial(u(\Omega_0) - g)}{\partial n} & \text{sur } \partial\Omega_0. \end{cases} \quad (6.38)$$

De plus, U est bien la dérivée eulérienne de l'application $\Omega \rightarrow u(\Omega)$ en Ω_0 dans la direction θ au sens où elle vérifie (6.25) pour un certain choix de normes.

Remarque 6.33. Comme on s'y attend d'après la Proposition 6.17, U ne dépend que de la trace normale de $\theta \cdot n$. S'il est clair que la dérivée de forme U vérifie une équation plus simple que celle de la dérivée matérielle Y , la justification de la formule (6.25), i.e. le choix des “bons” espaces fonctionnels, est plus compliquée. •

Démonstration. Nous laissons au lecteur le soin de faire le calcul facile qui permet de passer de (6.33) et (6.37) à (6.38). Pour montrer que U est la dérivée eulérienne de $u(\Omega)$ au sens de (6.25), nous allons nous contenter d'un raisonnement formel. Une justification rigoureuse est assez délicate car il faut bien préciser tous les espaces fonctionnels. Commençons par déterminer U localement à l'intérieur de Ω . Pour tout ouvert ω inclus compactement dans Ω_0 , i.e. $\bar{\omega} \subset \Omega_0$ (et donc $\bar{\omega} \subset \Omega$ si θ est petit), on considère la restriction à ω de $u(\Omega)$ qui appartient à $H^1(\omega)$. Comme cet espace est fixe et indépendant de Ω , on peut alors dériver l'application $\Omega \rightarrow u(\Omega)|_\omega$ au sens de la Définition 6.15. De manière pratique, on multiplie l'équation (6.30) par une fonction test ϕ à support compact dans ω

$$\int_{\omega} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\omega} f \phi \, dx,$$

et on dérive cette égalité par rapport à Ω : ni la fonction test, ni le domaine d'intégration n'en dépende. On trouve donc que $u'(\Omega_0)(\theta) = U$ où U vérifie

$$\int_{\omega} \nabla U \cdot \nabla \phi \, dx = 0,$$

c'est-à-dire l'équation de (6.38). Par cette méthode “intérieure” on ne peut pas retrouver la condition aux limites. Pour l'obtenir il faut écrire sous forme faible la condition aux limites pour $u(\Omega)$

$$\int_{\partial\Omega} (u(\Omega) - g) \psi \, ds = 0 \quad \forall \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N),$$

et dériver cette relation intégrale à l'aide de la Proposition 6.24 en supposant que l'on peut appliquer le théorème de dérivation composée. On obtient

$$\int_{\partial\Omega} \left(U\psi + H(u-g)\psi + \frac{\partial((u-g)\psi)}{\partial n} \right) ds = 0,$$

ce qui conduit à la condition aux limites de (6.38). $\square$

Condition aux limites de Neumann.

Soit Ω_0 un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Pour $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ suffisamment petit, on pose $\Omega = (\text{Id} + \theta)(\Omega_0)$. Pour $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in H^2(\mathbb{R}^N)$ on considère l'équation suivante avec conditions aux limites de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.39)$$

qui admet une unique solution $u(\Omega) \in H^1(\Omega)$. La formulation variationnelle de (6.39) est : trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \phi + u\phi) dx = \int_{\Omega} f\phi dx + \int_{\partial\Omega} g\phi ds \quad \forall \phi \in H^1(\Omega). \quad (6.40)$$

Proposition 6.34. *Soit $\Omega = (\text{Id} + \theta)(\Omega_0)$ et $u(\Omega)$ la solution de (6.39). On définit sa transportée $\bar{u}(\theta)$ sur Ω_0 par*

$$\bar{u}(\theta) = u\left((\text{Id} + \theta)(\Omega_0)\right) \circ (\text{Id} + \theta) \in H^1(\Omega_0).$$

L'application $\theta \rightarrow \bar{u}(\theta)$, de $C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ dans $H^1(\Omega_0)$, est différentiable en 0, et sa dérivée dans la direction θ , appelée **dérivée lagrangienne ou matérielle** de u , est

$$Y = \langle \bar{u}'(0), \theta \rangle,$$

où $Y \in H^1(\Omega_0)$ est la solution unique de

$$\begin{cases} -\Delta Y + Y = -\Delta(\theta \cdot \nabla u(\Omega_0)) + \theta \cdot \nabla u(\Omega_0) & \text{dans } \Omega_0 \\ \frac{\partial Y}{\partial n} = (\nabla \theta + (\nabla \theta)^t) \nabla u(\Omega_0) \cdot n + \theta \cdot \nabla g - g \nabla \theta \cdot n & \text{sur } \partial\Omega_0. \end{cases} \quad (6.41)$$

Remarque 6.35. Le problème aux limites (6.41) est bien posé car le second membre appartient au moins à $H^{-1}(\Omega_0)$ et la condition aux limites à $L^2(\partial\Omega_0)$. En effet, par régularité (voir le Théorème 2.20) la solution $u(\Omega_0)$ de (6.39) appartient au moins à $H^2(\Omega_0)$. $\bullet$

Démonstration. On fait le changement de variable $x = y + \theta(y)$ avec $y \in \Omega_0$ et $x \in \Omega$ dans la formulation variationnelle (6.40). On pose $\psi(y) = \phi(x)$. Grâce au Lemme 6.21, la formulation variationnelle (6.40) devient trouver $\bar{u}(\theta) \in H^1(\Omega_0)$ tel que, pour tout $\psi \in H^1(\Omega_0)$,

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_0} A(\theta) \nabla \bar{u}(\theta) \cdot \nabla \psi \, dy + \int_{\Omega_0} \bar{u}(\theta) \psi \, |\det(I + \nabla \theta)| \, dy \\
&= \int_{\Omega_0} f \circ (\text{Id} + \theta) \psi \, |\det(I + \nabla \theta)| \, dy \\
&+ \int_{\partial \Omega_0} g \circ (\text{Id} + \theta) \psi \, |\det(I + \nabla \theta)| \, |(I + \nabla \theta)^{-1*} n| \, ds,
\end{aligned} \tag{6.42}$$

avec

$$A(\theta) = |\det(I + \nabla \theta)| (I + \nabla \theta)^{-1} ((I + \nabla \theta)^{-1})^t.$$

On dérive par rapport à θ en 0 la formulation variationnelle (6.42). Par rapport à la démonstration de la Proposition 6.30 le seul nouveau terme est le dernier qui se dérive comme dans la démonstration de la Proposition 6.24. Par conséquent, en notant $Y = \langle \bar{u}'(0), \theta \rangle$ la dérivée en 0 de $\bar{u}$ dans la direction θ , on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_0} (\nabla Y \cdot \nabla \psi + Y \psi) \, dy + \int_{\Omega_0} (\text{div} \theta I - \nabla \theta - (\nabla \theta)^t) \nabla \bar{u}(0) \cdot \nabla \psi \, dy \\
&+ \int_{\Omega_0} \bar{u}(0) \psi \, \text{div} \theta \, dy = \int_{\Omega_0} \text{div}(f \theta) \psi \, dy \tag{6.43} \\
&+ \int_{\partial \Omega_0} (\theta \cdot \nabla g + g(\text{div} \theta - \nabla \theta n \cdot n)) \psi \, ds,
\end{aligned}$$

avec la notation $\bar{u}(0) = u(\Omega_0)$. Autrement dit, Y est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta Y + Y = F & \text{dans } \Omega_0 \\ \frac{\partial Y}{\partial n} = G & \text{sur } \partial \Omega_0, \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} F = \text{div} \left[(\text{div} \theta I - \nabla \theta - (\nabla \theta)^t) \nabla u(\Omega_0) \right] - u(\Omega_0) \text{div} \theta + \text{div}(f \theta) \\ G = -(\text{div} \theta I - \nabla \theta - (\nabla \theta)^t) \nabla u(\Omega_0) \cdot n + \theta \cdot \nabla g + g(\text{div} \theta - \nabla \theta n \cdot n). \end{cases}$$

