eXamen.press

Konkrete Analysis

für Studierende der Informatik

Bearbeitet von
Folkmar Bornemann

1. Auflage 2008. Taschenbuch. x, 206 S. Paperback
ISBN 978 3 540 70845 2
Format (B x L): 15,5 x 23,5 cm
Gewicht: 343 g

I

Grundlagen

1 Reelle Zahlen

1.1 Warum Analysis *für Informatiker*?

Die drei grundlegenden Mathematikvorlesungen eines Informatikstudiengangs – Diskrete Strukturen, Lineare Algebra und Analysis – ließen sich einheitlicher wie folgt bezeichnen: diskrete, lineare und *kontinuierliche* Strukturen. (Statt „diskret“ könnte man auch „digital“, statt „kontinuierlich“ dann entsprechend „analog“ sagen.)

Nun liegt der Einwand nahe, dass digitale Computer doch nur mit *diskreten*, endlichen Objekten arbeiteten und daher eine Beschäftigung mit kontinuierlichen Strukturen für die meisten Informatiker eigentlich verzichtbar sein dürfte. (Etliche Physiker sind der Ansicht, dass das ganze Universum diskret und endlich ist. Manche sprechen gar vom „rechnenden Raum“. Also müsste der Einwand auch für die Natur- und Ingenieurwissenschaften gelten ...) Warum also Analysis für Informatiker?

Meine einfache Entgegnung lautet: Weil Analysis neben einem wertvollen Training in Abstraktion und Begriffsbildung auch für Informatiker ein enorm nützliches *Werkzeug* darstellt. „Diskret“ kann nämlich *sehr dicht* (= fast kontinuierlich) sein, oder sehen Sie etwa die einzelnen Pixel von ausbelichteten Digitalfotos? Und „endlich“ kann *sehr groß* sein. Der Übergang ins Kontinuierliche ist schlichtweg ein sehr praktischer Schritt, um mit solchen Fällen bequemer umzugehen. Ich will dafür zwei Beispiele geben.

Beispiel. In Abb. 1 sehen Sie, wie aus einem Digitalfoto überlagerter Text „herausgerechnet“ wird. (Der Fachausdruck für solches Herausrechnen von zerstörten Bildflächen lautet „Image Inpainting“.) Ein besonders schneller Algorithmus hierfür stammt ganz frisch aus meiner eigenen Forschung [BM07] – und benutzt fortgeschrittene Werkzeuge der Analysis. Der Arbeitsablauf war dabei ungefähr folgender:

a Originalfoto: 437×296 Pixel; Text auf 20 705 Pixel

b Textentfernung mit *Fast Image Inpainting*: Laufzeit 1 s

Abb. 1. „Fast Image Inpainting“ mittels Analysis (partielle Differentialgleichungen).

$$\text{Digitalfoto (diskret)} \xrightarrow{\text{Abstraktion: unendlich feine Auflösung}} \text{analoges Foto}$$

$$\xrightarrow{\text{math. Modell fürs Inpainting}} \text{partielle Differentialgleichung}$$

$$\xrightarrow{\text{„Numerik“: Diskretisierung}} \text{implementierbarer diskreter Algorithmus}$$

Der Weg über das Kontinuierliche ist dabei kein Umweg, sondern eine kraftvolle Methode, um den Überblick zu wahren, das Wesentliche zu sehen und die richtige Idee zu bekommen. Er funktioniert, da die im Zwischenschritt benutzte „unendlich feine“ Auflösung bereits eine gute Approximation der heutigen Auflösung von Digitalfotos darstellt.

Beispiel. [GKP94, S. 439] Als Lösung eines kombinatorischen Problems erhalte ich in Abhängigkeit vom Parameter $n \in \mathbb{N}$ die *natürlichen* Zahlen

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{k}, \qquad B_n = f_{4n}.$$

(Zur Erinnerung: f_n bezeichnet die n-te Fibonacci-Zahl.) Frage: Wie vergleichen sich A_n und B_n – *für große* n? Es ist zwar $A_2 = 22 > B_2 = 21$, aber

$$A_{20} = 7\,776\,048\,412\,324\,714 < B_{20} = 23\,416\,728\,348\,467\,685.$$

Für größere n betrachten wir Tabelle 1, aus der wir zwei Dinge lernen. Zum einen, dass die Berechnung von A_n für große n unverhältnismäßig teuer ist und zum anderen, dass die genaue Kenntnis der 82 928 Ziffern von $A_{100\,000}$ völlig unnötig ist, um unsere Frage zu beantworten. $B_{100\,000}$ besitzt 667 Ziffern mehr, ist also in jedem Fall größer. Merken Sie, was bei dieser Argumentation passiert? Wir approximieren, nämlich

$$A_{100\,000} \approx 10^{82\,927} < 10^{83\,594} \approx B_{100\,000}.$$

Tabelle 1. Einige Laufzeiten der Berechnung von A_n und B_n mit *Mathematica*.

n	Laufzeit(A_n)	#Ziffern(A_n)	Laufzeit(B_n)	#Ziffern(B_n)
1 000	0.1 s	828	0.17 ms	836
10 000	52 s	8 292	0.76 ms	8 360
100 000	5 h 40 min	82 928	14 ms	83 595

Wie steht es mit $A_{1\,000\,000}$ und $B_{1\,000\,000}$? Wir können leicht prognostizieren, dass die Berechnung des *exakten* Werts von $A_{1\,000\,000}$ knapp 92 Tage kosten wird. Auf der anderen Seite gehört nicht mehr viel Fantasie zur Vermutung, dass $A_{1\,000\,000}$ – ich approximiere weiter – *in etwa* 829 000 Ziffern, $B_{1\,000\,000}$ hingegen in etwa 836 000 Ziffern besitzen wird und damit größer ist. Aber können wir uns darauf verlassen?

In dieser Vorlesung werden wir lernen, solche Zusammenhänge nicht nur aufgrund eines Experiments mit kleineren n zu vermuten, sondern sie ohne größere Mühe in einem ganz *präzisen Sinn* herzuleiten. Genauer werden wir im konkreten Fall lernen (siehe Abschnitt 14.2), dass für $n \to \infty$

$$A_n \simeq \sqrt{\frac{3}{\pi n}}(6.75)^n, \qquad B_n \simeq \frac{1}{\sqrt{5}}(6.85410\cdots)^n. \tag{1.1}$$

Nun ist aber $6.75 < 6.85410\cdots$ und wir können (mit den Kenntnissen aus dieser Vorlesung) *sofort* ablesen, dass $A_n < B_n$ für *fast alle* $n \in \mathbb{N}$, d.h. für alle $n \geqslant n_0$ ab einer „gewissen" Zahl n_0. (Dieses n_0 zu bestimmen erfordert eine etwas feinere Argumentation, im vorliegenden Fall ist $n_0 = 3$.)

