

Springer-Lehrbuch

Tragwerke 1

Theorie und Berechnungsmethoden statisch bestimmter Stabtragwerke

von

Wilfried B. Krätzig, Reinhard Harte, Konstantin Meskouris, Udo Wittek

5., bearb. Aufl.

Springer 2010

Verlag C.H. Beck im Internet:

www.beck.de

ISBN 978 3 642 12283 5

antimetrische Lastanteile zu analysieren ist, und danach beide Ergebnisse zu superponieren sind, wird der ursprüngliche Berechnungsaufwand i.a. merkbar reduziert.

5.2 Gelenkträger

5.2.1 Tragwerksaufbau

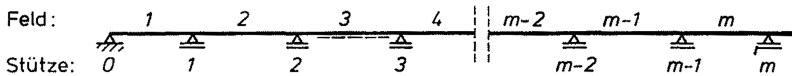
Um das Tragverhalten von Gelenkträgern zu verstehen, betrachten wir auf Bild 5.4 den dort dargestellten Durchlaufträger über m Felder, der ein festes und m bewegliche Gelenklager besitzen möge. Zur Bestimmung der $(m + 2)$ Auflagerkräfte stehen gerade die drei Gleichgewichtsbedingungen ebener Kräftesysteme zur Verfügung; damit ist der Träger

$$(m + 2) - = (m - 1) - \text{fach}$$

statisch unbestimmt. $(m - 1)$ zusätzliche *Nebenbedingungen* in Form von reibungsfreien Zwischengelenken, die keine Biegemomente, aber Längs- und Querkräfte übertragen, reduzieren den Grad der statischen Unbestimmtheit gerade auf Null. Einen derart aufgebauten, statisch bestimmten Träger nennt man *Gelenkträger* oder nach seinem Ersterbauer GERBERTRÄGER.¹

Satz: Ein Gelenkträger über m Felder besitzt $m - 1$ Biegemomentengelenke und ist statisch bestimmt.

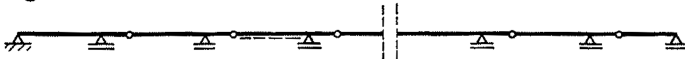
Durchlaufträger über m Felder:



$$\text{Abzählkriterium: } n = a + 3p - 3k = m + 2 + 3m - 3(m + 1) = m - 1$$

Einbau von $r = m - 1$ Zwischengelenken liefert r Nebenbedingungen $\sum M_G = 0$ und führt auf den

Gelenkträger über m Felder :



$$\text{Abzählkriterium: } n = a + 3p - 3k - r = m + 2 + 3m - 3(m + 1) - (m - 1) = 0$$

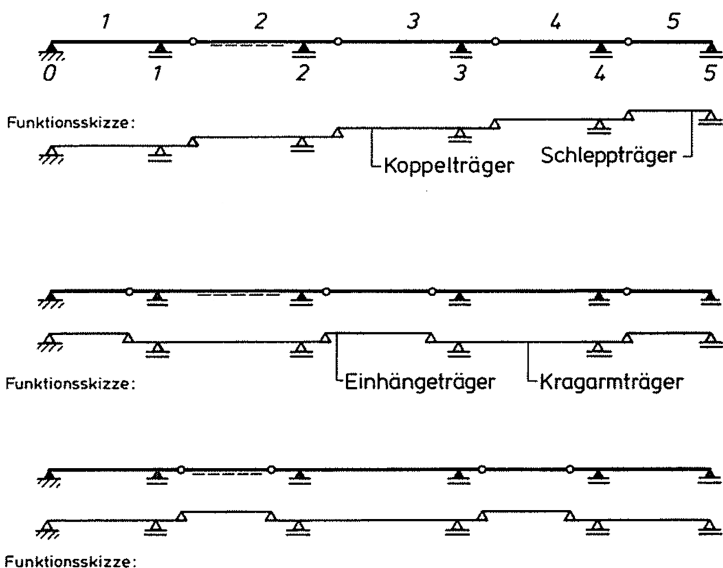
Bild. 5.4 Vom Durchlaufträger zum statisch bestimmten Gelenkträger

¹ HEINRICH GERBER, deutscher Ingenieur, 1832–1912, erhielt 1866 im Zuge des Entwurfs der Mainbrücke bei Haßfurt, fertiggestellt 1867, ein Patent über Gelenkträgerbrücken.

