

Modèles

A partir de la notion de bilan appliquée à des exemples, nous construisons des lois de conservation et des systèmes de lois de conservation. Ces systèmes sont intrinsèquement non linéaires et vérifient certains principes d'invariance galiléenne. Puis nous montrons que les changements de coordonnées d'espace préservent la structure de lois de conservation. Nous appliquons cette méthode à la dérivation des équations en coordonnées de Lagrange. Enfin nous définissons ce qu'est un système **stable** linéairement bien posé, un système hyperbolique (cas de la dynamique des gaz en coordonnées d'Euler) et un système faiblement hyperbolique (cas de la dynamique des gaz en coordonnées de Lagrange en dimension deux et plus d'espace).

2.1 Équation de bilan

Plaçons nous en dimension d'espace $d = 1$ pour simplifier et commençons par choisir un quantité notée $u(t, x)$. C'est une fonction du temps $t \in \mathbb{R}$ et de l'espace $x \in \mathbb{R}$. Soit l'intégrale de cette quantité entre deux points $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$

$$N(x_0, x_1, t) = \int_{x_0}^{x_1} u(t, x) dx, \quad x_0 < x_1.$$

La variation¹ est donnée par : $\frac{d}{dt}N(x_0, x_1, t) = \int_{x_0}^{x_1} \partial_t u(t, x) dx$. Nous faisons l'hypothèse que les pertes ou gains ne peuvent se faire que par les bords du segment $[x_0, x_1]$. Nous écrivons l'équation de bilan sur l'intervalle de temps

¹ Si les bornes sont elles-mêmes des fonctions du temps, $t \mapsto x_0(t)$ et $t \mapsto x_1(t)$, alors

$$\frac{d}{dt}N(x_0(t), x_1(t), t) = \int_{x_0(t)}^{x_1(t)} \partial_t u(t, x) dx + x_1'(t)u(t, x_1(t)) - x_0'(t)u(t, x_0(t)). \quad (2.1)$$

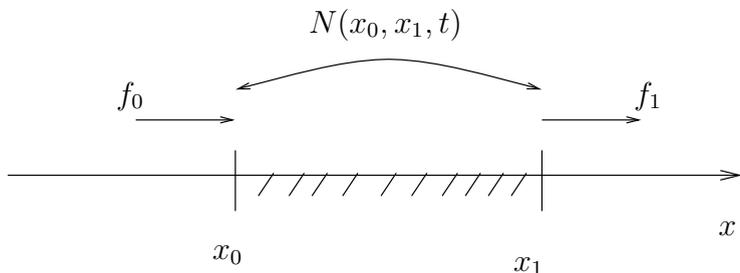


Fig. 2.1. Bilan

$\Delta t > 0$: on a $N(x_0, x_1, t + \Delta t) = N(x_0, x_1, t) - f(t, x_1)\Delta t + f(t, x_0)\Delta t + o(\Delta t)$ où $f(t, x)$ est le terme de perte ou de gain au bord. D'où en passant à la limite pour un pas de temps $\Delta t \rightarrow 0^+$

$$\frac{d}{dt}N(x_0, x_1, t) + f(t, x_1) - f(t, x_0) = \frac{d}{dt}N(x_0, x_1, t) + \int_{x_0}^{x_1} \partial_x f(t, x) dx = 0.$$

Comparons avec l'expression précédente. On trouve

$$\int_{x_0}^{x_1} \partial_t u(t, x) dx + \int_{x_0}^{x_1} \partial_x f(t, x) dx = 0, \quad x_0 < x_1.$$

Cette relation étant vérifiée pour tout $x_0 < x_1$, nous obtenons par cette **méthode de bilan** une **loi de conservation**

$$\partial_t u(t, x) + \partial_x f(t, x) = 0. \quad (2.2)$$

En considérant que le temps et l'espace ne jouent pas le même rôle, nous attribuons le rôle d'**inconnue**² à la quantité u , la quantité f étant le **flux**. Cette méthode qui consiste à écrire des équations de bilan est très générale et s'étend directement en dimension quelconque d'espace. Par exemple on écrira l'équation de bilan en dimension trois d'espace

$$\partial_t u(t, x, y, z) + \partial_x f(t, x, y, z) + \partial_y g(t, x, y, z) + \partial_z h(t, x, y, z) = 0.$$

Il reste à spécifier f , g et h en fonction de u pour obtenir un système fermé.

2.1.1 Trafic routier

Pour l'équation du trafic routier l'inconnue principale est la densité de véhicules $\rho(t, x)$ le long d'une autoroute supposée rectiligne et infinie $x \in \mathbb{R}$. Le nombre de véhicules entre x_0 et x_1 est

² Même si elle est notée u l'inconnue n'est pas nécessairement une vitesse. C'est le contexte physique sous-jacent qui détermine le choix de la notation qui varie de ce fait.

$$N(x_0, x_1, t) = \int_{x_0}^{x_1} \rho(t, x) dx, \quad x_0 < x_1.$$

Soit $u(t, x)$ la vitesse des véhicules. Le facteur de perte ou de gain de véhicules est, avec les notations précédentes, $f(t, x) = \rho(t, x)u(t, x)$. D'où l'équation de conservation

$$\partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0. \quad (2.3)$$

Nous ajoutons l'**hypothèse de modélisation** : un conducteur standard adapte sa vitesse à la densité locale de véhicules. En pratique on roule vite quand il y a peu de voitures : inversement on roule doucement quand il y a beaucoup de voitures. Nous considérons alors que la vitesse u est une fonction de la densité ρ . On obtient l'équation $\partial_t \rho + \partial_x f(\rho) = 0$ dont le flux est $f(\rho) = \rho u(\rho)$. Le modèle LWR (pour Lighthill-Whitham-Richards) correspond à au choix

$$\rho \mapsto u(\rho) \equiv u_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right),$$

les constantes u_{\max} et ρ_{\max} devant être spécifiées par ailleurs³. La loi LWR est représentée dans la figure 2.2.

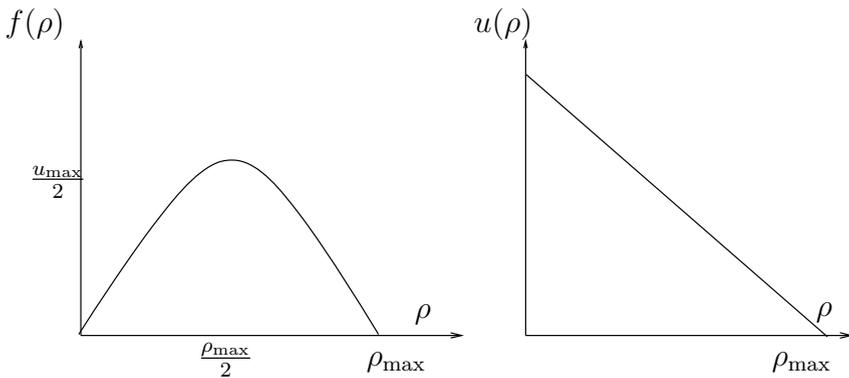


Fig. 2.2. Loi LWR $\rho \mapsto f(\rho) = \rho u(\rho)$ pour le trafic routier

L'équation de conservation prend la forme standard

$$\partial_t \rho + \partial_x f(\rho) = 0, \quad f(\rho) = \rho u(\rho). \quad (2.4)$$

Passons en variable adimensionnée $u_{\max} = 1$ et $\rho_{\max} = 1$. Nous obtenons l'équation $\partial_t \rho + \partial_x (\rho - \rho^2) = 0$. Posons $v = \frac{1}{2} - \rho$. L'équation satisfaite par v

³ Sur autoroute $u_{\max} = 130$ km/h. La densité maximum se calcule en fonction de la taille moyenne d'un véhicule.

est $\partial_t v + \partial_x v^2 = 0$. Après redéfinition du temps $t \rightarrow 2t$ on obtient l'équation de Burgers

$$\partial_t v + \partial_x \frac{v^2}{2} = 0.$$

C'est une équation **non linéaire**. Soient v_1 et v_2 deux solutions de l'équation de Burgers. La fonction $v_3 = v_1 + v_2$ n'est *a priori* pas une solution de l'équation de Burgers⁴. On dit aussi que le principe de superposition n'est plus vrai pour les équations non linéaires. Nous verrons par la suite que cette non linéarité est la cause de l'existence des solutions discontinues.

2.1.2 Système de Saint Venant

Nous considérons le lac en coupe (ou une rivière, ou un fleuve, ...) de la figure 2.3. La vitesse du fluide est un vecteur $(u_1(t, x, y), u_2(t, x, y))$ dont la première composante est la vitesse horizontale et la deuxième composante est la vitesse verticale. Pour un fluide incompressible tel que l'eau la masse volumique est constante $\rho = \rho_m$. La condition d'incompressibilité sur le champ

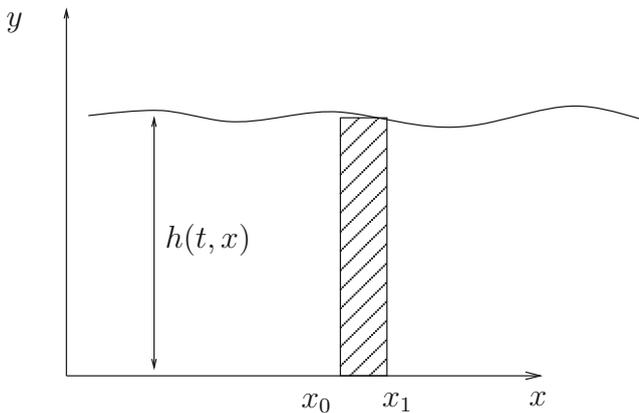


Fig. 2.3. Colonne d'eau entre x_0 et x_1

de vitesse s'écrit $\partial_x u_1 + \partial_y u_2 = 0$. La hauteur d'eau est $h(t, x)$. La vitesse moyenne horizontale le long d'une verticale est

$$u(t, x) = \frac{\int_0^{h(t, x)} u_1(t, x, y) dy}{h(t, x)}.$$

⁴ En revanche l'équation de Burgers est invariante par transformation d'échelle. Soit v une solution de l'équation de Burgers et $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $w = \lambda v$ est solution de $\partial_s w + \partial_x \frac{w^2}{2} = 0$ où on a mis le temps à l'échelle $s = \lambda t$.

