NWB Studium Betriebswirtschaft

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Band 3

Lineare Algebra, Lineare Optimierung und Graphentheorie.

Bearbeitet von
Prof. Dr. Jochen Schwarze

13., vollständig überarbeitete Auflage. 2010. Taschenbuch. 230 S. Paperback
ISBN 978 3 482 51583 5
Gewicht: 400 g

17 Grundlagen der Matrizenrechnung

17.1 Matrizen und Vektoren

Durch eine Funktion wird dem Wert einer (oder den Werten mehrerer) unabhängiger Variablen eindeutig ein Wert der abhängigen Variablen zugeordnet (vgl. dazu die Kapitel 6 und 7 in Band 1). In den Wirtschaftswissenschaften benutzt man diese Eigenschaft von Funktionen, um durch sie Zusammenhänge zwischen ökonomischen Größen zu beschreiben. Manchmal hat man es in den Wirtschaftswissenschaften und in der betriebs- und volkswirtschaftlichen Praxis jedoch mit mehrfachen Zusammenhängen oder Beziehungen zu tun, die sich nicht durch Funktionen darstellen lassen, sondern die eher durch eine rechteckige, tabellenähnliche Anordnung von Zahlen beschrieben werden können. Dazu werden zunächst einige Beispiele betrachtet.

B 17.1.1 a) *Die Außenhandelsbeziehungen von 4 Ländern während eines Zeitraums lassen sich übersichtlich wie folgt darstellen:*

		Land			
		I	II	III	IV
Land	I	0	28	19	37
	II	14	0	25	46
	III	45	9	0	50
	IV	5	17	80	0

Zu jedem Land gehört eine Zeile und eine Spalte: In der Zeile eines Landes stehen die Exporte in die jeweils anderen Länder. In der zu einem Land gehörigen Spalte stehen die Importe von den jeweils anderen Ländern.

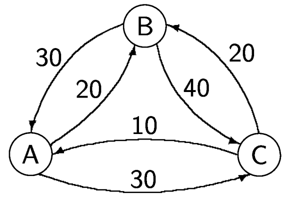
b) *Entfernungen zwischen Orten werden (z. B. in Autoatlanten) in Entfernungstabellen der folgenden Art zusammengestellt:*

		Ort				
		A	B	C	D	E
Ort	A	0	12	24	6	18
	B	12	0	5	29	40
	C	24	5	0	36	7
	D	6	29	36	0	3
	E	18	40	7	3	0

c) *Ein Warenhaus, das 4 Lagerhäuser und 7 Filialen besitzt, kann die Kosten für den Transport einer Tonne Ware von den Lagerhäusern zu den Filialen wie folgt zusammenstellen:*

		Filiale						
		1	2	3	4	5	6	7
Lagerhaus	1	12	6	5	4	1	9	18
	2	7	12	9	7	4	8	14
	3	4	3	6	2	3	1	3
	4	9	17	5	2	9	4	2

d) *In einem Betrieb gibt es die Abteilungen A, B und C. Jede Abteilung gibt an die beiden anderen Leistungen ab. Die Leistungsbeziehungen können grafisch oder tabellarisch wie in* F 17.1.2 *dargestellt werden.*



	A	B	C
A	0	20	30
B	30	0	40
C	10	20	0

F 17.1.2

Charakterisiert man die Zusammengehörigkeit der rechteckigen Anordnung von Zahlen dadurch, dass man sie in Klammern setzt, dann spricht man von einer Matrix.

D 17.1.3

Matrix
Das rechteckige Zahlenschema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt **Matrix** mit m **Zeilen** und n **Spalten** oder **m×n-Matrix**. Die a_{ij} $(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$ heißen **Elemente** der Matrix.

Bei den Elementen gibt der erste Index (häufig mit i bezeichnet) die Zeile und der zweite Index (häufig mit j bezeichnet) die Spalte an, in der das Element steht. m und n geben die **Ordnung der Matrix** an.

B 17.1.4 *Zu* B 17.1.1a) *und* c) *gehören folgende Matrizen*

a) $\begin{pmatrix} 0 & 28 & 19 & 37 \\ 14 & 0 & 25 & 46 \\ 45 & 9 & 0 & 50 \\ 5 & 17 & 80 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 12 & 6 & 5 & 4 & 1 & 9 & 18 \\ 7 & 12 & 9 & 7 & 4 & 8 & 14 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 9 & 17 & 5 & 2 & 9 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Anmerkung: In der linearen Algebra werden Matrizen als spezielle Abbildungen bzw. Funktionen aufgefasst. Darauf wird in Abschnitt 17.8 eingegangen.

In den folgenden Ausführungen werden Matrizen mit halbfetten Großbuchstaben des lateinischen Alphabets bezeichnet (**A**, **B** usw.). Elemente von Matrizen werden mit Kleinbuchstaben des lateinischen Alphabets bezeichnet (vgl. D 17.1.3).

Außer der in D 17.1.3 gegebenen Form sind folgende Schreibweisen einer $m \times n$-Matrix gebräuchlich:

$(a_{ij})_{mn}$; $\mathbf{A}_{mn}$; (a_{ij}); $\mathbf{A}$.

Auf die Angabe der Ordnung der Matrix wird meistens verzichtet, da sie aus dem Zusammenhang hervorgeht.