Wir wollen noch eine letzte wichtige Beobachtung aus diesem Beispiel festhalten: Obwohl A_n und B_n natürliche Zahlen sind, tauchen in ihrer asymptotischen Beschreibung *irrationale* Zahlen wie $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ und π auf, also Zahlen, die nicht zu $\mathbb{Q}$ gehören.[3] (Sie erinnern sich möglicherweise an Euklids Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$?) Wir kommen demnach mit den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ nicht aus und müssen ihre „Lücken füllen", was uns zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als Grundlage der Analysis führt.

Merke:

Analysis ist ein nützliches Werkzeug zur Vereinfachung komplizierter diskreter Zusammenhänge. Zwei wichtige Techniken sind hierbei *Abschätzung* und *Approximation*.

[3] Gleiches gilt auch für die Ihnen eventuell der Form nach bereits bekannte Stirling'sche Formel

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad (n \to \infty).$$

Die Herleitung dieses Klassikers wird uns in Abschnitt 15.5 beschäftigen.

1.2 Axiomatische Charakterisierung der reellen Zahlen

Ich werde die reellen Zahlen nicht über die Angabe ihrer Elemente definieren („das ist eine reelle Zahl"), sondern operativ einführen, indem ich charakterisiere, was man alles mit ihnen machen kann. Der Punkt ist hierbei, dass eine vollständige Charakterisierung die reellen Zahlen eindeutig festlegt: „Nur mit ihnen kann man genau das alles machen."

Arithmetik

In $\mathbb{R}$ gelten die vertrauten Rechenregeln der „vier Grundrechenarten". Sie wissen bereits, wie man das mathematisch gebildet ausdrückt: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein (kommutativer) Körper. Das neutrale Element der Addition heißt „0", das der Multiplikation „1", usw. Halt, ich werde Sie jetzt nicht mit der Angabe der Rechenregeln langweilen, die haben Sie bereits in den letzten beiden Semestern mehrfach gesehen.

Wir kennen natürlich weitere Körper: Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ und der Restklassenkörper $\mathbb{Z}_p$, wobei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl ist. Die Charakterisierung von $\mathbb{R}$ ist also noch nicht abgeschlossen.

Anordnung

Sie haben schon oft rationale oder reelle Zahlen in ihrer Größe verglichen; Aussagen wie $7/4 > 5/3$ oder $\pi > 3$ sollten Sie nicht weiter überraschen. Sie wissen im Prinzip auch, wie sich solche Vergleiche beim Rechnen verändern, wie sich Vergleich und Arithmetik also „vertragen". Der Mathematiker fasst das in der folgenden Definition zusammen.

Definition. Ein Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ heißt *angeordnet*, wenn es auf ihm ein Prädikat „$a > 0$" (in Worten: a ist positiv) mit den folgenden Rechenregeln gibt:

(i) Für jedes $a \in \mathbb{K}$ gilt *genau eine* der drei Aussagen

$$a = 0,\ a > 0 \ \text{ oder } \ -a > 0.$$

(ii) Für $a, b \in \mathbb{K}$ mit $a > 0$ und $b > 0$ gilt: $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$.

Tabelle 2 zeigt die Definitionen vertrauter Schreibweisen für den Vergleich zweier Zahlen. Rechnen Sie wie gewohnt: „$\leqslant$" ist eine *Totalordnung*.

Einige Konsequenzen der Anordnung

Da für $a \neq 0$ nach Teil (i) der Definition entweder $a > 0$ oder $-a > 0$ gilt, muss nach Teil (ii) gelten

$$a^2 = (-a)^2 > 0.$$

Tabelle 2. Definition vertrauter Schreibweisen bei angeordneten Körpern.

Schreibweise	steht für
$a > b$	$a - b > 0$
$a < b$	$b - a > 0$
$a \geqslant b$	$a > b$ oder $a = b$
$a \leqslant b$	$a < b$ oder $a = b$

Quadratzahlen eines angeordneten Körpers sind somit stets positiv. Insbesondere gilt $1 = 1^2 > 0$ und damit $-1 < 0$. Hier trennen sich also die Wege von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$: $\mathbb{C}$ *ist kein angeordneter Körper*, da $i^2 = -1 < 0$ im Widerspruch zur Anordnung stände.

Mit $1 > 0$ gilt in einem angeordneten Körper nach Teil (ii) der Definition auch die Kette von Ungleichungen

$$0 < 1 < 1+1 < 1+1+1 < \cdots < \underbrace{1+\cdots+1}_{n\text{-fach},\, n \in \mathbb{N}}.$$

Wenn wir die ganz rechts stehende Summe als Element von $\mathbb{K}$ mit der natürlichen Zahl n einfach *identifizieren*, so fassen wir $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{K}$ auf. Mit Hilfe der Körperarithmetik erweitern wir diese Einbettung zur Teilkörperbeziehung

$$(\mathbb{Q}, +, \cdot) \subseteq (\mathbb{K}, +, \cdot).$$

Jetzt wissen wir also auch, dass für eine Primzahl p der *endliche* Restklassenkörper $\mathbb{Z}_p$ kein angeordneter Körper sein kann.

Vollständigkeit

Wir kennen jetzt zwei angeordnete Körper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. Wir benötigen noch ein weiteres Axiom, das $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ trennt und etwa die irrationale Zahl $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ heimisch macht, das $\mathbb{R}$ also zwingt, keine „Lücken" zu haben.

Definition. Wir betrachten einen angeordneten Körper $\mathbb{K}$.

(i) Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{K}$ heißt *nach oben beschränkt*, wenn es eine Zahl $s_0 \in \mathbb{K}$ gibt mit

$$a \in M \quad \Rightarrow \quad a \leqslant s_0.$$

Eine solche Zahl s_0 heißt *obere Schranke* von M.

(ii) $\mathbb{K}$ ist *ordnungsvollständig*,[4] wenn jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{K}$ eine kleinste obere Schranke $\sup M \in \mathbb{K}$, das *Supremum* von M, besitzt. Das Supremum $\sup M$ ist also einerseits eine obere Schranke von M und andererseits kann jede obere Schranke s_0 von M durch $\sup M \leqslant s_0$ nach unten abgeschätzt werden.

[4] Man sagt auch: $\mathbb{K}$ erfüllt das *Supremumsaxiom*.

