Springer-Lehrbuch

Fluidmechanik

Einführendes Lehrbuch

Bearbeitet von
Peter Böckh

überarbeitet 2004. Taschenbuch. xviii, 353 S. Paperback
ISBN 978 3 540 22076 3
Format (B x L): 15,5 x 23,5 cm
Gewicht: 1150 g

6 Reibungsdruckverlust inkompressibler Fluide in Rohren

Dieses Kapitel behandelt die Ähnlichkeitsgesetze und Kriterien für Modellversuche. Die Strömungsbereiche werden mit der *Reynolds*- und *Froude*zahl bestimmt. Bei reibungsbehafteter Strömung inkompressibler Fluide wird die Energiebilanzgleichung aufgestellt. Für den Reibungsdruckverlust bei laminarer und turbulenter Strömung in glatten und rauen geraden Rohrleitungen kreisförmigen Querschnitts werden Gleichungen hergeleitet und angewendet. Die Berechnung der Rohrreibungskoeffizienten wird auf gerade Leitungen nicht kreisförmiger Querschnitte erweitert.

6.1 Einleitung

Die Einführung der Viskosität zeigte, dass eine Kraft aufgewendet werden muss, um eine Fluidschicht mit konstanter Geschwindigkeit zu bewegen. Diese Kraft wird zur Überwindung der Reibung der mit unterschiedlicher Geschwindigkeit strömenden Fluidteilchen miteinander und der Reibung der Fluidteilchen an der Oberfläche der Wände benötigt. Bei idealen Fluiden strömen alle Teilchen mit gleicher Geschwindigkeit. Die Reibung innerhalb des Fluids und die Reibung des Fluids an der Oberfläche fester Körper verändern die Gesetzmäßigkeiten, die für ideale Fluide hergeleitet wurden.

Diese Gesetzmäßigkeiten können bis auf wenige Ausnahmen für reibungsbehaftete Strömung analytisch nicht hergeleitet werden. Sie sind, auf Messungen basierend, empirisch zu bestimmen. Soll eine für alle Fluide und alle Randbedingungen gültige Gesetzmäßigkeit empirisch hergeleitet werden, müssen bei den Messungen alle Größen, die die Gesetzmäßigkeit beeinflussen, variiert werden. Die Zahl der notwendigen Messungen kann sehr groß sein. Dies wird am Beispiel der Druckänderung in einem langen, geraden, waagerechten Rohr konstanten Querschnitts gezeigt. Bei der Strömung eines idealen Fluids durch das Rohr bleibt der Druck konstant. Aus Erfahrung weiß man, dass bei der Strömung eines realen Fluids durch ein Rohr eine Druckabnahme stattfindet. Diese Druckabnahme ist der *Reibungsdruckverlust*. Er wird von folgenden sechs Strömungsgrößen beeinflusst: Strömungsgeschwindigkeit c, dynamischer Viskosität des Fluids η, Dichte des Fluids ρ, Rohrdurchmesser d, Rohrrauigkeitshöhe k und Rohrlänge l. Bei jeweils 10 Variationen der einzelnen Einflussgrößen benötigt man 10^6 Messungen. Die Durchführung einer solch großen Anzahl von Messungen ist in einem vernünftigen Zeitrahmen unmöglich. Aus diesem Grund versucht man, Ähnlichkeiten zu finden, mit denen aus einer Messung die unter bestimmten Bedingungen ermittelten Gesetzmäßigkeiten auf andere Bedingungen übertragen werden können. Insbesondere will man im Labor aus Messungen kleinen Maßstabs Gesetzmäßigkeiten für Bedingungen in der Wirklichkeit finden.

Im Fall der reibungsbehafteten Rohrströmung stellte man fest, dass der Druckverlust proportional zur Rohrlänge ist. Außerdem fand man heraus, dass sich Rohre mit dem gleichen Verhältnis der Rauigkeitshöhe zum Rohrdurchmesser k/d bezüglich Reibungsdruckverlust gleich verhalten. Damit müssen für verschiedene Rohrlängen keine Messungen durchgeführt werden. Die Variation der Rauigkeitshöhe muss nur noch für einen Durchmesser erfolgen. Mit diesen Vereinfachungen sind aber immer noch 10^4 Messungen notwendig. Da man sich nicht nur auf die Strömung in langen, geraden und waagerechten Rohren beschränkt, sind für die jeweiligen Strömungsbedingungen noch mehrere Variable zu berücksichtigen. Deshalb wurden Gesetzmäßigkeiten gesucht, bei denen zwei Strömungen als physikalisch ähnlich betrachtet werden können. Diese Gesetze nennt man *Ähnlichkeitsgesetze* (similitude). Mit ihrer Hilfe kann die Zahl der Einflussgrößen wesentlich reduziert werden.

6.2 Ähnlichkeitsgesetze und Kennzahlen

Zwei Strömungen mit wirklichen Fluiden sind dann physikalisch ähnlich, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

- alle Längenabmessungen weisen die gleiche Proportionalität auf
- alle Oberflächenbeschaffenheiten weisen die gleiche Proportionalität auf
- alle Strömungskräfte weisen die gleiche Proportionalität auf.

Bezüglich der Längenabmessungen bedeutet Proportionalität Folgendes: Wird z. B. der Durchmesser d als charakteristische Größe für die Strömung ausgewählt, verhalten sich die anderen Längen l, die Querschnitte A und die Volumina V folgendermaßen:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{l_1}{l_2} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2} \qquad \frac{V_1}{V_2} = \frac{d_1^3}{d^3} \tag{6.1}$$

Zur Beschreibung der Oberflächenbeschaffenheit wird die mittlere Rauigkeitshöhe k verwendet. Ihre Dimension ist die Länge. Damit muss für die Ähnlichkeit die gleiche Proportionalität wie für die Längenabmessungen gelten:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{k_1}{k_2} \tag{6.2}$$

Die auf eine Strömung wirkenden Kräfte sind die Reibungskraft F_R, die Druckkraft F_p und die Trägheitskraft F_a. Sind zwei Strömungen ähnlich, müssen alle drei Kräfte gleiche Proportionalität aufweisen.

$$\frac{F_{R1}}{F_{R2}} = \frac{F_{p1}}{F_{p2}} = \frac{F_{a1}}{F_{a2}} \tag{6.3}$$

Die geometrische Summe der Reibungs- und Druckkraft ist die Trägheitskraft. Daher genügt es, wenn zwei der Kräfte gleiche Proportionalität aufweisen.

6.2.1 *Reynolds*zahl

Die *Reynolds*zahl *Re* (*Reynolds* number) wird als Verhältnis der Trägheitskraft zur Reibungskraft definiert. Diese Kennzahl wurde vom englischen Physiker *Osborne Reynolds* zum ersten Mal angegeben.

Die Reibungskraft kann aus der Definition der Viskosität bestimmt werden.

$$F_R = A \cdot \tau = -A \cdot \eta \cdot \frac{dc_x}{dx} \tag{6.4}$$

Unter Berücksichtigung der Proportionalität der Längen ist das Verhältnis der Reibungskräfte zweier Strömungen:

$$\frac{F_{R1}}{F_{R2}} = \frac{A_1 \cdot \eta_1 \cdot \dfrac{dc_{x1}}{dx_1}}{A_2 \cdot \eta_2 \cdot \dfrac{dc_{x2}}{dx_2}} = \frac{d_1 \cdot \eta_1 \cdot c_1}{d_2 \cdot \eta_2 \cdot c_2} \tag{6.5}$$

Die Trägheitskraft ist das Produkt aus Masse und Beschleunigung. Damit gilt für die Proportionalität der Trägheitskräfte:

$$\frac{F_{a1}}{F_{a2}} = \frac{\rho_1 \cdot V_1 \cdot a_1}{\rho_2 \cdot V_2 \cdot a_2} \tag{6.6}$$

Die Beschleunigung a lässt sich aber auch als c^2/l bzw. c^2/d angeben. Unter Berücksichtigung der Proportionalität der Längen erhält man:

$$\frac{F_{a1}}{F_{a2}} = \frac{\rho_1 \cdot d_1^2 \cdot c_1^2}{\rho_2 \cdot d_2^2 \cdot c_2^2} \tag{6.7}$$

Mit den Gln. (6.4) bis (6.7) bekommt man für das Verhältnis der Trägheits- zur Reibungskraft:

$$\frac{c_1 \cdot d_1 \cdot \rho_1}{\eta_1} = \frac{c_2 \cdot d_2 \cdot \rho_2}{\eta_2} \tag{6.8}$$

Die Reibungs- und Trägheitskräfte und damit auch die Druckkräfte zweier Strömungen haben die gleiche Proportionalität, wenn das Produkt der Strömungsgeschwindigkeit, der typischen Länge und Dichte, geteilt durch dynamische Viskosität, in beiden Strömungen gleich ist. Diese Größe ist dimensionslos und wird *Reynolds*zahl *Re* genannt.

$$Re = \frac{c \cdot d \cdot \rho}{\eta} = \frac{c \cdot d}{\nu} \tag{6.9}$$

Gemäß Herleitung ist die *Reynolds*zahl das Verhältnis der Trägheits- zu Reibungskräften in einer Strömung.

Zwei Strömungen gleicher Reynoldszahl haben bezüglich der auf sie wirkenden Kräfte die gleiche Proportionalität.

Die *Reynolds*zahl ist die wichtigste Kennzahl, um reibungsbehaftete Strömungen zu untersuchen. Wie in den nächsten Kapiteln gezeigt wird, können mit ihrer Hilfe sehr einfach Reibungsgesetze und Grenzen der Strömungsformen beschrieben werden.

6.2.2 *Froude*zahl

Wenn in einer Strömung die Schwerkraft zusätzlich einen wesentlichen Einfluss hat, muss sie bei ähnlichen Strömungen die gleiche Proportionalität haben wie die Trägheitskraft. Dies ist der Fall, wenn das Geschwindigkeitsquadrat, geteilt durch das Produkt der typischen Länge und der Erdbeschleunigung in beiden Strömungen gleich groß ist.

$$\frac{c_1^2}{d_1 \cdot g} = \frac{c_2^2}{d_2 \cdot g} \tag{6.10}$$

Diese Größe wird *Froude*zahl *Fr* (*Froude* number) genannt. Sie ist das Verhältnis der Trägheits- zur Schwerkraft.

Zwei Strömungen, in denen die Schwerkraft eine wesentliche Rolle spielt, sind dann ähnlich, wenn sie die gleiche Froudezahl haben.

Neuerdings wird die *Froude*zahl *Fr* als Wurzel des Kräfteverhältnisses definiert.

$$Fr = \frac{c}{\sqrt{d \cdot g}} \tag{6.11}$$

6.2.3 *Euler*zahl

Eine weitere wichtige Kennzahl ist die *Euler*zahl *Eu*. Sie ist das Verhältnis der Druckkraft zur Trägheitskraft. Dabei wird die Trägheitskraft durch den dynamischen Druck repräsentiert.

$$Eu = \frac{p_1 - p_2}{\frac{\rho \cdot c^2}{2}} = \frac{\Delta p}{\frac{\rho \cdot c^2}{2}} \tag{6.12}$$

Die *Euler*zahl kommt hauptsächlich bei der Untersuchung der durch Reibung verursachten Druckänderungen zur Anwendung. Sie figuriert dann unter den Bezeichnungen *Reibungsziffer*, *Reibungszahl* oder *Reibungskoeffizient*.

Zwei weitere wichtige Kennzahlen, die später noch besprochen werden, sind die *Mach*zahl und *Weber*zahl.

6.2.4 Modellversuche

Wie schon erwähnt, muss man durch Messungen die Gesetzmäßigkeiten der Strömung wirklicher Fluide empirisch herleiten. Am Beispiel des Reibungsdruckverlustes in einem langen, geraden, waagerechten Rohr waren für 10 Variationen der einzelnen Einflußgrößen 10^6 Messungen notwendig. Damit bei der Bestimmung des Druckverlustes physikalisch ähnliche Strömungen herrschen, genügt es, die *Reynolds*zahl und das Verhältnis der Rauigkeitshöhe zum Durchmesser zu variieren. Bei sehr kurzen Rohren ($l \approx d$) müsste noch das Verhältnis des Durchmessers zur Länge berücksichtigt werden. Damit reduziert sich die Anzahl der Versuche wesentlich. Aus Messungen mit Rohren kleineren Durchmessers kann bei gleicher *Reynolds*zahl und gleichem Verhältnis der Rauigkeitshöhe zum Durchmesser auf die Gesetzmäßigkeit für große Rohre geschlossen werden. Dies gilt auch bei komplexeren Problemen wie z. B. bei der Bestimmung des Luftwiderstands von Flugzeugen, bei der Ermittlung der Windkräfte auf Gebäude, bei Krafteinwirkungen auf die Schaufeln von Strömungsmaschinen usw. Mit relativ kostengünstigen Modellversuchen können die für die Wirklichkeit entsprechenden Größen bei gleicher *Reynolds*zahl bestimmt werden. Spielt die Schwerkraft eine wesentliche Rolle, muss beim Modellversuch auch die *Froude*zahl gleich groß sein. Dies ist bei der Untersuchung der Strömung von Gewässern, Auslaufvorgängen aus Behältern usw. wichtig.

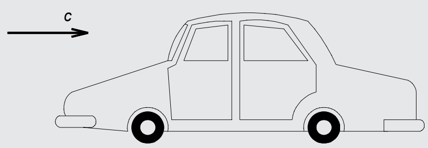
Die Modellversuche (model tests) werden in *Wind*-, *Wasser*- und *Schleppkanälen* durchgeführt. Bei Verwendung der gleichen *Reynolds*- und *Froude*zahl kann aus dem Modellversuch auf die Kräfteverhältnisse, Drücke und Stromlinienverläufe in der Wirklichkeit geschlossen werden.