Reprenant la méthode de bilan appliquée à la masse d'eau $N(x_0, x_1, t)$ comprise entre les verticales de base x_0 et x_1

$$N(x_0, x_1, t) = \rho_m \int_{x_0}^{x_1} h(t, x) dx.$$

Exprimant le fait que la variation de $N(x_0, x_1, t)$ est due au flux sortant ou entrant sur les bords nous obtenons une première loi de conservation

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0.$$

Cette première loi de conservation est en tout point similaire à celle du trafic routier, hormis le fait que la vitesse moyenne u n'a pas de raison d'être une fonction de la hauteur d'eau h .

Nous dérivons une deuxième loi de conservation qui va fournir la loi d'évolution de u . Nous commençons par étudier la masse de la colonne d'eau mobile

$$N(x_0(t), x_1(t), t) = \rho_m \int_{x_0(t)}^{x_1(t)} h(t, x) dx,$$

où les bords sont définis par $x_0(0) = X_0$, $x'_0(t) = u(t, x_0(t))$ et $x_1(0) = X_1$, $x'_1(t) = u(t, x_1(t))$. La formule (2.1) implique

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} N(x_0(t), x_1(t), t) \\ &= \rho_m \left(\int_{x_0}^{x_1} \partial_t h(t, x) dx + x'_1(t) h(t, x_1(t)) - x'_0(t) h(t, x_0(t)) \right) \\ &= \rho_m \left(\int_{x_0}^{x_1} \partial_t h(t, x) dx + u(t, x_1(t)) h(t, x_1(t)) - u(t, x_0(t)) h(t, x_0(t)) \right) \\ &= \rho_m \int_{x_0}^{x_1} (\partial_t h(t, x) + \partial_x(h(t, x)u(t, x))) dx = 0. \end{aligned}$$

Énoncé autrement **la masse d'eau de la colonne mobile est constante**. Cela autorise l'analogie suivante : **la colonne mobile joue le rôle d'une particule ponctuelle à laquelle nous allons appliquer la loi de Newton**. L'impulsion de la colonne mobile est

$$I(x_0(t), x_1(t), t) = \rho_m \int_{x_0(t)}^{x_1(t)} hudx = N(x_0(t), x_1(t), t) v(x_0(t), x_1(t), t) \quad (2.5)$$

où v est la vitesse moyenne de la colonne. Nous écrivons le bilan des forces qui s'exercent sur les faces avant et arrière

$$N(x_0(t), x_1(t), t) \frac{d}{dt} v(x_0(t), x_1(t), t) = f(t, x_1(t)) - f(t, x_0(t)).$$

La force est l'intégrale de la pression hydrostatique $p(t, x, y)$ à la hauteur y , soit $f(t, x) = - \int_0^{h(t,x)} p(t, x, y) dy$ et $p(t, x, y) = \rho_m \int_y^{h(t,x)} g dy = \rho_m g (h(t, x) - y)$. Ici g est la constante de gravitation locale⁵. Donc

$$f(t, x) = -\frac{g \rho_m}{2} h^2(t, x).$$

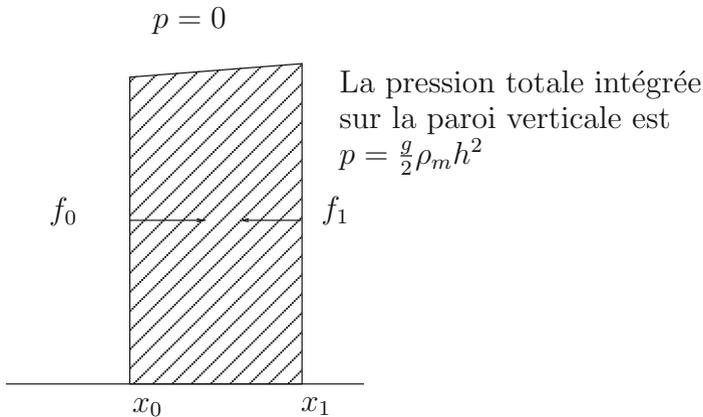


Fig. 2.4. Détail des forces qui s'appliquent sur une colonne d'eau

A partir de (2.5)

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0(t)}^{x_1(t)} h u dx + \frac{1}{\rho_m} \int_{x_0(t)}^{x_1(t)} \partial_x f dx = \frac{d}{dt} \int_{x_0(t)}^{x_1(t)} h u dx + \frac{g}{2} \int_{x_0(t)}^{x_1(t)} \partial_x h^2 dx = 0.$$

La formule (2.1) implique

$$\int_{x_0(t)}^{x_1(t)} \partial_t (hu) dx + \int_{x_0(t)}^{x_1(t)} \partial_x \left(hu^2 + \frac{g}{2} h^2 \right) dx = 0.$$

Ceci fournit une deuxième loi de conservation

$$\partial_t (hu) + \partial_x \left(hu^2 + \frac{g}{2} h^2 \right) = 0.$$

Au final le système de Saint Venant s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x (hu) = 0, \\ \partial_t (hu) + \partial_x \left(hu^2 + \frac{g}{2} h^2 \right) = 0, g > 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

⁵ En première approximation $g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$.

2.1.3 Dynamique des gaz compressibles

La dérivation du système de la dynamique des gaz compressibles nécessite une hypothèse dont nous donnerons une justification indirecte à la fin de ce chapitre. Nous admettons que la pression d'un gaz est une fonction de la masse volumique ρ du gaz et de la température T de ce même gaz

$$p = p(\rho, T).$$

La température étant elle-même *a priori* fonction de la masse volumique et d'une variable supplémentaire qui est l'énergie interne par unité de masse et que nous noterons ε . Soit u la vitesse du gaz. L'énergie totale par unité de masse est $e = \varepsilon + \frac{1}{2}|u|^2$. Pour un gaz parfait polytropique⁶

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad \varepsilon = C_v T, \quad C_v > 0, \quad \gamma > 1. \quad (2.9)$$

Corps	γ
O2, N2	$\frac{7}{5} = 1,4$
Air	1,4
H2	1,405
He, Kr, Xe	1,66
Ar	1,67
CO2	1,3
SF6	1,09
Gaz d'électrons	$\frac{5}{3} = 1,666\dots$
Gaz de photons	$\frac{4}{3} = 1,333\dots$

Tableau 2.1. Valeur de la constante γ pour différents corps

Pour dériver les équations de la dynamique des gaz compressibles, nous reprenons la méthode de bilan. Nous considérons le cas en dimension un de la figure 2.5. Le volume élémentaire de gaz est $[x_0(t), x_1(t)]$ avec $x'(t, X) = u(t, x(t, X))$, $x(0, X) = X$. La masse de ce volume mobile est

⁶ Bien d'autres lois de pression, ou équations d'état (EOS) sont disponibles. A titre d'exemple citons la loi de Stiffened gaz

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon - \gamma\Pi. \quad (2.7)$$

L'eau, qui n'est pas un gaz, correspond typiquement à $\gamma = 5,5$ et $\Pi = 4921,15$ bars. Une autre loi d'état est la loi de van der Waals

$$p = \frac{a\varepsilon}{\tau - b} - \frac{c}{\tau^2}, \quad a, b, c > 0, \quad \tau = \frac{1}{\rho}, \quad (2.8)$$

où τ est le volume spécifique. La loi de van der Waals est utilisée pour les transitions de phase.

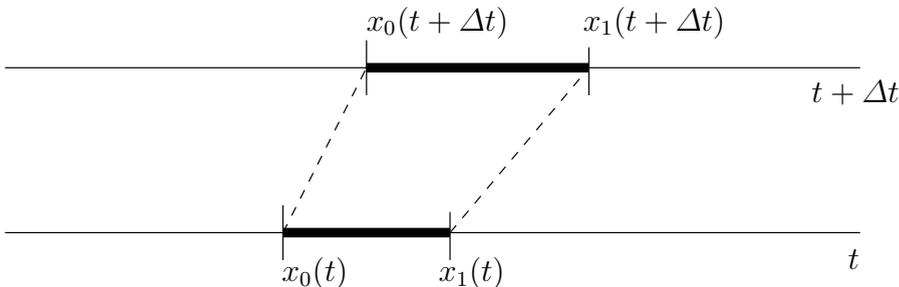


Fig. 2.5. Volume élémentaire de gaz

$$N(x_0(t), x_1(t), t) = \int_{x_0(t)}^{x_1(t)} \rho(t, x) dx.$$

L'impulsion du gaz présent dans le volume est

$$I(x_0(t), x_1(t), t) = \int_{x_0(t)}^{x_1(t)} \rho(t, x) u(t, x) dx.$$

La force qui s'exerce sur le bord du volume mobile de masse constante est $f = -p$. Comme pour le système de St Venant la méthode de bilan fournit deux équations

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2 + p) = 0. \end{cases}$$

La pression étant fonction de la masse volumique et de l'énergie interne, il manque une équation pour fermer le système. Pour construire cette équation manquante, nous considérons l'énergie totale présente dans le volume élémentaire

$$E(x_0(t), x_1(t), t) = \int_{x_0(t)}^{x_1(t)} \rho(t, x) e(t, x) dx.$$

La densité d'énergie totale est $e = \varepsilon + \frac{1}{2}u^2$. Pour un intervalle de temps Δt , la force qui s'exerce sur les bords travaille sur une longueur $\Delta l = u\Delta t$. Le travail de la force est $-p\Delta l = -pu\Delta t$. Nous en déduisons

$$\begin{aligned} E(x_0(t + \Delta t), x_1(t + \Delta t), t + \Delta t) &= E(x_0(t), x_1(t), t) \\ &- \Delta t p(t, x_1(t)) u(t, x_1(t)) + \Delta t p(t, x_0(t)) u(t, x_0(t)) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

D'où en passant à la limite en Δt

$$\frac{d}{dt} E(x_0(t), x_1(t), t) + p(t, x_1(t)) u(t, x_1(t)) - p(t, x_0(t)) u(t, x_0(t)) = 0.$$

Grâce à la formule (2.1), nous obtenons

$$\int_{x_0(t)}^{x_1(t)} \partial_t(\rho e) dx + \int_{x_0(t)}^{x_1(t)} \partial_x(\rho ue + pu) = 0,$$

ou encore

$$\partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho ue + pu) = 0.$$

Au final le système de la dynamique des gaz compressibles en dimension un d'espace est

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho ue + pu) = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Ce système est fermé car p est une fonction de ρ et $\varepsilon = e - \frac{1}{2}u^2$. En dimension deux d'espace le système devient

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) + \partial_y(\rho uv) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv) + \partial_y(\rho v^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho ue + pu) + \partial_y(\rho ve + pv) = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

On note la présence d'une inconnue supplémentaire v car la vitesse a deux composantes. La pression p est une fonction de ρ et $\varepsilon = e - \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$.

