

2 Systematisch zählen

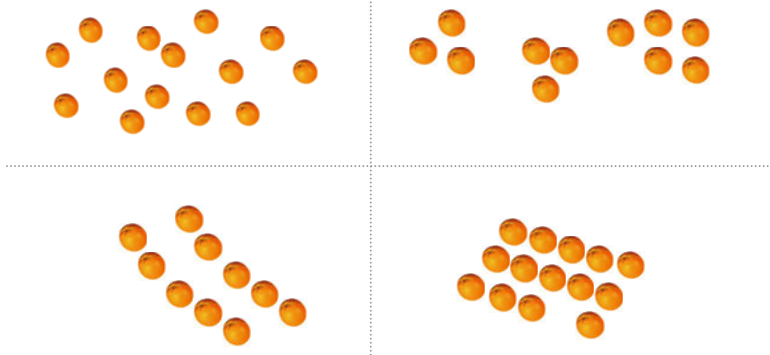
Schon wenn man Kinder unterschiedlicher Altersstufen beim Zählen beobachtet, erkennt man, dass Zählen keineswegs eine einfache, automatisierte Tätigkeit ist. In diesem Kapitel erleben Sie, wie aus der ganz alltäglichen Frage „Wie viele?“ eine große Vielfalt an Zählstrategien, ja sogar eine kleine „mathematische Theorie des Zählens“ entstehen kann.

Wundern Sie sich aber bitte nicht, wenn die Zählsituationen, denen Sie im Folgenden begegnen, allesamt etwas unrealistisch sind, und die Frage nach dem „Wie viel?“ eher verspielt als nützlich ist: Die folgenden Probleme sind meist so genannte Einkleidungen, die dazu dienen, den Zugang zu den mathematischen Konzepten besonders anschaulich zu gestalten. So richtig nützlich wird die „Theorie des Zählens“ dann, wenn sie in größeren Kontexten, etwa in der Statistik, eingesetzt wird. Sie werden aber sehen, dass dieses Kapitel Ihren Blick auf die Umwelt verändern wird und dass sie künftig wohl auch öfters die Frage „Wie viele?“ stellen werden.

2.1 Einfache Zählstrategien

Erkunden Sie zunächst einmal Ihr eigenes Zählverhalten. Sie werden sehen, dass Sie intuitiv schon mehr Zählstrategien verwenden als sie geahnt haben.

Erkundung 2.1: Zählen Sie bitte zunächst die Dinge in jedem Bild. Überlegen Sie danach, wie Sie vorgegangen sind. Welche Abstraktionsleistungen haben Sie vollbracht?



An diesen Beispielen haben Sie vielleicht einige Strategien, die uns das Zählen erleichtern, (wieder)entdeckt: Wir können Objekte **in Gruppen bündeln**. Vorzugsweise wählen wir Bündel, mit denen wir oft umgehen, etwa Dreier- oder Fünferbündel. Besonders beliebt sind Fünferbündel und Doppel-Fünfer-Bündel, denn als solche nehmen wir sie leichter wahr. Diese speziellen Bündel entsprechen auch der Struktur unseres Zahlensystems (vgl. Kap. 7). Schon bevor Menschen anfangen, Zahlen zu schreiben, gab es natürliche Bündelungen, wie etwa die Hand bzw. beide Hände, die fünf bzw. zehn Finger bündeln. Im Dänischen, Französischen und alten Englisch gibt es sogar Überreste von Zwanzigerbündeln: *quatre-vingt*, also 80, bedeutet wörtlich 4·20. Kinder können sich beim Zählen und Rechnen diese „Kraft der Fünf“ zu Nutze machen.

Wenn die Objekte in günstigen Mustern, z.B. in Reihen oder Spalten, angeordnet sind, kann man ihre Anzahl schnell durch **Multiplikation** ermitteln – eine noch höhere Abstraktionsleistung, die natürlich voraussetzt, dass man mit solchen Mustern schon vertraut ist. Haben Sie etwa beim vierten Beispiel $3 \cdot 5 - 1$ gerechnet? Dann haben Sie das Muster bereits in eine komplexere mathematische Struktur übersetzt.