BEISPIEL 6.1: Untersuchung des Luftwiderstands eines Autos am Modell im Windkanal

An einem Modell im Windkanal wird das Verhalten eines Autos bezüglich des Luftwiderstands untersucht. Im Windkanal erreicht man die Strömungsgeschwindigkeit von 200 m/s. Die charakteristische Länge des Autos ist seine Länge in Fahrtrichtung. Das Widerstandsverhalten soll bis zu einer Geschwindigkeit von 180 km/h untersucht werden. Welchen Maßstab darf das Modell haben?

Lösung

Schema Siehe Skizze



Annahmen

- Die für die Ähnlichkeit maßgebliche Kennzahl ist die *Reynolds*zahl.
- Die Luft ist inkompressibel.

Analyse

Der Fahrtwind für das Auto und das Fluid im Windkanal sind jeweils Luft. Bei gleicher Temperatur und gleichem Druck ist die kinematische Viskosität für das Original und Modell identisch. Um die gleiche *Reynolds*zahl zu erreichen, müssen die Geschwindigkeiten umgekehrt proportional zur Länge des Fahrzeugs sein. Die zu untersuchende Geschwindigkeit des Autos ist 180 km/h, was 50 m/s entspricht. Im Windkanal werden Geschwindigkeiten bis zu 200 m/s erreicht. Sie sind viermal größer als die des Originals. Die Länge des Modells kann so ein Viertel des Originals sein.

Der zu verwendende Maßstab ist **1 : 4**.

Diskussion

Durch die Verwendung eines kleineren Modells können die Kosten für den Versuch wesentlich reduziert werden, außerdem verringern sich die Investitions- und Betriebskosten (Energie) für den Windkanal.

BEISPIEL 6.2: Modellversuch an einem Ventil

Anhand eines Modells mit dem Durchmesser von 150 mm soll ein Ventil für die Kanalisation mit DN1500 gestestet werden. Im Original strömen 1,5 m^3/s Wasser. Beim Versuch entspricht die Temperatur des Wassers der des Originals. Bestimmen Sie die Strömungsgeschwindigkeit im Modell und Original, außerdem den Volumenstrom im Modell.

Lösung

Annahmen

- Die für die Ähnlichkeit maßgebliche Kennzahl ist die *Reynolds*zahl.
- Das Wasser ist inkompressibel.

Analyse

Da die Versuche mit dem Modell bei der gleichen Temperatur durchgeführt werden wie jene, bei der das Original arbeitet, ist die kinematische Viskosität für beide Fälle gleich groß. Um die gleiche *Reynolds*zahl zu erreichen, muss die Geschwindigkeit im Versuch umgekehrt proportional zum Durchmesser, also zehnmal größer sein. Im Original beträgt die Geschwindigkeit:

$$c_O = \dot{V} / A = 4 \cdot \dot{V} / (\pi \cdot d^2) = \mathbf{0{,}849\ m/s}$$

Im Modell ist die Geschwindigkeit zehnmal größer, also: **8,49 m/s**.

Da sich der Strömungsquerschnitt quadratisch zum Durchmesser verhält, ist der Volumenstrom zehnmal kleiner als im Original.

Diskussion

Trotz vergrößerter Geschwindigkeit kann der Massenstrom wesentlich verringert werden, was die Kosten der Versuche und die Größe der Versuchsanlage erheblich dezimiert. Dies wird erreicht, weil in der *Reynolds*zahl der Durchmesser die charakteristische Länge ist. Die Verkleinerung des Durchmessers verlangt zwar die proportionale Erhöhung der Geschwindigkeit, der Strömungsquerschnitt wird aber quadratisch verkleinert, was eine lineare Verringerung des Volumenstromes zur Folge hat.

6.2.5 Strömungsformen

Bei der Strömung von Fluiden wurden *Strömungsformen* (flow patterns), die verschiedenen Gesetzmäßigkeiten gehorchen, beobachtet. In geschlossenen Kanälen und bei der Umströmung feststehender Körper unterscheidet man zwischen *laminarer* und *turbulenter Strömung*. Bei laminarer Strömung, auch Schichtenströmung genannt, bewegen sich die Fluidteilchen in einem Rohr parallel zur Rohrachse, damit haben sie senkrecht zu ihr keine Geschwindigkeitskomponenten. Bei turbulenter Strömung in einem Rohr hat ein Fluidteilchen eine Hauptgeschwindigkeit in Richtung Rohrachse, der aber zusätzliche, zeitlich variierende Geschwindigkeitskomponenten in allen Strömungsrichtungen überlagert sind. Die *Reynolds*zahl ist das Verhältnis der Trägheitskräfte zu den Reibungskräften. Durch diese Kräfte wird die Querbewegung in der turbulenten Strömung verursacht. Deshalb eignet sich die

*Reynolds*zahl zur Unterscheidung der Strömungsformen. Sie werden am Beispiel der Rohrströmung und der Umströmung einer Kugel besprochen.

In offenen Kanälen mit freier Flüssigkeitsoberfläche treten bei der Strömung von Flüssigkeiten ebenfalls zwei verschiedene Strömungsformen auf, die durch die *Froude*zahl unterschieden werden.

6.2.5.1 Strömungsformen im Rohr

Je nach Größe der *Reynolds*zahl tritt in einem Rohr entweder *laminare* oder *turbulente Strömung* auf. Dies kann mit einem Farbstrahl demonstriert werden (Bild 6.1). Bringt man in eine Rohrströmung das gleiche, aber gefärbte Fluid ein, bleibt in einer laminaren Strömung der Querschnitt des gefärbten Fluids konstant und vermischt sich nicht mit dem übrigen Fluid. Bei der turbulenten Strömung wird als Folge der Querbewegung der Farbstrahl aufgerissen und das Fluid im gesamten Rohrquerschnitt eingefärbt. Die laminare Strömung weist ein parabelförmiges Geschwindigkeitsprofil auf, bei turbulenter Strömung ist es abgeflacht.

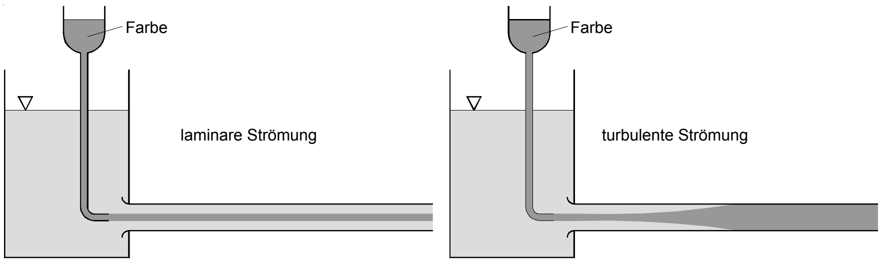


Bild 6.1: Veranschaulichung der laminaren und turbulenten Strömung

Zur Unterscheidung der Strömungsform wird die *Reynolds*zahl verwendet. Die Geschwindigkeit, mit der die *Reynolds*zahl berechnet wird, ist die mittlere Geschwindigkeit der Strömung, ermittelt aus der Kontinuitätsgleichung.

$$Re = \frac{\bar{c} \cdot d \cdot \rho}{\eta} = \frac{\bar{c} \cdot d}{\nu} \qquad \bar{c} = \frac{\dot{m}}{A \cdot \rho} \tag{6.13}$$

Ist die *Reynolds*zahl kleiner als 2'320, ist die Strömung laminar. Ist sie größer als 2'320, ist sie turbulent.

$Re < 2'320$ laminare Strömung
$Re > 2'320$ turbulente Strömung

Bei sehr günstigen Bedingungen kann die laminare Strömung auch noch bei *Reynolds*zahlen, die größer als 2'320 sind, auftreten. Diese Strömung ist instabil. Beim Auftreten einer kleinsten Störung erfolgt der Übergang zur turbulenten Strömung. In der Regel treten solche Strömungen nur unter Laborbedingungen auf. Wird dagegen in einer turbulenten Strömung die *Reynolds*zahl von 2'320 z. B.

durch Drosselung der Strömungsgeschwindigkeit unterschritten, entsteht laminare Strömung.

6.2.5.2 *Strömungsformen an umströmten Körpern*

werden am Beispiel einer umströmten Kugel erläutert (Bild 6.2).

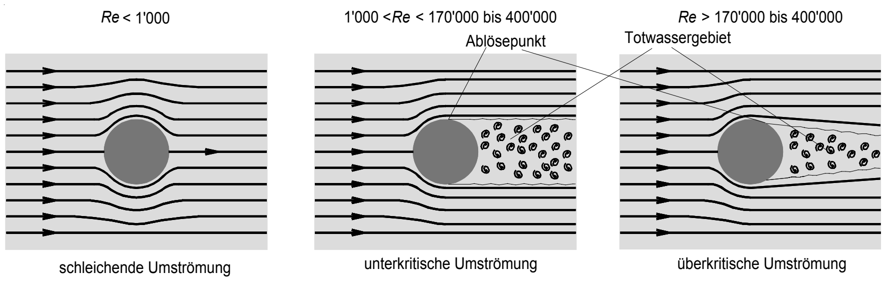


Bild 6.2: Strömungsformen bei der Umströmung einer Kugel

Die Strömung kann bei der laminaren Anströmung vor und nach der Kugel laminar bleiben. In diesem Fall spricht man von einer *schleichenden Umströmung*. Nach der Kugel schließen sich die Stromlinien wieder. Schleichende Strömung tritt bei *Reynolds*zahlen unter 1'000 auf. Die *Reynolds*zahl wird mit der Anströmgeschwindigkeit c und dem Durchmesser d der Kugel gebildet. Bei höheren *Reynolds*zahlen reißt die laminare Strömung am Meridiankreis (größter Kugelumfang) ab. Hinter der Kugel bildet sich ein großes, wirbelbehaftetes *Totwassergebiet*. Die übrige Strömung ist laminar und wird als *unterkritische Umströmung* bezeichnet. Sie tritt je nach Versuchsbedingungen zwischen *Reynolds*zahlen von 1'000 und 170'000 bis 400'000 auf. Bei noch größeren *Reynolds*zahlen setzt die überkritische Umströmung ein. Die Strömung reisst hinter dem Meridiankreis ab, das Totwassergebiet ist klein.

Re < 1'000	schleichende Umströmung
1'000 < Re < 170'000 bis 400'000	unterkritische Umströmung
Re > 170'000 bis 400'000	überkritische Umströmung

Die hier angegebenen Grenzen gelten für eine Kugel. Die Form eines Körpers kann die Grenzen stark beeinflussen. Charakteristische Längen für andere Geometrien werden später besprochen.

6.2.5.3 *Strömung von Flüssigkeiten mit freier Oberfläche*

Bei der Strömung in offenen Gerinnen (Flüsse, Kanäle) oder in teilweise gefüllten Rohrleitungen tritt je nach Größe der *Froude*zahl eine *strömende* oder *schießende Bewegung* auf. Die *Froude*zahl wird mit der Flüssigkeitstiefe gebildet. Bei *Froude*zahlen, die kleiner als 1 sind, tritt die strömende Bewegung auf, die man in

Flüssen und Kanälen vorfindet. Die Flüssigkeitsgeschwindigkeit ist klein, die Wassertiefe groß. Störungen breiten sich stromab- und stromaufwärts aus. Bei der schießenden Bewegung ist die Strömungsgeschwindigkeit groß, die Wassertiefe klein (Wildbach). Störungen breiten sich nur stromabwärts aus.

6.3 Energiebilanzgleichung reibungsbehafteter Strömung

Die Kontinuitätsgleichung wird durch Reibung nicht beeinflusst. Die Energiebilanzgleichung ist die des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik für offene Systeme. In Kapitel 4 wurden für ideale Fluide die zugeführte Wärme und die Dissipationsarbeit zu null gesetzt. Hier werden weiterhin adiabate Systeme untersucht, d. h., es wird keine Wärme transferiert. Bei der reibungsbehafteten Strömung muss der Dissipationsterm in Gl. (4.4) berücksichtigt werden. Der erste Hauptsatz für reibungsbehaftete isochore (inkompressible) Strömungen wird durch Gl. (4.4) beschrieben [6.1]. Sie lautet:

$$p_2 - p_1 + j_{12} \cdot \rho = -\left[\frac{c_2^2 \cdot \rho}{2} - \frac{c_1^2 \cdot \rho}{2} + g \cdot \rho \cdot (z_2 - z_1)\right] \tag{6.14}$$

Der Dissipationsterm $j_{12} \cdot \rho$ hat die Dimension eines Druckes und wird im Folgenden als *Reibungsdruckverlust* Δp_v bezeichnet. Nach Umformung erhalten wir für die Druckänderung:

$$p_1 - p_2 = \frac{c_2^2 \cdot \rho}{2} - \frac{c_1^2 \cdot \rho}{2} + g \cdot \rho \cdot (z_2 - z_1) + \Delta p_v \tag{6.15}$$

Die Druckänderung in einer reibungsbehafteten Stromröhre ist gleich der Summe der Änderungen des dynamischen Druckes, des hydrostatischen Druckes und des Reibungsdruckverlustes.

Der Reibungsdruckverlust ist stets positiv.

In einem waagerechten Rohr mit konstantem Strömungsquerschnitt verändert sich der Druck bei der inkompressiblen Strömung nur um den Reibungsdruckverlust. Diese Änderung ist immer positiv, d. h., der Druck am Austritt wird kleiner als am Eintritt. Die Bestimmung dieser Druckverluste ist Inhalt der nächsten Kapitel.