2.2 Invariance Galiléenne

Les systèmes de lois de conservation qui dérivent de la mécanique des milieux continus respectent par construction certains principes d'invariance. Parmi eux le principe d'invariance galiléenne joue un rôle central. Une conséquence est qu'il est possible de récrire certains systèmes de lois de conservation sous une autre forme qui, elle aussi, est de type système de lois de conservation.

Définition 1 *Nous dirons qu'un modèle en dimension un d'espace satisfait au principe d'invariance galiléenne si et seulement si les équations prennent la même forme sous l'effet combiné d'un changement de coordonnées d'espace-temps de type translation, $v \in \mathbb{R}$,*

$$t' = t, \quad x' = x + vt, \quad (2.12)$$

et d'un changement de variable qui est dicté par la physique sous-jacente.

La vitesse de translation du référentiel (t', x') par rapport au référentiel (t, x) est $-v$, voir figure 2.6. Les dérivées partielles sont données par les formules de dérivation composée

$$\begin{cases} \partial_t = \partial_{t'} \partial_{t'} + \partial_{x'} \partial_{x'} = \partial_{t'} + v \partial_{x'}, \\ \partial_x = \partial_{x'} \partial_{t'} + \partial_{x'} \partial_{x'} = \partial_{x'} \end{cases} \quad (2.13)$$

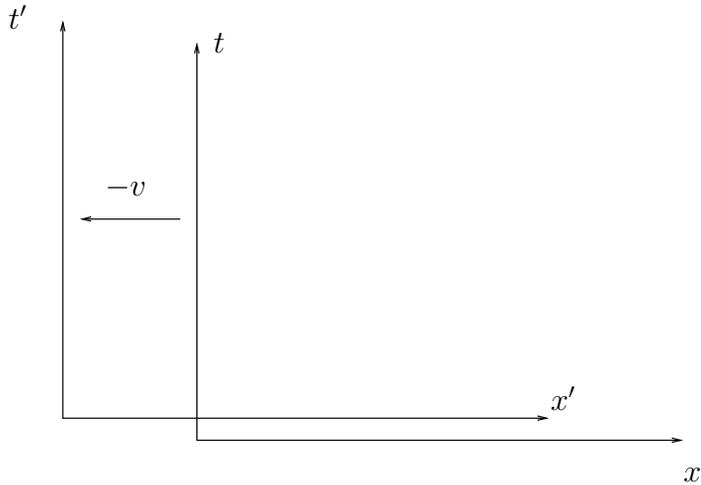


Fig. 2.6. Translation du référentiel

Lemme 1 *Les modèles de trafic routier (2.4), de Saint Venant (2.6) et de la dynamique des gaz compressibles satisfont au principe d'invariance galiléenne.*

Nous utilisons (2.13). Le modèle de trafic routier se réécrit

$$\partial_{t'}\rho + v\partial_{x'}\rho + \partial_{x'}(\rho u(\rho)) = 0.$$

Nous définissons $u'(\rho) = u(\rho) + v$ et obtenons

$$\partial_{t'}\rho + \partial_{x'}(\rho u'(\rho)) = 0.$$

Notons que le changement de fonction en vitesse est bien compatible avec le principe d'addition des vitesses. Donc le modèle de trafic routier satisfait au principe d'invariance galiléenne.

Passons au modèle de Saint Venant (2.6). La première équation devient

$$\partial_{t'}h + \partial_{x'}(hu') = 0, \quad u' = u + v.$$

La deuxième équation se réécrit grâce à (2.13) sous la forme

$$\partial_{t'}(hu) + v\partial_{x'}(hu) + \partial_{x'}(hu^2 + p(h)) = 0, \quad p(h) = \frac{g}{2}h^2.$$

On ajoute $v(\partial_{t'}h + \partial_{x'}(hu')) = 0$. D'où

$$\partial_{t'}(hu') + v\partial_{x'}(hu) + \partial_{x'}(hu^2 + p(h)) + v\partial_{x'}(hu) = 0,$$

puis $\partial_{t'}(hu') + \partial_{x'}(hu'^2 + p(h)) = 0$. Cela montre l'invariance galiléenne du modèle de Saint Venant.

La dynamique des gaz est formellement une extension du système de St Venant. Donc pour les deux premières équations

$$\begin{cases} \partial_{t'} \rho + \partial_{x'}(\rho u') = 0, \\ \partial_{t'}(\rho u') + \partial_{x'}(\rho(u')^2 + p) = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Il suffit de montrer que l'équation d'énergie du système de la dynamique des gaz compressibles est invariante. Nous avons

$$\partial_{t'}(\rho e) + v \partial_{x'}(\rho e) + \partial_{x'}(\rho u e + p u) = 0.$$

Posons $e' = \varepsilon + \frac{1}{2}u'^2 = \varepsilon + \frac{1}{2}u^2 + uv + \frac{1}{2}v^2 = e + uv + \frac{1}{2}v^2$. En combinant avec (2.14) on obtient

$$\partial_t(\rho e') + v \partial_{x'}(\rho e) + \partial_{x'}(\rho u e + p u) + v \partial_{x'}(\rho(u')^2 + p) + \frac{1}{2}v^2 \partial_{x'}(\rho u') = 0.$$

Après réarrangement nous obtenons $\partial_t(\rho e') + \partial_{x'}(\rho u' e' + p u') = 0$. Cela termine la preuve.

2.3 Coordonnées de Lagrange

Nous avons vu qu'il est intéressant et fondamental de pouvoir dériver les modèles (St Venant, gaz compressibles, ...) dans un référentiel qui se déplace avec le fluide. C'est la méthode classique de dérivation des équations de ce type, laquelle utilise les opérateurs de dérivation matérielle $\frac{d}{dt} = \partial_t + u \partial_x$ et dérivation par rapport à l'espace ∂_x . Puis on recombine les équations pour obtenir la formulation Eulérienne du modèle considéré.

On peut exploiter cette idée de manière systématique et plus rigoureuse en utilisant les **coordonnées de Lagrange**, pour distinguer des **coordonnées d'Euler** qui sont celles de l'observateur extérieur (ou du laboratoire). Dans tout ce qui suit les coordonnées de Lagrange sont les coordonnées d'Euler au temps initial

$$x(t = 0, X) = X.$$

Nous verrons que l'opérateur de dérivation temporelle par rapport à X fixé est en fait l'opérateur de dérivation matérielle $\frac{d}{dt}$. L'algèbre pour passer des coordonnées de Lagrange aux coordonnées d'Euler et vice-versa n'est pas complètement évidente comme nous allons le voir. Cela fait apparaître des lois de conservation supplémentaires appelées **identités de Piola**. La présentation qui suit est semblable à celle de [D00]. Elle s'appuie sur une vision géométrique dans laquelle le temps ne joue pas en première approximation. On peut préférer une autre approche très classique aussi, voir par exemple les références [TN92, SH98] au niveau théorique ou [SLS07] pour les applications numériques dans lesquelles des considérations similaires sont développées à partir du gradient de déformation $F = \nabla_X x$. Les identités de Piola sont aussi appelées lois de conservation géométriques.

2.3.1 Changement de coordonnées et lois de conservation

Soit le système stationnaire (le temps a disparu)

$$\nabla \cdot f(U) = 0, \quad (2.15)$$

où $U \in \mathbb{R}^n$ est l'inconnue, $U \mapsto f(U) \in \mathbb{R}^{n \times d}$ est le flux mis sous forme matricielle et $x \in \mathbb{R}^d$ est la coordonnée d'espace. Nous remarquons que (2.15) est équivalent⁷ à

$$\int_{x \in \partial\Omega} f(U) \mathbf{n} d\sigma = 0, \quad \forall \Omega \subset \mathbb{R}^d. \quad (2.16)$$

L'ouvert Ω est **régulier et borné**. Sa frontière est $\partial\Omega$, la normale sortante est $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d$ vecteur unitaire, la mesure au bord est $d\sigma$. Soit le changement de coordonnées **régulier⁸ et inversible** de classe C^2 de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d

$$x \mapsto X(x) \in \mathbb{R}^d. \quad (2.17)$$

La matrice Jacobienne de la transformation inverse est

$$\nabla_X x(X) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right)_{1 \leq i, j \leq d} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial X_d} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial X_d} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_d}{\partial X_1} & \frac{\partial x_d}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial x_d}{\partial X_d} \end{pmatrix},$$

avec $\nabla_X x(Y) = (\nabla_x X(x(Y)))^{-1}$ pour tout $Y \in \mathbb{R}^d$.

Lemme 2 On a la relation⁹

$$\mathbf{n} d\sigma = \text{cof}(\nabla_X x) \mathbf{n}_X d\sigma_X.$$

Par définition $\text{cof}(M) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ est la comatrice, ou matrice des cofacteurs¹⁰, telle que $M^t \text{cof}(M) = \det(M)I$ pour toute matrice $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Si M est inversible

$$\text{cof}(M) = \det(M) \times (M^t)^{-1}.$$

Nous supposons que le bord de Ω est l'isoligne zéro d'une certaine fonction $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \in \partial\Omega \iff \varphi(x) = 0,$$

la fonction φ étant non dégénérée $\nabla\varphi \neq 0$. En supposant que le gradient de φ est orienté vers l'extérieur de Ω la normale sortante est

⁷ La formule de Stokes est $\int_{x \in \Omega} \nabla \cdot f dx = \int_{x \in \partial\Omega} f \mathbf{n} d\sigma$.

⁸ Un affaiblissement important des hypothèses de régularité pour cette transformation aura lieu à la section 4.6.2.

⁹ Relation de nature purement géométrique comme la preuve le met en évidence.

¹⁰ Le coefficient en position (i, j) de la matrice des cofacteurs $\text{cofac}(M) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ est égal à $(-1)^{i+j}$ fois le déterminant de la matrice M à laquelle on a enlevé la colonne j et la ligne i (matrice de taille $d-1 \times d-1$).