Dies alles sind Zählstrategien, die Kinder in der Grundschule – und im Alltag! – lernen. Es gibt aber noch komplexere mathematische Konzepte, die wir anwenden, um geschickt und zeitsparend Anzahlen zu bestimmen.

Erkundung 2.2: Zählen Sie bitte wieder. Überlegen Sie danach, wie Sie vorgegangen sind. Was mussten Sie wissen und können, um so zu zählen? Welche mathematischen Konzepte haben Sie angewendet?



Sie haben an den Beispielen bemerkt, wie bei komplexeren Situationen das Zählen unmittelbar mit der Nutzung oder Entwicklung mathematischer Denkweisen einhergeht: Bei der Orangenkiste haben Sie die **multiplikative Struktur** einer räumlichen Anordnung genutzt, zugleich wohl auch die Zahl der Schichten aus den Maßen im Bild **geschätzt**. Bei der Schafherde mussten Sie sich dazu durchringen, nicht die genaue, sondern nur die ungefähre Zahl als relevant anzusehen. Dann konnten Sie Verfahren zum **Überschlagszählen** anwenden, z.B. indem Sie Schafe gebündelt haben oder etwa die Schafe pro Quadratzenimeter bestimmt und hochgerechnet haben. Bei den Mozartkugeln haben Sie eine Annahme zur **Symmetrie** der Anordnung gemacht, ebenso bei den Kanonenkugeln. Diese kann man übrigens verschieden strukturieren: wahrscheinlich haben Sie diese als gestapelte Quadrate gezählt.

Übung 2.3: Welche Strukturierung der Pyramide steckt wohl hinter diesen anderen Rechnungen?

- a) $1+4+9+16+25+36+49+64 = 204$
- b) $1+3+6+10+15+21+28+36+28+21+15+10+6+3+1 = 204$
- c) $36+(36-1)+(36-3)+(36-6)+(36-10)+(36-15)+(36-21)+(36-28) = 204$
- d) $8+(8+7)+(8+7+6)+(8+7+6+5)+\dots+(8+7+6+5+4+3+2+1) = 204$

Diese Übung deutet noch einmal darauf hin, dass eine Struktur nicht einfach in einer Situation *steckt*, sondern dass man sie aktiv in eine Situation *hinein*-interpretiert. Und das kann individuell sehr unterschiedlich aussehen.

Haben Sie in dem einen oder anderen Fall noch anders gezählt? Das wäre nicht verwunderlich, denn Zählen ist eine ganz individuelle Sache. Jedenfalls erwarten wir, dass bereits Kinder in der Grundschule solche mathematischen Strategien entwickeln, wenn sie mit derartigen Zählproblemen konfrontiert werden. Das Zählen führt also in ganz natürlicher Weise zur Entwicklung mathematischer Begriffe und Strategien. In den folgenden Abschnitten sollen Sie sich einiger solcher universell weiterverwendbarer Strategien bewusst werden.

2.2 Problemlösestrategien beim Zählen

Der vorige Abschnitt hat gezeigt: Zählen ist mehr als Abzählen. Intelligentes Zählen nutzt vielmehr eine Strategie, die allgemein so lauten könnte:

Strategie: *Suche zunächst Strukturen und nutze diese geschickt aus.*

Verwenden Sie diese Strategie zum Einstieg bei einem übersichtlichen Zählproblem. Aber wundern Sie sich nicht, wenn Sie zu verschiedenen Lösungen kommen. Dieses Problem ist – wie viele Probleme in diesem Buch – ganz bewusst nicht völlig unmissverständlich gestellt. Es lässt verschiedene Interpretationen und Ansätze zu. Also trauen Sie sich, wenn Sie, hier wie auch bei späte-

ren Übungen, unsicher sind, wie die Aufgabe zu deuten ist, eine Entscheidung zu treffen.

Erkundung 2.4: Ein ordentliches italienisches Menü ist immer eine Kombination mehrerer Gänge. Wie viele verschiedene Menüs sind bei dieser Speisekarte möglich?