6.4 Reibungsdruckverlust in Rohren

Für die laminare und turbulente Strömung müssen *Reibungsdruckverluste* getrennt behandelt werden. Für die laminare Strömung in Rohrleitungen konstanten Querschnitts ist eine analytische Herleitung des Reibungsdruckverlustes möglich. Dies wird am Beispiel von Rohrleitungen kreisförmiger und rechteckiger Querschnitte gezeigt. Bei der turbulenten Strömung muss die Gesetzmäßigkeit mit Modellvorstellungen empirisch ermittelt werden.

6.4.1 Druckverlust in der laminaren Rohrströmung

In Bild 6.3 ist der Abschnitt einer waagerechten Rohrleitung kreisförmigen Querschnitts dargestellt, in dem ein Fluid mit zeitlich konstanter Geschwindigkeit strömt. Die x-Achse verläuft in der Rohrmitte.

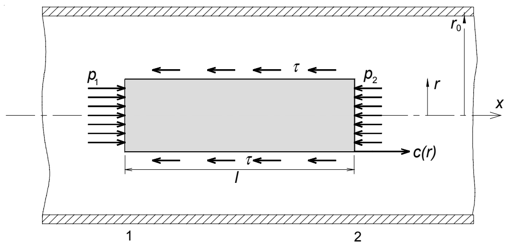


Bild 6.3: Zur Herleitung der laminaren Strömung

Die Strömung erfolgt laminar, d. h., in genügendem Abstand vom Eintritt strömen die Fluidteilchen in achsparallelen Schichten. Die Geschwindigkeit verändert sich nur mit dem Radius r, d. h. sie sind in gleicher Entfernung von der Rohrachse jeweils gleich groß. Das Fluid haftet an der Wand, die Geschwindigkeit ist dort gleich null. Das Rohr hat den Radius r_0. Innerhalb des Rohres betrachten wir einen kleinen Teilzylinder mit dem Radius r und der Länge l. Infolge Reibung entsteht zwischen den Stellen 1 und 2 ein Druckverlust. An Stelle 1 wirkt auf die Stirnfläche des Kreiszylinders eine größere Druckkraft als an Stelle 2. In einer stationären Strömung muss diese Druckkraft im Gleichgewicht mit den Schubspannungskräften sein, die auf die Oberfläche am Umfang des Teilzylinders wirken. Nach dem *Newton*'schen Schubspannungsansatz ist die Schubspannung:

$$\tau = -\eta \cdot \frac{dc}{dr} \tag{6.16}$$

Die durch Reibung ausgeübte Kraft wird damit:

$$F_R = 2 \cdot \pi \cdot l \cdot r \cdot \tau = -2 \cdot \pi \cdot l \cdot r \cdot \eta \cdot \frac{dc}{dr} \tag{6.17}$$

Die Druckkraft berechnet sich als:

$$F_p = (p_1 - p_2) \cdot \pi \cdot r^2 \tag{6.18}$$

In einer stationären Strömung sind diese beiden Kräfte gleich groß. Damit erhält man für die Geschwindigkeit folgende Differentialgleichung:

$$(p_1 - p_2) \cdot r = -2 \cdot l \cdot \eta \cdot \frac{dc}{dr} \tag{6.19}$$

Nach Separation der Variablen und Integration ergibt sich für die lokale Geschwindigkeit $c(r)$:

$$c(r) = -\frac{p_1 - p_2}{2 \cdot l \cdot \eta} \cdot \frac{r^2}{2} + C \tag{6.20}$$

Die Integrationskonstante C wird mit der Randbedingung $c = 0$ für $r = r_0$ bestimmt:

$$C = \frac{p_1 - p_2}{4 \cdot l \cdot \eta} \cdot r_0^2$$

Damit kann die Geschwindigkeit als eine Funktion des Radius r angegeben werden:

$$c(r) = \frac{p_1 - p_2}{4 \cdot l \cdot \eta} \cdot (r_0^2 - r^2) \tag{6.21}$$

Die Geschwindigkeitsverteilung nach dieser Gleichung wird *Stokes*'sches Gesetz genannt.

Gl. (6.21) zeigt, dass die Geschwindigkeitsverteilung $c = c(r)$ parabelförmig ist und die größte Geschwindigkeit in der Rohrmitte bei $r = 0$ erreicht wird.

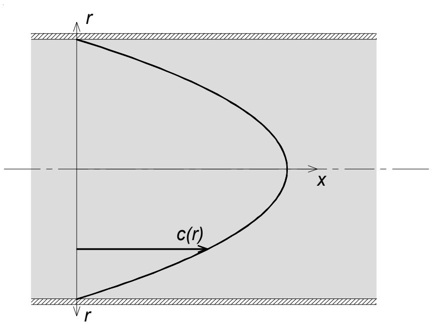


Bild 6.4: Geschwindigkeitsverteilung bei der laminaren Rohrströmung

Die mittlere Geschwindigkeit der Strömung kann durch Integration der Gl. (6.21) bestimmt werden.

$$\overline{c} = \frac{1}{A} \int_A c(r) \cdot dA = \frac{1}{r_0^2} \int_0^{r_0} \frac{p_1 - p_2}{4 \cdot l \cdot \eta} \cdot (r_0^2 - r^2) \cdot 2 \cdot r \cdot dr = \frac{p_1 - p_2}{8 \cdot l \cdot \eta} \cdot r_0^2 \tag{6.22}$$

In der Rohrmitte wird die größte Geschwindigkeit c_{max} erreicht. Sie beträgt:

$$c_{max} = \frac{p_1 - p_2}{4 \cdot l \cdot \eta} \cdot r_0^2 \tag{6.23}$$

Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit ist halb so groß wie die maximale Strömungsgeschwindigkeit in der Rohrmitte.

Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit kann mit der Kontinuitätsgleichung aus dem Volumenstrom und Rohrquerschnitt bestimmt werden. Setzt man weiterhin in Gl. (6.22) an Stelle des Rohrradius den Rohrdurchmesser d ein, erhält man:

$$\dot{V} = \bar{c} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = \frac{\pi \cdot (p_1 - p_2) \cdot d^4}{128 \cdot l \cdot \eta} \tag{6.24}$$

Die in Gleichung (6.24) hergeleitete Beziehung zwischen dem Volumenstrom und Druckverlust ist das *Hagen-Poiseuille*'sche Gesetz. Es wurde unabhängig voneinander vom deutschen Wasserbauer *Hagen* und französischen Arzt *Poiseuille* entdeckt. Nach diesem Gesetz ist der Volumenstrom in einem waagerechten Rohr konstanten Querschnitts bei laminarer Strömung proportional zum Druckverlust und der vierten Potenz des Durchmessers, umgekehrt proportional zur Länge und dynamischen Viskosität.

Gl. (6.24) kann auch nach der Druckänderung, die dem Reibungsdruckverlust entspricht, aufgelöst werden.

$$p_1 - p_2 = \Delta p_v = \frac{128 \cdot l \cdot \eta \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d^4} = \frac{64 \cdot l \cdot \eta \cdot \bar{c}}{2 \cdot d^2} \tag{6.25}$$

Durch Ersetzen der dynamischen Viskosität durch die kinematische Viskosität und durch Umformung erhält man aus Gl. (6.25):

$$\Delta p_v = \frac{64}{\frac{\bar{c} \cdot d}{\nu}} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\bar{c}^2 \cdot \rho}{2} = \frac{64}{Re} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\bar{c}^2 \cdot \rho}{2} \tag{6.26}$$

Der Ausdruck 64/*Re* wird *Rohrreibungszahl* λ (auch *Rohrreibungsbeiwert* oder *Rohrreibungskoeffizient*) genannt.

$$\lambda = \frac{64}{Re} \tag{6.27}$$

Die Rohrreibungszahl (friction factor) ist wie die *Reynolds*zahl dimensionslos.

Der Druckverlust laminarer Strömung ist proportional zur Rohrreibungszahl, zur dimensionslosen Länge l/d und zum dynamischen Druck des Fluids.

An Stelle der mittleren Strömungsgeschwindigkeit kann in Gl. (6.26) der Volumen- oder Massenstrom eingesetzt werden.

$$\Delta p_v = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\bar{c}^2 \cdot \rho}{2} = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{8 \cdot \dot{m}^2}{\rho \cdot \pi^2 \cdot d^4} = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{8 \cdot \dot{V}^2 \cdot \rho}{\pi^2 \cdot d^4} \tag{6.28}$$

Die für die Strömung charakteristische Länge, die in die Reynoldszahl eingesetzt wird, ist in Rohren kreisförmigen Querschnitts der Rohrdurchmesser.

Bei laminarer Strömung ist der Reibungsdruckverlust von der Oberflächenbeschaffenheit (Rauigkeitshöhe) unabhängig.

Laminare Strömung kommt nur bei Fluiden hoher Viskosität, bei kleinen Rohrdurchmessern und kleinen Strömungsgeschwindigkeiten vor.
Zur Analyse des Druckverlustes wird die *Euler*zahl verwendet.

$$Eu = \frac{\Delta p_v}{\frac{\rho \cdot c^2}{2}} = \frac{64}{Re} \cdot \frac{l}{d} = \lambda \cdot \frac{l}{d} \tag{6.29}$$

Die *Euler*zahl ist nur eine Funktion der Rohrreibungszahl und dimensionslosen Länge l/d. Diese Darstellung der Druckverlustberechnung wird auch bei turbulenter Strömung übernommen.

BEISPIEL 6.3: **Druckverlust in einer Heizölleitung**

In einer geraden, horizontalen Rohrleitung mit 50 mm Innendurchmesser und 300 m Länge strömt Heizöl mit einer mittleren Geschwindigkeit von 1 m/s. Die Dichte des Heizöls ist 800 kg/m^3 und die kinematische Viskosität $50 \cdot 10^{-6}$ m^2/s. Bestimmen Sie den Reibungsdruckverlust in der Rohrleitung.

Lösung

Annahmen

- Die Viskosität des Öls ist konstant.
- Der Strömungsquerschnitt ist konstant.

Analyse

Um zu prüfen, ob die Strömung laminar ist, muss zunächst die *Reynolds*zahl bestimmt werden.

$$Re = \frac{c \cdot d}{\nu} = \frac{1 \cdot \text{m/s} \cdot 0{,}05 \cdot \text{m}}{50 \cdot 10^{-6} \cdot \text{m}^2/\text{s}} = 1'000$$

Da die *Reynolds*zahl kleiner als 2'320 ist, ist die Strömung laminar. Die Rohrreibungszahl kann nach Gl. (6.27) berechnet werden.

$$\lambda = 64 / Re = 0{,}064$$

Der Reibungsdruckverlust ist nach Gl. (6.28):

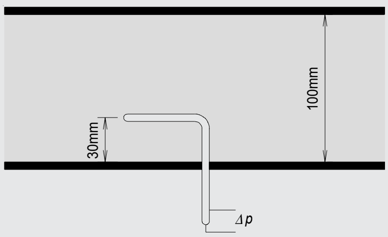
$$\Delta p_v = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{c^2 \cdot \rho}{2} = 0{,}064 \cdot \frac{300 \cdot \text{m}}{0{,}05 \cdot \text{m}} \cdot \frac{1^2 \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \cdot 800 \cdot \text{kg/m}^3}{2} = \mathbf{153'600\ \ Pa = 1{,}536\ \ bar}$$

Diskussion

Bei der Berechnung des Reibungsdruckverlustes ist darauf zu achten, dass die richtigen Einheiten eingesetzt werden.

BEISPIEL 6.4: **Bestimmung des Massenstromes und Reibungsdruckverlustes**

In einer horizontalen Leitung mit 100 mm Innendurchmesser strömt Rohöl. Die Länge der Leitung ist 30 m. Im 30 mm-Abstand von der Wand wird die Strömungsgeschwindigkeit mit einem *Prandtl*rohr gemessen. Der gemessene dynamische Druck beträgt 576 Pa. Kinematische Viskosität des Rohöls: $90 \cdot 10^{-6}$ m²/s, Dichte: 800 kg/m³. Bestimmen Sie den Massenstrom und den Reibungsdruckverlust in der Rohrleitung.



Lösung

Schema Siehe Skizze

Annahmen

- Die Viskosität des Öls ist konstant.
- Der Strömungsquerschnitt ist konstant.

Analyse

Aus der Messung mit dem *Prandtl*rohr wird die Geschwindigkeit nach Gl. (4.7) bestimmt.

$$c = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p_{dyn}}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 576 \cdot \text{Pa}}{800 \cdot \text{kg/m}^3}} = 1{,}2\ \ \text{m/s}$$

Diese Geschwindigkeit wurde im 30 mm-Abstand von der Rohrwand bestimmt. Die mittlere Geschwindigkeit berechnet man mit den Gln. (6.21) und (6.22).

$$c(r) = \frac{p_1 - p_2}{4 \cdot l \cdot \eta} \cdot (r_0^2 - r^2) \qquad \bar{c} = \frac{p_1 - p_2}{8 \cdot l \cdot \eta} \cdot r_0^2$$

Aus beiden Gleichungen folgt für die mittlere Geschwindigkeit:

$$\bar{c} = \frac{c(r)}{2} \cdot \frac{r_0^2}{(r_0^2 - r^2)} = \frac{50^2}{50^2 - 20^2} \cdot 0{,}6 \cdot \text{m/s} = 0{,}714 \text{ m/s}$$

Der Massenstrom beträgt:

$$\dot{m} = \pi \cdot r_0^2 \cdot \rho \cdot \bar{c} = \pi \cdot 0{,}05^2 \cdot \text{m}^2 \cdot 800 \cdot \text{kg/m}^3 \cdot 0{,}714 \cdot \text{m/s} = \mathbf{4{,}49 \ \ kg/s}$$

Die *Reynolds*zahl ist: $Re = \frac{c \cdot d}{\nu} = \frac{0{,}714 \cdot 0{,}1}{90 \cdot 10^{-6}} = 794$

Da die Strömung laminar ist, sind die vorgehenden Berechnungen richtig. Der Reibungsdruckverlust berechnet sich als:

$$\Delta p_v = \frac{64}{Re} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{c^2 \cdot \rho}{2} =$$

$$= 0{,}081 \cdot \frac{30 \cdot \text{m}}{0{,}1 \cdot \text{m}} \cdot \frac{0{,}714^2 \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \cdot 800 \cdot \text{kg/m}^3}{2} = \mathbf{4'937 \ \ Pa = 0{,}0494 \ \ bar}$$

Diskussion

In einer laminaren Strömung kann aus der Messung der lokalen Geschwindigkeit die mittlere Geschwindigkeit einfach bestimmt werden.