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla_x \varphi(x)}{|\nabla_x \varphi(x)|}.$$

Soit $\Omega_X = \{X(x); x \in \Omega\}$ l'image de Ω par le changement de coordonnées. Le bord de Ω_X est

$$y \in \partial\Omega_X \iff \varphi(X^{-1}(y)) = 0.$$

Le gradient de $y \mapsto \varphi(X^{-1}(y))$ donne la normale sortante

$$\mathbf{n}_X = \frac{\nabla_y \varphi(X^{-1}(y))}{|\nabla_y \varphi(X^{-1}(y))|}.$$

Les formules de dérivations composées impliquent

$$\begin{aligned} \nabla_y \varphi(X^{-1}(y)) &= \nabla_y \varphi(x(y)) = \left(\sum_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x(y)) \frac{\partial x_j}{\partial X_i}(x(y)) \right)_{1 \leq i \leq d} \\ &= (\nabla_X x(X))^t(y) \nabla_x \varphi(x(y)). \end{aligned}$$

De ce fait $\mathbf{n}_X = \lambda (\nabla_X x(X))^t(y) \nabla_x \varphi(x(y))$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit que

$$\mathbf{n} d\sigma = \alpha (\nabla_x X(x))^t \mathbf{n}_X d\sigma_X, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Il reste à déterminer le coefficient de proportionnalité réel α . Pour cela nous considérons les points A, B, A_X et B_X de la figure 2.7. Pour des points proches l'un de l'autre, on a

$$B - A \approx (\nabla_X x(X)) (B_X - A_X).$$

On a

$$dV \approx (B - A, \mathbf{n}) d\sigma, \quad dV_X \approx (B_X - A_X, \mathbf{n}_X) d\sigma_X,$$

où dV est un volume élémentaire et $d\sigma$ est la mesure élémentaire de surface. Réunissant l'expression de $\mathbf{n} d\sigma$ en fonction de $\mathbf{n}_X d\sigma_X$, et les expressions de dV et dV_X en fonction de $B - A$ et $B_X - A_X$ nous obtenons

$$dV \approx \left((\nabla_X x) (B_X - A_X), \alpha (\nabla_x X)^t \mathbf{n}_X d\sigma_X \right) \approx \alpha (B_X - A_X, \mathbf{n}_X) d\sigma_X.$$

Or nous avons aussi¹¹ $dV \approx |\nabla_X x| dV_X \approx |\nabla_X x| (B_X - A_X, \mathbf{n}_X) d\sigma_X$. Après simplifications et en passant à la limite $B \rightarrow A$ nous obtenons $\alpha = |\nabla_X x|$. Cela termine la preuve.

¹¹ C'est la formule de changement de coordonnées dans les intégrales

$$\int_{x \in \Omega} f(X(x)) J dx = \int_{X \in \Omega} f(X) dX, \quad J = |\nabla_X x|$$

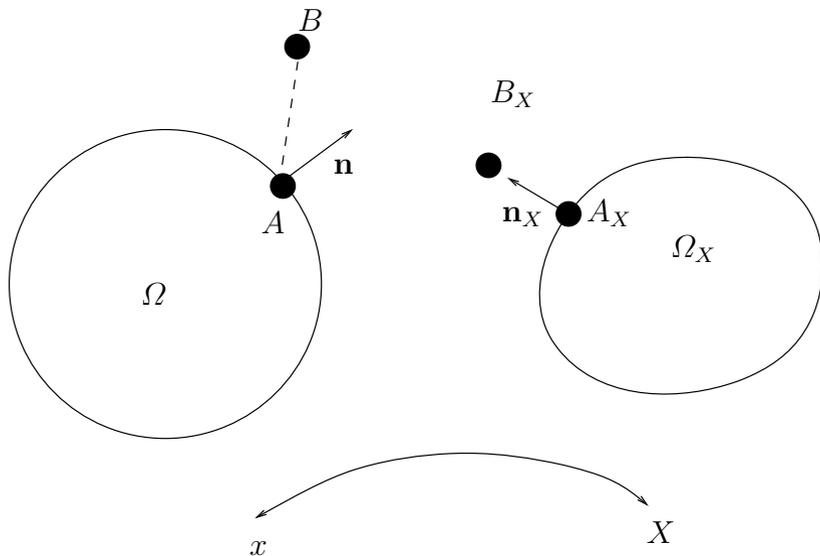


Fig. 2.7. Changement de coordonnées d'espace. Pour simplifier le vecteur qui va de A_X à B_X est aligné avec la normale \mathbf{n}_X .

Théorème 2.1. *Le système de lois de conservation $\nabla_x \cdot f(U(x)) = 0$ est équivalent au système de lois de conservation*

$$\nabla_X \cdot [f(U(x(X))) \text{cof}(\nabla_X x)] = 0. \tag{2.18}$$

Nous avons de plus l'identité de Piola

$$\nabla_X \cdot [\text{cof}(\nabla_X x)] = 0. \tag{2.19}$$

On a la suite d'égalités

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \nabla_x \cdot (f(U)) \, dx = \int_{\partial\Omega} f(U) \mathbf{n} \, d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega_X} f(U) \text{cof}(\nabla_X x) \mathbf{n}_X \, d\sigma_X = \int_{\Omega_X} \nabla_X \cdot (f(U) \text{cof}(\nabla_X x)) \, dX. \end{aligned}$$

Comme c'est vrai pour tout Ω , cela montre (2.18). L'identité de Piola s'obtient en considérant $f = I$ dans (2.18). La preuve est terminée.

L'identité de Piola peut apparaître à première vue comme une relation surabondante. Elle est en fait **nécessaire**. Un argument en faveur de la nécessité de l'identité de Piola consiste à remarquer que l'équation (2.18) fait apparaître des inconnues supplémentaires ($\text{cof}(\nabla_X x)$) qui nécessitent donc des équations supplémentaires (l'identité de Piola).

On peut résumer l'égalité (2.18) ainsi : **la structure de loi de conservation est invariante par changement de coordonnées d'espace.**

2.3.2 Dynamique des gaz lagrangienne en dimension un d'espace

Nous sommes en mesure de dériver les équations de la dynamique des gaz en coordonnées de Lagrange. Nous considérons d'abord le cas de la dimension un pour le système (2.10) que nous récrivons sous la forme d'une divergence temps-espace

$$\nabla_{tx} \cdot (U, f(U)) = 0$$

avec $U = (\rho, \rho u, \rho e)^t$ et $f(U) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u e + pu)^t$. La transformation temps-espace est

$$t' = t, \quad \frac{\partial x(t', X)}{\partial t'} = u(t', x(t', X)).$$

Cette transformation est régulière sous des hypothèses ad-hoc sur la régularité de la vitesse u . Appliquons les formules précédentes. La matrice Jacobienne de la transformation est

$$\nabla_{(t', X)}(t, x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & J \end{pmatrix}, \quad J = \frac{\partial x}{\partial X}.$$

La matrice des cofacteurs est $\text{cof}(\nabla_{(t', X)}(t, x)) = \begin{pmatrix} J & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'équation (2.18)

$$\nabla_{t', X} \cdot \left[(U, f(U)) \begin{pmatrix} J & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

s'écrit sous forme étendue

$$\begin{cases} \partial_{t'}(\rho J) = 0, \\ \partial_{t'}(\rho u J) + \partial_X p = 0, \\ \partial_{t'}(\rho e J) + \partial_X(pu) = 0. \end{cases}$$

L'identité de Piola (2.19) devient¹² $\partial_{t'} J - \partial_X u = 0$. A présent nous remplaçons t' par t pour simplifier les notations. L'ensemble de ces quatre lois de conservation forme un système fermé

$$\begin{cases} \partial_t(\rho J) = 0, \\ \partial_t(\rho u J) + \partial_X p = 0, \\ \partial_t(\rho e J) + \partial_X(pu) = 0, \\ \partial_t J - \partial_X u = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

L'interprétation physique des équations (2.20) est la suivante : un volume élémentaire de masse constante est soumis à la loi de Newton

$$ma = f$$

avec $m = \rho(0, X)$, $a = \partial_t u$ et $f = \partial_X p$. Le travail des forces est déterminé par $-\partial_X(pu)$.

¹² On retrouve directement cette relation en dérivant $\partial_{t'} x(t', X) = u$ par rapport à X .

Théorème 2.2. *Nous supposons que la masse volumique est partout strictement positive. Définissons la variable de masse $dm = \rho(0, X)dX$ et le volume spécifique $\tau = \frac{1}{\rho}$. Le système (2.20) de la dynamique des gaz se réécrit en coordonnées de Lagrange sous la forme*

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_m u = 0, \\ \partial_t u + \partial_m p = 0, \\ \partial_t e + \partial_m (pu) = 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

On intègre directement la première équation de (2.20) donc $(\rho J)(t, X) = \rho(0, X)$ est indépendant de t . Cela permet de sortir ρJ de la dérivation temporelle et fournit les deux dernières équations de (2.21). De même pour $J = (\rho J)\tau$.

Les opérateurs différentiels ∂_t et ∂_m sont **invariants par toute transformation galiléenne**. Pour le montrer nous allons utiliser une notation un peu lourde mais sans équivoque. La notation $\partial_{a|b}$ indiquera la dérivation partielle par rapport à la variable a , la variable b étant fixée. On trouve cette notation dans certains ouvrages de mécanique. Son emploi permet ici de ne pas faire de confusion entre $\partial_{t|x}$ (x fixé) et $\partial_{t|m}$ (m fixé, ou encore X fixé). On a alors d'après (2.13)

$$\begin{cases} \partial_{t|m} = \partial_{t|x} + u\partial_{x|t} = \partial_{t'|x'} + (u+v)\partial_{x'|t'} = \partial_{t'|x'} + u'\partial_{x'|t'} = \partial_{t'|m'}, \\ \partial_{m|t} = \frac{1}{\rho}\partial_{x|t} = \frac{1}{\rho}\partial_{x'|t'} = \partial_{m'|t'}. \end{cases}$$

Donc $\partial_t = \partial_{t'}$ et $\partial_m = \partial_{m'}$, ce qui montre l'invariance et justifie la dénomination de dérivation matérielle aussi employée pour $\partial_{t|m} = \partial_t + u\partial_x = \frac{d}{dt}$.