D 17.1.5 **Vektor**

Eine Matrix, die nur aus einer einzigen Spalte besteht, also eine $m \times 1$-Matrix $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$, heißt **Spaltenvektor**.

Eine Matrix, die nur aus einer einzigen Zeile besteht, also eine $1 \times n$-Matrix $(a_1, a_2, ..., a_n)$, heißt **Zeilenvektor**.

Vektoren sind Sonderfälle von Matrizen. Sie können als geordnete m- bzw. n-Tupel von Zahlen aufgefasst werden. Die Elemente von Vektoren heißen auch **Komponenten**.

Spaltenvektoren werden durch halbfette Kleinbuchstaben des lateinischen Alphabets (**a**, **b** usw.) oder mit (a_i), (b_i) usw. bezeichnet und Zeilenvektoren zusätzlich mit einem hochgestellten Strich ($'$) oder T versehen: $\mathbf{a}'$, $\mathbf{a}^T$, $(a_i)'$ oder $(a_i)^T$. Die Elemente von Zeilenvektoren werden durch Kommata oder Semikola getrennt.

B 17.1.6 *Eine Unternehmung, die 6 Güter herstellt, kann die in einem Monat produzierten Mengen der Güter* ($x_1 = 5$; $x_2 = 9$; $x_3 = 2$; $x_4 = 28$; $x_5 = 0$; $x_6 = 17$) *als Vektor schreiben*:
$\mathbf{x}' = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (5, 9, 2, 28, 0, 17)$.
Außer diesem Mengenvektor gibt es auch einen Preisvektor für die Preise der Güter:
$\mathbf{p}' = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) = (80, 50, 90, 10, 200, 70)$.
In beiden Fällen können auch Spaltenvektoren verwendet werden.

Ein spezieller Sonderfall von Matrizen ist die 1×1-Matrix. Es ergibt sich dafür eine reelle Zahl, die im Rahmen der Matrizenrechnung auch als **Skalar** bezeichnet wird.

Das folgende Beispiel zeigt eine wirtschaftswissenschaftliche Anwendung von Matrizen, und zwar aus der Input-Output-Analyse.

B 17.1.7 *Es wird eine Volkswirtschaft mit nur drei Industriezweigen betrachtet. In jedem Industriezweig werden eigene Produkte und Produkte aus den anderen Industriezweigen im Produktionsprozess als Input eingesetzt. Alle End-Produkte* (*Output*), *die nicht wieder für die Produktion verwendet werden, gehen an Endnachfrager bzw. Konsumenten* (*Staat, private Haushalte, Export*).
Werden Input und Output als Wertgrößen aufgefasst, dann können die Beziehungen zwischen Input und Output in einer so genannten Input-Output-Matrix zusammengestellt werden:

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cccccc} & \textit{Industriezweig} & & & \textit{Endnach-} & \textit{Gesamt-} \\ & A & B & C & \textit{frage} & \textit{output} \end{array} \\ \textit{Industriezweig} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Die Elemente der Matrix geben den Output an, der von dem zu der betreffenden Zeile gehörenden Industriezweig zu dem der jeweilige Spalte zugehörigen Industriezweig bzw. der Endnachfrage geht. Den Spaltenvektor für den Gesamtoutput erhält man durch Summation aller in einer Zeile stehenden Elemente. Dividiert man unter Vernachlässigung der Endnachfrage die Elemente jeder Spalte der Matrix durch den zu der betreffenden Spalte gehörenden gesamten Output, also die Elemente der 1. *Spalte durch* 8, *die der* 2. *Spalte durch* 6 *und die der* 3. *Spalte durch* 7, *so erhält man folgende Matrix:*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathsf{A} \\ \mathsf{B} \\ \mathsf{C} \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \end{array}$$

Die Elemente dieser Matrix geben an, welchen Anteil seines Outputs der zu der betreffenden Spalte gehörende Industriezweig von dem zu der Zeile gehörenden Industriezweig erhält. Die Zahl $\frac{1}{3}$ *in der* 2. *Spalte der* 1. *Zeile besagt also, dass Industriezweig* B *ein Drittel seines gesamten Outputs von Industriezweig* A *als Input empfängt.*

Aufgaben

Ü 17.1.1 *Gegeben ist die Matrix*:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 9 & -6 \\ -2 & 5 & 2 & -8 & 5 \\ -1 & -3 & -3 & 7 & -8 \\ 2 & 5 & 2 & 8 & -5 \\ 3 & -4 & 1 & -9 & 6 \end{pmatrix}$$

a) *Wie lauten die Elemente* a_{15}, a_{34}, a_{43}, a_{52}, a_{41}*?*

b) *Bestimmen Sie* $\sum\limits_{i=1}^{5} a_{i2}$ *und* $\sum\limits_{j=1}^{5} a_{2j}$.

Ü 17.1.2 *Die Matrix* $\mathbf{B}_{mn} = (b_{ij})$ *sei folgendermaßen definiert*:
$b_{ij} = i + j - 1$ *für* $i = 1, \dots, m$ *und* $j = 1, \dots, n$.

a) *Schreiben Sie die Matrix* $\mathbf{B}_{34}$ *auf.*

b) *Bestimmen Sie* $\sum\limits_{i=1}^{3} b_{ij}$ *für* $j = 1, \dots, 4$.

c) *Bestimmen Sie* $\sum\limits_{i=1}^{3} \sum\limits_{j=1}^{4} b_{ij}$.