On utilise alors les relations $\Delta u(\Omega_0) = u(\Omega_0) - f$ dans Ω_0 et $\frac{\partial u(\Omega_0)}{\partial n} = g$ sur $\partial \Omega_0$, et l'identité (6.36) pour en déduire (6.41). $\square$

Corollaire 6.36. *Suivant la formule (6.28) on définit la **dérivée eulérienne** ou de forme U de la solution $u(\Omega)$ de (6.39) par la formule*

$$U = Y - \theta \cdot \nabla u(\Omega_0). \tag{6.44}$$

Alors U est solution dans $H^1(\Omega_0)$ de

$$-\Delta U + U = 0 \quad \text{dans } \Omega_0, \tag{6.45}$$

avec la condition aux limites

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \theta \cdot n \left(\frac{\partial g}{\partial n} - \frac{\partial^2 u(\Omega_0)}{\partial n^2} \right) + \nabla_t(\theta \cdot n) \cdot \nabla_t u(\Omega_0) \quad \text{sur } \partial\Omega_0, \quad (6.46)$$

avec la notation du gradient tangentiel $\nabla_t \phi = \nabla \phi - (\nabla \phi \cdot n)n$.

De plus, U est bien la dérivée eulérienne de l'application $\Omega \rightarrow u(\Omega)$ en Ω_0 dans la direction θ au sens où elle vérifie (6.25) pour un certain choix de normes.

Remarque 6.37. Si la dérivée eulérienne ou de forme U vérifie une équation plus simple que celle de la dérivée matérielle Y , la condition aux limites est beaucoup plus compliquée : elle fait intervenir la dérivée tangentielle de $\theta \cdot n$.

•

Démonstration. Nous laissons au lecteur le soin de faire le calcul facile qui permet de passer de (6.41) et (6.44) à (6.45). Par contre, il est beaucoup plus délicat d'obtenir la condition aux limites (6.46). Un premier calcul fastidieux, qui utilise le Lemme 6.25 appliqué à $(g\phi)$, permet d'obtenir l'équation (6.47) ci-dessous. Ensuite, il faut utiliser une autre formule d'intégration par parties sur le bord pour en déduire (6.46) (nous renvoyons à [100] pour les détails).

Pour montrer (au moins formellement) que U est bien la dérivée locale de $u(\Omega)$, le raisonnement est plus facile que dans le cas d'une condition aux limites de Dirichlet car la condition aux limites de Neumann n'est pas inscrite dans le choix de l'espace fonctionnel mais est variationnelle. Autrement dit, pour un ouvert Ω régulier, on sait que toute fonction de $H^1(\Omega)$ est la restriction à Ω d'une fonction de $H^1(\mathbb{R}^N)$ (cela découle, par exemple, du Théorème 2.3). Par conséquent, on peut réécrire la formulation variationnelle (6.40) sous la forme : trouver $u(\Omega) \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tel que

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \phi + u\phi) dx = \int_{\Omega} f\phi dx + \int_{\partial\Omega} g\phi ds \quad \forall \phi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

On dérive alors cette égalité par rapport à Ω en supposant que l'on peut appliquer le théorème de dérivation composée. On trouve donc que $u'(\Omega_0)(\theta) = U$ où U vérifie

$$\int_{\Omega} (\nabla U \cdot \nabla \phi + U\phi) dx = \int_{\partial\Omega} \theta \cdot n \left(-\nabla u \cdot \nabla \phi - u\phi + f\phi + Hg\phi + \frac{\partial(g\phi)}{\partial n} \right) ds \quad (6.47)$$

dont on déduit facilement (6.45), en prenant ϕ à support compact dans Ω , et plus laborieusement (6.46). $\square$

6.4 Gradient et condition d'optimalité

On combine les résultats des sections précédentes pour calculer les conditions d'optimalité ou le gradient de la fonction objectif du problème suivant d'optimisation géométrique de formes

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega),$$

avec

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \Omega \in \mathcal{C}(\Omega_0) \text{ et } \int_{\Omega} dx = V_0 \right\}, \quad (6.48)$$

où $\mathcal{C}(\Omega_0)$ est l'ensemble, défini par (6.18), des formes obtenues par difféomorphisme à partir de Ω_0 . La fonction coût $J(\Omega)$ est soit la compliance (6.2), soit un critère de moindres carrés (6.3) pour atteindre une cible $u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^N)$, c'est-à-dire

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} |u(\Omega) - u_0|^2 dx \quad (6.49)$$

où la fonction $u(\Omega)$ est la solution de l'équation d'état qui est un problème aux limites posé dans Ω .

6.4.1 Conditions aux limites de Neumann

On considère l'équation d'état suivante

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.50)$$

qui, pour $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in H^2(\mathbb{R}^N)$, admet une unique solution $u = u(\Omega) \in H^1(\Omega)$.

Théorème 6.38. *Soit Ω_0 un ouvert borné régulier. L'application $J(\Omega)$, définie par (6.49), est différentiable*

$$\begin{aligned} J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\partial\Omega_0} \theta \cdot n \left(|u(\Omega_0) - u_0|^2 + \nabla u(\Omega_0) \cdot \nabla p + p(u(\Omega_0) - f) \right. \\ \left. - \frac{\partial(gp)}{\partial n} - Hgp \right) ds, \end{aligned} \quad (6.51)$$

où p est l'état adjoint, solution unique dans $H^1(\Omega_0)$ de

$$\begin{cases} -\Delta p + p = -2(u(\Omega_0) - u_0) & \text{dans } \Omega_0 \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0, \end{cases} \quad (6.52)$$

Remarque 6.39. La formule (6.51) a bien un sens car, Ω_0 étant régulier, les hypothèses sur les données f et g impliquent que u et p appartiennent à $H^2(\Omega)$ et donc ∇u et ∇p appartiennent à $L^2(\partial\Omega)$ par le théorème de trace. On retrouve bien dans la formule (6.51) le fait que la dérivée de forme ne dépend que de la valeur de la trace normale du champ de vecteurs θ sur le bord. •

Démonstration. On applique la Proposition 6.28 à la fonction coût pour obtenir

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\Omega_0} (|u(\Omega_0) - u_0|^2 \operatorname{div} \theta + 2(u(\Omega_0) - u_0)(Y - \theta \cdot \nabla u_0)) dx,$$

avec la dérivée matérielle Y solution de (6.41), ce qui peut aussi s'écrire avec la dérivée de forme $U = Y - \theta \cdot \nabla u(\Omega_0)$ comme

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\Omega_0} (\operatorname{div} (\theta |u(\Omega_0) - u_0|^2) + 2(u(\Omega_0) - u_0)U) dx.$$

Pour simplifier cette expression et éliminer la dérivée de forme U on utilise l'état adjoint. On multiplie (6.52) par U

$$\int_{\Omega_0} (\nabla p \cdot \nabla U + pU) dx = -2 \int_{\Omega_0} (u(\Omega_0) - u_0) U dx,$$

puis on multiplie l'équation (6.45), qui donne U , par p , en utilisant la condition aux limites (6.46),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} (\nabla p \cdot \nabla U + pU) dx = \\ \int_{\partial\Omega_0} \theta \cdot n \left(-\nabla u(\Omega_0) \cdot \nabla p - p\Delta u(\Omega_0) + \frac{\partial(gp)}{\partial n} + Hgp \right) ds. \end{aligned}$$