316 Da sich Gerberträger wegen ihrer statischen Bestimmtheit Auflagersetzungen
 317 *zwangungsfrei* anpassen, sind sie im Bauwesen weit verbreitet. Im Hochbau fin-
 318 det man sie als Gelenkpfetten sowie bei Trägerzügen aus Stahlbeton-Fertigteilen,
 319 im Industriebau besonders bei unübersichtlichen Gründungsverhältnissen. Im weit-
 320 spannenden Brückenbau, in welchem Gelenkträger früher ein bedeutendes Anwen-
 321 dungsgebiet besaßen, sind sie fast vollständig von Durchlaufträgern verdrängt wor-
 322 den, die infolge ihrer statischen Unbestimmtheit Verkehrslasten günstiger abtragen.

323 Die zur Erzwingung statisch bestimmten Tragverhaltens erforderlichen
 324 Zwischengelenke dürfen nicht beliebig angeordnet werden. Vielmehr ist darauf zu
 325 achten, dass keine lokalen kinematischen Verschieblichkeiten, sog. *Gelenkketten*,
 326 entstehen. Zu ihrer Vermeidung dürfen in Mittelfeldern höchstens *zwei* und in End-

328 Zulässige Anordnungen der Zwischengelenke:



349 Unzulässige Anordnungen der Zwischengelenke
 350 mit virtuellen Verschiebungsfiguren :

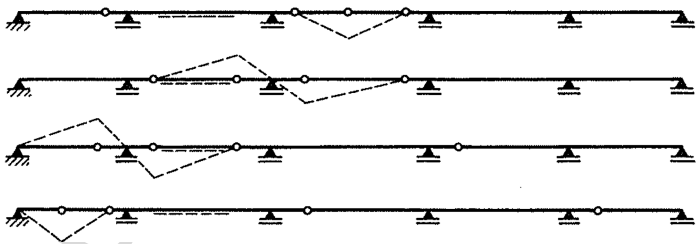


Bild. 5.5 Fünffeldrige Gerberträger mit zulässigen und unzulässigen Gelenkanordnungen

361 feldern höchstens *ein* Gelenk angeordnet werden. Bei *zwei* Mittelfeldgelenken dür-
 362 fen darüber hinaus angrenzende Felder höchstens *ein* Gelenk, angrenzende Endfel-
 363 der *kein* Gelenk enthalten. Gemäß diesen Regeln wurden in Bild 5.5 drei zulässige
 364 Ausbildungsformen eines Gelenkträgers über 5 Felder sowie vier unzulässige
 365 Gelenkanordnungen dargestellt. Dabei erkennt man, dass unzulässige Gelenkanord-
 366 nungen zu kinematisch verschieblichen sowie statisch unbestimmten Teilstrukturen,
 367 d.h. zum *Ausnahmefall der Statik* führen. Die Tragfunktion von Gerberträgern als
 368 Aneinanderreihung von Einfeldträgern wird durch ihre jeweilige *Funktionskizze*
 369 auf Bild 5.5 besonders deutlich.

370 Ebenso finden sich in Bild 5.5 die Namen der einzelnen, bei Gerberträgern stets
 371 wiederkehrenden Trägerelemente. Nach den Kragarmträgern erhielten diese Trag-
 372 werke übrigens ihre angelsächsische Bezeichnung als *cantilever beams*. Die 1883–
 373 1890 von B. BAKER über den *Firth of Forth* in Schottland erbaute Eisenbahnbrücke,
 374 eine *Gelenkträger-Fachwerkbrücke*, war mit zwei freien Spannweiten von 521 m
 375 für fast drei Jahrzehnte das weitest gespannte Tragwerk der Welt [2.3]. Abgelöst
 376 wurde sie durch eine Brücke gleichen Typs über den *St. Lorenzstrom* in *Quebec*
 377 mit Spannweiten von 549 m. Erst 1931 lösten Hängebrücken mit der 564 m weit-
 378 gespannten *Ambassador*-Brücke in *Detroit* Gelenkträgerbrücken als Spannweiten-
 379 Rekordhalter ab.