Damit sind wir am Ziel. Denn es gilt der Satz,[5] dass es (bis auf „ordnungstreue Isomorphie“, also Umbenennung der Elemente) nur einen einzigen ordnungsvollständigen Körper gibt, nämlich den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Was ist nun die Zahl $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$? Nichts leichter als das:

$$\sqrt{2} = \sup\{a \in \mathbb{R} : a^2 \leqslant 2\}. \tag{1.2}$$

Man kann durchaus „zu Fuß“ – also nur aufgrund der bisher eingeführten Regeln – ausrechnen, dass die so definierte Zahl die gewünschte Beziehung

$$(\sqrt{2}\,)^2 = 2$$

erfüllt. Eleganter geht es später mit den allgemeineren Werkzeugen aus Kapitel II.

1.3 Einige nützliche Bezeichnungen

Bezeichnungen und Notation erleichtern das mathematische Sprechen und Schreiben. Leider gibt es keinen von allen akzeptierten Standard, passen Sie also bitte auf die kleinen Unterschiede zwischen Autoren, Dozenten und dem Rest der Welt auf.

Die Symbole $\pm\infty$

Nach unserer Definition besitzen die leere Menge $\emptyset$ und Mengen ohne obere Schranke jeweils *keine* reelle Zahl als Supremum. Zur Verkürzung der Sprechweise führen wir die beiden Symbole $-\infty$ und ∞ ein, welche *keine* reelle Zahlen sind und für die folgende konsistente Konventionen gelten:

- $\sup \emptyset = -\infty$,
- $\sup M = \infty$ steht für „$M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt keine obere Schranke“,
- für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt $-\infty < a < \infty$.

Intervalle

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leqslant b$ definieren wir

- das abgeschlossene Intervall $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$,
- das offene Intervall $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$,
- und die halboffenen Intervalle $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$ bzw. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$.

An den offenen Enden darf auch eines der Symbole $\pm\infty$ stehen. So ist etwa

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}, \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}, \quad (-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$$

Überzeugen Sie sich von $\sup[a, b] = \sup(a, b] = \sup[a, b) = \sup(a, b) = b$.

[5] Für einen Beweis verweise ich auf [vdW71, §78] oder [Lor90, §20*].

Infimum, Maximum und Minimum

Analog zu oberen Schranken und zum Supremum gibt es untere Schranken und das Infimum. Wir können es für jede Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ einfach (und wegen der Symbole $\pm\infty$ ohne einschränkende Voraussetzungen) durch

$$\inf M = -\sup(-M)$$

definieren. Sind das Supremum oder das Infimum einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ selbst Element dieser Menge, so sprechen wir von der Existenz des Maximums bzw. Minimums,

$$\sup M \in M \;\Rightarrow\; \max M = \sup M, \qquad \inf M \in M \;\Rightarrow\; \min M = \inf M.$$

1.4 Rechenregeln für Suprema

Der Umgang mit Suprema (und entsprechend auch Infima) wird durch folgenden Satz erleichtert.

Satz. *Es seien* $X, Y \subset \mathbb{R}$ *mit* $\sup X, \sup Y \in \mathbb{R}$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Dann gilt*

(i) $\sup(X+Y) = \sup(X) + \sup(Y)$,

(ii) $\lambda > 0 \;\Rightarrow\; \sup(\lambda X) = \lambda \sup X$,

(iii) $X, Y \subset [0,\infty) \;\Rightarrow\; \sup(X \cdot Y) = \sup(X) \cdot \sup(Y)$,

(iv) $X \subseteq Y \;\Rightarrow\; \sup X \leqslant \sup Y$.

Beweis. Um den Umgang mit Suprema zu üben, beweisen wir Teil (ii).

Schritt 1: $\sup(\lambda X) \leqslant \lambda \sup X$.

Für $a \in X$ gilt $a \leqslant \sup X$, also auch $\lambda a \leqslant \lambda \sup X$. Daher ist $\lambda \sup X$ eine obere Schranke der Menge λX, so dass das Supremum dieser Menge als kleinste obere Schranke $\sup(\lambda X) \leqslant \lambda \sup X$ erfüllt.

Schritt 2: $\lambda \sup X \leqslant \sup(\lambda X)$.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen im Gegenteil an, dass $\sup(\lambda X) < \lambda \sup X$, es also einen positiven Überschuss $\Delta > 0$ gibt mit

$$\lambda \sup X = \sup(\lambda X) + \Delta.$$

Da die Zahl $\sup X - \Delta/\lambda$ dann kleiner als das Supremum von X ist, also kleiner als die kleinste obere Schranke, gibt es ein $a_\Delta \in X$ mit

$$a_\Delta > \sup X - \Delta/\lambda, \text{ also} \qquad \lambda a_\Delta > \lambda \sup X - \Delta = \sup(\lambda X).$$

Mit $\lambda a_\Delta \in \lambda X$ wäre dann aber $\sup(\lambda X)$ keine obere Schranke der Menge λX mehr – im Widerspruch zur Definition des Supremums. □

Merke:

In der Analysis wird der Nachweis einer Gleichheit $a = b$ oft über die beiden Abschätzungen $a \leqslant b$ und $b \leqslant a$ geführt.

1.5 Archimedizität der reellen Zahlen

Das in Abschnitt 1.3 eingeführte Symbol ∞ ist keine reelle Zahl. Haben Sie sich gefragt, woher ich das weiß? Gibt es in $\mathbb{R}$ wirklich keine unendlich großen Zahlen? (Man nennt diese Eigenschaft die Archimedizität von $\mathbb{R}$.)

Satz. *$\mathbb{R}$ ist ein archimedisch geordneter Körper, d.h. zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $a < n$.*

Beweis. Auch dieser Beweis dient der Übung des Rechnens mit Suprema. Wiederum führen wir einen Widerspruchsbeweis[6] und nehmen an, der Satz wäre falsch. Dann wäre $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ nach oben beschränkt und es existierte die positive reelle Zahl $0 < \sup \mathbb{N} < \infty$. Nach Satz 1.4, Teil (ii) und (iv), erhielten wir somit wegen $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$ die Ungleichungskette

$$0 < \sup \mathbb{N} < 2 \sup \mathbb{N} = \sup(2\mathbb{N}) \leqslant \sup \mathbb{N} < \infty,$$

ein klarer Widerspruch (zur Irreflexivität der „<“-Relation in $\mathbb{R}$). □

Genausowenig gibt es unendlich kleine Zahlen in $\mathbb{R}$: Zur positiven reellen Zahl $0 < a \in \mathbb{R}$ gibt es nämlich eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < a$. Zum Nachweis wendet man obigen Satz auf die reelle Zahl $1/a$ an.

1.6 Dichtheit der rationalen Zahlen

Aus der Archimedizität von $\mathbb{R}$ folgt unmittelbar eine weitere wichtige Eigenschaft: Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ liegen dicht in $\mathbb{R}$. Das heißt, dass sich zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen stets ein Bruch finden lässt.