On en déduit, par comparaison, la formule (6.51). $\square$

On peut généraliser le Théorème 6.38 à une très grande classe de fonctions objectifs. Il existe un cas particulier très important pour lequel le problème est dit **auto-adjoint**, c'est-à-dire que l'état adjoint est égal à l'état (au signe près éventuellement) et il n'y a donc pas lieu de résoudre une équation supplémentaire pour calculer le gradient de la fonction objectif. Ce cas particulier est celui de la compliance

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} f u dx + \int_{\partial\Omega} g u ds. \quad (6.53)$$

Théorème 6.40. *L'application $J(\Omega)$, définie par (6.53), est différentiable*

$$\begin{aligned} J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\partial\Omega_0} \theta \cdot n \left(-|\nabla u(\Omega_0)|^2 - |u(\Omega_0)|^2 + 2u(\Omega_0)f \right. \\ \left. + 2\frac{\partial(gu(\Omega_0))}{\partial n} + 2Hgu(\Omega_0) \right) ds, \end{aligned} \quad (6.54)$$

Remarque 6.41. La formule (6.54) possède une interprétation mécanique simple dans un cas particulier. Supposons qu'il n'y a pas de forces volumiques, $f = 0$, et que les forces surfaciques ne sont non nulles que là où

le bord est fixe, c'est-à-dire qu'on peut avoir $g \neq 0$ seulement si $\theta \cdot n = 0$, et que $g = 0$ si $\theta \cdot n \neq 0$. Alors, la formule se simplifie

$$J'(\Omega_0)(\theta) = - \int_{\partial\Omega_0} \theta \cdot n (|\nabla u|^2 + u^2) ds.$$

On en déduit que, pour diminuer la compliance, c'est-à-dire pour avoir $J'(\Omega_0)(\theta) \leq 0$, on a toujours intérêt à agrandir le domaine, c'est-à-dire à choisir $\theta \cdot n > 0$. •

Démonstration. On applique la Proposition 6.28 à la fonction coût pour obtenir

$$\begin{aligned} J'(\Omega_0)(\theta) &= \int_{\Omega_0} \left(fu(\Omega_0) \operatorname{div} \theta + u(\Omega_0) \theta \cdot \nabla f + fY \right) dx \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_0} \left(gu(\Omega_0) (\operatorname{div} \theta - \nabla \theta n \cdot n) + u(\Omega_0) \theta \cdot \nabla g + gY \right) ds, \end{aligned}$$

ou bien, en introduisant $U = Y - \theta \cdot \nabla u(\Omega_0)$,

$$\begin{aligned} J'(\Omega_0)(\theta) &= \int_{\Omega_0} \left(\operatorname{div}(fu(\Omega_0)\theta) + fU \right) dx \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_0} \left(\theta \cdot n \left(\frac{\partial(gu(\Omega_0))}{\partial n} + Hgu(\Omega_0) \right) + gU \right) ds. \end{aligned}$$

En multipliant (6.50) par U on obtient

$$\int_{\Omega_0} \left(\nabla u(\Omega_0) \cdot \nabla U + u(\Omega_0)U \right) dx = \int_{\Omega_0} fU dx + \int_{\partial\Omega_0} gU ds,$$

puis en multipliant (6.45) par $u(\Omega_0)$ et en utilisant la condition aux limites (6.46) on a

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_0} \left(\nabla u(\Omega_0) \cdot \nabla U + u(\Omega_0)U \right) dx \\ &= \int_{\partial\Omega_0} \theta \cdot n \left(-\nabla u(\Omega_0) \cdot \nabla u(\Omega_0) - u(\Omega_0) \Delta u(\Omega_0) + \frac{\partial(gu(\Omega_0))}{\partial n} + Hgu(\Omega_0) \right) ds. \end{aligned}$$

On en déduit, par comparaison, la formule (6.54). □

6.4.2 Conditions aux limites de Dirichlet

On considère l'équation d'état suivante

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.55)$$

qui, pour $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in H^3(\mathbb{R}^N)$, admet une unique solution $u(\Omega)$ telle que $(u - g) \in H_0^1(\Omega)$.

Théorème 6.42. Soit Ω_0 un ouvert borné régulier. L'application $J(\Omega)$, définie par (6.49), est différentiable

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\partial\Omega_0} \theta \cdot n \left(|u(\Omega_0) - u_0|^2 - \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial(u(\Omega_0) - g)}{\partial n} \right) ds, \quad (6.56)$$

où p est l'état adjoint, solution unique dans $H^1(\Omega_0)$ de

$$\begin{cases} -\Delta p = -2(u(\Omega_0) - u_0) & \text{dans } \Omega_0 \\ p = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0. \end{cases} \quad (6.57)$$

Remarque 6.43. La formule (6.56) a bien un sens car, par régularité, u et p appartiennent à $H^2(\Omega)$ et donc ∇u et ∇p appartiennent à $L^2(\partial\Omega)$. On retrouve bien dans la formule (6.56) le fait que la dérivée de forme ne dépend que de la valeur de la trace normale du champ de vecteurs θ sur le bord. •

Démonstration. On applique la Proposition 6.28 à la fonction coût pour obtenir

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\Omega_0} (|u(\Omega_0) - u_0|^2 \operatorname{div} \theta + 2(u(\Omega_0) - u_0)(Y - \theta \cdot \nabla u_0)) dx,$$

avec la dérivée matérielle $Y = W + \theta \cdot \nabla g$, où W est solution de (6.33). Pour simplifier cette expression et éliminer la dérivée W on utilise l'état adjoint. On multiplie (6.57) par W

$$\int_{\Omega_0} \nabla p \cdot \nabla W dx = -2 \int_{\Omega_0} (u(\Omega_0) - u_0) W dx,$$

puis on écrit la formulation variationnelle de (6.33), qui définit W , avec p comme fonction test

$$\int_{\Omega_0} \nabla p \cdot \nabla W dx = \int_{\Omega_0} \nabla \left(\theta \cdot \nabla (u(\Omega_0) - g) \right) \cdot \nabla p dx.$$

On en déduit, par comparaison,

$$\begin{aligned} J'(\Omega_0)(\theta) &= \int_{\Omega_0} \left(|u(\Omega_0) - u_0|^2 \operatorname{div} \theta + 2(u(\Omega_0) - u_0) \theta \cdot \nabla (g - u_0) \right) dx \\ &\quad - \int_{\Omega_0} \nabla \left(\theta \cdot \nabla (u(\Omega_0) - g) \right) \cdot \nabla p dx. \end{aligned}$$

En intégrant par parties le terme contenant l'état adjoint p et en utilisant (6.57), on obtient

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\Omega_0} \operatorname{div} (\theta |u(\Omega_0) - u_0|^2) dx - \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial p}{\partial n} \theta \cdot \nabla (u(\Omega_0) - g) ds.$$

Comme $u(\Omega_0) = g$ sur $\partial\Omega_0$, la dérivée tangentielle au bord est nulle et on a

$$\nabla(u(\Omega_0) - g) = \frac{\partial(u(\Omega_0) - g)}{\partial n} n \quad \text{sur } \partial\Omega_0,$$

ce qui conduit à la formule (6.56). $\square$

On peut généraliser le Théorème 6.42 à une très grande classe de fonctions objectifs. Il existe un cas particulier très important pour lequel le problème est dit **auto-adjoint**, c'est-à-dire que l'état adjoint est égal à l'état (au signe près éventuellement) et il n'y a donc pas lieu de résoudre une équation supplémentaire pour calculer le gradient de la fonction objectif. Ce cas particulier est celui de la compliance

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} (f + \Delta g)u \, dx. \quad (6.58)$$