RISTORANTE TOSCANA

ANTIPASTI

Prosciutto di Parma con Mozzarella
Bruschette
Carpaccio di Manzo
Caprese
Insalata di Gamberi
Antipasto Vegetale

PRIMI PIATTI

Trenette al Pesto
Spaghetti Pomodoro
Spaghetti Aglio, Olio e Peperoncino
Tortelli alla Parmigiana
Tortelli Burro e Salvia
Tagliatelle ai Funghi Porcini
Gnocchi al Gorgonzola
Gnocchi al Buongustaio
Penne all'Arrabbiata
Penne alla Norma
Orecchiette Broccoli e Salmone
Orecchiette Aglio, Olio e Broccoli
Orecchiette alla Boscaiola
Risotto ai Funghi Porcini
Risotto Pescatore



SECONDI PIATTI

Beilagen nach Wahl:
Risotto - Tagliatelle -
Pommes Frites - Reis - Polenta
Scaloppine di Vitello al Limone
Scaloppine di Vitello al Marsala
Scaloppine di Vitello ai Porcini
Saltimbocca alla romana
Filetto di Manzo Medaglione
Filetto di Manzo alla Gorgonzola
Agnello alle Erbe
Paillard di Vitello

HAUSGEMACHTE DESSERTS

Tiramisù
Caramelköpfl
Panna Cotta
Profiteroles
Pera al Barolo

www.ristorantetoscana.ch

Aus der Schule sind wir es leider gewohnt, zu einer Mathematikaufgabe eine passende, womöglich kurz zuvor erarbeitete Formel zu suchen und anzuwenden. Eine solche Formel ist bei Zählproblemen aber leider meist nicht zur Hand. Jedes Problem scheint zunächst ganz neu zu sein, eine ganz eigene Methode wird benötigt. Erst mit der Zeit gewinnt man eine Übersicht und erkennt schneller, wie man ein Zählproblem vielleicht angehen kann. Doch bis dahin: Wie geht man vor, wenn man keine unmittelbar passende Lösungsmethode oder Formel zur Hand hat?

Das ist eine typische Situation in der Mathematik, hier geht es nicht um Anwenden fertiger Verfahren, sondern um das, was man „Problemlösen“ nennt. Eine ganz universelle Strategie (in zwei Schritten) lautet hier:

Strategie: *Schreibe zuerst einzelne Beispiele auf, um das Problem zu verstehen.*

Strategie: *Versuche alle einzelnen Möglichkeiten systematisch aufzuschreiben.*

Ein Menü wäre beispielsweise: Prosciutto di Parma con Mozzarella – Trenette al Pesto – Scaloppine di Vitello al Limone mit Risotto – Tiramisù. Schon beim Versuch, ein einziges Beispiel zu erzeugen, kann man viel über die Struktur des Problems lernen. Sie haben vielleicht bemerkt, dass die Beilagen unter den ‚secondi piatti‘ unabhängig wählbar sind, also so etwas wie ein eigener Gang sind. Statt also gleich eine vollständige Lösung anzustreben, kann es sich lohnen, etwas Zeit zu investieren und anhand eines Beispiels erst einmal sicherzustellen, dass man das Problem verstanden hat.

Allerdings kann es wirklich lange dauern, *alle* Möglichkeiten aufzuschreiben. Einfacher ist es, jedes Gericht mit einer Zahl zu versehen, für die Anzahl der Kombinationen von Gängen sind deren Namen nämlich irrelevant: Antipasti 1-6, Primi Piatti 1-15, Beilagen 1-5, Secondi Piatti 1-8, Desserts 1-5. Eine systematische Liste aller Möglichkeiten sähe dann z.B. so aus:

$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & \text{mw.} & & \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$	}	6 Möglichkeiten
$\begin{array}{cccc} 1 & . & . & . & . \\ 2 & . & . & . & . \\ & & \text{mw} & & \\ 6 & . & . & . & . \end{array}$	}	6 Möglichkeiten

Dieser Schritt ist bereits eine weitere, im Allgemeinen sehr nützliche Strategie:

Strategie: *Finde eine vereinfachende Schreibweise.*

Mit diesem Umschreiben auf eine andere Notationsform hat man zwar noch keine Lösung, aber zumindest eine Arbeitersparnis und vielleicht einen Lösungsansatz: Egal, wie man die nachfolgenden Gänge wählt, man hat jedes Mal die Wahl zwischen 6 ersten Gerichten. Man schreibt folglich so viele Sechserblöcke, wie man Kombinationen von Gängen *nach* der Vorspeise wählen kann. Das Problem hat sich also jetzt reduziert auf die Frage: Wie viele Kombinationen von Gängen gibt es, wenn man die Vorspeise außer Acht lässt? Diese Zahl muss man dann mit 6 multiplizieren. Auch hier war wieder (kaum merklich) eine Strategie am Werke, die man so in Worte fassen könnte:

Strategie: *Zerlege das Problem in (möglicherweise) einfachere Teilprobleme.*

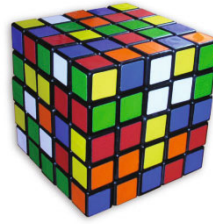
Neben der obigen Strategie, eine vereinfachte Darstellung zu finden, gibt es auch ganz allgemein die Strategie des Darstellungswechsels:

Strategie: *Schreibe das Problem in einer anderen Darstellung.*

(a) *als Liste oder Tabelle:*

Schreibt man eine Liste wie oben, dann ist das bereits ein Teilschritt zur Lösung. Man kann auch versuchen, das Problem als zweidimensionale Tabelle zu schreiben, was dann so aussehen könnte:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1															
2															
3															
4															
5															
6															



An so einer Tabelle sieht man unmittelbar: Jeder Kombination aus Vorspeise und erstem Gang ist ein Feld zugeordnet. In drei Dimensionen kann man das allerdings nicht mehr so leicht zeichnen, sich wohl aber als Würfel vorstellen. Ab vier Dimensionen wird das schon schwieriger. Es müssen übrigens nicht immer rechtwinklige Strukturen sein – je nach Zählproblem können auch andere geometrische Muster weiterhelfen.

(b) als Diagramm oder geometrische Figur:

Ein Diagramm könnte hier z.B. die Form eines Baumes haben. Man sieht hier auch, dass man eine Strategie nicht immer bewusst auswählt oder anwendet – manchmal merkt man auch erst im Nachhinein, dass man eine Strategie angewendet hat. Dann heißt es: sich die Strategie genau ansehen, merken und vielleicht später noch einmal ausprobieren.



Nun wurde das Problem mit einer ganzen Zahl unterschiedlicher Strategien und Darstellungen durchleuchtet und alle führen zu dieser Lösung: Die Anzahl der Kombinationen aus 6, 15, 5, 8 und 5 Möglichkeiten, bei denen man der Reihe nach aus den Möglichkeiten jeweils genau eine auswählt, beträgt $6 \cdot 15 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 5$.

Das so gefundene Verfahren funktioniert natürlich nicht nur bei Speisekarten. Mit Hilfe der symbolischen Darstellungen, die die Mathematik zur Verfügung hat, kann man die Erkenntnis von der konkreten Einzelsituation abstrahieren und das Zählverfahren so beschreiben:

Satz: Die Anzahl der Kombinationen aus Elementen, bei denen das erste Element aus einer Menge mit k_1 Elementen stammt, das zweite aus einer Menge mit k_2 Elementen usw., beträgt $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$.

Wie man diesen Satz mit Hilfe symbolischer Schreibweisen noch knapper fassen kann, erläutert der folgende kurze Exkurs. Im Buch werden solche Einschübe gelegentlich dann kommen, wenn sich die Darstellung von der inhaltlichen Argumentation etwas abwendet und mathematische Formalisierungen und Symbolsprache eingeführt werden sollen. Dabei wird auch immer deutlich werden, wozu eine solche symbolische Schreibweise nützlich ist.

Exkurs: Vom Sinn und Zweck formaler Schreibweisen

Mathematiker schreiben ihre Aussagen gerne kompakt und verwenden dazu die Mengenschreibweise. Eine Menge ist eine Ansammlung von verschiedenen Objekten, wie beispielsweise von Zahlen, und schreibt sich z.B. so: $A = \{2,3,5,7\}$ oder so: $B = \{2n+1 \mid n=0,1,2,3,\dots\}$. Letzteres liest man üblicherweise so: B ist die Menge aller Zahlen $2n+1$, bei denen n die Werte $0,1,2,\dots$ durchläuft. Diese Menge enthält damit die Zahlen $1,3,5,\dots$. Dass ein Element in einer Menge liegt, schreibt man verkürzend mit dem „ $\in$ “-Zeichen: $3 \in A$ bedeutet: „Die Zahl 3 ist Element der Menge A “, „3 ist in A enthalten“ oder „ A enthält die 3“.