6.4.2 Druckverlust in der turbulenten Rohrströmung

Die Gesetzmäßigkeiten für turbulente Rohrströmung können nicht analytisch hergeleitet werden. Die lokale Strömungsgeschwindigkeit ist zeitlich nicht konstant. Zu den lokalen mittleren Strömungsgeschwindigkeiten kommen zusätzliche, kleinere turbulente Bewegungen, die auch als turbulente Schwankungen bezeichnet werden. Diese Bewegungen sind in allen Richtungen vorhanden. Messungen zeigten, dass die Geschwindigkeitsverteilung in der Rohrmitte sehr flach ist und die Strömungsgeschwindigkeit fast im gesamten Querschnitt der mittleren Strömungsgeschwindigkeit entspricht. In der Nähe der Rohrwand kann man ein starkes Abfallen der Geschwindigkeit beobachten. In einer dünnen, wandnahen *Grenzschicht* ist die Strömung laminar. Werden die Messergebnisse in hydraulisch glatten Rohren nach der *Euler*zahl geordnet, stellt man fest, dass die Abnahme der Rohrreibungszahl mit der *Reynolds*zahl zwar vorhanden, jedoch wesentlich kleiner als bei der laminaren Strömung ist. In Rohren mit einer technisch rauen Oberfläche hat die Rauigkeitshöhe zusätzlich Einfluss auf die Rohrreibungszahl. Mit zunehmenden *Reynolds*zahlen nimmt auch der Einfluss der Rauigkeitshöhe zu, die dann allein die Rohrreibungszahl bestimmt.

Nach *Prandtl* [6.2] ist die *Dicke* δ der laminaren *Grenzschicht*:

$$\delta = 62{,}7 \cdot Re^{-0{,}875} \cdot d \tag{6.30}$$

Die Grenzschichtdicke nimmt mit zunehmender *Reynolds*zahl ab. Damit ist der Einfluss der Rauigkeitshöhe zu erklären. Bei kleinen Rauigkeitshöhen befinden sie sich in der laminaren Grenzschicht und beeinflussen die Reibung nicht. Bei *Reynolds*zahlen von 100'000 ist nach *Prandtl* die Dicke der laminaren Grenzschicht das 0,0026fache des Durchmessers. In einem Rohr mit 50 mm Durchmesser beträgt sie 0,13 mm. Rauigkeiten, deren Höhen größer sind, ragen aus der laminaren Grenzschicht heraus.

Blasius hat nach Sichtung vieler Messungen und mit einem Potenzgesetz nach *von Kármán* für die Geschwindigkeitsverteilung eine Gesetzmäßigkeit für die Rohrreibungszahl hergeleitet. Die Geschwindigkeitsverteilung wird nach *von Kármán* folgendermaßen angegeben:

$$c = c_{max} \cdot (1 - r / r_0)^{\frac{1}{n}} \tag{6.31}$$

Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit kann durch Integration über dem gesamten Rohrquerschnitt bestimmt werden.

$$\overline{c} = \frac{c_{max}}{r_0^2} \cdot \int_0^{r_0} (1 - r / r_0)^{\frac{1}{n}} \cdot r \cdot dr = c_{max} \cdot \frac{2 \cdot n^2}{(n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)}$$

$$\frac{\overline{c}}{c_{max}} = \frac{2 \cdot n^2}{(n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)} \tag{6.32}$$

Dieses Geschwindigkeitsprofil ist in Bild 6.5 dargestellt. Es stimmt außerhalb der laminaren Grenzschicht in Wandnähe sehr gut mit gemessenen Werten überein. In der Rohrmitte weist das Geschwindigkeitsprofil eine Unstetigkeit auf, was mit der Wirklichkeit nicht übereinstimmt. *Blasius* hat aus den ihm zur Verfügung stehenden Messungen für n den Wert 7 ermittelt. Dieser Wert stimmt bei *Reynolds*zahlen zwischen 10'000 und 100'000 recht gut. Bei anderen *Reynolds*zahlen fand man für n Werte zwischen 5,3 und 10 (Bild 6.6).

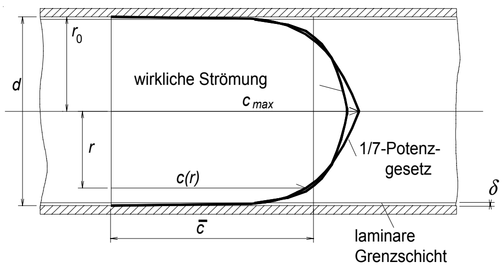


Bild 6.5: Geschwindigkeitsverteilung in der turbulenten Rohrströmung

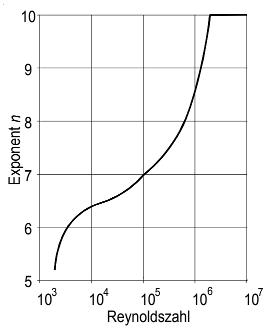


Bild 6.6: Exponent der Geschwindigkeitsverteilung

An der Rohrwand wird die Steigung des Geschwindigkeitsprofils allerdings gleich unendlich. Dies würde bedeuten, dass nach dem *Newton*'schen Schubspannungsansatz an der Wand die Schubspannung unendlich groß ist, was mit der Wirklichkeit wiederum nicht übereinstimmt. Nimmt man an, dass in der laminaren Grenzschicht das Geschwindigkeitsprofil entsprechend der laminaren Strömung verläuft und dann in die durch das Potenzgesetz angegebene Form übergeht, kann die Rohrreibungszahl bestimmt werden. *Blasius* fand folgende Gesetzmäßigkeit:

$$\lambda = 0{,}3164 \cdot Re^{-0{,}25} \tag{6.33}$$

Die so ermittelten Rohrreibungszahlen zeigen bis zu *Reynolds*zahlen von 10^5 eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit gemessenen Werten. Für größere *Reynolds*-zahlen liefert Gl. (6.33) zu kleine Werte. Bei hydraulisch glatten Rohren wird hier eine von *Prandtl* hergeleitete Beziehung verwendet.

$$\lambda = \left[\log \cdot (Re^2 \cdot \lambda) - 0{,}8\right]^{-2} \tag{6.34}$$

Die in den Gln. (6.33) und (6.34) hergeleiteten Beziehungen gelten für glatte Rohre.

Rohre mit kleinen Rauigkeitshöhen, bei denen $65 < Re \cdot k/d$ ist, können als glatte Rohre behandelt werden.

Bei sehr hohen *Reynolds*zahlen, wenn $Re \cdot k/d >$ 1'300 ist, wird die Rohrreibungszahl nur von der Rauigkeit bestimmt. Hier fand man folgenden Zusammenhang:

$$\lambda = \left[2 \cdot \log(3{,}715 \cdot d / k)\right]^{-2} \tag{6.35}$$

Es gibt einen Bereich, in dem die Rohrreibungszahl von der Rauigkeit, aber auch von der *Reynolds*zahl bestimmt wird. Dies ist der Fall, wenn $65 < Re \cdot k/d <$ 1'300. Hier ragen die Rauigkeitserhöhungen nur wenig aus der laminaren Grenzschicht und beeinflussen die Reibungsgesetze. *Colebrook* ermittelte in diesem Bereich folgende Beziehung für die Rohrreibungszahl:

$$\lambda = \left[-2 \cdot \log\left(\frac{2{,}51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + 0{,}269 \cdot \frac{k}{d}\right)\right]^{-2} \tag{6.36}$$

Strebt die *Reynolds*zahl gegen unendlich, geht Gl. (6.36) in Gl. (6.35) über. Bei einer mittleren Rauigkeitshöhe von $k = 0$ geht Gl. (6.36) in Gl. (6.34) über.

Tabelle 6.1: Gleichungen und Gültigkeitsbereiche der Rohrreibungszahl λ

Formel	Gültigkeitsbereich	Strömung	Rohr
$\lambda = \frac{64}{Re}$	$Re < 2'320$	laminar	
$\lambda = 0{,}3164 \cdot Re^{-0{,}25}$	$2'300 < Re < 10^5$ und $Re \cdot k/d < 65$	turbulent	glatt
$\lambda = \left[\log \cdot (Re^2 \cdot \lambda) - 0{,}8\right]^{-2}$	$Re > 10^5$ und $Re \cdot k/d < 65$	turbulent	glatt
$\lambda = \left[2 \cdot \log(3{,}715 \cdot d / k)\right]^{-2}$	$Re \cdot k/d > 1'300$	turbulent	rau
$\lambda = \left[-2 \cdot \log\left(\frac{2{,}51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + 0{,}269 \cdot \frac{k}{d}\right)\right]^{-2}$	$65 < Re \cdot k/d < 1'300$	turbulent	rau

Das Diagramm in Bild 6.7 zeigt die Rohrreibungszahlen. In Tabelle 6.1 sind die Gleichungen und ihre Gültigkeitsbereiche aufgelistet. Die genaue Berechnung der Rohrreibungszahl nach den Gln. (6.34) und (6.36) muss mit Iteration erfolgen. Als Anfangswert kann für die Rohrreibungszahl 0,02 oder ein Wert aus dem Diagramm in Bild 6.7 entnommen werden. Beide Gleichungen konvergieren sehr schnell.

Die Berechnung der Rohrreibungszahlen ist auch mit dem Programm FMA0601 möglich.

Rauigkeiten technisch verwendeter Rohre sind in Tabelle 6.2 angegeben.

Tabelle 6.2: Rauigkeitshöhen technischer Rohre

gezogene Metall-, Kunststoff- und Glasrohre	0,0005 bis 0,0015 mm
nahtlose Stahlrohre, neu	0,02 bis 0,06 mm
nahtlose Stahlrohre, verzinkt, neu	0,07 bis 0,16 mm
Stahlrohre nach längerer Benutzung	0,15 bis 3 mm
gusseiserne Rohre	0,2 bis 3 mm

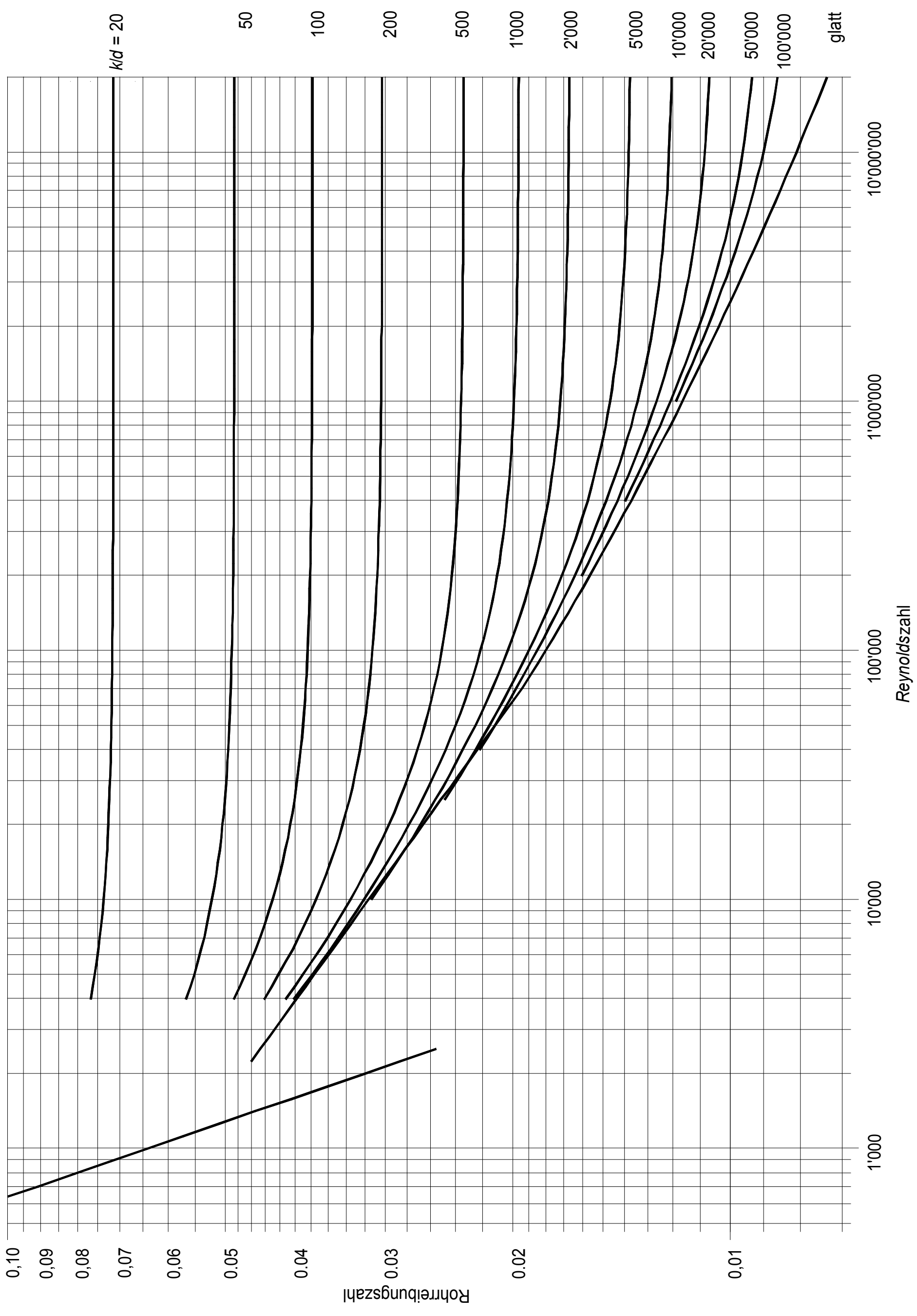


Bild 6.7: Rohreibungszahl λ

BEISPIEL 6.5: **Druckverlust in einer Wasserleitung**

In einer geraden, horizontalen Rohrleitung mit 25 mm Innendurchmesser und 300 m Länge strömt Wasser mit einer mittleren Geschwindigkeit von 2 m/s. Die Rauigkeitshöhe beträgt 0,1 mm. Die Dichte des Wassers ist 998 kg/m^3, die kinematische Viskosität 1 · 10^{-6} m^2/s. Bestimmen Sie den Reibungsdruckverlust in der Rohrleitung.