Théorème 6.44. *L'application $J(\Omega)$, définie par (6.58), est différentiable*

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\partial\Omega_0} \theta \cdot n \left((f + \Delta g)u(\Omega_0) + \left| \frac{\partial(u(\Omega_0) - g)}{\partial n} \right|^2 \right) ds. \quad (6.59)$$

Démonstration. On pose $h = f + \Delta g$ et on applique la Proposition 6.28 à la fonction coût pour obtenir

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\Omega_0} (hu(\Omega_0)\text{div}\theta + u(\Omega_0)\theta \cdot \nabla h + hY) \, dx$$

avec la dérivée matérielle $Y = W + \theta \cdot \nabla g$, où W est solution de (6.33). En multipliant par W l'équation vérifiée par $(u - g)$ on obtient

$$\int_{\Omega_0} \nabla(u(\Omega_0) - g) \cdot \nabla W \, dx = \int_{\Omega_0} hW \, dx,$$

puis en multipliant (6.33) par $(u - g)$ on a

$$\int_{\Omega_0} \nabla(u(\Omega_0) - g) \cdot \nabla W \, dx = \int_{\Omega_0} \nabla \left(\theta \cdot \nabla(u(\Omega_0) - g) \right) \cdot \nabla(u(\Omega_0) - g) \, dx.$$

On en déduit, par comparaison et après quelques calculs que nous laissons au lecteur, la formule (6.59). $\square$

6.4.3 Dérivation rapide : la méthode du Lagrangien

Comme nous venons de le voir dans les deux sous-sections précédentes, le calcul rigoureux de la dérivée d'une fonction objectif nécessite d'avoir su dériver la solution de l'équation d'état alors même que cette dérivée (U ou Y dans nos notations) n'apparaît pas dans le résultat final. Il y a là un certain gâchis, d'autant plus que le calcul de la dérivée U ou Y est assez délicat et fastidieux. Heureusement, comme nous l'avions annoncé, il existe une méthode

plus rapide pour dériver (au moins formellement) une fonction objectif. Il s'agit de la méthode du Lagrangien, développée par J. Céa dans [35]. Cette méthode permet aussi de “deviner” la définition de l'état adjoint p . En pratique, c'est la méthode la plus utilisée et il est **essentiel** de bien la comprendre. Dans ce qui suit on considère une fonction objectif générale du type

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} j(u(\Omega)) dx.$$

Condition aux limites de Neumann

On suppose tout d'abord que $u(\Omega)$ est solution de (6.50). Suivant la Définition 3.22 on introduit le Lagrangien qui est la somme de la fonction objectif et de la formulation variationnelle de l'équation d'état

$$\mathcal{L}(\Omega, v, q) = \int_{\Omega} j(v) dx + \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla q + vq - fq) dx - \int_{\partial\Omega} gq ds,$$

avec v et $q \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Il est important de noter que l'espace $H^1(\mathbb{R}^N)$ ne dépend pas de Ω et donc les trois variables du Lagrangien $\mathcal{L}$ sont véritablement **indépendantes**. La dérivée partielle de $\mathcal{L}$ par rapport à q dans la direction $\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ est

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(\Omega, v, q), \phi \right\rangle = \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla \phi + v\phi - f\phi) dx - \int_{\partial\Omega} g\phi ds,$$

qui, lorsqu'elle s'annule, est (par construction) la formulation variationnelle de l'équation d'état (6.50). La dérivée partielle de $\mathcal{L}$ par rapport à v dans la direction $\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ est

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\Omega, v, q), \phi \right\rangle = \int_{\Omega} j'(v)\phi dx + \int_{\Omega} (\nabla \phi \cdot \nabla q + \phi q) dx,$$

qui, lorsqu'elle s'annule, n'est rien d'autre que la formulation variationnelle de l'équation adjointe (6.52). Finalement, la dérivée de $\mathcal{L}$ par rapport au domaine, évaluée en supposant v et q fixes (c'est-à-dire comme une dérivée partielle), dans la direction θ est

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega_0, v, q)(\theta) = \int_{\partial\Omega_0} \theta \cdot n \left(j(v) + \nabla v \cdot \nabla q + vq - fq - \frac{\partial(gq)}{\partial n} - Hgq \right) ds.$$

Lorsqu'on évalue cette dérivée avec l'état $u(\Omega_0)$ et l'état adjoint $p(\Omega_0)$, on retrouve exactement la valeur de la dérivée de la fonction objectif

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega_0, u, p)(\theta) = J'(\Omega_0)(\theta). \quad (6.60)$$

La relation (6.60) n'est pas un hasard. En effet, pour tout $q \in H^1(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\mathcal{L}(\Omega, u(\Omega), q) = J(\Omega)$$

puisque $u(\Omega)$ vérifie la formulation variationnelle de l'équation d'état (6.50). Comme $u(\Omega)$ dépend de Ω , mais pas q , en dérivant cette relation et en utilisant le théorème des dérivées composées, il vient

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega_0, u(\Omega_0), q)(\theta) + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\Omega_0, u(\Omega_0), q), u'(\Omega_0)(\theta) \right\rangle.$$

En prenant alors $q = p(\Omega_0)$ solution de l'équation adjointe (6.52), le dernier terme s'annule et on obtient

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega_0, u(\Omega_0), p(\Omega_0))(\theta).$$

Grâce à ce calcul on peut obtenir le “bon” résultat pour $J'(\Omega_0)$ sans passer par les dérivées de forme ou matérielle qui sont passablement compliquées à établir. Cependant, ce calcul rapide de la dérivée $J'(\Omega_0)$ n'est que **formel**. En effet, il suppose que l'on connaisse déjà la dérivabilité de u par rapport au domaine, et que l'on puisse appliquer la règle de dérivation composée.

Condition aux limites de Dirichlet

On suppose maintenant que $u(\Omega)$ est solution de (6.55). La condition aux limites de Dirichlet n'étant pas variationnelle (comme celle de Neumann) mais inscrite dans l'espace fonctionnel, la méthode du Lagrangien est un peu plus compliquée. On pourrait être tenté d'introduire, comme d'habitude, le Lagrangien défini comme la somme de la fonction objectif et de la formulation variationnelle de l'équation d'état

$$\mathcal{L}(\Omega, v, q) = \int_{\Omega} j(v) dx + \int_{\Omega} \left(\nabla(v - g) \cdot \nabla q - (f + \Delta g)q \right) dx,$$

pour toutes les fonctions $(v - g) \in H_0^1(\Omega)$ et $q \in H_0^1(\Omega)$. Malheureusement cette approche est vouée à l'échec car les trois variables (Ω, v, q) ne peuvent pas être indépendantes puisque v et q appartiennent à des espaces qui dépendent de Ω (elles ont une trace prescrite sur $\partial\Omega$). Tout au plus, peut-on remarquer que, formellement, la dérivée partielle de $\mathcal{L}$ par rapport à v donne l'équation adjointe. Mais si on calcule la dérivée partielle de $\mathcal{L}$ par rapport au domaine, on ne trouve pas la “bonne” dérivée $J'(\Omega_0)$, ce qui est fâcheux!