Eine Auswahl von Elementen (a, b, c) , bei denen a aus der Menge A stammt, b aus der Menge B und c aus der Menge C , nennt man auch ein *Tripel*. Die Menge aller dieser Tripel heißt auch das *Kreuzprodukt* der Mengen A, B und C und schreibt sich so: $A \times B \times C = \{(a,b,c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$. Wenn beispielsweise $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2\}$ und $C=\{X,Y\}$ ist, dann enthält $A \times B \times C$ unter anderem die Elemente $(1,1,X)$ oder $(3,2,Y)$.

Senkrechte Striche um eine Menge, z.B. $|M|$, bedeuten, dass man hier nicht die ganze Menge, sondern nur die *Anzahl* der Elemente in der Menge meint, also z.B. $|\{1,3,4\}|=3$. Mit diesen Schreibweisen kann man die obige Feststellung über die Anzahl von Kombinationen besonders knapp so schreiben: $|M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \dots \cdot |M_n|$.

Wer mit der symbolischen Schreibweise nicht gerade auf Kriegsfuß steht, kann bei dieser Zeile auch ein gewisses ästhetisches Empfinden verspüren: Das Malkreuz „ $\times$ “ multipliziert gewissermaßen Mengen miteinander, so dass die Anzahlen der Elemente sich so multiplizieren lassen, wie es natürliche Zahlen tun. Wenn man das „ $\times$ “ schreibt, so wird man daran erinnert, dass man eine Verknüpfung von Mengen vor sich hat, die bestimmte Eigenschaften des Multiplizierens besitzt. Gute Notationsformen haben also eine Art assoziative Erinnerungsfunktion. Dass das nicht immer so glatt läuft, können Sie sehen, wenn Sie einmal versuchen, eine Regel für die Anzahl der Elemente in der Vereinigung von zwei Mengen zu finden. Die Vereinigung von Mengen schreibt man mit einem „ $\cup$ “, also $\{1,2,4\} \cup \{3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$.

Übung 2.5: Überprüfen Sie einmal, ob diese Regeln für alle Mengen M_1 und M_2 stimmen können:

$$|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| \qquad |M_1 \cup M_2| = |M_1| \cdot |M_2|$$

Wenn es nicht funktioniert: Unter welchen Bedingungen stimmt die Gleichung doch? Oder: Was müsste man an ihr ändern, damit sie immer stimmt?

Symbolische Schreibweisen sind also nützlich, wenn es darum geht, mathematische Erkenntnisse knapp *zusammenzufassen*. Damit ist jedoch noch nicht gewährleistet, dass sie auch helfen, ein anstehendes Problem zu *lösen*. Das gilt auch bei dem obigen Problem der Menüanzahl, denn die Hürde besteht nicht in der Anwendung einer Formel, sondern darin, zu erkennen, *was* man zu berechnen hat, d.h. insbesondere ob eine solche Formel hier überhaupt auf die Situation passt. Erst wenn man das Problem, wenn man es denn gelöst hat, im *Nachhinein* auf knappe Weise darstellen möchte, hilft die symbolische Schreibweise:

M_1 = Menge der Vorspeisen,	M_2 = Menge der Primi Piatti,
M_3 = Menge der Beilagen,	M_4 = Menge der Secondi Piatti,
M_5 = Menge der Desserts	M = Anzahl der möglichen Gangfolgen

Mit diesen Bezeichnungen gilt: $M = M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_4 \times M_5$ und die Aussage über die Anzahl der Elemente in der Produktmenge sieht so einfach aus: $|M| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot |M_3| \cdot |M_4| \cdot |M_5|$

Übung 2.6: Beantworten Sie die folgende Frage und nutzen Sie dazu möglichst intensiv die Kurzschreibweise: Wie viele Punkte mit ganzzahligen Koordinaten liegen in einem Rechteck der Breite 10 und Höhe 21?