2.3.3 Dynamique des gaz lagrangienne en dimension deux d'espace

On part du système **eulérien** en dimension deux d'espace (2.11). Posons

$$A = \partial_X x, \quad B = \partial_X y, \quad L = \partial_Y x, \quad M = \partial_Y y. \quad (2.22)$$

La matrice Jacobienne de transformation espace-temps est

$$\frac{\partial(t, x, y)}{\partial(t, X, Y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & A & L \\ v & B & M \end{pmatrix}$$

avec

$$\text{cofac} \left(\frac{\partial(t, x, y)}{\partial(t, X, Y)} \right) = \begin{pmatrix} J - uM + vL & uB - vA \\ 0 & M & -B \\ 0 & -L & A \end{pmatrix}, \quad J = AM - BL.$$

L'algèbre de l'équation (2.18) se réduit à

$$\begin{pmatrix} \rho & \rho u & \rho v \\ \rho u & \rho u^2 + p & \rho uv \\ \rho v & \rho uv & \rho v^2 + p \\ \rho e & \rho ue + pu & \rho ve + pv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J - uM + vL & uB - vA \\ 0 & M & -B \\ 0 & -L & A \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \rho J & 0 & 0 \\ \rho u J & pM & -pB \\ \rho v J & -pL & pA \\ \rho e J & puM - pvL & -puB + pvA \end{pmatrix}.$$

D'où tous calculs faits le système **lagrangien** qui est constitué de la définition du changement de coordonnées Lagrange Euler

$$\begin{cases} \partial_t x(t, X, Y) = u, & x(0, X, Y) = X, \\ \partial_t y(t, X, Y) = v, & y(0, X, Y) = Y, \end{cases} \quad (2.23)$$

des équations de la dynamique des gaz (2.11) écrites en coordonnées (X, Y)

$$\begin{cases} \partial_t(\rho J) = 0, \\ \partial_t(\rho Ju) + \partial_X(pM) + \partial_Y(-pB) = 0, \\ \partial_t(\rho Jv) + \partial_X(-pL) + \partial_Y(pA) = 0, \\ \partial_t(\rho Je) + \partial_X(puM - pvL) + \partial_Y(pvA - puB) = 0, \end{cases} \quad (2.24)$$

et des relations de compatibilité (identité de Piola temps-espace)

$$\begin{cases} \partial_t J - \partial_X(uM - vL) - \partial_Y(vA - uB) = 0, \\ \partial_X M - \partial_Y B = 0, \\ -\partial_X L + \partial_Y A = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Les deux dernières équations de compatibilité sont triviales, la première ne l'est pas.

En dimension deux on ne peut pas définir de variable de masse comme cela a été fait en dimension un d'espace. Si cela était possible cela reviendrait à simplifier la structure du système grâce à deux variables de masse $(X, Y) \mapsto (\alpha, \beta)$ définies par

$$\partial_X = \rho_0 \partial_\alpha \text{ et } \partial_Y = \rho_0 \partial_\beta.$$

Les formules de dérivation composées impliquent alors

$$\begin{cases} \rho_0 \partial_\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial X} \partial_\alpha + \frac{\partial \beta}{\partial X} \partial_\beta, \\ \rho_0 \partial_\beta = \frac{\partial \alpha}{\partial Y} \partial_\alpha + \frac{\partial \beta}{\partial Y} \partial_\beta \end{cases}$$

Par identification

$$\frac{\partial \alpha}{\partial X} = \rho_0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial Y} = \frac{\partial \beta}{\partial X} = 0 \text{ et } \frac{\partial \beta}{\partial Y} = \rho_0.$$

Donc

$$\partial_Y \rho_0 = \partial_Y \left(\frac{\partial \alpha}{\partial X} \right) = \partial_X \left(\frac{\partial \alpha}{\partial Y} \right) = 0.$$

De même $\partial_X \rho_0 = 0$. C'est donc que $\rho_0(X, Y)$ est une fonction constante. C'est le cas évident qui ne présente pas d'intérêt particulier.

2.3.4 Formulation de Hui

Cette formulation des équations de la dynamique des gaz en coordonnées de Lagrange est légèrement différente de la précédente. Elle utilise des équations supplémentaires pour les composantes du gradient de déformation. A partir de (2.22) on a

$$\begin{cases} \partial_t A = \partial_X u, \\ \partial_t B = \partial_X v, \\ \partial_t L = \partial_Y u, \\ \partial_t M = \partial_Y v. \end{cases} \quad (2.26)$$

Le système de Hui est constitué du système (2.26) qui est appelé partie géométrique, et du système (2.24) qui est appelé partie physique. L'équation algébrique $J = AM - BL$ montre que le système de Hui est un système fermé.

En comparant avec la formulation précédente, cela montre le fait remarquable suivant : **il n'y a pas unicité de la formulation des équations de la dynamique des gaz compressibles en coordonnées de Lagrange multidimensionnelle.**

2.3.5 Dynamique des gaz lagrangienne en dimension trois d'espace

Le gradient de déformation en dimension trois d'espace est

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \partial_X x & \partial_Y x & \partial_Z x \\ \partial_X y & \partial_Y y & \partial_Z y \\ \partial_X z & \partial_Y z & \partial_Z z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & L & P \\ B & M & Q \\ C & N & R \end{pmatrix}.$$

Posons $J = \det(\mathbb{J})$ et

$$\text{cofac}(\mathbb{J}) = \begin{pmatrix} MR - NQ & -BR + CQ & BN - CM \\ -LR + NP & AR - CP & -AN + CL \\ LQ - MP & -AQ + BP & AM - BM \end{pmatrix}.$$

La matrice Jacobienne de transformation lagrangienne espace-temps est

$$\frac{\partial(t, x, y, z)}{\partial(t, X, Y, Z)} = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 \\ \mathbf{u} & | & \mathbb{J} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\text{cofac} \left(\frac{\partial(t, x, y, z)}{\partial(t, X, Y, Z)} \right) = \begin{pmatrix} J & | & -\mathbf{u}^t \text{cofac}(\mathbb{J}) \\ 0 & | & \text{cofac}(\mathbb{J}) \end{pmatrix}.$$

L'algèbre de l'équation (2.18) se réduit à

$$\begin{pmatrix} \rho & | & \mathbf{u}^t \\ \rho \mathbf{u} & | & \rho \mathbf{u} \mathbf{u}^t + p \mathbb{I} \\ \rho e & | & \rho e \mathbf{u}^t + p \mathbf{u}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & | & -\mathbf{u}^t \text{cofac}(\mathbb{J}) \\ 0 & | & \text{cofac}(\mathbb{J}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho J & | & 0 \\ \rho \mathbf{u} J & | & p \text{cofac}(\mathbb{J}) \\ \rho e J & | & p \mathbf{u}^t \text{cofac}(\mathbb{J}) \end{pmatrix}.$$

Le système de la dynamique des gaz compressible **lagrangien** en dimension trois d'espace est constitué de la définition du changement de coordonnées Lagrange Euler

$$\partial_t \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) = \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0, \mathbf{X}) = \mathbf{X}, \quad (2.27)$$

des équations de la dynamique des gaz écrites en coordonnées $\mathbf{X} = (X, Y, Z)$

$$\nabla_{t, \mathbf{X}} \cdot \left(\begin{array}{c|c} \rho J & 0 \\ \hline \rho \mathbf{u} J & p \operatorname{cofac}(\mathbb{J}) \\ \rho e J & p \mathbf{u}^t \operatorname{cofac}(\mathbb{J}) \end{array} \right) = 0 \quad (2.28)$$

et des relations de compatibilité (identité de Piola temps-espace)

$$\nabla_{t, \mathbf{X}} \cdot \left(\begin{array}{c|c} J & -\mathbf{u}^t \operatorname{cofac}(\mathbb{J}) \\ \hline 0 & \operatorname{cofac}(\mathbb{J}) \end{array} \right) = 0. \quad (2.29)$$

La première équation de (2.29) est non triviale. En dimension trois on ne peut pas définir de variable de masse.

2.4 Système linéairement bien posé et hyperbolicité

La **stabilité** est une notion absolument essentielle pour l'étude des systèmes physiques évolutifs. Le premier pas dans l'étude des solutions d'un système non linéaire de lois de conservation consiste en une étude de stabilité linéaire¹³. Nous considérons pour cela une petite perturbation autour d'une donnée constante. Dans le cas où cette perturbation linéaire est stable au cours du temps nous dirons que le système est linéairement stable. Cette notion donne immédiatement accès aux vitesses d'ondes.

2.4.1 Stabilité linéaire en dimension un d'espace

Plus précisément nous considérons le système de lois de conservation

$$\partial_t U + \partial_x f(U) = 0, \quad U, f(U) \in \mathbb{R}^n. \quad (2.30)$$

¹³ C'est un premier pas vers le problème de Cauchy et le problème de Riemann. En dimension un d'espace le problème de Cauchy concerne l'existence et l'unicité de la solution de l'équation

$$\partial_t U(t, x) + \partial_x f(U(t, x)) = 0$$

pour une donnée initiale $U(0, x) = U_0(x)$. Le problème de Riemann suppose que la donnée initiale est d'un type particulier : U_0 est une fonction discontinue

$$U_0(x) = U_G \text{ pour } x < 0, \quad U_0(x) = U_D \text{ pour } x > 0.$$

Nous faisons l'hypothèse que le flux est différentiable et posons

$$A(U_0) = \nabla_U f(U)(U_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad U_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (2.31)$$

Soit U_ε une solution perturbée autour d'une valeur U_0 , que nous prenons sous la forme

$$U_\varepsilon(t, x) = U_0 + \varepsilon V(t, x) + o(\varepsilon). \quad (2.32)$$

Nous développons l'équation $\partial_t U_\varepsilon + \partial_x f(U_\varepsilon) = 0$ en puissance de ε

$$\begin{aligned} &(\partial_t U_0 + \partial_x f(U_0)) + \varepsilon (\partial_t V + \partial_x (A(U_0)V)) + o(\varepsilon) \\ &= \varepsilon (\partial_t V + \partial_x (A(U_0)V)) + o(\varepsilon) = 0. \end{aligned}$$

Négligeant les termes d'ordre supérieur, V est solution d'une équation **linéaire**

$$\partial_t V(t, x) + A \partial_x V(t, x) = 0, \quad V(t, x) \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (2.33)$$

Implicitement $A = A(U_0) = \nabla_U f(U_0)$ est la Jacobienne évaluée en un état donné U_0 . L'étude de la stabilité linéaire consiste en l'étude des solutions bornées de cette équation. Une approche classique consiste à se contenter des solutions en mode de Fourier-Laplace

$$V(t, x) = e^{i(kx - \omega t)} W, \quad W \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Le vecteur W est solution de l'équation aux valeurs propres

$$AW = \lambda W, \quad W \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda = \frac{\omega}{k} \text{ est a priori complexe.} \quad (2.34)$$

Définition 2 *Nous dirons que le système (2.33) est **fortement mal posé** ssi il existe des valeurs propres λ non réelles au problème (2.34).*

Ici fortement mal posé est synonyme de fortement instable. Pour les matrices réelles, λ est valeur propre si et seulement si $\bar{\lambda}$ est valeur propre. Donc si le problème aux valeurs propres (2.34) possède une valeur propre non réelle λ , alors λ ou $\bar{\lambda}$ fournit une solution exponentiellement croissante en temps en $e^{-i\omega t} = e^{-i\lambda k t}$. Le taux de croissance est d'autant plus grand que k ou $-k$ est grand. A la limite k ou $-k$ est infini. Comme λ est indépendant de k , le taux de croissance des petites perturbations très oscillantes est arbitrairement grand. Ceci est la signature d'un problème mal posé, au sens où des perturbations arbitrairement petites ont une influence arbitrairement grande. La définition complémentaire caractérise le cas où les perturbations restent contrôlées.