Pour remédier à cet inconvénient on introduit un multiplicateur de Lagrange supplémentaire λ pour la condition aux limites. Autrement dit, pour $(v, q, \lambda) \in (H^1(\mathbb{R}^N))^3$, on définit le Lagrangien

$$\mathcal{L}(\Omega, v, q, \lambda) = \int_{\Omega} j(v) dx - \int_{\Omega} (\Delta v + f)q dx + \int_{\partial\Omega} \lambda(v - g) ds. \quad (6.61)$$

Dans la définition (6.61) du Lagrangien toutes les variables sont bien **indépendantes** car les fonctions (v, q, λ) appartiennent à des espaces qui

ne dépendent plus de Ω . Il est clair que les dérivées partielles de $\mathcal{L}$ par rapport à q et λ donnent (par définition même de $\mathcal{L}$) respectivement l'équation d'état et la condition aux limites satisfaites par u . Pour trouver l'équation adjointe on calcule la dérivée partielle de $\mathcal{L}$ par rapport à v dans la direction $\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\Omega, v, q, \lambda), \phi \right\rangle = \int_{\Omega} j'(v) \phi \, dx - \int_{\Omega} \Delta \phi \, q \, dx + \int_{\partial \Omega} \lambda \phi \, ds.$$

Après une double intégration par parties on obtient

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\Omega, v, q, \lambda), \phi \right\rangle = \int_{\Omega} \left(-\Delta q + j'(v) \right) \phi \, dx + \int_{\partial \Omega} \left(\frac{\partial q}{\partial n} + \lambda \right) \phi \, ds - \int_{\partial \Omega} q \frac{\partial \phi}{\partial n} \, ds.$$

La condition $\langle (\partial \mathcal{L} / \partial v)(\Omega_0, u, p, \lambda), \phi \rangle = 0$ pour tout $\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ conduit à trois relations. Tout d'abord en prenant ϕ à support compact dans Ω_0 on obtient

$$-\Delta p = -j'(u) \quad \text{dans } \Omega_0.$$

Puis on peut prendre ϕ qui s'annule sur $\partial \Omega_0$ avec $\partial \phi / \partial n$ quelconque dans $L^2(\partial \Omega_0)$, ce qui donne

$$p = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega_0.$$

Finalement, pour ϕ quelconque dans $H^1(\Omega_0)$, on trouve

$$\frac{\partial p}{\partial n} + \lambda = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega_0.$$

On a donc bien retrouvé l'équation adjointe (6.57). Finalement, la dérivée partielle de $\mathcal{L}$ par rapport à Ω , dans la direction θ , évaluée avec les solutions u , p et $\lambda = -\partial p / \partial n$, est

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega_0, u, p, \lambda)(\theta) = \int_{\partial \Omega_0} \theta \cdot n \left(j(u) - (\Delta u + f)p + \frac{\partial((u - g)\lambda)}{\partial n} + H(u - g)\lambda \right) ds.$$

En tenant compte des conditions aux limites $p = 0$, $u = g$ et $\lambda = -\partial p / \partial n$ sur $\partial \Omega_0$, on en déduit que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega_0, u, p, \lambda)(\theta) = J'(\Omega_0)(\theta). \quad (6.62)$$

Une fois de plus la relation (6.62) n'est pas un hasard puisqu'elle provient de la dérivation de

$$\mathcal{L}(\Omega, u(\Omega), q, \lambda) = J(\Omega) \quad \forall q, \lambda.$$

Comme q et λ ne dépendent pas de Ω , en dérivant cette relation et en utilisant le théorème des dérivées composées, il vient

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega_0, u(\Omega_0), q, \lambda)(\theta) + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(\Omega_0, u(\Omega_0), q, \lambda), u'(\Omega_0)(\theta) \right\rangle.$$

En prenant alors $q = p(\Omega_0)$ et $\lambda = -(\partial p / \partial n)(\Omega_0)$, où $p(\Omega_0)$ est la solution de l'équation adjointe (6.57), le dernier terme s'annule et on obtient précisément la formule (6.62). Grâce à ce calcul on trouve le "bon" résultat pour $J'(\Omega_0)$ sans passer par les dérivées eulérienne ou lagrangienne de la solution. Néanmoins, insistons encore pour dire que ce calcul rapide de la dérivée $J'(\Omega_0)$ n'est que formel puisqu'il requiert de savoir a priori que $u(\Omega)$ est dérivable par rapport au domaine.

6.5 Algorithmes numériques

Nous expliquons l'utilisation de la dérivation par rapport au domaine en matière d'algorithmes numériques sur le modèle de l'élasticité, plus complexe mais plus intéressant pour les applications pratiques.

6.5.1 Méthode de gradient

Pour minimiser numériquement la fonction coût $J(\Omega)$ on utilise une méthode de gradient sur la variable θ qui paramètre la forme $\Omega = (\text{Id} + \theta)(\Omega_0)$. Si l'on a obtenu l'expression analytique du gradient de la fonction coût sous la forme

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\partial\Omega_0} \theta \cdot n \, d(\Omega_0) \, ds,$$

où $d(\Omega_0)$ est une fonction (qui dépend de l'état et de l'adjoint), on peut obtenir une nouvelle forme Ω_t à partir de la forme initiale Ω_0

$$\Omega_t = (\text{Id} + \theta_t)(\Omega_0) \quad \text{avec} \quad \theta_t = -t d(\Omega_0) n, \quad (6.63)$$

où $t > 0$ est un pas de descente adéquat. Pour t suffisamment petit, on est sûr que

$$J(\Omega_t) < J(\Omega_0) \quad \text{si} \quad d(\Omega_0) \neq 0.$$

Dans la formule (6.63) il subsiste une ambiguïté quant à la définition de θ_t . En effet, θ_t doit être défini dans tout Ω_0 alors que $d(\Omega_0)n$ n'est a priori défini que sur le bord $\partial\Omega_0$. Il faut donc étendre cette trace à l'intérieur de Ω_0 pour obtenir le champ de vecteur θ_t . Nous reviendrons sur ce point pratique dans la Sous-section 6.5.3 ci-dessous.

Il y a une autre difficulté théorique et pratique avec la formule (6.63). En effet, on a toujours supposé que $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$, mais l'intégrande $d(\Omega_0)$ et la normale n peuvent être moins régulières. Si c'est le cas, il faut éventuellement régulariser ces termes (voir la Sous-section 6.5.3 ci-dessous).

La méthode de gradient est une méthode itérative : on calcule une suite de formes Ω_k pour $k \geq 0$. Chaque Ω_k est obtenu à partir de Ω_{k-1} comme Ω_t est obtenu à partir de Ω_0 . En d'autres termes, à chaque itération k on utilise Ω_k comme domaine de référence pour calculer la dérivée par rapport au domaine (on ne se ramène donc pas à chaque fois au domaine initial Ω_0).

6.5.2 Modèle de structure élastique

Nous revenons au modèle de la Sous-section 1.2.4. On considère un solide élastique isotrope homogène qui occupe un domaine borné Ω . On suppose que le bord de Ω est décomposé en trois parties

$$\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D,$$

où $\Gamma \neq \emptyset$ est la partie variable de la frontière, $\Gamma_D \neq \emptyset$ est une partie fixe de la frontière sur laquelle le solide est fixé (condition aux limites de Dirichlet), et $\Gamma_N \neq \emptyset$ est aussi une partie fixe de la frontière sur laquelle sont appliqués les efforts g (condition aux limites de Neumann). On suppose que la partie variable Γ de la frontière est libre de tout effort (condition aux limites de Neumann homogène). Un exemple, dit de la console (ou de la plaque-console en dimension 2), est donné à la Figure 6.9. Par conséquent, le déplacement u est solution du modèle de l'élasticité linéarisée suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\sigma = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma = 2\mu e(u) + \lambda \operatorname{tr}(e(u))I & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma n = g & \text{sur } \Gamma_N \\ \sigma n = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (6.64)$$

On minimise la compliance

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} \left\{ J(\Omega) = \int_{\Gamma_N} g \cdot u \, dx \right\}, \quad (6.65)$$

avec

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \Omega \in \mathcal{C}(\Omega_0), \Gamma_D \cup \Gamma_N \subset \partial\Omega \text{ et } \int_{\Omega} dx = V_0 \right\}, \quad (6.66)$$

où $\mathcal{C}(\Omega_0)$ est l'ensemble, défini par (6.18), des formes obtenues par déformation de Ω_0 . La restriction que toutes les formes $\Omega \in \mathcal{U}_{ad}$ aient dans leur bord les parties fixes $\Gamma_D \cup \Gamma_N$ est facilement prise en compte dans la paramétrisation de $\Omega = (\operatorname{Id} + \theta)(\Omega_0)$ par le champ de vecteurs θ : il suffit d'imposer

$$\theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \cup \Gamma_N$$

(seule la partie Γ de la frontière est susceptible de varier ici).