Lösung

Annahmen

- Die Viskosität des Wassers ist konstant.
- Der Strömungsquerschnitt ist konstant.

Analyse

Um zu prüfen, ob die Strömung laminar oder turbulent ist, muss die *Reynolds*zahl bestimmt werden.

$$Re = \frac{c \cdot d}{\nu} = \frac{2 \cdot \mathrm{m/s} \cdot 0{,}025 \cdot \mathrm{m}}{1 \cdot 10^{-6} \cdot \mathrm{m^2/s}} = 50'000$$

Da die *Reynolds*zahl größer als 2'320 ist, ist die Strömung turbulent.

Re · *k*/*d* = 50'000 · 0,1/25 = 200, also größer als 65. Daher wird die Rohrreibungszahl nach Gl. (6.37) berechnet.

$$\lambda = \left[-2 \cdot \log\left(\frac{2{,}51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + 0{,}269 \cdot \frac{k}{d} \right) \right]^{-2} = 0{,}03045$$

Aus dem Diagramm in Bild 6.7 liest man 0,0305 ab. Der Unterschied ist weniger als 0,2 %.

Der Reibungsdruckverlust berechnet sich nach Gl. (6.27):

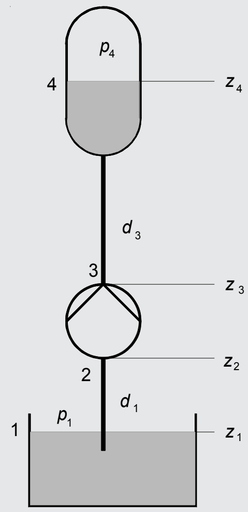
$$\Delta p_v = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{c^2 \cdot \rho}{2} = 0{,}03045 \cdot \frac{300 \cdot \mathrm{m}}{0{,}025 \cdot \mathrm{m}} \cdot \frac{2^2 \cdot \mathrm{m^2/s^2} \cdot 998 \cdot \mathrm{kg/m^3}}{2} = \mathbf{729'365\ \ Pa}$$

Diskussion

Bei der Berechnung des Reibungsdruckverlustes ist darauf zu achten, dass die richtigen Einheiten eingesetzt werden.

BEISPIEL 6.6: **Pumpenauslegung**

Aus einem atmosphärischen Behälter mit dem Druck p_1 = 0,98 bar soll Wasser mit einer Pumpe in einen Behälter mit 4 bar Druck gepumpt werden. Die in der Skizze angegebenen geodätischen Höhen sind: z_1 = 0 m, $z_2 = z_3$ = 5 m, z_4 = 10 m. Der Durchmesser d_3 = 100 mm. Die Geschwindigkeit c_3 = 4 m/s. Aus einem Katalog möchten Sie eine passende Pumpe aussuchen. Dazu müssen der Volumenstrom und die Förderhöhe (Druckdifferenz $p_3 - p_2$, angegeben als m Wassersäule) bestimmt werden. Aus dem Katalog ist ersichtlich, dass der NPSH-Wert (nominal pump suction head) mit 4 m angegeben ist. Dies bedeutet, dass der Druck p_2 vor der Pumpe größer sein muss als der Sättigungsdruck des Wassers plus des Druckes entsprechend der Wassersäule von 4 m. Bestimmen Sie den Volumenstrom, die Förderhöhe der Pumpe und den zur Einhaltung des NPSH-Wertes notwendigen Durchmesser d_1. Die Temperatur des Wassers ist 20 °C. Der Sättigungsdruck beträgt bei dieser Temperatur 23,4 mbar. Dichte des Wassers: 998 kg/m^3, kinematische Viskosität: 10^{-6} m^2/s. Die Oberfläche der Rohre ist glatt.



Lösung

Schema Siehe Skizze

Annahmen

- Dichte und Viskosität des Wassers sind konstant.
- Die Verdichtung in der Pumpe wird als reibungsfrei angenommen.
- Die Geschwindigkeiten an den Stellen 1 und 4 sind so klein, dass sie vernachlässigt werden können.

Analyse

Mit den gegebenen Größen Durchmesser d_3 und Geschwindigkeit c_3 kann der Volumenstrom berechnet werden.

$$\dot{V} = \frac{\pi}{4} \cdot d_3^2 \cdot c_3 = \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}01 \cdot \mathrm{m}^2 \cdot 4 \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathbf{0{,}03142\ \ m^3/s}$$

Zur Bestimmung der Förderhöhe muss man die Drücke p_2 und p_3 bestimmen. Druck p_3 kann mit den vorhandenen Angaben berechnet werden. Zur Ermittlung des Druckes p_2 ist zunächst der Durchmesser der Pumpensaugleitung zu bestimmen. Nach der Vorgabe muss der Druck p_2 größer sein als der Sättigungsdruck des Wassers plus Schweredruck einer 4 m hohen Wassersäule.

$$p_2 > p_s + g \cdot \rho \cdot 4 \cdot \mathrm{m} = 2'340 \cdot \mathrm{Pa} + 9{,}81 \cdot \mathrm{m/s^2} \cdot 998 \cdot \mathrm{kg/m^3} \cdot 4 \cdot \mathrm{m} = 41'501\ \mathrm{Pa}$$

Dies bedeutet, dass die Druckänderung in der Saugleitung kleiner sein muss als der Druck p_1 abzüglich 41'488 Pa. Die Druckänderung setzt sich aus dem Reibungsdruckverlust und der Änderung des dynamischen und Schweredruckes zusammen.

$$56'512\,\mathrm{Pa} > p_1 - p_2 = \rho \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot c_2^2 + g \cdot (z_2 - z_1) + \lambda \cdot \frac{l}{d_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot c_2^2\right]$$

Die Geschwindigkeit c_2 und die Rohrreibungszahl λ hängen vom Durchmesser d_2 ab. Der mathematische Zusammenhang ist meist so komplex, dass nur eine iterative Lösung sinnvoll ist. Die Geschwindigkeit c_2 kann mit der Kontinuitätsgleichung aus dem Volumenstrom mit dem Durchmesser d_2 bestimmt werden.

$$c_2 = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d_2^2}$$

In die vorgehende Gleichung eingesetzt, erhalten wir:

$$56'512\ \mathrm{Pa} > p_1 - p_2 = \rho \cdot \left[g \cdot (z_2 - z_1) + \left(1 + \lambda \cdot \frac{1}{d_2}\right) \cdot \frac{8 \cdot \dot{V}^2}{\pi^2 \cdot d_2^4}\right]$$

Für die nummerische Berechnung kann der Schweredruck bestimmt und eingesetzt werden. Die Gleichung vereinfacht sich damit zu:

$$7'577\,\mathrm{Pa} > \rho \cdot \left(1 + \frac{\lambda \cdot l}{d_2}\right) \cdot \frac{8 \cdot \dot{V}^2}{\pi^2 \cdot d_2^4}$$

Diese Gleichung kann nicht nach d_2 aufgelöst werden. Die Rohrreibungszahl ist von der *Reynolds*zahl und damit vom Durchmesser d_2 abhängig. Die Berechnung wird mit einer Rohrreibungszahl von 0,02 gestartet. Damit werden der Durchmesser d_2 und dann die Rohrreibungszahl ermittelt. d_2 wird so lange neu bestimmt, bis die erforderliche Genauigkeit erreicht ist.

$$\lambda = 0{,}02 \qquad d_2 > 0{,}1179\ \mathrm{m}$$

Die Rohrreibungszahl wird nach Gl. (6.35) iterativ berechnet.

$$\lambda = \left[\log \cdot (Re^2 \cdot \lambda) - 0{,}8\right]^{-2} = 0{,}0141$$

$$\lambda = 0{,}0141 \qquad d_2 > 0{,}1141\ \mathrm{m}$$

$$\lambda = 0{,}0140 \qquad d_2 > 0{,}1140\ \mathrm{m}$$

Wir wählen hier eine Leitung mit der NW125, d. h. mit 125 mm Innendurchmesser, aus. Damit wird die Rohrreibungszahl:

$$c_2 = 2{,}56\,\mathrm{m/s} \qquad Re = 320'000 \qquad \lambda = 0{,}0143$$

$$p_2 = p_1 - \rho \cdot \left[g \cdot (z_2 - z_1) + (1 + \lambda \cdot \frac{l}{d_2}) \cdot \frac{1}{2} \cdot c_2^2 \right] =$$

$$= 98'000 - 998 \cdot \left[9{,}81 \cdot 5 + \left(1 + 0{,}0143 \cdot \frac{5}{0{,}125} \right) \cdot \frac{2{,}56^2}{2} \right] = \mathbf{43'926\ \ Pa}$$

Der Druck nach der Pumpe rechnet sich als:

$$p_3 = p_4 + \rho \cdot \left[g \cdot (z_4 - z_3) + (\lambda \cdot \frac{l}{d_3} - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot c_3^2 \right]$$

Die Rohrreibungszahl wird mit Gl. (6.35) berechnet und ist 0,0137.

Die Zahlenwerte eingesetzt, erhält man für den Druck $\boldsymbol{p_3}$ **= 446'423 Pa**. Die Förderhöhe Δz wird aus der Differenz der Drücke p_3 und p_2 bestimmt.

$$\Delta z = \frac{p_3 - p_2}{g \cdot \rho} = \frac{(44'6423 - 43'926) \cdot \text{Pa}}{9{,}81 \cdot \text{m/s} \cdot 998 \cdot \text{kg/m}^3} = \mathbf{41{,}126\ \ m}$$

Diskussion

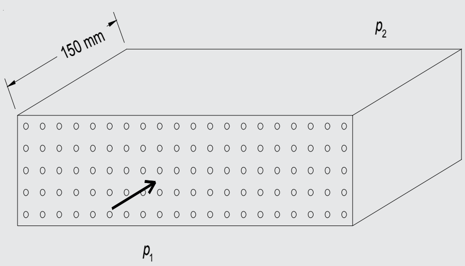
Mit der um den Reibungsdruckverlust erweiterten *Bernoulli*-Gleichung können die Druckänderungen, die durch den Reibungsdruckverlust und durch Änderung der Geschwindigkeit und geodätischen Höhe verursacht sind, berechnet werden. Es ist stets darauf zu achten, richtige Einheiten zu verwenden.

BEISPIEL 6.7: Änderung des Massenstromes durch die Vergrößerung einer Leitung

In einem Ziegelstein befinden sich 100 Löcher mit je 3 mm Durchmesser. Durch die Löcher strömt Luft. Der Druck am Eintritt ist p_1 = 1,03 bar, am Austritt p_2 = 0,98 bar. Eines der Löcher wird auf 10 mm Innendurchmesser erweitert. Die Luft kann als inkompressibles Medium mit der Dichte von 1,15 kg/m³ und kinematischen Viskosität $15{,}6 \cdot 10^{-6}$ m²/s angenommen werden. Die Maße des Quaders sind in der Skizze angegeben. Die Rauigkeit der Bohrungen ist 0,1 mm. Bestimmen Sie den Massenstrom der Luft vor und nach dem Aufbohren des einen Loches.

Lösung

Schema Siehe Skizze



Annahmen

- Die Dichte und Viskosität der Luft sind konstant.
- Die Luft ist inkompressibel.
- Bei der Einströmung wird die Änderung der Geschwindigkeit vernachlässigt.
- Durch das Aufbohren des einen Loches verändert sich der Druck nicht.

