

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Band 3

Lineare Algebra, Lineare Optimierung und Graphentheorie.

Bearbeitet von
Prof. Dr. Jochen Schwarze

13., vollständig überarbeitete Auflage. 2010. Taschenbuch. 230 S. Paperback

ISBN 978 3 482 51583 5

Gewicht: 400 g

Wirtschaft > Betriebswirtschaft: Theorie & Allgemeines > Wirtschaftsmathematik und -
statistik

Zu [Inhaltsverzeichnis](#)

schnell und portofrei erhältlich bei

The logo for beck-shop.de features the text 'beck-shop.de' in a bold, red, sans-serif font. Above the 'i' in 'shop' are three red dots of increasing size. Below the main text, 'DIE FACHBUCHHANDLUNG' is written in a smaller, red, all-caps, sans-serif font.

beck-shop.de
DIE FACHBUCHHANDLUNG

Die Online-Fachbuchhandlung beck-shop.de ist spezialisiert auf Fachbücher, insbesondere Recht, Steuern und Wirtschaft. Im Sortiment finden Sie alle Medien (Bücher, Zeitschriften, CDs, eBooks, etc.) aller Verlage. Ergänzt wird das Programm durch Services wie Neuerscheinungsdienst oder Zusammenstellungen von Büchern zu Sonderpreisen. Der Shop führt mehr als 8 Millionen Produkte.

20 Grundzüge der linearen Optimierung

20.1 Vorbemerkung

Ein Teilgebiet der Wirtschaftswissenschaften ist die Unternehmensforschung (Operations Research). Darunter versteht man die Anwendung mathematischer Methoden auf die Lösung von Planungs- und Entscheidungsproblemen. Viele der in den vorhergehenden Abschnitten behandelten Ansätze und Verfahren werden innerhalb des Operations Research verwendet.

Zur Behandlung wirtschaftlicher Entscheidungsaufgaben wurden auch spezielle mathematische Verfahren entwickelt. Das bekannteste ist die **lineare Optimierung**, häufig auch **lineare Programmierung** genannt. Sie wird auf die Lösung von Problemen angewendet, bei denen Extremwerte einer linearen Funktion gesucht werden, unter Beachtung von Beschränkungen oder Nebenbedingungen in Form linearer Ungleichungen oder Gleichungen.

In diesem und dem nächsten Kapitel werden die Grundzüge der linearen Optimierung behandelt. Da dazu lineare Ungleichungen in mehreren Variablen und die grafische Darstellung von Ungleichungen in zwei Variablen benötigt werden, wird darauf zunächst eingegangen.

20.2 Lineare Ungleichungen mit mehreren Variablen

Bei linearen Ungleichungen mit mehreren Variablen⁴ treten, wie bei linearen Gleichungen, die Variablen nur in der ersten Potenz auf, und es kommen keine Produkte der Variablen vor.

D 20.2.1

Lineare Ungleichungen mit n Variablen

Eine Beziehung der Form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^n a_ix_i \leq b$$

oder

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq b \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^n a_ix_i \geq b$$

heißt lineare Ungleichung mit n Variablen.

Unter Verwendung der Vektoren $\mathbf{a}' = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ und $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ kann man auch schreiben: $\mathbf{a}'\mathbf{x} \leq b$ oder $\mathbf{a}'\mathbf{x} \geq b$.

Anstelle von $\leq$ bzw. $\geq$ kann auch $<$ oder $>$ gelten.

Das folgende Beispiel zeigt eine wirtschaftliche Anwendung von linearen Ungleichungen mit mehreren Variablen, wie sie auch bei der linearen Optimierung vorkommt.

⁴ Zu Ungleichungen mit einer Variablen vgl. Kapitel 10 von SCHWARZE, J.: Elementare Grundlagen der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, NWB Verlag.

B 20.2.2 Eine Unternehmung hat eine Maschine, die bei normaler Arbeitszeit 2.100 Minuten in der Woche für die Produktion zur Verfügung steht. Mit Hilfe der Maschine werden zwei Güter G_1 und G_2 produziert. Die Herstellung von einem Stück des Gutes G_1 auf der Maschine dauert 6 Minuten und von einem Stück des Gutes G_2 10 Minuten. Die wöchentlichen Produktionsmengen der beiden Güter seien mit x_1 und x_2 bezeichnet.