Dans ce cas particulier, la dérivée de la fonction coût est (par une simple adaptation du Théorème 6.40)

$$J'(\Omega_0)(\theta) = - \int_{\Gamma} \theta \cdot n (2\mu |e(u)|^2 + \lambda (\operatorname{tr} e(u))^2) \, ds. \quad (6.67)$$

Il est remarquable que l'intégrande en facteur de $\theta \cdot n$ dans (6.67) soit toujours négative. On en déduit que pour avoir $J'(\Omega_0)(\theta) \leq 0$, c'est-à-dire pour minimiser J , il faut choisir $\theta \cdot n > 0$. Autrement dit en termes mécaniques, pour

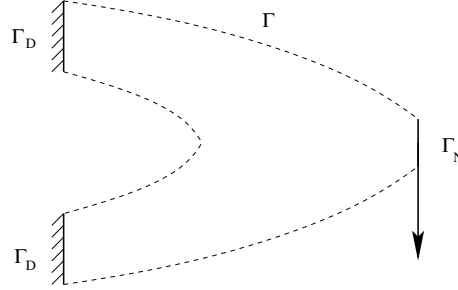


Fig. 6.9. Conditions aux limites pour une console élastique : seul le bord Γ , en pointillé, peut varier.

minimiser la compliance, c'est-à-dire maximiser la rigidité, on a toujours intérêt à “agrandir” le domaine Ω (nonobstant la contrainte de volume), et ceci d'autant plus que les déformations sont grandes. Rappelons que la dérivée de forme de la contrainte de volume $V(\Omega) = \int_{\Omega} dx = V_0$ est

$$V'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\Gamma} \theta \cdot n \, ds.$$

La condition d'optimalité du domaine Ω_0 est donc qu'il existe un multiplicateur de Lagrange $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$J'(\Omega_0)(\theta) + \ell V'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\Gamma} \theta \cdot n (\ell - 2\mu|e(u)|^2 - \lambda(\text{tr } e(u))^2) \, ds = 0.$$

Mécaniquement, cette condition d'optimalité nous dit que le bord de la forme optimale est iso-contraint.

6.5.3 Implémentation numérique

On choisit pour Ω_0 le domaine représenté à la Figure 6.9. Il s'agit d'un cas test classique, dit de la “console élastique” ou plaque-console en dimension 2 (“cantilever” en anglais). On calcule une suite de domaines Ω_k qui vérifient les contraintes suivantes (les mêmes que celles dans la définition (6.66) de $\mathcal{U}_{ad}$)

$$\partial\Omega_k = \Gamma_k \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D \quad (6.68)$$

où Γ_N et Γ_D sont fixes, et le volume (ou poids) est fixe

$$V(\Omega_k) = V(\Omega_0). \quad (6.69)$$

À cause de la contrainte sur le volume de la forme on utilise un algorithme de gradient à pas fixe avec projection (voir le Chapitre 3). Écrivons cet algorithme dans le cadre qui nous intéresse. Soit $t > 0$ un pas de descente fixé.

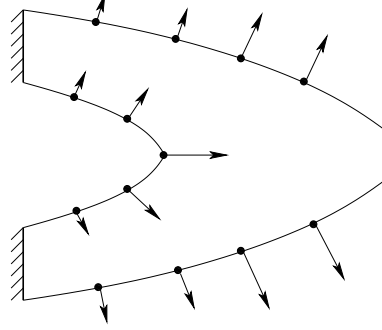


Fig. 6.10. Déplacement des noeuds du maillage de la frontière suivant le gradient de la fonction coût.

1. Initialisation de la forme Ω_0 .
2. Itérations jusqu'à convergence, pour $k \geq 0$:

$$\Omega_{k+1} = (\text{Id} + \theta_k)(\Omega_k),$$

avec

$$\theta_k = \begin{cases} t \left(2\mu |e(u_k)|^2 + \lambda (\text{tr } e(u_k))^2 - \ell_k \right) n_k & \text{sur } \Gamma_k, \\ 0 & \text{sur } \Gamma_N \cup \Gamma_D, \end{cases} \quad (6.70)$$

où n_k est le vecteur normal au bord $\partial\Omega_k$, $t > 0$ est un pas de descente et $\ell_k \in \mathbb{R}$ est le multiplicateur de Lagrange tel que Ω_{k+1} satisfasse la contrainte de volume. Rappelons que $-2\mu |e(u_k)|^2 - \lambda (\text{tr } e(u_k))^2$ est l'intégrande de la dérivée de forme $J'(\Omega_k)$, et que u_k est la solution de l'équation (6.64) dans le domaine Ω_k .

Typiquement, une itération de l'algorithme ci-dessus revient à déplacer, dans la direction de la normale, les noeuds du maillage de la partie libre Γ_k de la frontière de Ω_k en préservant son volume (voir la Figure 6.10).

Contrainte de poids total

Pour vérifier la contrainte de poids total (6.66) on ajuste itérativement et a posteriori le multiplicateur de Lagrange $\ell_k \in \mathbb{R}$. Autrement dit, on choisit à l'itération k la valeur ℓ_k du multiplicateur qui aurait permis à l'itération précédente $k - 1$ de vérifier exactement la contrainte de poids. Cette procédure est très simple mais ne permet de vérifier exactement la contrainte qu'à convergence. Si l'on voulait maintenir la contrainte de poids tout au long des itérations, il faudrait pouvoir "revenir en arrière" si le maillage a été trop déformé, ce qui revient à multiplier les étapes de déplacement du maillage (ou de remaillage) et donc à augmenter le coût du calcul.

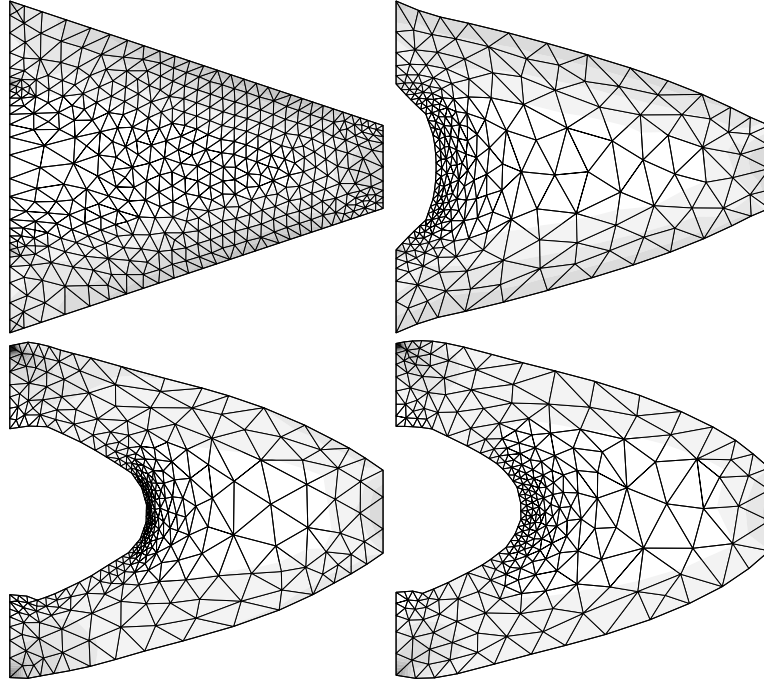


Fig. 6.11. Console optimale : forme initiale puis aux itérations 5, 10 et 20 de l'algorithme d'optimisation.