Définition 3 *Nous dirons que le système (2.33) est **bien posé** si et seulement si les valeurs propres λ du problème (2.34) sont toutes réelles.*

Les solutions se récrivent $V(t, x) = e^{ik(x - \lambda t)} W$, $W \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc la valeur propre λ est la vitesse de déplacement du mode de Fourier.

Définition 4 *Pour un système bien posé les valeurs propres sont les vitesses d'ondes.*

Nous verrons que pour la dynamique des gaz compressibles, la vitesse d'onde est reliée à la vitesse du son.

Définition 5 *Nous dirons que le système (2.33) est faiblement bien posé ssi il est bien posé et l'ensemble des vecteurs propres est incomplet (il manque des vecteurs propres).*

Un phénomène particulier existe dans le cas faiblement bien posé, lequel phénomène n'existe pas dans le cas fortement bien posé. En effet pour un système faiblement bien posé, la théorie générale des matrices implique l'existence de deux vecteurs non nuls $W \in \mathbb{R}^n$ et $\widehat{W} \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$AW = \lambda W \text{ et } A\widehat{W} = \lambda\widehat{W} + W.$$

La valeur propre double est $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme auparavant nous construisons à partir de W une première solution de type Fourier $V(t, x) = e^{ik(x-\lambda t)}W$ pour tout $k \in \mathbb{R}$ pour l'équation $\partial_t V + A\partial_x V = 0$. Le point nouveau est l'existence d'une deuxième solution de type Fourier. Soit la fonction

$$\widehat{V}(t, x) = e^{ik(x-\lambda t)} (\widehat{W} - iktW).$$

Or

$$\partial_t \widehat{V} + A\partial_x \widehat{V} = ik e^{ik(x-\lambda t)} \left(-\lambda(\widehat{W} - iktW) - W + A(\widehat{W} - iktW) \right) = 0.$$

Donc la fonction \widehat{V} est aussi solution de $\partial_t \widehat{V} + A\partial_x \widehat{V} = 0$. Le taux de croissance en temps de ce type de solution est affine mais indépendant du nombre d'onde k . La situation est très différente du cas fortement mal posé. On ne considère pas que cette situation relève d'une instabilité physique.

Définition 6 *Nous dirons que le système (2.33) est fortement bien posé ou encore hyperbolique ssi il est bien posé et l'ensemble des vecteurs propres est complet (c'est à dire qu'il y a n vecteurs propres indépendants).*

Un critère simple et pratique pour la théorie : si toutes les valeurs propres sont distinctes alors l'ensemble des vecteurs propres est complet. Nous dirons alors que le système est **strictement hyperbolique**. Pour les systèmes qui viennent de la mécanique des milieux continus, nous verrons cependant au chapitre 5 que le cas des vitesses d'ondes multiples (i.e. des valeurs propres doubles) est très courant. Des exemples de systèmes linéaires sont présentés dans la table (2.2).

Pour un système de lois de conservation non linéaire, nous retiendrons la définition

$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$	fortement mal posé
$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$	faiblement bien posé
$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$	fortement bien posé, hyperbolique

Tableau 2.2. Systèmes linéaires

Définition 7 Nous dirons que le système non linéaire de lois de conservation (2.30) est **hyperbolique** dans un certain domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ssi le système linéarisé (2.33) est hyperbolique pour tout $U_0 \in \Omega$. Si de plus toutes les valeurs propres du linéarisé sont distinctes, nous dirons que le système non linéaire est **strictement hyperbolique**.

Par définition les équations scalaires ($\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$, $u \in \mathbb{R}$) sont toutes hyperboliques pour un flux $u \mapsto f(u)$ réel et dérivable. La définition prend son sens pour les systèmes d'équations.

2.4.2 Stabilité linéaire en dimension supérieure

L'étude de la stabilité linéaire en dimension supérieure d'espace consiste le plus souvent à se ramener à la dimension un d'espace. Considérons par exemple un système en dimension deux d'espace

$$\partial_t U + \partial_x f(U) + \partial_y g(U) = 0 \quad (2.35)$$

dont les flux $U \mapsto f(U), g(U)$ sont différentiables. On se ramène à la dimension un d'espace en supposant que U est invariant dans la direction y' (qui s'obtient par une rotation des axes)

$$\begin{cases} x' = \cos \theta x + \sin \theta y, \\ y' = -\sin \theta x + \cos \theta y. \end{cases} \iff \begin{cases} x = \cos \theta x' - \sin \theta y', \\ y = \sin \theta x' + \cos \theta y'. \end{cases}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

L'hypothèse d'invariance s'écrit $\partial_{y'|x'} U = 0$ ou encore

$$U(t, x, y) = U_\theta(t, x').$$

On est alors ramené au cas de la dimension un d'espace dans la direction x'

$$\partial_t U_\theta + \partial_{x'} f_\theta(U_\theta) = 0, \quad f_\theta(U_\theta) = \cos \theta f(U_\theta) + \sin \theta g(U_\theta). \quad (2.36)$$

Définition 8 Nous dirons que le système en dimension deux d'espace (2.35) est linéairement bien posé (resp. mal posé, faiblement bien posé) si et seulement si le système en dimension un d'espace (2.36) est linéairement bien posé (resp. mal posé, faiblement bien posé) pour toute valeur de $\theta \in \mathbb{R}$.

Pour établir le caractère linéairement bien posé d'une système donné, il suffit de ce fait d'étudier l'équation aux valeurs propres

$$A_\theta W = \lambda W, \quad W \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda = \frac{\omega}{k} \text{ est a priori complexe} \quad (2.37)$$

avec

$$A_\theta = \cos \theta A + \sin \theta B, \quad A = \nabla_U f(U), \quad B = \nabla_U g(U).$$

En pratique deux cas se présentent. Le **premier cas** correspond aux systèmes qui sont eux-mêmes invariants par rapport aux rotations des coordonnées d'espace. Le système de la dynamique des gaz eulérienne est de ce type. Dans ce cas l'étude de la stabilité en dimension supérieure n'apporte pas d'information supplémentaire par rapport à la dimension un d'espace. Le **deuxième cas** correspond aux systèmes dont l'invariance par rapport aux rotations des coordonnées d'espace est plus subtile à étudier. Le système de la dynamique des gaz lagrangienne est de ce type. Ces deux cas sont détaillés dans la section suivante.

$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$	faiblement bien posé
$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$ plus $\partial_x u = 0$ à $t = 0$	fortement bien posé

Tableau 2.3. Un exemple de système linéaire faiblement bien posé au sens de la définition 5, mais fortement bien posé pour une donnée initiale bien choisie

Cependant la définition 8 n'est pas nécessairement bien adapté à l'étude de la stabilité linéaire en dimension supérieure. En effet l'approche de stabilité linéaire en dimension un d'espace proposée considère des perturbations petites mais **quelconques**. Voir l'équation (2.32). Dans le cas où des contraintes de type divergence font partie intégrante du système, l'étude des petites perturbations doit respecter ce principe pour que le sens physique soit correct. Énoncé autrement il nous faudrait alors ajouter des conditions de divergence nulle pour les petites perturbations admissibles, ce qui modifierait bien sûr l'analyse de stabilité du système en dimension une d'espace. Voir la table 2.3

pour un exemple simple. Pour cet exemple on a $\partial_x u = 0$ à $t = 0$. Comme $\partial_t u = 0$ alors $\partial_x u = 0$ pour tout temps $t > 0$. Donc $v(t, x) = v(0, x)$.

2.5 Exemples de calcul des vitesses d'onde

Le trafic routier

Soit l'équation du trafic routier (2.4) linéarisée autour d'une densité de référence ρ_0 : $\rho_\varepsilon(t, x) = \rho_0 + \varepsilon\mu(t, x) + o(\varepsilon)$. Au premier ordre l'équation pour la perturbation linéaire est

$$\partial_t \mu + a \partial_x \mu = 0, \quad a = u_{\max} \left(1 - 2 \frac{\rho_0}{\rho_{\max}} \right).$$

La vitesse d'onde est $\lambda = a$. La solution est $\mu(t, x) = \mu(x - at)$. Soit ρ_c la densité critique

$$\rho_c = \frac{\rho_{\max}}{2}.$$

Pour une densité de véhicule $\rho < \rho_c$ alors $a > 0$ et inversement pour $\rho > \rho_c$ alors $a < 0$. Il s'ensuit que les petites perturbations remontent en sens inverse de la circulation pour une densité forte et avancent dans le même sens que les véhicules pour une densité faible. Cela introduit une distinction entre la vitesse des véhicules qui sont des particules matérielles et la vitesse des petites perturbations en densité qui ne sont pas des particules matérielles. Voir la figure 2.8.