Produziert die Unternehmung nur das Gut G_1 , so können offensichtlich in einer Woche maximal 350 Stück ($2.100 : 6$) hergestellt werden. Es gilt dann $0 \leq x_1 \leq 350$. Der Bereich der möglichen Produktionsmengen kann also durch eine doppelte Ungleichung beschrieben werden. Wird nur das zweite Gut hergestellt, so folgt $0 \leq x_2 \leq 210$.

Werden beide Güter produziert, so wird die Maschine $6x_1$ Minuten in der Woche für die Produktion des ersten Gutes und $10x_2$ Minuten in der Woche für die Produktion des zweiten Gutes beansprucht. Insgesamt wird also die Maschine in $6x_1 + 10x_2$ Minuten für die Produktion genutzt. Diese produktive Zeit kann höchstens 2.100 Minuten betragen, d. h. es gilt: $6x_1 + 10x_2 \leq 2.100$.

Lösungen dieser Ungleichung sind alle Wertepaare (x_1, x_2) , für die die Ungleichung erfüllt ist. Also beispielsweise $x_1 = 10$, $x_2 = 200$, da $6 \cdot 10 + 10 \cdot 200 \leq 2.100$ ist. Diese einfache Ungleichung mit zwei Variablen (x_1 und x_2) drückt die Beschränkung der Produktionsmengen durch die begrenzte Maschinenzeit aus. Man spricht von einer so genannten Kapazitätsbedingung oder Kapazitätsbeschränkung.

Sollen alle zulässigen bzw. möglichen Mengenkombinationen beschrieben werden, dann sind dazu noch die beiden Ungleichungen $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ erforderlich. Diese Ungleichungen, die angeben, dass beide Variablen nicht negativ werden können, bezeichnet man als **Nichtnegativitätsbedingungen**. Alle Kombinationen von Produktionsmengen (x_1, x_2) , die die Ungleichungen $6x_1 + 10x_2 \leq 2.100$, $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ erfüllen, können von der Unternehmung in einer Woche produziert werden.

Ungleichungen mit zwei Variablen können grafisch veranschaulicht werden. Während sich bei einer Ungleichung mit einer Variablen ein Intervall auf der Zahlengeraden ergibt⁵, beschreiben lineare Ungleichungen mit zwei Variablen einen durch eine Gerade begrenzten Teil der Ebene.

R 20.2.3

Lösungsmenge einer Ungleichung mit 2 Variablen

Die Lösungsmenge der Ungleichung $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ ist grafisch in einem rechtwinkligen (x_1, x_2) -Koordinatensystem ein durch die Gerade $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ begrenzter Teil der Ebene.

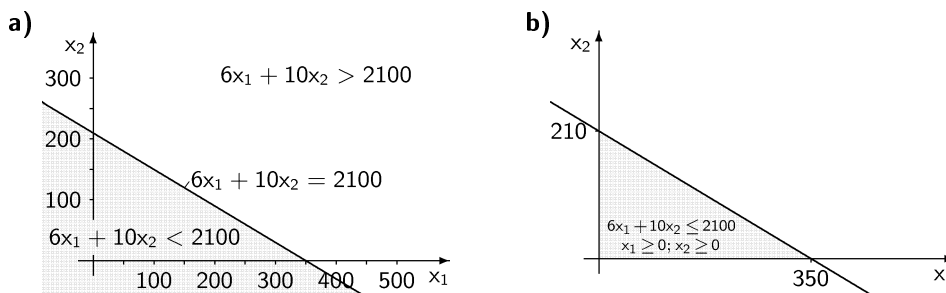
Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einer so genannten **Halbebene**. Jede Gerade teilt die Ebene in zwei Halbebenen.

Um festzustellen, welches Zeichen ($\leq$ oder $\geq$) in einer der beiden durch die (Begrenzungs-) Gerade erhaltenen Halbebene gilt, wähle man einen beliebigen Punkt aus der Halbebene und prüfe, welches Zeichen für diesen Punkt gilt. Für alle anderen Punkte dieser Halbebene gilt dann dasselbe Zeichen.

⁵ Vgl. SCHWARZE, J.: Elementare Grundlagen der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, NWB Verlag, F 10.5.2 und F 10.5.3.