380
381

382 **5.2.2 Übersicht über die Berechnungsverfahren**

383

384 Zur Ermittlung der Schnitt- und Auflagergrößen von Gelenkträgern sind zwei Ver-
 385 fahren empfehlenswert:

386

- 387 • das Verfahren der Gleichgewichts- und Nebenbedingungen sowie
- 388 • das Verfahren der Gelenkkräfte.

389

390 Beide Vorgehensweisen werden von uns erläutert und durch je ein Beispiel er-
 391 gänzt werden. Es sollte hervorgehoben werden, dass die Literatur ältere, graphische
 392 Verfahren [1.1, 1.16] enthält, die auch mit heutigen Rechenhilfsmitteln an Schnel-
 393 ligkeit kaum erreicht werden.

394 Beim Verfahren der *Gleichgewichts- und Nebenbedingungen* werden zunächst
 395 die Bestimmungsgleichungen sämtlicher $(m + 2)$ Auflagerkräfte durch Anwendung

396

- 397 • der 3 globalen Gleichgewichtsbedingungen sowie
- 398 • von $r = (m - 1)$ Nebenbedingungen, in Form von Momentengleichgewichtsbe-
 399 dingungen um die Zwischengelenke,

400

401 aufgestellt. Es entsteht ein lineares Gleichungssystem, dessen Struktur durch ge-
 402 schickte Wahl vor allem der Nebenbedingungen i.a. derart beeinflusst werden kann,
 403 dass einzeln eliminierbare Teilsysteme entstehen. Nach Bestimmung der Aufla-
 404 gerkräfte können dann die Schnittgrößen-Zustandslinien durch Gleichgewichtsfor-
 405 mulierung an Teilsystemen gemäß Abschn. 4.1.2 in Kombination mit den in Ab-
 schn. 5.1.2 erörterten Funktionseigenschaften gewonnen werden.

406 Beim *Verfahren der Gelenkkräfte* werden als erstes alle Zwischengelenke
 407 durch virtuelle Schnitte durchtrennt. Ausgehend von der Funktionsskizze des
 408 Trägers werden dadurch die dort wirkenden Gelenkkräfte als Doppelwirkun-
 409 gen erkennbar, welche Einhänge-, Schlepp- und Koppelträger einerseits stüt-
 410 zen, andererseits Koppel- und Kragarmträger belasten. Es folgt die Ermittlung
 411 der Gelenk- und Auflagerkräfte durch Anwendung der Gleichgewichtsbedingun-
 412 gen auf alle Teilsysteme, beginnend mit der obersten Trägerebene der Funkti-
 413 onsskizze. Sind die Gelenkkräfte *einer* Trägerebene vollständig bestimmt, kann
 414 die nächstfolgende behandelt werden. Schließlich können die Schnittgrößen-
 415 Zustandslinien, wieder unter Rückgriff auf die Gelenk- und Auflagerkräfte, für
 416 jedes entstandene Teilsystem an einfachen Balken bzw. Kragarmen ermittelt
 417 werden.

420 **5.2.3 Beispiel zum Verfahren der Gleichgewichts- und** 421 **Nebenbedingungen**

423 Bild 5.6 enthält zuoberst die baustatische Skizze des zu berechnenden Gelenk-
 424 trägers über 4 Felder. Alle sodann aufgeführten Nebenbedingungen formulieren
 425 das Momentengleichgewicht um die Zwischengelenke für die jeweils rechtslie-
 426 genden Tragwerksteile. Dadurch wird das aus ihnen und den Gleichgewichtsbe-
 427 dingungen entstehende, lineare Gleichungssystem 6. Ordnung in 5 Untersysteme
 428 aufspaltbar und in den Schritten E , (C, D) , H_A , B sowie A ohne Maschinenhilfe
 429 lösbar.

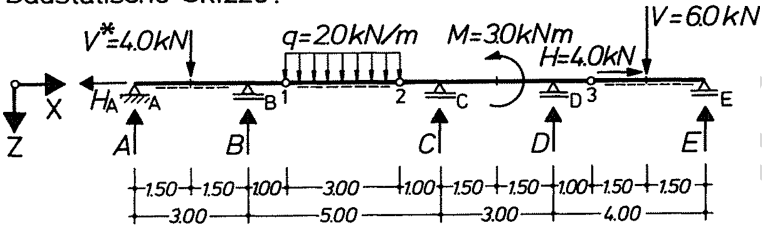
430 Die anschließende Schnittgrößenberechnung erfolgt nur an wenigen Punk-
 431 ten durch Formulierung des Gleichgewichts an Teilsystemen; alle weiteren Zwi-
 432 schenwerte werden durch Anwendung der Funktionsregeln des Abschn. 5.1.2
 433 bestimmt. Das Ergebnis, die Schnittgrößen-Zustandslinien, findet der Leser in
 434 Bild 5.7.