Extension du champ de déplacement et paramétrisation du bord

Dans la formule (6.70) il subsiste une ambiguïté quant à la définition de θ_k . En effet, θ_k doit être défini dans tout Ω_k alors qu'il n'est spécifié que sur le bord $\partial\Omega_k$ dans (6.70). À ce propos il existe deux possibilités. En premier lieu on peut affirmer que la seule information intéressante est la position de la frontière $\partial\Omega_{k+1}$ qui ne dépend que de la trace normale $\theta_k \cdot n_k$ sur le bord (dans le cas de petites déformations de la forme). Autrement dit, les valeurs de θ_k à l'intérieur de Ω_k ne sont pas importantes pour déterminer la frontière $\partial\Omega_{k+1}$ et il suffit d'utiliser (6.70) sur le bord (ou plus précisément pour les noeuds du bord du maillage). Néanmoins cette approche possède un inconvénient pratique : il faudra remailler la nouvelle forme Ω_{k+1} et cela coûte cher (surtout en 3-d). C'est pourquoi on préfère parfois une deuxième approche qui consiste à préalablement **étendre à l'intérieur** de Ω_k la trace de θ_k sur $\partial\Omega_k$. Par exemple, une telle extension s'obtient en résolvant le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta\theta_k = 0 & \text{dans } \Omega_k \\ \theta_k = 0 & \text{sur } \Gamma_D \cup \Gamma_N \\ \theta_k = t\left(2\mu|e(u_k)|^2 + \lambda(\text{tr } e(u_k))^2 - \ell_k\right)n_k & \text{sur } \Gamma_k. \end{cases} \quad (6.71)$$

Une fois que l'on connaît θ_k partout dans Ω_k on peut alors déformer l'ensemble du maillage de Ω_k et obtenir directement un nouveau maillage du domaine Ω_{k+1} . C'est la méthode que nous avons utilisée pour les exemples numériques de cette section. En tout état de cause, lorsque cet algorithme produit des distorsions assez grandes de la forme (ce qui est le cas sur l'exemple numérique présenté ici), il faut de temps en temps remailler la forme (par exemple toutes les 10 itérations) pour ne pas faire une mauvaise approximation numérique avec un mauvais maillage.

Dans la présentation de l'extension du champ de déplacement que nous venons de faire il semble sous-entendu que tous les noeuds du maillage sur le bord de la forme ont leur propre déplacement. Autrement dit, le champ de déplacement θ et le déplacement élastique u "vivraient" sur le même maillage. Bien que cela soit tout à fait concevable, ce n'est pas l'approche dominante dans les applications où l'on préfère utiliser une discrétisation plus grossière pour θ que pour u . Il y a au moins deux raisons à ce choix. Tout d'abord une raison de stabilité numérique : il y a un risque d'oscillation de la frontière lors de l'optimisation qui serait causé par une résonance des erreurs numériques sur le même maillage pour θ et u (il s'agit plus d'une constatation expérimentale que d'une analyse rigoureuse). Ensuite une raison de commodité de représentation ou paramétrisation des formes : les formes d'origine "industrielle" ne sont en général pas caractérisées par leur maillage mais par leurs paramètres de CAO (Conception Assistée par Ordinateur). Typiquement, ces paramètres sont des splines, des courbes de Bézier ou tout autre forme de représentation utilisée en approximation de surfaces. Il faut donc traduire le champ de déplacement θ dans cette paramétrisation CAO qui utilise typiquement beaucoup moins de noeuds de contrôle sur le bord de la forme mais qui contient des paramètres additionnels de tangente ou courbure. Nous ne disons rien de ces difficultés techniques de liaison avec la CAO et nous nous contentons de remarquer que cela fait un lien très naturel entre optimisation géométrique et optimisation paramétrique !

Dans les exemples numériques de ce chapitre nous utilisons effectivement deux maillages : un (relativement) grossier pour représenter la forme, c'est-à-dire θ , et un autre plus fin pour calculer avec précision l'état u . Le maillage grossier est déformé à chaque itération de l'optimisation et le maillage fin le suit par simple interpolation.

Régularisation du champ de déplacement

Un autre défaut du champ de vecteur θ_k défini par (6.70) est son éventuelle faible régularité. Par exemple, dans les coins de la console la régularité de $|e(u_k)|^2$ est faible (typiquement guère mieux que $L^1(\Omega)$) alors que l'on voudrait que θ_k appartienne à $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. Cela peut résulter en d'éventuelles oscillations de la frontière que l'on évite grâce à une régularisation de θ_k . Combinée avec la procédure d'extension que l'on vient juste de décrire, cette régularisation peut s'obtenir en résolvant à la place de (6.71) le problème

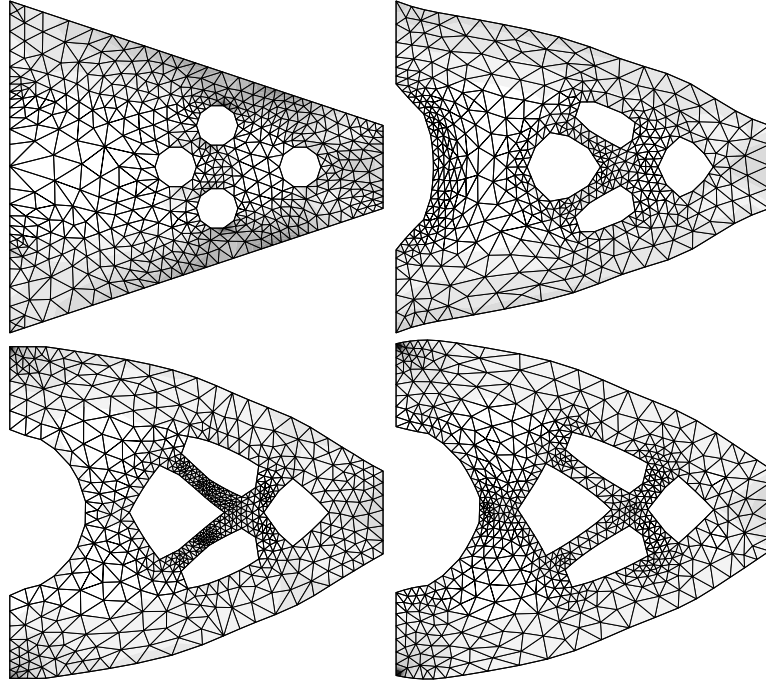


Fig. 6.12. Forme de la console initiale avec 4 trous, puis aux itérations 5, 10 et 20 de l'algorithme d'optimisation.

suivant

$$\begin{cases} -\Delta\theta_k = 0 & \text{dans } \Omega_k \\ \theta_k = 0 & \text{sur } \Gamma_D \cup \Gamma_N \\ \frac{\partial\theta_k}{\partial n} = t \left(2\mu|e(u_k)|^2 + \lambda(\text{tr } e(u_k))^2 - \ell_k \right) n_k & \text{sur } \Gamma_k. \end{cases} \quad (6.72)$$

On vérifie qu'il s'agit toujours d'une direction de descente car la solution de (6.72) vérifie

$$\begin{aligned} (J' + \ell_k V')(\Omega_k)(\theta_k) &= - \int_{\Gamma_k} \theta_k \cdot n_k \left(2\mu|e(u_k)|^2 + \lambda(\text{tr } e(u_k))^2 - \ell_k \right) ds \\ &= -t^{-1} \int_{\Omega_k} |\nabla\theta_k|^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

Par contre, la solution de (6.72) a un "cran" de régularité de plus que celle de (6.71) (voir le Théorème de régularité 2.20). Remarquons au passage qu'il est possible de remplacer l'opérateur Laplacien dans (6.71) et (6.72) par le système de l'élasticité (ce qui peut permettre d'économiser du temps de calcul puisqu'il s'agit du même opérateur que pour l'équation d'état).