Satz. *Zu $a < b$ aus $\mathbb{R}$ gibt es $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$.*

Beweis. Zur Abwechslung wollen wir eine solche Zahl $r \in \mathbb{Q}$ konstruieren. Dazu nehmen wir – wie im letzten Abschnitt erklärt – ein $q \in \mathbb{N}$ mit $1/q < b - a$. Dieses q wird der Nenner unseres Bruchs r werden. Den Zähler p finden wir als

$$p = \min\{n \in \mathbb{Z} : n > q \cdot a\}.$$

[6] Widerspruchsbeweise sind leider stets *nichtkonstruktiv*. Das bedeutet, dass wir kein Verfahren ableiten können, um für gegebenes $a \in \mathbb{R}$ ein solches $n \in \mathbb{N}$ zu *konstruieren*.

Denn nach Satz in Abschnitt 1.5 gibt es ganze Zahlen oberhalb von $q \cdot a$ und daher natürlich auch eine kleinste. Damit gilt für $r = p/q$ sicher schon einmal $a < r$. Wäre nun aber $b \leqslant r$ (statt wie gewünscht $r < b$), so wäre (wegen $p - 1 \leqslant q\,a$)

$$b - a \leqslant \frac{p}{q} - \frac{p-1}{q} = \frac{1}{q},$$

im Widerspruch zur Konstruktion von q. □

Insbesondere können wir eine gegebene reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ beliebig gut durch Brüche *approximieren*. Geben wir etwa eine *Genauigkeit* 10^{-n}, $n \in \mathbb{N}$, vor, so findet sich ein $r \in \mathbb{Q}$ mit

$$a - 10^{-n} < r < a, \text{ also} \qquad a \in (r, r + 10^{-n}).$$

Dieser Prozess heißt auch *Intervallschachtelung*.

1.7 Dezimalzahldarstellung

Aus der Schule ist Ihnen die Dezimalzahldarstellung reeller Zahlen vertraut, etwa

$$\pi = 3.14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83\cdots .$$

Die Punkte „$\cdots$“ deuten an, dass da noch abzählbar unendlich viele weitere Ziffern kommen. Jede von ihnen ist für π konstitutiv. Sobald wir diese Dezimalzahl bei einer Ziffer abbrechen, approximieren wir π nur noch. Allgemein ist die Dezimalzahldarstellung einer reellen Zahl ein Ausdruck der Form

$$\pm d_0.d_1d_2d_3\cdots$$

mit dem ganzzahligen Anteil $d_0 \in \mathbb{N}_0$ und den Nachkommaziffern $d_k \in \{0,\ldots,9\}$, $k \in \mathbb{N}$. Wie verträgt sich diese Darstellung reeller Zahlen mit der axiomatischen Charakterisierung von $\mathbb{R}$ als ordnungsvollständigem Körper? Wir müssen dazu zwei Dinge zeigen: Jede Dezimalzahl repräsentiert eine reelle Zahl und jede reelle Zahl lässt sich als eine solche Dezimalzahl darstellen. Wir können uns hierbei auf positive Zahlen beschränken. (Negative Zahlen macht man zunächst positiv und gibt ihnen erst zum Schluss ihr Vorzeichen zurück.)

Wir beginnen mit einer speziellen Klasse: Jede abbrechende Dezimalzahl, für die also ab einer Nachkommastelle d_n nur noch Nullen kommen (die man dann nicht mehr hinschreibt), lässt sich als rationale Zahl mit dem Nenner 10^n schreiben und umgekehrt:

$$d_0.d_1d_2d_3\ldots d_n = \frac{p_n}{10^n} \quad \text{mit } p_n \in \mathbb{N}_0.$$

Der Zähler p_n besitzt natürlich die Dezimalziffern „$d_0d_1\cdots d_n$“.

Damit können wir definieren, welche positive reelle Zahl zu einer positiven Dezimalzahl gehört:

$$d_0.d_1d_2d_3\cdots = \sup\{r_n \in \mathbb{Q} : r_n = d_0.d_1d_2d_3\cdots d_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Sie ist also das Supremum über alle aus den Teilzeichenketten erzeugten abbrechenden Dezimalzahlen.

Es sei nun umgekehrt eine reelle Zahl $a \geqslant 0$ gegeben. Wir *entwickeln* sie in jene Dezimalzahl $d_0.d_1d_2d_3\cdots$, deren Anfänge $d_0.d_1\cdots d_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, durch die rationalen Zahlen $p_n/10^n$ mit den Zählern

$$p_n = \max\{p \in \mathbb{N}_0 : p \leqslant 10^n \cdot a\}$$

gegeben sind. Das Maximum existiert, da die Menge von natürlichen Zahlen auf der rechten Seite wegen der Archimidizität von $\mathbb{R}$ beschränkt ist.

Machen Sie sich bitte klar, dass für $a \geqslant 0$ der beschriebene Prozess

$$a \xrightarrow{\text{Dezimalzahlentwicklung}} d_0.d_1d_2d_3\cdots \xrightarrow{\text{definiert}} a'$$

wirklich wieder zur *gleichen* reellen Zahl $a' = a$ führt. Insbesondere haben wir eine bijektive Beziehung zwischen den *durch Entwicklung entstandenen* Dezimalzahlen und den reellen Zahlen. Die Betonung von „durch Entwicklung entstanden“ verweist auf eine oft vernachlässigte *Subtilität* von Dezimalzahlen. Es ist nämlich etwa

$$1.0000\cdots = 0.99999\cdots.$$

(Preisfrage: Welche der beiden Dezimalzahldarstellungen ist durch Entwicklung von $1 \in \mathbb{R}$ entstanden?) Halten wir also fest: Der Prozess

$$d_0.d_1d_2d_3\cdots \xrightarrow{\text{definiert}} a \xrightarrow{\text{Dezimalzahlentwicklung}} d_0'.d_1'd_2'd_3'\cdots$$

kann zunächst zu einer anderen Ziffernfolge führen, die aber die gleiche reelle Zahl repräsentiert. Erst beim erneuten Durchlaufen des Prozesses ändert sich nichts mehr. Wie sieht man, ob eine Dezimalzahl durch Entwicklung entstanden ist? Sie enthält *keinen* „Schwanz“ aus sich wiederholenden Ziffern „9“, es darf also *nicht* $d_n = 9$ für $n \geqslant n_0$ gelten.