Aufschreiben kann man die Lösung auf eine so formale Weise, wie eben dargestellt, erst, wenn man das Problem – sei es auf dem Papier oder im Kopf – erfasst, verstanden und eigentlich auch schon gelöst hat. Die formale Schreibweise ist demnach für den Anfänger keine gute Strategie. Wenn mit den Schreibweisen einmal sicherer umgegangen werden kann, wenn man also den so genannten *formalen Kalkül* beherrscht, dann kann es schon nützlich sein, eine Idee knapp und formal aufzuschreiben und vielleicht auch formal weiterzuentwickeln.

Übung 2.7: Ein deutscher Gast im italienischen Restaurant erkundigt sich (höflich, aber verunsichert): „Könnte ich auch einige Gänge überspringen?“ Was heißt das für das Zählproblem? Suchen Sie eine Lösung und wenden Sie dabei, wenn möglich, eine der genannten Strategien an.

2.3 Kombinationen zählen

Gerüstet mit den Erfahrungen des vorigen Abschnittes, können Sie sich nun daranmachen, ganz verschiedene Zählprobleme anzugehen. Sie werden dabei feststellen, dass es trotz der immer wechselnden Situationen viele Ähnlichkeiten in der Struktur gibt – und genau solche wiederkehrenden Strukturen zu erfassen, ist besonders die Stärke der Mathematik. Der Zweig der Mathematik, der sich mit der „Zählkunst“ befasst, wird auch Kombinatorik genannt.

Erkundung 2.8: Sandy, Lucy, Vanessa, Nadja und Jessica haben ihre Band aufgelöst. Fortan probieren sie sich in verschiedenen Formationen aus, als Duos, Trios, in Einzelauftritten usw. Wie viele Möglichkeiten gibt es theoretisch? Lösen Sie nicht nur das Problem, sondern stellen Sie anschließend möglichst viele mathematische Fragen.



Sicher haben Sie sich dem Problem aus der Popindustrie systematisch genähert, indem Sie – ganz entsprechend der weiter oben erarbeiteten Strategien – erst einmal eine einfache Schreibweise gewählt haben. Die Namen der jungen Damen könnten beispielsweise einfach durch Ziffern ersetzt werden. Dann sieht eine systematische Übersicht etwa so aus:

Anzahl der Mitglieder	Kombination	Anzahl der Kombinationen
1 (Solo)	1,2,3,4,5	5
2 (Duo)	12,13,14,15,23,24,25,34,35,45	10
3 (Terzett)	123,124,125,134,135,145,234,235,245,345	10
4 (Quartett)	1234,1235,1245,1345,2345	5
5 (ganze Band)	12345	1
Insgesamt:		31

Wenn es nur darum ginge, die Anzahl herauszufinden, wären Sie jetzt fertig. Aber je mehr Sie Ihre Lust am mathematischen Denken entwickelt haben, desto mehr drängt sich Ihnen in so einer Situation eine Fülle neuer Fragen auf, wie etwa diese:

1. Wieso sind die Anzahlen so unsymmetrisch? Warum fehlt die 1 auf der anderen Seite?
2. Woher kommt ansonsten die Symmetrie? Eigentlich sollte man doch immer mehr Möglichkeiten haben. Stattdessen ist die Zahl der Viererkombinationen wieder genauso groß, wie die der Einerkombinationen. Woran liegt das?
3. Kann man die Anzahlen auch berechnen, ohne alle Beispiele aufzuschreiben?
4. Ist es Zufall, dass 31 herauskommt?

Die Frage 1 nach der mangelnden Symmetrie wegen der fehlenden 1 ist aus praktischer Sicht eigentlich uninteressant, einen Mathematiker stört so etwas jedoch. Zum Glück kann man es beheben: Alles wäre wieder im Lot, wenn noch eine Zeile hinzukäme:

Zahl der Mitglieder	Kombination	Anzahl der Kombinationen
0 (keine)	$\emptyset$ (bedeutet: „leere Menge“)	1

Das passt allerdings gut in die Struktur, denn es gibt tatsächlich genau *eine* Möglichkeit für die Auswahl von *keinem* Bandmitglied.