Les Figures 6.11, 6.12 et 6.13 ont été obtenues avec les deux améliorations proposées ci-dessus : la régularisation par (6.72) et l'utilisation d'un double

maillage, un relativement grossier pour θ , et un autre plus fin pour calculer avec précision l'état u . Déformer un maillage grossier plutôt qu'un maillage fin permet d'éviter d'éventuelles oscillations de la frontière, régularise en quelque sorte le problème et rend le calcul stable.

Discussion des résultats numériques

Dans les Figures 6.11, 6.12 et 6.13 nous présentons les formes obtenues à diverses itérations de cet algorithme, et ce pour trois initialisations différentes. Les niveaux de gris représentent les isovaleurs de l'intégrande de la dérivée de forme (6.67) (qui n'est rien d'autre que la densité d'énergie élastique) : plus cette densité est élevée (ce qui correspond à un fort niveau de contraintes élastiques) plus le gris est foncé. On remarque que les formes optimales obtenues sont plus "isocontraintes" que les formes initiales (sauf éventuellement dans les coins). Ces figures permettent de se rendre compte de la **principale limitation** pratique de la méthode. On y voit que pour différentes initialisations on obtient différentes formes "optimales" qui ne sont pas équivalentes. Il est difficile de dire avec précision laquelle est la meilleure car la contrainte de poids total (6.66) n'est pas la même. Remarquons aussi que cette méthode d'optimisation géométrique ne sait pas automatiquement changer de topologie. Par exemple, sur la Figure 6.13 l'algorithme a envie de supprimer la petite barre verticale la plus à gauche, mais rien n'est prévu pour cela.

Une première conclusion est qu'il **existe de nombreux minima locaux** (éventuellement très loin d'un éventuel minimum global) et que la méthode de gradient (qui n'est que locale comme algorithme de minimisation) converge vers un minimum local (le plus proche de l'initialisation). La deuxième conclusion est que la **topologie** des itérées successives ne change pas alors qu'elle a une influence considérable sur les performances du domaine. Concrètement il y a au moins un minimum local par topologie et l'exploration de toutes les topologies possibles est fastidieuse. Cela motive donc le développement de méthodes capables d'optimiser des formes en changeant leur topologie.

Remarque 6.45. Ces exemples numériques mettent en valeur une difficulté technique supplémentaire qui est la comparaison précise de la fonction objectif entre deux formes successives. En effet, comme le maillage n'est pas le même, les erreurs de discrétisation numérique sont différentes et peuvent venir polluer la variation de la fonction coût. Cette erreur est d'autant plus faible que le maillage est fin, mais elle apparaît néanmoins toujours dans la phase finale de l'optimisation où la fonction objectif devient presque stationnaire. Il est alors difficile de dire avec précision si une forme est meilleure qu'une autre. ●

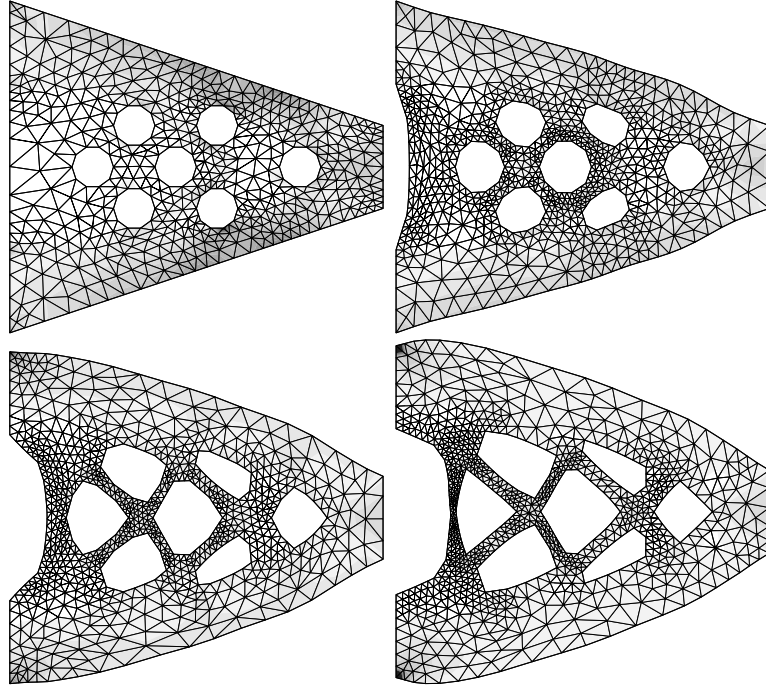


Fig. 6.13. Forme de la console initiale avec 7 trous, puis aux itérations 3, 6 et 19 de l'algorithme d'optimisation.

6.6 Bibliographie

La méthode de variation de frontières, qui est à la base de l'optimisation géométrique de formes, remonte à J. Hadamard en 1907 [86]. Elle est très classique depuis lors et nous renvoyons à [14], [35], [58], [72], [96], [97], [117], [130], [143], [151], [170], [183] pour plus de détails et d'autres références. Nous avons suivi ici la présentation de F. Murat et J. Simon [132], [133]. Nous nous sommes contentés de calculer des dérivées premières, par rapport au domaine, mais il est tout à fait possible de calculer des dérivées secondes qui permettent notamment de discriminer les minima des maxima (nous renvoyons à [100] et à sa bibliographie).

Les premiers résultats d'existence d'une forme optimale sous contrainte de régularité géométrique sont dus à D. Chenaïs [43], F. Murat et J. Simon [132], [133]. Plus récemment, des résultats d'existence sous contrainte topologique pour des formes planes ont été obtenus par V. Sverak [174] pour un modèle de membrane, puis par A. Chambolle [40] pour le modèle d'élasticité. Il existe d'autres types de contraintes additionnelles d'admissibilité qui permettent d'obtenir l'existence de formes optimales. Citons par exemple le travail de L. Ambrosio et G. Buttazzo [11] où une borne supérieure sur le

périmètre est imposée, qui empêche la création de trop nombreux trous (voir aussi l'implémentation numérique de cette méthode dans [85], [142]).

Les résultats d'existence de forme optimale que nous avons énoncés ne s'appliquent en général qu'au cas d'une condition aux limites de Neumann homogène sur le bord optimisable de la forme (bord libre). Les résultats théoriques sont sensiblement différents dans le cas d'une condition aux limites de Dirichlet et nous renvoyons le lecteur à [29], [30], [32], [33], [174] pour plus de détails.

Une nouvelle implémentation numérique de l'optimisation géométrique est récemment apparue [8], [139], [162], [179]. Elle repose sur la méthode des lignes de niveaux de S. Osher et J. Sethian [140]. L'idée centrale est de représenter le bord d'une forme comme la ligne de niveaux zéro d'une fonction discrétisée sur un maillage fixe. Il s'agit d'une méthode de capture de formes sur un maillage fixe Eulérien, alors que l'approche traditionnelle présentée ici est une méthode de suivi de formes Lagrangienne. L'avantage principal de cette méthode des lignes de niveaux est de réduire considérablement le coût du calcul et de permettre certains types de changement de topologie de la forme.