Analyse

Da die Geschwindigkeit in den Bohrungen unbekannt ist und die *Reynolds*zahl daher nicht bestimmt werden kann, wird vorausgesetzt, dass die Strömung turbulent ist. Wegen der unbekannten *Reynolds*zahl rechnet man zuerst mit einer angenommenen Rohrreibungszahl. Da alle Rohre an Ein- und Austritten den gleichen Druck haben, ist auch der Druckverlust in allen Rohren gleich groß. Mit Gl. (6.27) kann die Geschwindigkeit in den Rohren bestimmt werden.

$$\lambda = 0{,}02 \qquad c = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p_v \cdot d}{\lambda \cdot l \cdot \rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5'000 \cdot \mathrm{Pa} \cdot 0{,}003 \cdot \mathrm{m}}{0{,}02 \cdot 0{,}15 \cdot \mathrm{m} \cdot 1{,}15 \cdot \mathrm{kg/m^3}}} = 93{,}25 \ \mathrm{m/s}$$

Mit der Geschwindigkeit rechnet man jetzt die *Reynolds*- und Rohrreibungszahl.

$$Re = \frac{c \cdot d}{\nu} = \frac{93{,}25 \cdot 0{,}003}{15{,}6 \cdot 10^{-6}} = 17'933 \qquad Re \cdot k / d = 598$$

Damit kann die Rohrreibungszahl nach Gl. (6.37) ermittelt werden.

$$\lambda = \left[-2 \cdot \log\left(\frac{2{,}51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + 0{,}269 \cdot \frac{k}{d} \right) \right]^{-2} = 0{,}061$$

Bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist, werden Geschwindigkeit, *Reynolds*-zahl und Rohrreibungszahl neu berechnet.

$$\lambda = 0{,}061 \qquad c = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p_v \cdot d}{\lambda \cdot l \cdot \rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5'000 \cdot 0{,}003}{0{,}061 \cdot 0{,}15 \cdot 1{,}15}} = 53{,}30 \ \mathrm{m/s} \qquad Re = 10'250$$

$$\lambda = 0{,}062 \qquad c = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p_v \cdot d}{\lambda \cdot l \cdot \rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5'000 \cdot \mathrm{Pa} \cdot 0{,}003 \cdot \mathrm{m}}{0{,}062 \cdot 0{,}15 \cdot \mathrm{m} \cdot 1{,}15 \cdot \mathrm{kg/m^3}}} = 52{,}81 \ \mathrm{m/s}$$

Ohne das eine aufgebohrte Loch ist der Massenstrom:

$$\dot{m} = n \cdot c \cdot \rho \cdot d^2 \cdot \pi / 4 = 100 \cdot 52{,}96 \cdot 1{,}15 \cdot 0{,}003^2 \cdot \pi / 4 = \mathbf{0{,}0429 \ kg/s}$$

Der Massenstrom in dem aufgebohrten 10 mm-Loch berechnet sich wie zuvor für das 3 mm-Loch. Mit einer angenommenen Rohrreibungszahl von 0,05 ist die Geschwindigkeit im Loch:

$$\lambda = 0{,}05 \qquad c = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p_v \cdot d}{\lambda \cdot l \cdot \rho}} = 107{,}68 \text{ m/s} \qquad Re = 69'023$$

$$\lambda = 0{,}039 \qquad c = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p_v \cdot d}{\lambda \cdot l \cdot \rho}} = 122{,}38 \text{ m/s} \qquad Re = 78'448$$

Der Massenstrom in dem 10 mm-Loch beträgt:

$$\dot{m}_{10\,\text{mm}} = c \cdot \rho \cdot d^2 \cdot \pi / 4 = 121{,}92 \cdot 1{,}15 \cdot 0{,}01^2 \cdot \pi / 4 = \mathbf{0{,}0110 \ \ kg/s}$$

Der Gesamtmassenstrom berechnet sich als:

$$\dot{m}_{ges} = 0{,}99 \cdot \dot{m} + \dot{m}_{10\,\text{mm}} = \mathbf{0{,}05358 \ \ kg/s}$$

Diskussion

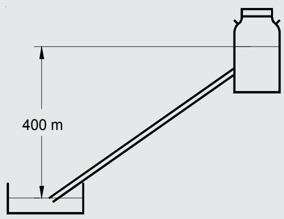
Bei vorgegebener Druckdifferenz hat der Durchmesser einen sehr starken Einfluss auf den Massenstrom. In diesem Beispiel wird durch die Vergrößerung des Durchmessers von 3 auf 10 mm die Strömungsgeschwindigkeit im Rohr verdoppelt. Der Massenstrom im 10 mm-Loch ist 25 mal größer als in einem 3 mm-Loch, d. h., in dem 10 mm-Loch strömt so viel Luft wie in fünfundzwanzig 3 mm-Löchern.

BEISPIEL 6.8: **Auslegung des Massenstromes und Leitungsdurchmessers**

Eine 4 km lange Kunststoffleitung für Milch mit einer Höhendifferenz von 400 m, die von einer Alm zum Tal führt, hat einen Innendurchmesser von 15 mm. Die Rauigkeitshöhe ist 5 µm. Die Milch hat die Dichte von 1'050 kg/m^3, die kinematische Viskosität beträgt 10^{-5} m^2/s.

a) Bestimmen Sie die Masse der pro Stunde geförderten Milch.
b) Bestimmen Sie den Durchmesser einer Leitung für den vierfachen Förderstrom.

Lösung



Schema Siehe Skizze

Annahmen

- Die Dichte und Viskosität der Milch sind konstant.
- Die Milch ist inkompressibel.
- Die Geschwindigkeitsänderung bei der Einströmung wird vernachlässigt.

Analyse

a) Der Massenstrom wird mit Gl. (6.27) berechnet, wofür allerdings eine Rohrreibungszahl angenommen werden muss. Damit wird die Geschwindigkeit im Rohr bestimmt, dann die Rohrreibungszahl neu berechnet. Der Massenstrom kann anschließend mit der Geschwindigkeit bestimmt werden.

$$\lambda = 0{,}02 \qquad c = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p_v \cdot d}{\lambda \cdot l \cdot \rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot \Delta z \cdot d}{\lambda \cdot l}} = 1{,}213 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{c \cdot d}{\nu} = \frac{1{,}213 \cdot 0{,}015}{10^{-5}} = 1'819 \qquad \lambda = 64 / Re = 0{,}0352$$

Da die Strömung laminar ist, berechnet sich die Geschwindigkeit direkt mit Gl. (6.24).

$$\overline{c} = \frac{g \cdot \Delta z \cdot d^2}{32 \cdot l \cdot \nu} = \frac{9{,}81 \cdot \text{m/s}^2 \cdot 400 \cdot \text{m} \cdot 0{,}015^2 \cdot \text{m}^2}{32 \cdot 4'000 \cdot \text{m} \cdot 10^{-5} \cdot \text{m}^2/\text{s}} = 0{,}689 \text{ m/s}$$

Der Massenstrom der Milch ist:

$$\dot{m} = \rho \cdot A \cdot c = 1'050 \cdot \text{kg/m}^3 \cdot 0{,}25 \cdot \pi \cdot 0{,}015^2 \cdot \text{m}^2 \cdot 0{,}689 \cdot \text{m/s} = \mathbf{0{,}1279 \text{ kg/s}}$$

b) Der Durchmesser wird mit dem Massenstrom von 0,5114 kg/s mit Gl. (6.27) bestimmt. Hier nimmt man zunächst wieder eine Rohrreibungszahl an.

$$\lambda = 0{,}05 \qquad d = \sqrt[5]{\frac{\lambda \cdot l \cdot 8 \cdot \dot{m}^2}{\rho^2 \cdot \pi^2 \cdot g \cdot \Delta z}} = 25{,}0 \text{ mm}$$

$$c = 0{,}991 \text{ m/s} \qquad Re = \frac{c \cdot d}{\nu} = \frac{0{,}991 \cdot 0{,}025}{10^{-5}} = 2'477 \qquad Re \cdot k / d = 0{,}5$$

$$\lambda = 0{,}3164 / Re^{0,25} = 0{,}0448$$

Die weitere Iteration ergibt einen Durchmesser von 24,5 mm. Damit ein Standardrohr verwendet werden kann, wählt man einen Durchmesser von **25 mm**. Die Milchförderung wird etwas mehr als vervierfacht.

Diskussion

Will man aus dem Reibungsdruckverlust den Massenstrom oder Durchmesser berechnen, ist die Rohrreibungszahl unbekannt und muss angenommen werden. Nachdem der Massenstrom bzw. Durchmesser ermittelt ist, werden die *Reynolds*- und damit die Rohrreibungszahl berechnet.

6.4.3 Reibungsdruckverlust im Rohr nicht kreisförmigen Querschnitts

6.4.3.1 Druckverlust der turbulenten Strömung

Der Reibungsdruckverlust in Rohren nicht kreisförmigen Querschnitts kann ebenfalls nach Gl. (6.27) bestimmt werden, wenn an Stelle des Durchmessers der hydraulische Durchmesser d_h eingesetzt wird. Die *Reynolds*zahl und die relative Rauigkeitserhebung k/d_h werden mit dem *hydraulischen Durchmesser* ermittelt.

$$\Delta p_v = \lambda \cdot \frac{l}{d_h} \cdot \frac{\bar{c}^2 \cdot \rho}{2} \tag{6.37}$$

Der Druckverlust lässt sich mit folgenden Überlegungen bestimmen: Die Schubspannung, die auf die Wände des nicht kreisförmigen Kanals wirkt, ist im Gleichgewicht mit den durch Reibungsdruckverlust verursachten Kräften.

$$\tau \cdot U \cdot l = A \cdot \Delta p_v \qquad \Delta p_v = \tau \cdot l \cdot \frac{U}{A}$$

Denkt man sich ein Ersatzrohr mit einem hydraulischen Durchmesser d_h, gilt:

$$\tau \cdot \pi \cdot d_h \cdot l = \frac{\pi}{4} \cdot d_h^2 \cdot \Delta p_v \qquad \Delta p_v = \tau \cdot l \cdot \frac{4}{d_h} \tag{6.38}$$

Damit erhalten wir:

$$d_h = \frac{4 \cdot A}{U} \tag{6.39}$$

Der hydraulische Durchmesser ist das Vierfache der Querschnittsfläche, geteilt durch den Umfang des Strömungskanals.

Die Rohrreibungszahl wird mit den Gln. (6.34) bis (6.36) ermittelt, der Reibungsdruckverlust nach Gl. (6.37) bestimmt.

Für ein kreisförmiges Rohr ist der hydraulische Durchmesser gleich dem Innendurchmesser. Für eine Ellipse oder einen Rechteckquerschnitt gilt:

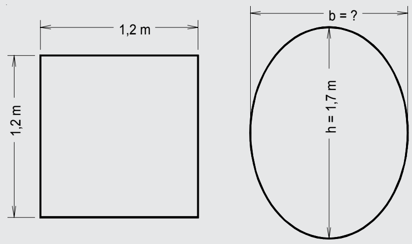
$$d_h = \frac{4 \cdot A}{U} = \frac{4 \cdot a \cdot b}{2 \cdot (a + b)} = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a + b} \tag{6.40}$$

wobei a die Breite und b die Höhe des Querschnitts ist. Ist b gegenüber a sehr klein, wird der hydraulische Durchmesser $d_h = 2 \cdot b$.

BEISPIEL 6.9: Änderung des Strömungsquerschnitts eines nicht kreisförmigen Kanals

Die Leitung einer Kanalisation mit einem quadratischen Querschnitt von 1,2 m Kantenlänge muss ersetzt werden. Damit will man erreichen, dass sie besser begehbar wird. Die neue Leitung soll daher einen elliptischen Querschnitt mit 1,7 m Höhe haben. Der maximale Volumenstrom von 1,1 m^3/s muss erhalten bleiben. Die Rauigkeit in der alten Leitung war 2 mm, in der neuen wird sie 1 mm sein. Die kinematische Viskosität des Wassers ist $0{,}85 \cdot 10^{-6}$ m^2/s und die Dichte 1'000 kg/m^3. Berechnen Sie die Breite der neuen Leitung.

Lösung



Schema Siehe Skizze

Annahmen

- Die Dichte und Viskosität des Wassers sind konstant.
- Der Volumenstrom in der Leitung wird nur durch den Reibungsdruckverlust bestimmt.