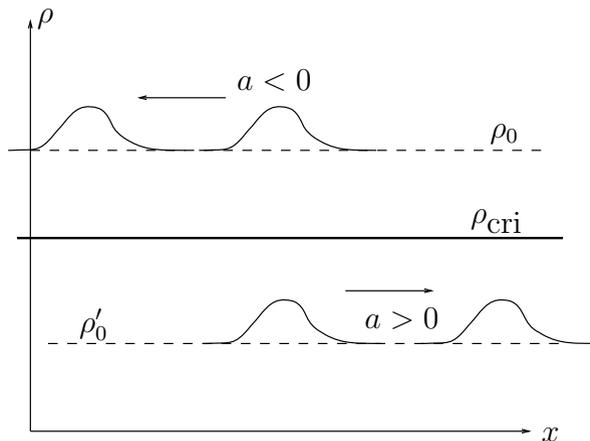


Fig. 2.8. Petites perturbations pour le trafic routier : $\rho'_0 < \rho_c < \rho_0$

Le système de St Venant

Lemme 3 *Le flux du modèle de Saint Venant (2.6) est différentiable pour $h \neq 0$. Le modèle est strictement hyperbolique pour $h > 0$. Il est linéairement fortement mal posé pour $h < 0$.*

Remarquons que $h < 0$ correspond à des hauteurs d'eau strictement négatives qui n'ont pas de réalité physique. Posons $a = h$ et $b = hu$. Le flux du modèle (2.6) est $f(a, b) = \begin{pmatrix} b \\ \frac{b^2}{a} + \frac{g}{2}a^2 \end{pmatrix}$. On a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b^2}{a^2} + ga & 2\frac{b}{a} \end{pmatrix}, \quad \text{tr}(A) = \frac{2b}{a} = 2u, \quad \det(A) = \frac{b^2}{a^2} - ga = u^2 - gh.$$

Les valeurs propres sont solutions de $\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$. D'où

$$\lambda = \frac{2u \pm \sqrt{(2u)^2 - 4(u^2 - gh)}}{2} = u \pm c, \quad c = \sqrt{gh}.$$

Pour $h > 0$ les valeurs sont distinctes donc le système est strictement hyperbolique. Finalement $h < 0$ implique $c \in i\mathbb{R}^*$. Donc les valeurs propres sont complexes conjuguées et le système est linéairement fortement mal posé¹⁴.

On retiendra que plus la hauteur d'eau h est grande, plus la vitesse c est grande. En supposant que la hauteur d'eau dans l'océan est de 4000 m, on obtient l'ordre de grandeur de la vitesse de propagation des tsunamis dans l'océan

$$c \approx \sqrt{9.81 \times 4000} \approx 200 \text{ms}^{-1} = 720 \text{km h}^{-1}.$$

La dynamique des gaz compressibles en dimension un

Lemme 4 *Soit le système de la dynamique des gaz compressibles (2.10) avec la loi de pression de gaz parfait polytropique (2.9) pour une masse volumique positive ou nulle. Alors : a) le flux est différentiable ssi $\rho > 0$, et b) le modèle est strictement hyperbolique pour $\varepsilon > 0$. Il est linéairement fortement mal posé pour $\varepsilon < 0$.*

Le signe de la masse volumique ne joue pas de rôle. En effet on peut changer ρ en $-\rho$ formellement sans problème (avec $\rho u \rightarrow -\rho u$ et $\rho e \rightarrow -\rho e$). Cela est dû à la loi de gaz parfait. Pour d'autres lois d'états l'hyperbolicité peut dépendre

¹⁴ Bien que cela ne corresponde pas à la définition choisie, nous pouvons étudier la limite de la matrice Jacobienne du système de St Venant pour $h \rightarrow 0^+$. Soit $A_0 = \lim_{h \rightarrow 0^+} A$. Alors $A_0 \neq uI_d$. Donc A_0 n'est pas diagonalisable et ne peut *a fortiori* posséder deux vecteurs propres. Il s'ensuit que même en étendant la notion d'hyperbolicité, on aboutirait à la même conclusion : le système ne possède pas la propriété de stabilité linéarisée de la définition 6 pour $h = 0$.

de ρ . **En tout état de cause, les données physiques correspondent à $\rho \geq 0$.**

Posons $a = \rho$, $b = \rho u$ et $c = \rho e$. Le flux du modèle est

$$f(a, b, c) = \begin{pmatrix} \frac{b^2}{a} + (\gamma - 1) \left(c - \frac{b^2}{2a} \right) = \frac{3-\gamma}{2} \frac{b^2}{a} + (\gamma - 1)c \\ \frac{bc}{a} + (\gamma - 1) \left(\frac{bc}{a} - \frac{b^3}{2a^2} \right) = \gamma \frac{bc}{a} - \frac{\gamma-1}{2} \frac{b^3}{a^2} \end{pmatrix}.$$

La matrice Jacobienne du flux est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3-\gamma}{2} \frac{b^2}{a^2} & (3-\gamma) \frac{b}{a} & (\gamma-1) \\ -\gamma \frac{bc}{a^2} + (\gamma-1) \frac{b^3}{a^3} & \gamma \frac{c}{a} - \frac{3\gamma-3}{2} \frac{b^2}{a^2} & \gamma \frac{b}{a} \end{pmatrix}.$$

Les invariants de A sont¹⁵

$$\text{tr}(A) = 3 \frac{b}{a} = 3u, \quad \Delta_2(A) = \frac{\gamma^2 - \gamma + 6}{2} \frac{b^2}{a^2} - \gamma(\gamma-1) \frac{c}{a} = 3u^2 - \gamma(\gamma-1)\varepsilon u$$

et

$$\det(A) = \frac{\gamma^2 - \gamma + 2}{2} \frac{b^3}{a^3} - \gamma(\gamma-1) \frac{bc}{a^2} = u^3 - \gamma(\gamma-1)\varepsilon.$$

Le problème aux valeurs propres est

$$\lambda^3 - 3u\lambda^2 + (3u^2 - \gamma(\gamma-1)\varepsilon)\lambda - u^3 + \gamma(\gamma-1)\varepsilon = 0.$$

Une valeur propre évidente est $\lambda = u$. D'où

$$(\lambda - u)(\lambda^2 - 2u\lambda + u^2 - \gamma(\gamma-1)\varepsilon) = 0.$$

Donc les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c, \quad c = \sqrt{\gamma(\gamma-1)\varepsilon}.$$

Pour $\varepsilon > 0$ le système est strictement hyperbolique et pour $\varepsilon < 0$ il est linéairement fortement mal posé¹⁶.

Application numérique

Pour un gaz parfait on a $c = \sqrt{\gamma(\gamma-1)\varepsilon} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$. Cette loi relie 3 grandeurs macroscopiques ρ, p, c à une grandeur γ qui est fonction de la structure

¹⁵ $\Delta_2(A)$ est la somme des mineurs de taille deux.

¹⁶ Même remarque que pour le système de St Venant des eaux peu profondes. Pour $\varepsilon = 0$ et $u \neq 0$ la limite $\rho \rightarrow 0^+$ de la matrice Jacobienne n'est jamais identique à uI . Bien que toutes les valeurs propres tendent vers la même limite, la matrice Jacobienne limite n'est pas proportionnelle à l'identité.

microscopique du gaz. Deux grandeurs macroscopiques ρ et p se mesurent par des expériences statiques et une c se mesure par une expérience dynamique. Cela donne lieu à une application numérique. La masse volumique de l'air au sol est

$$\rho = 1.28 \times 10^3 \text{ gm}^{-3}.$$

La pression de l'air au sol est

$$\begin{aligned} p &= 1 \text{ atm} = 1.013 \text{ bar} = 1.013 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2} \\ &= 1.013 \times 10^5 (\text{kgm}^2\text{s}^{-2}) \text{ m}^{-2} = 1.013 \times 10^8 \text{ gm}^{-1}\text{s}^{-2}. \end{aligned}$$

Donc

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \approx 332.88 \text{ ms}^{-1}.$$

En suivant Newton et Poisson on aurait pu négliger la dépendance de la pression par rapport à la température et à se contenter d'une approximation isotherme (loi de Boyle)

$$p \approx C\rho.$$

En adaptant le calcul des ondes pour le système de St Venant, on trouverait

$$c \approx \sqrt{C} = \sqrt{\frac{p}{\rho}} \approx 281.31 \text{ ms}^{-1}.$$

qui bien sûr ne correspond pas aux mesures. Cette application numérique constitue en elle-même une justification *a posteriori* de l'hypothèse de gaz parfait $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$.

La dynamique des gaz compressibles en dimension supérieure

Nous considérons le système de la dynamique des gaz compressible en dimension deux d'espace (2.11) et étudions la stabilité linéaire. Supposons, comme cela est proposé à la section 2.4.2 que la solution soit invariante dans la direction

$$y' = -\sin \theta x + \cos \theta y.$$

L'équation (2.36) s'écrit ($x' = \cos \theta x + \sin \theta y$)

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix} + \partial_{x'} \begin{pmatrix} \rho(\cos \theta u + \sin \theta v) \\ \rho(\cos \theta u + \sin \theta v)u + p \cos \theta \\ \rho(\cos \theta u + \sin \theta v)v + p \sin \theta \\ \rho(\cos \theta u + \sin \theta v)e + p(\cos \theta u + \sin \theta v) \end{pmatrix} = 0.$$

Il paraît judicieux de définir

$$u_\theta = \cos \theta u + \sin \theta v, \quad v_\theta = -\sin \theta u + \cos \theta v.$$

On obtient en combinant les deuxième et troisième équations du système précédent

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_\theta \\ \rho v_\theta \\ \rho e \end{pmatrix} + \partial_{x'} \begin{pmatrix} \rho u_\theta \\ \rho u_\theta^2 + p \\ \rho u_\theta v_\theta \\ \rho u_\theta e + p u_\theta \end{pmatrix} = 0.$$

Nous retrouvons le système de la dynamique des gaz à deux composantes de vitesse, mais écrit dans une direction particulière. Cela met en évidence l'**invariance par rotation** du système de la dynamique des gaz compressibles. A partir de là, il est aisé de reproduire les calculs de vitesse d'ondes du lemme 4. Cela est laissé au lecteur. On trouve que la matrice Jacobienne pour le flux est diagonalisable à valeurs propres et vecteurs propres réels. Une méthode différente de calcul des valeurs propres et vecteurs propres est proposée au chapitre 5. Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = u_\theta - c, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = u_\theta, \quad \lambda_4 = u_\theta + c.$$

Le cas lagrangien

L'hyperbolicité des équations de la dynamique des gaz lagrangienne est moins évidente. Nous partons, pour des raisons de simplicité, de la formulation de Hui en dimension deux d'espace et étudions la stabilité de solutions invariantes par rapport à Y

$$\begin{cases} \partial_t(\rho J) = 0, \\ \partial_t(\rho J u) + \partial_X(pM) = 0, \\ \partial_t(\rho J v) + \partial_X(-pL) = 0, \\ \partial_t(\rho J e) + \partial_X(puM - pvL) = 0, \\ \partial_t A - \partial_X u = 0, \\ \partial_t B - \partial_X v = 0, \\ \partial_t L = 0, \\ \partial_t M = 0. \end{cases}, \quad J = AM - BL.$$

La donnée initiale est telle que $A = M = 1$, $B = L = 0$ et $\rho J = \rho_0(X)$. On utilise $\tau = \rho^{-1}$. On peut simplifier en

$$\begin{cases} \rho_0 \partial_t \tau - \partial_X u = 0, \\ \rho_0 \partial_t u + \partial_X p = 0, \\ \rho_0 \partial_t e + \partial_X(pu) = 0, \\ \rho_0 \partial_t v = 0, \\ \partial_t B - \partial_X v = 0. \end{cases} \quad (2.38)$$

Deux cas se présentent.