Bemerkung. Warum habe ich $\mathbb{R}$ nicht als Menge der Dezimalzahlen definiert? Diese Definition sieht zwar bestechend einfach aus, wirft aber einige Probleme auf, die nur durch längliche und langweile Argumentationen zu beseitigen sind. Wir müssten ja für die so definierte Menge den Nachweis führen, dass es sich um einen ordnungsvollständigen Körper handelt. Dazu müssten die arithmetischen Operation „$+$“ und „$\cdot$“ und die Ordnungsrelation „$<$“ zuerst *explizit* definiert werden. Danach müsste die Gültigkeit

der Körperaxiome, der Ordnungsaxiome und des Supremumsaxioms nachgewiesen werden. Machen Sie sich bitte klar, dass schon die ach so simple Definition der Summe $a'' = a + a'$ zweier Dezimalzahlen

$$a = d_0.d_1d_2d_3\cdots, \qquad a' = d'_0.d'_1d'_2d'_3\cdots$$

nicht ganz offensichtlich ist. Oder sehen Sie eine einfache Regel für die Ziffern d''_k von $a'' = d''_0.d''_1d''_2d''_3\cdots$? (Überträge könnten ja von ganz weit rechts kommen, wovon hängt also d''_k genau ab?) Wer näheres über diesen Zugang zu den reellen Zahlen erfahren möchte, dem sei das neue Buch [Rau07] von Wolfgang Rautenberg empfohlen.

1.8 Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

Mit Hilfe der Dezimalzahldarstellung können wir einen Klassiker mathematischer Bildung beweisen, nämlich den 1872 von Georg Cantor gefundenen Satz, dass sich die reellen Zahlen *nicht* abzählen lassen.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass sich die reellen Zahlen des halboffenen Intervalls $[0,1)$ abzählen lassen: $[0,1) = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Dann können wir uns *alle* ihre Entwicklungen in Dezimalzahlen als folgende Tabelle angeordnet denken:

a_1	$0.d_{11}\, d_{12}\, d_{13}\, d_{14}\, \cdots$
a_2	$0.d_{21}\, d_{22}\, d_{23}\, d_{24}\, \cdots$
a_3	$0.d_{31}\, d_{32}\, d_{33}\, d_{34}\, \cdots$
a_4	$0.d_{41}\, d_{42}\, d_{43}\, d_{44}\, \cdots$
$\vdots$	$\vdots$

Mit Hilfe dieser Tabelle definieren wir eine reelle Zahl $x = 0.d_1d_2d_3d_4\cdots \in [0,1)$ durch Angabe folgender Nachkommastellen:

$$d_k = \begin{cases} 1, & \text{falls } d_{kk} = 2, \\ 2, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da die Ziffer „9“ nicht auftaucht, handelt es sich hierbei genau um jene Ziffern, welche die Entwicklung von x in eine Dezimalzahl liefert. Als Zahl aus $[0,1)$ müsste x in unserer Tabelle auftauchen, also $x = a_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann müsste aber auch die n-te Ziffer der jeweiligen Dezimalzahlentwicklung übereinstimmen: $d_n = d_{nn}$. Das steht aber im Widerspruch zur Konstruktion, die $d_n \neq d_{nn}$ bewusst erzwingt. (Da das Diagonalelement d_{nn} die zentrale Beweislast trägt, nennt man die Beweisidee auch das „Cantor'sche Diagonalargument“. Es stammt aus dem Jahre 1877.)

1.9 Algebraische und transzendente Zahlen

Wir kennen bereits die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sowie ihren Gegenpart, die irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ wie etwa $\sqrt{2}$. Es gibt noch eine weitere Dichotomie von erheblichem mathematischen Interesse, nämlich die zwischen den *algebraischen* Zahlen $\mathbb{A}$ und den *transzendenten* Zahlen $\mathbb{C} \setminus \mathbb{A}$. Die algebraischen Zahlen sind als (möglicherweise komplexe) Nullstellen von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten definiert:

$$\mathbb{A} = \{a \in \mathbb{C} : \text{es gibt ein Polynom } p \in \mathbb{Z}[x] \text{ mit } p(a) = 0\}.$$

(Zur Erinnerung: für einen Ring R bezeichnet $R[x]$ den zugehörigen Polynomring.) Da ein Bruch $a = m/n$ mit $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, Nullstelle des lineare Polynoms $nx - m$ aus $\mathbb{Z}[x]$ ist, gilt $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$. Weiter sind – als Nullstellen der quadratischen Polynome $x^2 - 2$ bzw. $x^2 + 1$ – auch $\sqrt{2} \in \mathbb{A}$ und $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{A}$.

In der Algebra lernt man (siehe z.B. [Lor92, §2.F9]), dass $\mathbb{A}$ ein *algebraisch abgeschlossener* Körper ist: Erstens ist $\mathbb{A}$ also ein Körper und zweitens liegen die Nullstellen von Polynomen aus $\mathbb{A}[x]$ wieder in $\mathbb{A}$.

Es gibt nun ein ganz einfaches Argument für die *Existenz* transzendenter Zahlen: $\mathbb{A}$ ist abzählbar.[7] Denn dann folgt aus der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ (und damit von $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$), dass es im Sinne der Mächtigkeit von Mengen *sehr viel mehr* transzendente als algebraische Zahlen gibt. So viele mehr, dass eine zufällig herausgegriffene reelle Zahl mit Wahrscheinlichkeit 1 transzendent ist.

Trotzdem ist der Nachweis der Transzendenz konkreter Zahlen richtig tiefliegende Mathematik. So weiß man etwa, dass die Euler'sche Zahl e (Hermite 1873), die Kreiszahl π (Lindemann 1882), e^π (Siegel 1929), $2^{\sqrt{2}}$ (Gelfond und Schneider 1934), und die folgende Zahl (Mahler 1946)

$$0.12345678910111213141516171819202 1\cdots$$

transzendent sind. (Für Aficionados: Die Beweise finden sich in dem sehr lesbaren Buch [BT04].) Der Status von π^e, $\pi + e$ und $\pi \cdot e$ ist hingegen eine notorisch offene Frage. Man weiß noch nichteinmal, ob diese Zahlen irrational sind.

[7] Die Abzählbarkeit von $\mathbb{A}$ zeigt man wie folgt. Für ein Polynom $p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ aus $\mathbb{Z}[x]$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$ ($c_n \neq 0$) definiert man die *Höhe* $h(p) = n + |c_0| + \cdots |c_n| \in \mathbb{N}$. Zu einem vorgegebenen $h \in \mathbb{N}$ gibt es sicher nur endlich viele Polynome $p \in \mathbb{Z}[x]$ mit dieser Höhe $h(p) = h$, welche wiederum nur endlich viele Nullstellen besitzen können. Daher ist $\mathbb{A}$ abzählbare Vereinigung endlicher Mengen, nämlich

$$\mathbb{A} = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \{a \in \mathbb{C} : \text{es gibt ein Polynom } p \in \mathbb{Z}[x] \text{ mit } h(p) = h \text{ und } p(a) = 0\},$$