Das bringt einen auch schon auf die Frage 2 nach der Symmetrie: Alle zu wählen oder keine zu wählen, bedeutet gewissermaßen dasselbe und jeweils auch nur auf eine Weise. Genau *vier* zu wählen wiederum ist ganz dasselbe wie *eine* auszuwählen, die *nicht* dabei ist. Nun ist aber auch klar, warum 2 aus 5 auszuwählen gleich viele Möglichkeiten produziert, wie 3 aus 5 auszuwählen: Zu jeder Kombination von dreien gehört genau eine Kombination von zweien, die jeweils nicht ausgewählt wurden. Für diejenigen, die Castings in der Musik- oder Modelbranche kennen: Mitunter lässt die Jury einen Teil der Bewerber hervortreten und gibt, um die Spannung zu erhöhen, erst nach einer Kunstpause bekannt, ob die Vorgetretenen oder die Stehengebliebenen weiterkommen.

Frage 3 ist die nach einer allgemeinen Berechnungsvorschrift. Wenn man aus den konkreten Zahlen noch nichts erkennen kann, hilft oft die folgende Strategie:

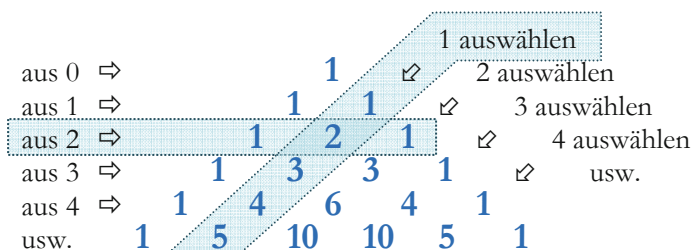
Strategie: *Formuliere ein allgemeineres Problem und versuche, dieses zu lösen.*

Diese Strategie ist gleichermaßen das Gegenteil des Beispielsuchens. Das Motto lautet „Verallgemeinern statt Spezialisieren“. Manchmal verstellt ein allzu eng gewähltes Beispiel den Blick für das Wesentliche. In diesem Fall würde man also nicht fragen: „Kann man ausrechnen, wie viele Kombinationen es für die

Auswahl von 3 aus 5 gibt?“, sondern vielmehr: „Kann man die Anzahl der Kombinationen von m aus n ausrechnen?“. Die systematische Übersicht könnte so aussehen:

	0	1	2	3	4	5
aus 1	1	1				
aus 2	1	2	1			
aus 3	1	3	3	1		
aus 4	1	4	6	4	1	
aus 5	1	5	10	10	5	1

Will man wieder die Symmetrie dieses Zahlenmusters besser zur Geltung kommen lassen, stellt man es grafisch in einer etwas anderen Form dar und fügt auch noch eine erste Zeile hinzu, die auch in ihrer Interpretation gut passt: Es gibt 1 Möglichkeit, 0 aus 0 auszuwählen.



Dieses berühmte Dreieck wird nach dem französischen Mathematiker Blaise Pascal (1623–1662) auch „Pascal’sches Dreieck“ genannt. Es versammelt offensichtlich die Anzahl aller Kombinationen für eine Auswahl von m Elementen aus einer Menge mit n Elementen. Es stecken aber noch viel mehr Zusammenhänge in diesem Zahlenmuster. Bevor Sie weiterlesen, probieren Sie es einmal selbst:

Übung 2.9: Suchen Sie im Pascal'schen Dreieck nach möglichst vielen Mustern, Strukturen, Regelmäßigkeiten und Zusammenhängen zwischen den Zahlen. Versuchen Sie anschließend, einige dieser Zusammenhänge zu begründen.

Vielleicht haben Sie auch diese hier gefunden, vielleicht noch weitere:
 Vermutung 1: Jede Zahl ist die Summe der beiden Zahlen schräg über ihr,
 also z.B. $10 = 6 + 4$

Vermutung 2: In den Zeilen findet man die Vorfaktoren für die Potenzen des Ausdrucks $(x+y)$, also z.B. die 1, 3, 3, 1 aus

$$(x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$$

Vermutung 3: Die Summe in jeder Zeile ist immer eine Zweierpotenz:

$$\begin{array}{ll} 1+1 = \mathbf{2}, & 1+2+1 = \mathbf{4}, \\ 1+3+3+1 = \mathbf{8}, & 1+4+6+4+1 = \mathbf{16}, \\ 1+5+10+10+5+1 = \mathbf{32} & \end{array}$$