La dimension un d'espace : on considère une situation vraiment monodimensionnelle, ce qu'on caractérise par $v \equiv 0$. Auquel cas on est ramené au système

$$\begin{cases} \rho_0 \partial_t \tau - \partial_X u = 0, \\ \rho_0 \partial_t u + \partial_X p = 0, \\ \rho_0 \partial_t e + \partial_X (pu) = 0, \end{cases}.$$

Pour une loi $p = p(\rho, \varepsilon)$ la matrice Jacobienne est

$$A = \frac{1}{\rho_0} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ p_\tau & -u p_\varepsilon & p_\varepsilon \\ u p_\tau & p - u^2 p_\varepsilon & u p_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - \frac{p_\tau - p p_\varepsilon}{\rho_0^2} \lambda = 0$ dont les racines sont

$$\lambda_1^A = -\frac{\sqrt{-p_\tau + p p_\varepsilon}}{\rho_0}, \quad \lambda_2^A = 0, \quad \lambda_3^A = \frac{\sqrt{-p_\tau + p p_\varepsilon}}{\rho_0}.$$

Dans le cas général les trois valeurs propres sont distinctes. La matrice A possède trois vecteurs propres réels.

La situation vraiment bidimensionnelle : à présent $v \neq 0$ est admissible. La matrice Jacobienne du flux de (2.38) est

$$B = \frac{1}{\rho_0} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ p_\tau & -u p_\varepsilon & p_\varepsilon & -v p_\varepsilon & 0 \\ u p_\tau & p - u^2 p_\varepsilon & u p_\varepsilon & -u v p_\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est $\det(B - \lambda I) = \lambda^2 \det(A - \lambda I)$. Les valeurs propres de B comptées sans leur ordre de multiplicité sont aussi celles de A . En tenant compte de l'ordre de multiplicité on a

$$\lambda_1^B = \lambda_1^A < 0, \quad \lambda_2^B = \lambda_3^B = \lambda_4^B = \lambda_2^A = 0, \quad \lambda_5^B = \lambda_3^A > 0.$$

Le problème se pose avec les vecteurs propres pour la valeur propre multiple nulle. Posons $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. L'équation pour les vecteurs propres associés à la valeur propre nulle est

$$\begin{cases} -x_2 = 0, \\ p_\tau x_1 - u p_\varepsilon x_2 + p_\varepsilon x_3 - v p_\varepsilon x_4 = 0, \\ u p_\tau x_1 - u^2 p_\varepsilon x_2 + u p_\varepsilon x_3 - u v p_\varepsilon x_4 = 0, \\ 0 = 0, \\ -x_4 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 0, \\ p_\tau x_1 + p_\varepsilon x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Ces trois contraintes linéaires sont indépendantes dans le cas général $(p_\tau, p_\varepsilon) \neq (0, 0)$. L'espace des vecteurs propres associées à la valeur propre nulle est de dimension deux. Il manque donc un vecteur propre. La matrice B n'est pas diagonalisable.

Nous déduisons de cette étude.

Lemme 5 *Le système de la dynamique des gaz lagrangienne n'est que faiblement hyperbolique en dimension d'espace supérieure à un.*

La structure de la matrice B montre que ce sont les **inconnues géométriques** en dimension supérieure qui sont la cause de cette perte d'hyperbolicité forte. Une discussion de ce point se trouve dans [H06]. On renvoie à la section 7.6.9 pour une discussion des conséquences sur la convergence numérique des méthodes lagrangiennes en dimension $d \geq 2$.

2.6 Exercices

Exercice 1

Soit l'équation $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ avec $f''(u) \neq 0$ pour tout u . On dit que le flux est vraiment non linéaire¹⁷. Trouver une fonction $u \mapsto \varphi(u)$ telle que $v = \varphi(u)$ est solution de l'équation de Burgers

$$\partial_t v + \partial_x \left(\frac{v^2}{2} \right) = 0. \quad (2.39)$$

Exercice 2 •

On considère le modèle de St Venant avec $g = 0$. Ce modèle est appelé modèle des gaz sans pression

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2) = 0. \end{cases}$$

Montrer que le modèle des gaz sans pression est faiblement hyperbolique. Montrer que u satisfait à l'équation de Burgers (une hypothèse implicite est que la solution est régulière).

Exercice 3

Nous reprenons la technique de linéarisation, cette fois autour d'une solution scalaire $u(t, x)$ non constante. On pose $u_\varepsilon(t, x) = u(t, x) + \varepsilon v(t, x) + o(\varepsilon)$. On suppose que

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \partial_t u_\varepsilon + \partial_x f(u_\varepsilon) = 0.$$

Montrer que le couple (u, v) est solution du système

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(u) \\ a(u)v \end{pmatrix} = 0, \quad a(u) = f'(u). \quad (2.40)$$

Montrer que le système est faiblement hyperbolique pour $a'(u)v \neq 0$.

¹⁷ Le contre-exemple est $f = au$, $a \in \mathbb{R}$ donné.

Exercice 4 •

Nous étudions la robustesse du concept d'hyperbolicité. Soit le système $\partial_t U + \partial_x f(U) = 0$. Nous supposons que le système est strictement hyperbolique. Soit $U \mapsto f_\varepsilon(U)$ une suite de flux tels que f_ε tend vers f dans C^1 . Montrer que le système

$$\partial_t U + \partial_x f_\varepsilon(U) = 0$$

est strictement hyperbolique pour ε assez petit.

Exercice 5

Nous revenons sur l'exercice précédent. En revanche nous supposons que $\partial_t U + \partial_x f(U) = 0$ est linéairement fortement mal posé. Montrer que $\partial_t U + \partial_x f_\varepsilon(U) = 0$ est linéairement fortement mal posé pour ε assez petit.

Exercice 6

Nous considérons le système linéaire

$$\begin{cases} \partial_t u + \varepsilon(a\partial_x u + b\partial_x v) = 0, \\ \partial_t v + \partial_x u + \varepsilon(c\partial_x u + d\partial_x v) = 0, \end{cases}$$

(a, b, c, d) sont des réels donnés avec $b < 0$. Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, le système est strictement hyperbolique, et que pour $\varepsilon < 0$ assez petit le système est fortement mal posé. Comparer avec les deux exercices précédents.

Exercice 7

Partir du système de la dynamique des gaz en coordonnées de Lagrange et montrer que

$$\rho^2 c^2 = -\frac{\partial p}{\partial \tau|_\varepsilon} + p \frac{\partial p}{\partial \varepsilon|_\tau}.$$

Prendre les caractéristiques de la loi d'état de l'eau et en déduire que

$$c \approx 1500 \text{ms}^{-1}.$$

Exercice 8

En reprenant l'exercice précédent, montrer que la loi de van der Waals présente une zone d'instabilité située à l'intérieur de la zone de stabilité.

Exercice 9

On part du système de la dynamique des gaz eulérien en dimension un d'espace. Soit une translation du référentiel à vitesse variable en temps

$$t' = t \text{ ainsi que } \partial_t x'(t, X) = v(t) \text{ avec } x(0, X) = X.$$

Montrer que l'on a

$$\begin{cases} \partial_{t'}\rho + \partial_{x'}(\rho u') = 0, \\ \partial_{t'}(\rho u') + \partial_{x'}(\rho(u')^2 + p) = \rho g(t), \\ \partial_{t'}(\rho e) + v\partial_{x'}(\rho e) + \partial_{x'}(\rho u e + p u) = \rho g(t)u'. \end{cases}$$

Les quantités ' sont évaluées dans le référentiel en mouvement. L'accélération est $g(t) = \frac{d}{dt}v(t)$.

Exercice 10 •

On reprend la preuve d'invariance galiléenne avec une méthode plus systématique en appliquant le théorème 2.1. On considère donc le changement de référentiel (2.12) où v est une vitesse de translation donnée.

Montrer que la comatrice de la transformation espace-temps (2.12) est

$$\text{cof}(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \rho & \rho u \\ \rho u & \rho u^2 + p \\ \rho e & \rho u e + p u \end{pmatrix}$$

ainsi que le système des gaz compressibles $\nabla_{t,x}A = 0$. Montrer que l'on a aussi $\nabla_{t',x'}(A \times \text{cof}(M)) = 0$. Soit la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & 1 & 0 \\ \frac{v^2}{2} & v & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que le système de lois de conservation $\nabla_{t',x'}(T \times A \times \text{cof}(M)) = 0$ est identique au système de la dynamique des gaz dans le référentiel (t', x') . On comparera avec le résultat du lemme 1.

2.7 Notes bibliographiques

Le modèle du trafic routier LWR fait référence aux travaux de Lighthill [L78], Whitham [W74] et Richards. La possibilité d'écrire de manière systématique les équations eulériennes sous forme lagrangiennes est connue depuis longtemps, on pourra consulter [D00] pour une référence mathématique moderne. Voir aussi [W87]. L'utilisation d'équations lagrangiennes pour la dérivation systématique de méthodes numériques de type lagrangien ou quasi-lagrangien a été initiée dans les travaux de Hui et de ses collaborateurs [HL90, HLL99, HK01, H06] (c'est pourquoi on propose d'appeler la formulation fermée par les équations d'évolution du gradient de déformation formulation de Hui), puis reprise par [L02] et [DM05]. De manière surprenante il est souvent considéré que l'écriture des équations sous forme lagrangienne

instationnaire est une tâche difficile [S96]. Voir [D] pour un développement récent autour des système de lois de conservation possédant l'invariance galiléenne. La stabilité et l'hyperbolicité sont développés dans maints ouvrages maintenant classiques, citons juste [GR91, S96, D00].