B 20.2.4 Um die möglichen Produktionsmengen aus B 20.2.2 zu zeichnen, ist zunächst die zu $6x_1 + 10x_2 = 2.100$ gehörige Gerade darzustellen. Das geschieht am einfachsten dadurch, dass man die Achsenschnittpunkte bestimmt, diese verbindet und die Verbindungslinie verlängert. Für $x_1 = 0$ ergibt sich $x_2 = 210$ und für $x_2 = 0$ erhält man $x_1 = 350$ (vgl. F 20.2.5a)). Der schraffierte Bereich ist dann der durch die Ungleichung $6x_1 + 10x_2 \leq 2.100$ beschriebene.

Um nun alle zulässigen Kombinationen der Produktionsmengen grafisch darzustellen, müssen noch die beiden Nichtnegativitätsbedingungen $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ berücksichtigt werden. Zu $x_1 \geq 0$ gehört die x_2 -Achse und die Fläche rechts davon und zu $x_2 \geq 0$ die x_1 -Achse und die Fläche darüber. Für die möglichen Produktmengenkombinationen ergibt sich dann die in F 20.2.5b) schraffierte Fläche.



F 20.2.5

Aufgaben

Ü 20.2.1 Eine Unternehmung produziert zwei Güter in den Mengen x_1 und x_2 . Die Herstellung erfolgt so, dass jedes Stück auf den beiden Maschinen A und B bearbeitet wird. Für die Bearbeitungszeiten je Stück ergeben sich folgende Werte:

		1. Gut	2. Gut
Bearbeitungszeit auf der Maschine	A	2 Minuten	5 Minuten
	B	6 Minuten	3 Minuten

Die wöchentliche Arbeitszeit beträgt 40 Stunden oder 2.400 Minuten. Beschreiben Sie die in einer Woche produzierbaren Mengen durch Ungleichungen. Stellen Sie die produzierbaren Mengen grafisch dar.

Ü 20.2.2 Gegeben ist folgendes System von Ungleichungen in zwei Variablen:

(I) $x_1 + x_2 \geq 9$ (II) $-x_1 + x_2 \leq 3$ (III) $-2x_1 + x_2 \geq -8$ (IV) $2x_1 + x_2 \leq 20$

Stellen Sie die Menge der Kombinationen von x_1 und x_2 , die das System der Ungleichungen erfüllen, grafisch dar.

Ü 20.2.3 Ein Geflügelfarmer verfüttert zwei Sorten von Futter. Jedes kg der Sorte A enthält 0,1 kg Eiweiß, 0,2 kg Fett und 0,1 kg Kohlehydrate. In Sorte B sind 0,2 kg Eiweiß, 0,1 kg Fett und 0,6 kg Kohlehydrate enthalten. Der Rest jeder Sorte besteht aus unverdaulichen Ballaststoffen. Der Farmer möchte nun aus den Futtermitteln A und B eine Mischung C herstellen, die **insgesamt mindestens** 1 kg Eiweiß, 0,8 kg Fett und 1,8 kg Kohlehydrate enthält.

Beschreiben Sie die zur Mischung eines Futters mit den verlangten Mindestmengen an Eiweiß, Fett und Kohlehydraten zulässigen Mengen der Futtermittel A und B durch ein System von Ungleichungen. Stellen Sie die zulässigen Mengenkombinationen der beiden Futtermittel grafisch dar.

Ü 20.2.4 In einer Möbelfabrik werden in einem gegebenen Zeitraum Tische und Stühle in den Mengen x_1 und x_2 hergestellt. Beide Produkte werden auf Sägemaschinen, Hobelmaschinen und anschließend in der Lackiererei bearbeitet. Die Kapazitäten der Maschinen und der Lackiererei werden durch die Zeit, in der sie während des betrachteten Zeitraums zur Verfügung stehen, angegeben. Die verfügbaren Kapazitäten sowie die Bearbeitungszeiten je Stuhl bzw. Tisch auf den beiden Maschinen und in der Lackiererei sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	Bearbeitungszeit für		verfügbare Kapazität
	1 Stuhl	1 Tisch	
Sägemaschinen	2 Std.	5 Std.	1.000 Std.
Hobelmaschinen	5 Std.	4 Std.	1.000 Std.
Lackiererei	2 Std.	1 Std.	320 Std.