und damit selbst abzählbar.

```
                                                                  char
                                                              _3141592654[3141
          ],__3141[3141];_314159[31415],_3141[31415];main(){register char*
       _3_141,*_3_1415, *_3__1415; register int _314,_31415,__31415,* _31,
     _3_14159, _3_1415;*_3141592654=_31415=2,_3141592654[0][_3141592654
    -1]=1[__3141]=5; _3_1415=1;do{_3_14159=_314-0,__31415++;for( _31415
   =0;_31415<(3,14-4)*__31415;_31415++)_31415[_3141]=_314159[_31415]= -
  1;_3141[*_314159=_3_14159]=_314;_3_141=_3141592654+__3_1415;_3_1415-
  __3_1415    +__3141;for                 (_31415 = 3141-
              __3_1415  ;                 _31415;_31415--
              ,_3_141 ++,                 _3_1415++)(_314
              +=_314<<2 ;                 _314<<=1;_314+=
             *_3_1415;_31                  -_314159+_314;
             if(!(*_31+1)                  )*_31 =_314 /
             __31415,_314                  [_3141]=_314 %
              __31415 ;* (                 _3__1415=_3_141
            )+= *_3_1415                    = *_31;while(*
            _3__1415 >=                     31415/3141 ) *
            _3__1415+= -                    10,(*--_3__1415
           )++;_314=_314                    [_3141]; if ( !
            _3_14159 && *                    3_1415)_3_14159
           =1,__3_1415 -                     3141=_31415;)if(
            _314+(__31415                     >>1)>=__31415 )
           while ( ++ *                       _3_141==3141/314
          )*_3_141---0                        ;}while(_3_14159
          ) ; [ char *                        __3_14= "3,1415";
          write((3,1),                        (--*__3_14,__3_14
          ),(_3_14159                          ++,++3_14159))+
         3.1415926; }                          for (__31415 = 1;
        _31415<3141-                           1;_31415++)write(
        31415% 314-(                           3,14),_3141592654[
       31415    ] +                            "0123456789","314"
      [ 3]+1)-_314;                           puts((*_3141592654=0
     ,_3141592654))                            ;_314= *"3.141592";}
```

a C-Code für 3 141 Ziffern von e (Roemer B. Livaart, IOCCC 1989)

```
long a[52514],b,c=52514,d,e,f=1e4,g,h;
main(){for(;b=c--;h=printf("%04d",e+d/f))
for(e=d%=f;g=--b*2;d/=g)d=d*b+f*(h?a[b]:f/5),a[b]=d%--g;}
```

b C-Code für 15 000 Ziffern von π [AHoo, S. 37]

Abb. 2. C-Programme für die Berechnung von tausenden Ziffern von e und π.

1.10 Berechenbare Zahlen

Die in Abschnitt 1.7 angegebene konstruktive Methode der Dezimalzahlentwicklung einer reellen Zahl $a > 0$ sieht auf den ersten Blick wie ein im Prinzip programmierbares Verfahren aus, müssen doch im wesentlichen nur die ganzen Zahlen

$$p_n = \max\{p \in \mathbb{N}_0 : p \leqslant 10^n \cdot a\}$$

bestimmt werden. Hierzu könnte man eine Schleife programmieren, die wegen der Archimedizität von $\mathbb{R}$ terminieren muss. Aber der Schein trügt. Lesen Sie noch nicht weiter und nehmen Sie sich ein paar Minuten Zeit, um zu überlegen, wo das Problem liegen könnte.

Das Problem liegt in der Entscheidbarkeit des Prädikats „$p \leqslant 10^n \cdot a$“ für eine ganze Zahl p. Diese Entscheidung müsste ja auch effektiv hergestellt werden, also programmiert werden. Nichts leichter als das, werden Sie sagen. Man nehme die Dezimalzahldarstellung von $a \ldots$, aber halt, da landen wir in einem logischen Zirkelschluss. Wir sollten uns ernsthaft überlegen, welche reellen Zahlen überhaupt berechenbar sind.

Eine reelle Zahl $a = \pm d_0.d_1d_2d_3\cdots$ wollen wir berechenbar nennen, wenn es ein festes Programm P gibt, das auf die Eingabe von $n \in \mathbb{N}_0$ die Ziffernfolge $\pm d_0.d_1d_2\cdots d_n$ abliefert. In Abb. 2 finden Sie entsprechende Programme der Sprache C für e und π (richtig: das „π-förmige“ Programm auf der linken Seite berechnet die Euler'sche Zahl $e = 2.71828\,18284\cdots$).[8] Die Menge der berechenbaren reellen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{B}$, auch sie bilden einen Körper. Algorithmen zur Nullstellenbestimmung von Polynomen

[8] In beiden Programmen ist zwar $n = 3141$ bzw. $n = 15000$ fest eingestellt; aber indem man im Programmtext die richtigen Zahlen (welche?) geeignet ersetzt (wie?), kann man sie dazu bringen, ein beliebiges anderes $n \in \mathbb{N}$ auszuwerten.

zeigen, dass die algebraischen Zahlen berechenbar sind:

$$\mathrm{Re}\mathbb{A} \cup \mathrm{Im}\mathbb{A} \subset \mathbb{B}.$$

Offenbar gilt $e, \pi \in \mathbb{B}$, es sind also auch bestimmte transzendente Zahlen berechenbar. Gibt es nun reelle Zahlen, die nicht berechenbar sind?

Auch bei dieser Frage liefert uns die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ die Antwort. Da jedes Programm (einer gegebenen universellen Maschine) eine endliche Zeichenkette mit Zeichen aus einem endlichen Alphabet ist, kann es grundsätzlich nur abzählbar viele Programme geben. Also ist auch der Körper $\mathbb{B}$ nur abzählbar; es gibt daher sehr viel mehr reelle Zahlen, die *nicht* berechenbar sind, als berechenbare. So viele mehr, dass eine zufällig herausgegriffene reelle Zahl mit Wahrscheinlichkeit 1 nicht berechenbar ist.[9]

Lassen Sie sich bitte nicht in die Irre führen: Obwohl die meisten Objekte der Analysis in diesem Sinne *nicht* berechenbar sind, ist die zu diesem Preis erkaufte Bequemlichkeit der Argumentation so überzeugend, dass kein vernünftiger Mensch darauf – etwa für Abschätzungen wie im zweiten Beispiel des Abschnitts 1.1 – verzichten würde. Die in $\mathbb{R}$ steckende Kraft der Abstraktion hat sich gerade zur Lösung sehr konkreter Probleme durchgesetzt. Eine Analysis über $\mathbb{B}$ wäre hingegen absolut monströs.