Analyse

Damit der Volumenstrom erhalten bleibt, muss der Reibungsdruckverlust pro Meter Länge im neuen Kanal gleich groß wie im alten sein. Zunächst wird der Druckverlust im alten Kanal berechnet. Dazu müssen der hydraulische Durchmesser und die Geschwindigkeit in der Leitung bestimmt werden. Der hydraulische Durchmesser ist mit Gl. (6.40) zu berechnen.

$$d_h = \frac{4 \cdot A}{U} = \frac{4 \cdot a^2}{4 \cdot a} = a = 1{,}2 \text{ m}$$

Die *Reynolds*zahl bestimmt man mit dem hydraulischen Durchmesser und der Geschwindigkeit.

$$c = \dot{V} / A = \dot{V} / a^2 = 0{,}764 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{c \cdot d_h}{\nu} = \frac{0{,}764 \cdot 1{,}2}{0{,}85 \cdot 10^{-6}} = 1'078'431 \quad Re \cdot k / d_h = 1'797$$

Die Rohrreibungszahl ist nach Gl. (6.34):

$$\lambda = [2 \cdot \log(3{,}715 \cdot d_h / k)]^{-2} = [2 \cdot \log(3{,}715 \cdot 1{,}2 / 0{,}002)]^{-2} = 0{,}0223$$

Der pro Meter Länge entstehende Reibungsdruckverlust beträgt:

$$\frac{\Delta p_v}{l} = \frac{\lambda}{d_h} \cdot \frac{\bar{c}^2 \cdot \rho}{2} = \frac{0{,}0223}{1{,}2 \cdot \mathrm{m}} \cdot \frac{0{,}764^2 \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 \cdot 1'000 \cdot \mathrm{kg/m}^3}{2} = \mathbf{5{,}421}\ \frac{\mathbf{Pa}}{\mathbf{m}}$$

Für den hydraulischen Durchmesser der neuen Leitung erhält man:

$$d_h = \frac{4 \cdot A}{U} = \frac{\pi \cdot h \cdot b}{\pi / 2 \cdot (h+b)} = \frac{2 \cdot h \cdot b}{h+b}$$

In Gl. (6.27) können an Stelle der Kreisfläche die Fläche der Ellipse und statt des Durchmessers der hydraulische Durchmesser eingesetzt werden. Damit bekommt man zwischen der Breite *b* der Ellipse und dem Volumenstrom folgenden Zusammenhang:

$$\frac{\Delta p_v}{l} = \frac{\lambda}{d_h} \cdot \frac{\dot{V}^2 \cdot \rho}{2 \cdot \pi^2 \cdot h^2 \cdot b^2} = \frac{\lambda \cdot (h+b)}{2 \cdot h \cdot b} \cdot \frac{16 \cdot \dot{V}^2 \cdot \rho}{2 \cdot \pi^2 \cdot h^2 \cdot b^2} = \lambda \cdot (h+b) \cdot \frac{4 \cdot \dot{V}^2 \cdot \rho}{\pi^2 \cdot h^3 \cdot b^3}$$

Wieder muss hier zunächst eine Rohrreibungszahl angenommen und damit die Breite *b* berechnet werden. Dann bestimmt man neu den hydraulischen Durchmesser, die *Reynolds*- und Rohrreibungszahl. Durch Iteration erhält man folgende Werte:

$$Re = 1'234'000 \qquad Re \cdot k / d = 999 \qquad \lambda = 0{,}0186$$
$$\boldsymbol{b} = \mathbf{0{,}971\ m} \qquad d_h = 1{,}236\ \mathrm{m} \qquad c = 0{,}849\ \mathrm{m/s}$$

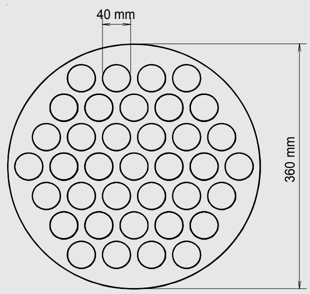
Diskussion

Bei nicht kreisförmigen Strömungsquerschnitten ist zu berücksichtigen, dass die Querschnittsfläche, die zur Berechnung der Geschwindigkeit notwendig ist, aus der Geometrie der Leitung und nicht mit dem hydraulischen Durchmesser berechnet wird. Die Bestimmung der *Reynolds*zahl und der relativen Rauigkeit erfolgt mit dem hydraulischen Durchmesser.

BEISPIEL 6.10: **Druckverlust in einem parallel durchströmten Rohrbündel**

Im Mantelraum eines Wärmeübertragers strömt parallel zu den Rohren Öl. Der Apparat hat 37 Rohre mit je 40 mm Außendurchmesser, der Innendurchmesser des Mantels ist 360 mm. Die Geschwindigkeit des Öls beträgt 1 m/s. Die kinematische Viskosität des Öls ist $5 \cdot 10^{-6}$ m²/s, seine Dichte 800 kg/m³. Bestimmen Sie den Reibungsdruckverlust pro Meter Länge.

Lösung



Schema Siehe Skizze

Annahmen

- Dichte und Viskosität des Öls sind konstant.
- Der Volumenstrom in der Leitung wird lediglich durch den Reibungsdruckverlust bestimmt.

Analyse

Zur Bestimmung des Reibungsdruckverlustes muss der hydraulische Durchmesser berechnet werden.

$$d_h = \frac{4 \cdot A}{U} = \frac{\pi \cdot (D^2 - n \cdot d^2)}{\pi \cdot (D + n \cdot d)} = \frac{0{,}36^2 - 37 \cdot 0{,}04^2}{0{,}36 + 37 \cdot 0{,}04} \cdot \mathrm{m} = 0{,}0383 \ \mathrm{m}$$

Die *Reynolds*zahl ist:

$$Re = \frac{c \cdot d_h}{\nu} = \frac{1 \cdot 0{,}383}{5 \cdot 10^{-6}} = 7'652$$

Die Rohrreibungszahl bestimmt man mit Gl. (6.34):

$$\lambda = 0{,}3164 / Re^{0{,}25} = 0{,}0338$$

Der Reibungsdruckverlust pro Meter Länge ergibt sich damit zu:

$$\frac{\Delta p_v}{l} = \frac{\lambda}{d_h} \cdot \frac{\bar{c}^2 \cdot \rho}{2} = \frac{0{,}0338}{0{,}0383 \cdot \mathrm{m}} \cdot \frac{1^2 \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 \cdot 800 \cdot \mathrm{kg/m}^3}{2} = \mathbf{353{,}7} \ \frac{\mathbf{Pa}}{\mathbf{m}}$$

Diskussion

Mit dem hydraulischen Durchmesser kann der Reibungsdruckverlust in turbulenten Strömungen einfach berechnet werden.

6.4.3.2 Druckverlust bei laminarer Strömung

Die Bestimmung der Rohrreibungszahl laminarer Strömung ist sehr stark von der Geometrie des Kanals abhängig. Sie kann nur für einige einfache Geometrien hergeleitet werden. Ihre Berechnung wird am Beispiel einer laminaren Strömung zwischen zwei unendlich breiten Platten mit dem Abstand h demonstriert (Bild 6.8). Die Mitte des Kanals legt man auf die x-Achse und betrachtet einen Fluidquader,

der symmetrisch zur x-Achse angeordnet ist. Der Quader hat die Höhe $2y$, die Länge l und Breite b, die gegen unendlich geht.

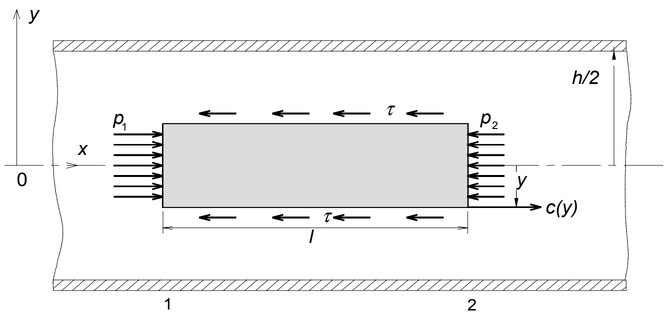


Bild 6.8: Zur Herleitung der laminaren Spaltströmung in einem ebenen Spalt

Die Kräfte, die auf den Fluidquader wirken, werden durch die Wandschubspannung und den Druckunterschied verursacht. Bei stationärer Strömung sind diese Kräfte im Gleichgewicht.

$$\tau \cdot 2 \cdot l \cdot b = \Delta p_v \cdot b \cdot 2 \cdot y \tag{6.41}$$

Die Schubspannung ist durch den *Newton*'schen Schubspannungsansatz gegeben.

$$\tau = -\eta \cdot \frac{dc}{dy} \tag{6.42}$$

Gleichung (6.42) in Gl. (6.41) eingesetzt, ergibt nach Separation der Variablen folgende Differentialgleichung:

$$dc = -\frac{\Delta p_v}{\eta \cdot l} \cdot y \cdot dy \tag{6.43}$$

Für die Geschwindigkeitsverteilung erhält man unter Berücksichtigung der Randbedingungen, die verlangen, dass an den Orten $y = h/2$ und $y = -h/2$ die Geschwindigkeit gleich null ist, folgende Gleichung:

$$c(y) = \frac{\Delta p_v}{2 \cdot \eta \cdot l} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \qquad c_{max} = \frac{\Delta p_v}{8 \cdot \eta \cdot l} \cdot h^2 \tag{6.44}$$

Wie in der Rohrströmung ist das Geschwindigkeitsprofil parabelförmig. Durch Integration wird die mittlere Geschwindigkeit ermittelt.

$$\bar{c} = \frac{\Delta p_v}{2 \cdot \eta \cdot l} \cdot \frac{1}{h} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \cdot dy = \frac{\Delta p_v}{12 \cdot \eta \cdot l} \cdot h^2 = \frac{2}{3} \cdot c_{max} \tag{6.45}$$

Gleichung (6.45) nach dem Reibungsdruckverlust aufgelöst, ergibt:

$$\Delta p_v = \frac{12 \cdot \eta \cdot l \cdot \bar{c}}{h^2} \tag{6.46}$$

Der hydraulische Durchmesser d_h ist, da b gegen unendlich geht, 2 h. Setzt man an Stelle von h den hydraulischen Durchmesser d_h ein, erhält man nach Umformung:

$$\Delta p_v = \frac{48 \cdot \eta \cdot l \cdot \bar{c}}{d_h^2} = \frac{96}{Re} \cdot \frac{l}{d_h} \cdot \frac{\bar{c}^2 \cdot \rho}{2} \tag{6.47}$$

Für den ebenen Spalt ist die Rohrreibungszahl 96/*Re*. Damit entspricht sie nicht mehr derjenigen in der laminaren Rohrströmung. Die Rohrreibungszahl hängt im Spalt von der Geometrie des Kanals ab. Sie kann für einfache Geometrien analytisch hergeleitet werden. Die Abweichung der Rohrreibungszahl wird durch einen Korrekturfaktor φ gegeben. Die *Reynolds*zahl bestimmt man mit dem hydraulischen Rohrdurchmesser. Damit ist die Rohrreibungszahl bei laminarer Strömung:

$$\lambda = \varphi \cdot \frac{64}{Re} \tag{6.48}$$

Für den ebenen unendlichen Spalt mit der Höhe h ist $\varphi = 1{,}5$. In Tabelle 6.3 ist φ für Kanäle rechteckigen Querschnitts gegeben.

Tabelle 6.3: Korrekturfaktor φ für Rechteck-Kanäle

h/b	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
φ	1,50	1,34	1,20	1,10	1,02	0,97	0,94	0,92	0,90	0,89	0,88

In Bild 6.9 ist der Korrekturfaktor φ für Ringspalte (Lager von Maschinen) dargestellt.

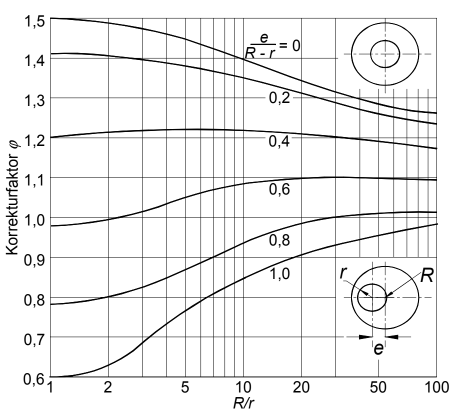


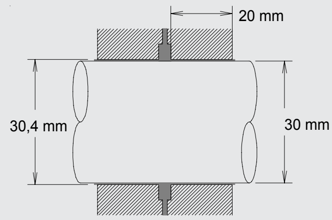
Bild 6.9: Korrekturfaktor für den Druckverlust in Ringspalten bei laminarer Strömung [6.3]

Strebt in einem Ringspalt das Verhältnis R/r gegen unendlich, erreicht der Korrekturfaktor φ nicht den Wert 1. Der hydraulische Durchmesser geht zwar gegen d_a, der Druckverlust wird aber größer als in einem Rohr. Dies bedeutet, dass das Einbauen eines sehr dünnen Drahtes die Strömungsprofile wesentlich verändert und dadurch der Reibungsdruckverlust sehr stark beeinflusst wird. Dagegen ist bei turbulenter Strömung der Einfluss beinahe vernachlässigbar.

BEISPIEL 6.11: **Schmierölmassenstrom in einem Kurbelwellenlager**

Das Lager einer Kurbelwelle hat einen 0,4 mm größeren Durchmesser als die Welle mit 30 mm. Das Lager wird durch Öl, das in der Mitte durch den Öldruck von 4 bar eingepresst wird, geschmiert. Im Kurbelgehäuse herrscht ein Druck von 1 bar. Das Lager ist auf beiden Seiten 20 mm lang. Ohne Last liegt die Welle konzentrisch im Lager. Bei Belastung entsteht eine Exzentrizität von 0,05 mm. Die Dichte des Öls ist 820 kg/m³, die kinematische Viskosität $1{,}2 \cdot 10^{-4}$ m²/s.

Berechnen Sie den Massenstrom des Öls mit und ohne Last.



Lösung

Schema Siehe Skizze

Annahmen

- Dichte und Viskosität des Öls sind konstant.
- Das Öl ist inkompressibel.
- Die Geschwindigkeiten, die durch Drehung der Welle entstehen, werden vernachlässigt.
- Die Ein- und Ausströmeffekte werden vernachlässigt.

Analyse

Der Reibungsdruckverlust über der Länge des Lagers ist Öldruck minus Druck im Kurbelgehäuse, also gleich 3 bar. Der hydraulische Durchmesser ist für beide Fälle:

$$d_h = \frac{4 \cdot A}{U} = \frac{\pi \cdot (d_a^2 - d_i^2)}{\pi \cdot (d_a + d_i)} = d_a - d_i = 0{,}4 \text{ mm}$$

Die Exzentrizität $e/(r_a - r_i)$ ist für den Fall ohne Last gleich 0 und mit Last gleich 0,25. Der Korrekturfaktor φ ist nach dem Diagramm in Bild 6.9 ohne Belastung 1,5 und mit Last 1,38. Mit den Gln. (6.27) und (6.48) erhalten wir für die Geschwindigkeit:

$$\Delta p_v = \frac{32 \cdot \varphi \cdot \nu \cdot l \cdot c \cdot \rho}{d_h^2}$$

$$c = \frac{\Delta p_v \cdot d_h^2}{32 \cdot \varphi \cdot \nu \cdot l \cdot \rho} = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot \mathrm{Pa} \cdot 0{,}4^2 \cdot 10^{-6} \cdot \mathrm{m}^2}{32 \cdot \varphi \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s} \cdot 0{,}02 \cdot \mathrm{m} \cdot 820 \cdot \mathrm{kg/m}^3} = \frac{0{,}762\ \ \mathrm{m/s}}{\varphi}$$

Um zu sehen, ob die Strömung laminar ist, muss die *Reynolds*zahl berechnet werden.

$$Re = \frac{c \cdot d_h}{\nu} = \frac{0{,}762 \cdot 0{,}0004}{\varphi \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-4}} = 1{,}69\ \ (1{,}84)$$

Der Wert in der Klammer gilt für die belastete Welle. Die Strömung ist immer laminar. Der Massenstrom berechnet sich als:

$$\dot{m} = c \cdot \rho \cdot A = c \cdot \rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (d_a^2 - d_i^2) = \mathbf{7{,}906\ \ g/s \quad (8{,}594\ \ g/s)}$$

Der Wert in der Klammer steht wie oben für die belastete Welle.