- Beschreiben Sie alle Mengenkombinationen von Tischen und Stühlen, die von der Möbelfabrik innerhalb des Zeitraumes hergestellt werden können, durch ein System von Ungleichungen.
- Stellen Sie den Bereich der realisierbaren Mengenkombinationen grafisch dar.
- Gibt es eine (oder mehrere) Mengenkombination(en), bei der alle Kapazitäten voll ausgelastet sind?
- Die Bedingungen der Aufgabe lassen eine gleichzeitige, vollständige Auslastung aller Kapazitäten nicht zu. Durch welche Maßnahme kann man eine Vollausslastung aller Kapazitäten herbeiführen?

20.3 Grafische Einführung in die lineare Optimierung

Es wird ein Betrieb betrachtet, in dem die Produkte X_1 und X_2 während des Fertigungsprozesses die Maschinentypen A, B und C passieren müssen. Die wöchentliche Arbeitszeit des Betriebs beträgt 40 Stunden. Für die Bearbeitung einer Produkteinheit auf den Maschinen ergeben sich die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werte, aus der auch die Anzahl der vorhandenen Maschinen jedes Typs zu entnehmen ist:

		Produkt		Anzahl der vorhandenen Maschinen	Maschinenkapazität
		X_1	X_2		
Maschinentyp	A	2 h/Stück	1 h/Stück	5	200 h/Woche
	B	1 h/Stück	1 h/Stück	3	120 h/Woche
	C	1 h/Stück	3 h/Stück	6	240 h/Woche

Den Angaben der Tabelle ist zu entnehmen, dass bei Volllastung der Maschinen A, B bzw. C in einer Woche auf den einzelnen Maschinen z. B. die folgenden Mengenkombinationen hergestellt werden können:

auf A		auf B		auf C	
Stück X_1	Stück X_2	Stück X_1	Stück X_2	Stück X_1	Stück X_2
100	0	120	0	240	0
80	40	100	20	180	20
50	100	60	60	120	40
20	160	20	100	60	60
0	200	0	120	0	80

Natürlich ist es auch möglich, solche Mengenkombinationen zu bearbeiten, die unterhalb der Kapazitätsgrenze liegen.

Die Angaben in den Tabellen gelten für die isolierte Betrachtung eines Maschinentyps. Für den Gesamtbetrieb kommen jedoch nur solche Mengenkombinationen in Frage, die gleichzeitig auf allen drei Maschinen durchgeführt werden können. Dabei wird unterstellt, dass keine halbfertigen Fabrikate gelagert werden müssen, sondern dass alle Produkte auf allen 3 Maschinen vollständig bearbeitet werden.

Die in einer Woche gleichzeitig realisierbaren Mengenkombinationen sollen grafisch dargestellt werden. Dazu werden die wöchentlichen Stückzahlen von X_1 mit x_1 und die von X_2 mit x_2 bezeichnet.

Maschinentyp A wird in einer Woche $2x_1$ Stunden für die Produktion des ersten und x_2 Stunden für die Produktion des zweiten Gutes eingesetzt. Insgesamt wird sie dann $2x_1 + x_2$ Stunden in Anspruch genommen. Die bei Volllastung auf Maschinentyp A möglichen Produktionsmengenkominationen werden dann durch die folgende Gleichung gegeben:

G 20.3.1 $2x_1 + x_2 = 200$

Dabei sind nur solche Werte für x_1 und x_2 zugelassen, die größer als 0 sind, d. h. es muss gelten $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$.

Maschinentyp A muss nun aber nicht voll ausgelastet sein, sondern es sind auch Produktionsmengenkominationen (x_1, x_2) zulässig, deren benötigte Maschinenzeit unter der verfügbaren Zeit von 200 Stunden liegt, wobei die Nichtnegativitätsbedingungen $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ zu beachten sind. Man erhält somit alle zulässigen Kombinationen (x_1, x_2) für Maschinentyp A durch die Ungleichungen:

G 20.3.2 $2x_1 + x_2 \leq 200, x_1 \geq 0 \text{ und } x_2 \geq 0$

In F 20.3.3 sind in einem (x_1, x_2) -Koordinatensystem die zulässigen Mengenkombinationen grafisch dargestellt. Die maximal auf Maschinentyp A in einer Woche herstellbaren Mengen liegen auf der Strecke $\overline{P_1P_2}$, die der Gleichung 20.3.1 entspricht. So bedeutet z. B. der Punkt Q_1 auf dieser Strecke mit den Koordinaten $x_1 = 20$ und $x_2 = 160$ die Bearbeitung von 20 Stück des Produktes X_1 und 160 Stück des Produktes X_2 .