Beispiel. Ich möchte diesen Abschnitt mit einem Beispiel für eine nicht berechenbare Zahl abschließen, nämlich mit der von Gregory Chaitin 1975 eingeführten Haltewahrscheinlichkeit

$$\Omega_U = \sum_{p:U(p)\text{hält an}} 2^{-\#\mathrm{bits}(p)}$$

einer „universellen selbstbegrenzenden Präfixmaschine“ U. Die Summe erstreckt sich dabei über alle als Bitfolge aufgefassten Programme p der Maschine. Es lässt sich zeigen, dass $0 < \Omega_U < 1$ gilt und diese Zahl als die Wahrscheinlichkeit gedeutet werden kann, dass die Ausführung eines zufällig gewählten Programms auf dieser Maschine terminiert. Ω_U ist grundsätzlich nicht berechenbar (sonst wäre das Halteproblem entscheidbar) und daher notwendigerweise transzendent. Mehr noch: Ω_U ist eine echte Zufallszahl im Sinne der Kolmogoroff'schen Komplexitätstheorie [LV97]. Sie ist „mathematisch nicht komprimierbar“: Es gibt eine Konstante c, so dass die Berechenbarkeit der ersten n Binärstellen von Ω_U eine Theorie verlangt, deren Axiome – als Programm für U geeignet formalisiert – mindestens $n + c$ Bits benötigen. (Vergleichen Sie das mit der Berechnung von π: das zugrundeliegende Axiomensystem besitzt *konstante* Länge.) Für eine konkrete universelle Maschine (basierend auf der Programmiersprache LISP) hat Chaitin [Cha98, S. 53] diese Konstante sogar ermittelt: $c = 15328$.

[9] Das bedeutet umgekehrt, dass sich keine reellen Zufallszahlen berechnen lassen. Zufallszahlengeneratoren sind nie wirklich zufällig.

2 Ungleichungen: Ein Primer

Ungleichungen sind ein wichtiges Hilfsmittel zur „Vereinfachung durch Abschätzung“. Der Umgang mit ihnen bedarf einiger Übung; das Auffinden besonders nützlicher Ungleichungen ist oft ideenreich und wird manchmal damit geehrt, dass der Name des Finders mit der Ungleichung verknüpft wird. Zu jeder Ungleichung gehört die Frage: Ist sie „scharf“? Das bedeutet: Sind die vorhandene Konstanten bestmöglich; gibt es Fälle von Gleichheit, wenn ja, welche?

2.1 Elementare Ungleichungen

Wir sammeln hier zur Einführung – ohne Beweis – einige besonders nützliche elementare Ungleichungen reeller Zahlen. Einge kennen Sie bestimmt schon; zur Übung sollten Sie am besten alle beweisen (siehe Aufgabe 3 auf S. 19). Vorab führen wir noch den Absolutbetrag einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ ein (es gibt ihn in jedem angeordneten Körper):

$$|a| = \max(a, -a) \geqslant 0.$$

- **Dreiecksungleichung:**

  $$|a + b| \leqslant |a| + |b|,$$

  Gleichheit genau für $a \cdot b \geqslant 0$ (a, b besitzen gleiches Vorzeichen).
- **umgekehrte Dreiecksungleichung:**

  $$|a + b| \geqslant \big||a| - |b|\big|,$$

  Gleichheit genau für $a \cdot b \leqslant 0$ (a, b entgegengesetztes Vorzeichen).
- **Ungleichung für geometrische Summen:**

  $$1 + x + x^2 + \cdots + x^n \leqslant \frac{1}{1-x} \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\, 0 \leqslant x < 1),$$

  Gleichheit genau für $x = 0$.
- **Bernoulli’sche Ungleichung:**

  $$(1 + x)^n \geqslant 1 + n \cdot x \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\, x > -1),$$

  Gleichheit genau für $n \cdot x = 0$.
- **Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel:**

  $$\sqrt{a \cdot b} \leqslant \frac{a+b}{2} \qquad (a, b \geqslant 0),$$

  Gleichheit genau für $a = b$.
- **Ungleichung vom mittleren Verhältnis (Cauchy):** Für $b_1, \ldots, b_n > 0$ ist

  $$\min\left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right) \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n} \leqslant \max\left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right),$$

  Gleichheit genau dann, wenn $a_1/b_1 = \cdots = a_n/b_n$.

2.2 Cauchy–Schwarz'sche Ungleichung

Diese Ungleichung, eine der wichtigsten der Mathematik, wurde für Summen 1821 von Cauchy angegeben und von Schwarz 1885 auf Integrale verallgemeinert. (Der Russe Bunjakowski hatte die Integralform zwar bereits 1859 aufgeschrieben, wird im Westen aber traditionell ignoriert.)

Satz. *Es seien $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k \;\leqslant\; \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}\,.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn es zwei Zahlen $\lambda, \mu \geqslant 0$ gibt, die nicht beide Null sind, mit $\lambda x_k = \mu y_k$ für alle $k = 1, \dots, n$.

Beweis. Wenn $x_1 = \cdots = x_n = 0$ oder $y_1 = \cdots = y_n = 0$ gilt, dann ist die Ungleichung sofort mit Gleichheitszeichen erfüllt (im ersten Fall liefert $(\lambda, \mu) = (1, 0)$, im zweiten $(\lambda, \mu) = (0, 1)$ den Zusatz). Wir können uns also auf den Fall beschränken, dass

$$s_x = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} > 0, \qquad s_y = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} > 0.$$

Nun versuchen wir, die Summe $\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k$ zunächst durch *irgendeinen* möglichst einfachen Ausdruck in s_x und s_y abzuschätzen (das Ziel wäre $s_x \cdot s_y$). Ausgangspunkt ist die triviale Ungleichung $(x_k - y_k)^2 \geqslant 0$, die wir zu

$$x_k \cdot y_k \leqslant \frac{1}{2}\left(x_k^2 + y_k^2\right)$$

umschreiben und dann über alle k summieren, um folgende Zwischenetappe zu erreichen:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k \leqslant \frac{1}{2}\left(s_x^2 + s_y^2\right).$$

(Gleichheit besteht offenbar genau dann, wenn $x_k = y_k$ für alle $k = 1, \dots, n$.) Leider gilt natürlich auch

$$s_x \cdot s_y \leqslant \frac{1}{2}\left(s_x^2 + s_y^2\right),$$

wir scheinen also über das Ziel $s_x \cdot s_y$ „hinausgeschossen" zu sein. Moment mal, für $s_x = s_y$ sind das Ziel und die Schranke unserer Zwischenetappe doch aber gleich. Können wir das nutzen? Ja, für die *normalisierten* Zahlen

$$\tilde{x}_k = x_k / s_x, \qquad \tilde{y}_k = y_k / s_y, \qquad (k = 1, \dots, n)$$

gilt $s_{\tilde{x}} = s_{\tilde{y}} = 1$ und daher mit der Schranke unserer Zwischenetappe

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{x}_k \cdot \tilde{y}_k \leqslant 1, \text{ also ausgeschrieben:} \qquad \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k}{s_x \cdot s_y} \leqslant 1.$$

Damit sind wir bereits am Ziel. (Gleichheit gilt genau dann, wenn $\tilde{x}_k = \tilde{y}_k$, also $s_y \cdot x_k = s_x \cdot y_k$, für alle $k = 1, \ldots, n$. Der Zusatz ist demnach gültig für $(\lambda, \mu) = (s_y, s_x)$). □

Die im Beweis verwendete Technik der *Normalisierung* ist recht allgemein anwendbar, um die Qualität von Abschätzungen zu verbessern, in welche die Variablen nur mittelbar über homogene Ausdrücke eingehen. Wir werden hierfür in Abschnitt 3.7 noch ein weiteres Beispiel kennenlernen.