Diskussion

Der Massenstrom wird in einem Ringspalt bei konstanter Druckdifferenz durch die Exzentrizität beeinflusst. Gemäß des Diagramms in Bild 6.9 kann die Änderung in einem engen Ringspalt ($r_a/r_i \approx 1$) bis zu einem Faktor von 2,5 betragen.

BEISPIEL 6.12: **Vergleich der laminaren und turbulenten Druckverluste in einem Ringspalt**

In die Mitte eines Rohrs von 25 mm Innendurchmesser wird ein konzentrisches Rohr mit 5 mm Außendurchmesser eingebaut. Berechnen Sie die relative Änderung des Reibungsdruckverlustes durch den Einbau des Innenrohrs für die laminare und turbulente Strömung. Es soll dabei angenommen werden, dass jeweils die mittlere Strömungsgeschwindigkeit beibehalten wird. Bei der turbulenten Strömung gibt man die Rohrreibungszahl nach der Beziehung von *Blasius* Gl. (6.34) an.

Lösung

Annahmen

- Dichte und Viskosität des strömenden Fluids sind konstant.
- Das Fluid ist inkompressibel.

Analyse

Vor dem Einbau des Innenrohrs ist der Reibungsdruckverlust im Rohr:

$$\Delta p_{v,\,lam} = \frac{64}{Re_{d_a}} \cdot \frac{l}{d_a} \cdot \frac{c^2 \cdot \rho}{2} \qquad \Delta p_{v,\,turb} = \frac{0{,}3164}{Re_{d_a}^{0{,}25}} \cdot \frac{l}{d_a} \cdot \frac{c^2 \cdot \rho}{2}$$

Der Index der *Reynolds*zahl zeigt, dass sie mit dem Durchmesser des Außenrohrs gebildet wird. Durch den Einbau des Innenrohrs wird der hydraulische Durchmesser verändert. Für den Druckverlust gilt dann:

$$\left(\Delta p_{v,\,lam}\right)_{Ringspalt} = \frac{\varphi \cdot 64}{Re_{d_h}} \cdot \frac{l}{d_a} \cdot \frac{c^2 \cdot \rho}{2} \qquad \left(\Delta p_{v,\,turb}\right)_{Ringspalt} = \frac{0{,}3164}{Re_{d_h}^{0{,}25}} \cdot \frac{l}{d_h} \cdot \frac{c^2 \cdot \rho}{2}$$

Die relative Änderung des Reibungsdruckverlustes ist:

$$\frac{\left(\Delta p_v\right)_{Ringspalt}}{\Delta p_v}$$

Nach dem Einbau des Innenrohrs ist der hydraulische Durchmesser $d_h = d_a - d_i =$ 20 mm und der Korrekturfaktor für die laminare Strömung aus Bild 6.9 gleich 1,45. Die relative Änderung des laminaren Druckverlustes beträgt:

$$\frac{\left(\Delta p_{v,\,lam}\right)_{Ringspalt}}{\Delta p_{v,\,lam}} = \frac{\varphi \cdot Re_{d_a}}{Re_{d_h}} \cdot \frac{d_a}{d_h} = \varphi \cdot \left(\frac{d_a}{d_h}\right)^2 = \varphi \cdot \left(\frac{d_a}{d_a - d_i}\right)^2 = 1{,}45 \cdot 1{,}25^2 = \mathbf{2{,}266}$$

Für die turbulente Strömung erhalten wir:

$$\frac{\left(\Delta p_{v,\,turb}\right)_{Ringspalt}}{\Delta p_{v,\,turb}} = \frac{Re_{d_a}^{0{,}25}}{Re_{d_h}^{0{,}25}} \cdot \frac{d_a}{d_h} = \left(\frac{d_a}{d_h}\right)^{1{,}25} = \left(\frac{d_a}{d_a - d_i}\right)^{1{,}25} = 1{,}25^{1{,}25} = \mathbf{1{,}322}$$

Diskussion

Durch den Einbau des konzentrischen Innenrohrs wird der Reibungsdruckverlust bei laminarer Strömung mehr als verdoppelt. Bei turbulenter Strömung beträgt der Anstieg nur etwa 32 %. Dies ist durch die starke Veränderung des Geschwindigkeitsprofils bei der laminaren Strömung zu erklären.

6.5 *Navier-Stokes*-Gleichungen

Die *Navier-Stokes*-Gleichungen werden aus dem Impulssatz nach dem zweiten *Newton*'schen Gesetz hergeleitet. Für das infinitesimale Volumen $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ mit der Masse dm gilt:

$$d\vec{F} = dm \cdot \frac{d\vec{c}}{dt} \tag{6.49}$$

Mit der vektoriellen Ableitung der Geschwindigkeit $c(x, y, z, t)$ nach der Zeit t erhält man:

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= dm \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{c}}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{c}}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{c}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} \right) = \\ &= dm \cdot \left(c_x \cdot \frac{\partial \vec{c}}{\partial x} + c_y \cdot \frac{\partial \vec{c}}{\partial y} + c_z \cdot \frac{\partial \vec{c}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} \right) \end{aligned} \tag{6.50}$$

Um die Kraft F und ihre Komponenten zu bekommen, müssen die Kräfte, die auf den Kontrollraum wirken, bestimmt werden. Es sind die Oberflächenkräfte F_O und Körperkräfte F_K. Bild 6.10 zeigt die Oberflächenkräfte, die in x-Richtung auf das Fluidelement wirken.

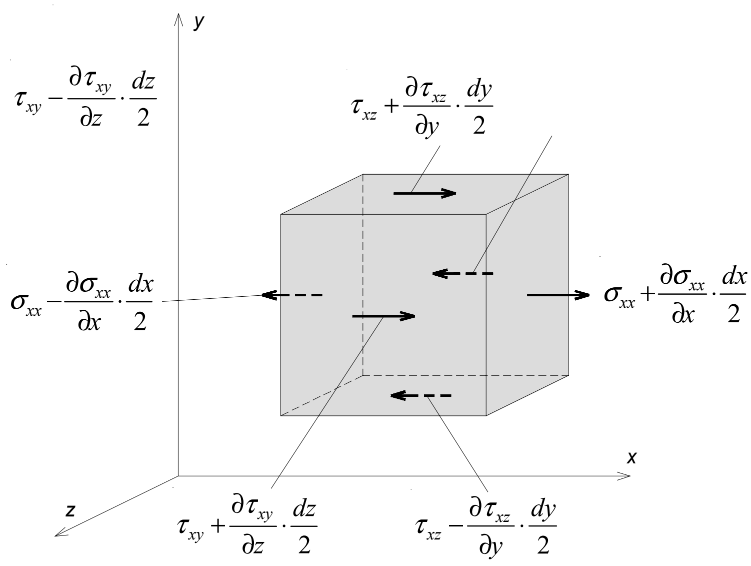


Bild 6.10: Kräfte in x-Richtung auf das Fluidelement

Die Oberflächenkräfte, die auf den Körper wirken, werden durch die Schubspannungen τ_{xy} und τ_{xz} und die Normalspannungen σ_{xx} erzeugt. Für die Oberflächenkraft in x-Richtung, die im Zentrum des Fluidelements wirkt, erhält man:

$$
\begin{aligned}
F_{Ox} = & \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} - \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) \cdot dx \cdot dz + \\
& + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} - \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \cdot \frac{dx}{2} \right) \cdot dx \cdot dy + \\
& + \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} - \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} \cdot \frac{dx}{2} \right) \cdot dy \cdot dz
\end{aligned}
$$

Ausgerechnet bekommt man:

$$
F_{Ox} = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \tag{6.51}
$$

Die Körperkräfte werden durch Gravitation verursacht und sind:

$$
dF_{Kx} = \rho \cdot g_x \cdot dV = \rho \cdot g_x \cdot dx \cdot dy \cdot dz \tag{6.52}
$$

Die Schubspannungskräfte können nach dem *Newton*'schen Schubspannungsansatz bestimmt werden.

$$
\begin{aligned}
\tau_{yx} = \tau_{xy} = \mu \cdot \left(\frac{\partial c_x}{dy} + \frac{\partial c_y}{dx} \right) \\
\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \cdot \left(\frac{\partial c_x}{dz} + \frac{\partial c_z}{dx} \right)
\end{aligned} \tag{6.53}
$$

Für ein inkompressibles Fluid konstanter Viskosität werden die Normalspannungen nur durch die Druckgradienten verursacht.

$$
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = -\frac{dp}{\partial x} \tag{6.54}
$$

$$
F_{Ox} = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \tag{6.55}
$$

Berücksichtigt man, dass die Masse $dm = r \cdot dV = r \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ ist, erhält man aus den einzelnen Komponenten der Kraft mit den Gln. (6.51) bis (6.55):

$$\begin{aligned}
\rho\cdot\left(c_x\cdot\frac{\partial c_x}{\partial x}+c_y\cdot\frac{\partial c_x}{\partial y}+c_z\cdot\frac{\partial c_x}{\partial z}+\frac{\partial c_x}{\partial t}\right)&=\rho\cdot g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\eta\cdot\left(\frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 c_x}{\partial z^2}\right)\\
\rho\cdot\left(c_x\cdot\frac{\partial c_y}{\partial x}+c_y\cdot\frac{\partial c_y}{\partial y}+c_z\cdot\frac{\partial c_y}{\partial z}+\frac{\partial c_y}{\partial t}\right)&=\rho\cdot g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\eta\cdot\left(\frac{\partial^2 c_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 c_y}{\partial z^2}\right)\\
\rho\cdot\left(c_x\cdot\frac{\partial c_z}{\partial x}+c_y\cdot\frac{\partial c_z}{\partial y}+c_z\cdot\frac{\partial c_z}{\partial z}+\frac{\partial c_z}{\partial t}\right)&=\rho\cdot g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\eta\cdot\left(\frac{\partial^2 c_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 c_z}{\partial z^2}\right)
\end{aligned} \quad (6.56)$$

Diese Gleichungen sind *Navier-Stokes*-Gleichungen für inkompressible Fluide konstanter Viskosität. Die Herleitung der allgemein gültigen Gleichungen, die auch für kompressible Fluide und Fluide veränderlicher Viskosität gelten, kann z. B. bei *Schlichting* [6.2] eingesehen werden. Dort findet man auch die Gleichungen für zylindrische Koordinaten. Auf die Anwendung der *Navier-Stokes*-Gleichungen wird in Kapitel 11 bei nummerischen Strömungsrechnungen eingegangen.

Bei stationären Strömungen ist die Ableitung nach der Zeit auf der linken Seite der Gleichungen gleich null. Die anderen Terme auf der linken Seite berücksichtigen die lokale Änderung der Geschwindigkeit und entsprechen daher der Änderung der kinetischen Energie. Bei der in Absatz 6.4.3.2 behandelten laminaren Spaltströmung haben wir nur Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung, die sich in Strömungsrichtung nicht verändern; die Schwerkraft spielt keine Rolle. Für diesen Fall vereinfacht sich Gl. (6.56) zu:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\eta\cdot\frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} \quad (6.57)$$

Der Druckverlust kann durch den konstanten Druckgradienten $\Delta p/\Delta x$ ersetzt werden. Die Lösung der Differentialgleichung ist:

$$c_x=\frac{\Delta p}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\frac{y^2}{2}+C \quad (6.58)$$

Wenn die entsprechenden Randbedingungen eingesetzt werden, stimmt diese Lösung mit der in Gl. (6.44) überein.

Bei den reibungsfreien, inkompressiblen idealen Fluiden ist die Viskosität gleich null. Betrachtet man eine eindimensionale Strömung, die nur Geschwindigkeiten in z-Richtung hat, vereinfacht sich Gl. (6.56) zu:

$$\rho\cdot c\cdot dc+g\cdot\rho\cdot dz=-dp \quad (6.59)$$

Hier wurde die z-Richtung gewählt, weil nach unseren bisherigen Betrachtungen z die geodätische Höhe ist. Bei der Umformung berücksichtigte man, dass bisher z in Richtung des Erdmittelpunktes gerichtet war. Gl. (6.59) kann integriert werden,

$$p_1 - p_2 = \rho \cdot \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + g \cdot \rho \cdot (z_2 - z_1) \tag{6.60}$$

Gleichung (6.60) ist die *Bernoulli*-Gleichung.

Solch einfache Lösungen sind nur für die eindimensionale Strömung idealer Fluide oder für die inkompressible, stationäre laminare Strömung in einfachen Geometrien möglich. Schon bei der inkompressiblen turbulenten Strömung in Leitungen einfacher Geometrie ist eine analytische Lösung unmöglich.