437 **5.2.4 Beispiel zum Verfahren der Gelenkkräfte**

440 Das zugehörige Bild 5.8 beginnt erneut mit der baustatischen Skizze des zu
 441 berechnenden Gelenkträgers. Darunter enthält es eine Funktionszerlegung des
 442 Tragwerks, in welche bereits die Gelenkkräfte als Doppelwirkungen einge-
 443 tragen sind. Zur Bestimmung aller rechtwinklig zur Trägerachse gerichteten
 444 Gelenk- und Auflagerkräfte werden zuerst die Teilscheiben II und IV, anschlie-
 445 ßend die Teile I und III behandelt. Dagegen müssen die axialen Gelenkkräfte
 446 und die gleichgerichtete Auflagerkraft in der Reihenfolge IV, III, II, I ermittelt
 447 werden.

448 Nach diesem Schritt können die Schnittgrößen praktisch ohne Berechnung, allein
 449 nach den Funktionsregeln des Abschn. 5.1.2 bestimmt werden, da nur kleinste, d.h.
 450 sehr übersichtliche Teilsysteme zu behandeln sind.

Baustatische Skizze:



Abzählkriterium: $n = a + 3(p-k) - r = 6 + 3(7-8) - 3 = 0$

Nebenbedingungen:

1. $\sum M_{3r} = 0 : 300 \cdot E - 150 \cdot 60 = 0$
2. $\sum M_{2r} = 0 : 800 \cdot E + 400 \cdot D + 100 \cdot C - 650 \cdot 60 + 30 = 0$
3. $\sum M_{1r} = 0 : 1100 \cdot E + 700 \cdot D + 400 \cdot C - 950 \cdot 60 + 30 - 20 \cdot 300 \cdot 150 = 0$

Gleichgewichtsbedingungen:

4. $\sum F_x = 0 : -H_A + 4.0 = 0$
5. $\sum F_z = 0 : -A - B - C - D - E + 4.0 + 20 \cdot 300 + 60 = 0$
6. $\sum M_A = 0 : 1500 \cdot E + 1100 \cdot D + 800 \cdot C + 300 \cdot B - 60 \cdot 1350 + 30 - 20 \cdot 300 \cdot 550 - 40 \cdot 150 = 0$

Gleichungssystem:

$$\begin{matrix}
 1. \\
 2. \\
 3. \\
 4. \\
 5. \\
 6.
 \end{matrix}
 \begin{bmatrix}
 H_A & A & B & C & D & E \\
 & & & & & 300 \\
 & & & 100 & 400 & 800 \\
 & & & 400 & 700 & 1100 \\
 -100 & & & & & \\
 & -100 & -100 & -100 & -100 & -100 \\
 & & 300 & 800 & 1100 & 1500
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 H_A \\
 A \\
 B \\
 C \\
 D \\
 E
 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 -900 \\
 -3600 \\
 -6300 \\
 400 \\
 1600 \\
 -11700
 \end{bmatrix}
 = \mathbf{0}$$

Lösung:

$$\{ 4.00 \mid 1.00 \mid 6.00 \mid 4.00 \mid 2.00 \mid 3.00 \}$$

Bild. 5.6 Verfahren der Gleichgewichts- und Nebenbedingungen, angewendet auf einen Gerberträger

5.3 Gelenkrahmen und Gelenkbogen

5.3.1 Tragwerksaufbau

Als *Rahmentragwerke* bezeichnet man geknickte Stabsysteme, die an ihren Knickstellen biegesteife Ecken, Voll- oder Halbelenke aufweisen. Die Elemente eines solchen Tragwerks werden als *Riegel* oder *Stiele* bezeichnet. Rahmentragwerke sind i.a. mehrfach statisch unbestimmt. Stabendelenke sowie die erwähnten Zwischengelenke formulieren jedoch Nebenbedingungen, die zu statisch bestimmten Strukturen führen können. Nur solche *Gelenkrahmentragwerke* sollen hier behandelt werden.