2.3 Euklidische Norm

Die Cauchy–Schwarz'sche Ungleichung wird in den Sprech- und Schreibweisen der linearen Algebra besonders übersichtlich. Wir betrachten den n-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ und fassen die reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ zum Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ zusammen. Ich erinnere an das *Euklidische Skalarprodukt*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$$

zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ und an die *Euklidische Norm*

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$. (Das ist genau jene Zahl, die wir im Beweis der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung mit s_x bezeichnet hatten.) Somit lässt sich die Cauchy–Schwarz'sche Ungleichung ganz kurz in der Form

$$\langle x, y \rangle \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

schreiben. Die Euklidische Norm misst die „Länge" eines Vektors und besitzt folgende Eigenschaften ($x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$):

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Mit Hilfe einer Längenmessung lassen sich auch Abstände messen. Der *Euklidische Abstand* zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x - y\|$.

Von den drei Eigenschaften der Euklidischen Norm ist nur die letzte, die *Dreiecksungleichung*, nicht ganz offensichtlich. Sie folgt aber unmittelbar aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = \sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n}x_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot y_k + \sum_{k=1}^{n}y_k^2\\ &= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2\\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2.\end{aligned}$$

Gleichheit besteht in der Dreiecksungleichung also genau dann, wenn sie in der Cauchy–Schwarz'schen Ungleichung vorliegt. Die Bedingungen hierfür haben wir in Satz 2.2 notiert.

Übrigens definiert jede Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, welche die drei Eigenschaften (i)–(iii) besitzt, eine *Norm* und kann als Alternative zur Euklidischen Norm für die „Längenmessung" von Vektoren herangezogen werden. Häufige Verwendung finden

- **Maximumsnorm**
$$\|x\|_\infty = \max\{|x_k| : k = 1,\dots,n\},$$
- ℓ^1**-Norm**
$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n}|x_k|.$$

Letztere spielt eine prominente Rolle bei einem besonders heißen Thema an der Schnittstelle von Mathematik, Informatik und E-Technik: Dem *Compressed Sensing*, Grundlage der „Single-Pixel Camera".

Anwendung: Absolutbetrag komplexer Zahlen

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ können ja mit dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ identifiziert werden. Die Euklidische Norm nennt man hier den *Absolutbetrag* der komplexen Zahl z und bezeichnet ihn wie in $\mathbb{R}$ mit $|z|$. Zerlegt man $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ in Real- und Imaginärteil, so gilt daher

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \in \mathbb{R}.$$

Aus den Eigenschaften (i)–(iii) der Euklidischen Norm folgt insbesondere die Dreiecksungleichung $|z+w| \leqslant |z| + |w|$ $(z, w \in \mathbb{C})$. Nun ist auf dem Körper $\mathbb{C}$ aber auch eine Multiplikation definiert und es ist sicher beruhigend zu wissen, dass genau wie beim Absolutbetrag in $\mathbb{R}$ gilt:

$$|z\cdot w| = |z|\cdot|w| \qquad (z, w \in \mathbb{C}).$$

Diese Gleichung ist äquivalent zur Lagrange'schen Identität reeller Zahlen

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{R}).$$

Aufgaben

1. Definieren Sie das Infimum $\inf M$ einer nichtleeren, nach unten beschränkten Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ und geben Sie seine Eigenschaften in Analogie zum Supremumsbegriff an.

2. Die Zahlen π und e sind transzendent. Man weiß weder von der Zahl $\pi + e$ noch von $\pi \cdot e$, ob sie irrational ist. Begründen Sie, warum aber wenigstens eine dieser beiden Zahlen transzendent sein muss.

3. Beweisen Sie die elementaren Ungleichungen aus Abschnitt 2.1 und untersuchen Sie die Fälle, in welchen Gleichheit besteht.

Hinweis. Für die Bernoulli'sche Ungleichung hilft *vollständige Induktion*.

4. Geben Sie ein anschauliches Beispiel für die Bedeutung der Ungleichung vom mittleren Verhältnis aus Abschnitt 2.1; betrachten Sie z.B. den Nettodurchsatz eines Netzwerks.

5. Es gelte $0 < a_1, a_2, \ldots, a_n < 1$. Verallgemeinern Sie die Bernoulli'sche Ungleichung zu

$$(1 - a_1) \cdot (1 - a_2) \cdots (1 - a_n) > 1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_n.$$

Was ist demnach günstiger: Mehrere Rabatte nacheinander zu bekommen oder einen Gesamtrabatt, dessen Satz durch Addition der einzelnen Rabattsätze gebildet wird?

6. Es sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ ein Polynom mit positiven Koeffizienten $c_0, \ldots, c_n > 0$. Zeigen Sie, dass

$$0 < x \leqslant y \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n \leqslant \frac{p(x)}{p(y)} \leqslant 1.$$

Hinweis. Welche der elementaren Ungleichungen aus Abschnitt 2.1 könnte weiterhelfen?

7. Es seien $b, c > 0$. Grenzen Sie die drei Fälle derjenigen $a \in \mathbb{R}$ von einander ab, für welche

$$\frac{a+b}{b+c} \quad \text{kleiner, größer bzw. gleich} \quad \frac{a}{b}.$$

Lösen Sie diese Aufgabe auch mit Hilfe von Maple, schlagen Sie hierzu die Befehle `solve` und `assuming` nach.

8. Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

und untersuchen Sie den Fall der Gleichheit. Drücken Sie die Bedingung hierfür in der Sprache der linearen Algebra aus.

9. Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1$. Wie groß kann $\sum_{k=1}^{n} |x_k|$ maximal werden?

10. Es seien $p_1, \ldots, p_n > 0$ mit $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Leiten Sie unter geschickter Verwendung der Cauchy–Schwarz'schen Ungleichung die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{n} \left(p_k + \frac{1}{p_k}\right)^2 \geqslant n^3 + 2n + n^{-1}$$

her. Wann gilt Gleichheit?