Springer-Lehrbuch Masterclass

Angewandte Funktionalanalysis

Funktionalanalysis, Sobolev-Räume und elliptische Differentialgleichungen

Bearbeitet von
Manfred Dobrowolski

2nd ed. 2010. Taschenbuch. xii, 284 S. Paperback
ISBN 978 3 642 15268 9
Format (B x L): 15,5 x 23,5 cm
Gewicht: 450 g

1

Topologische und metrische Räume

1.1 Topologische Räume und stetige Abbildungen

In der Analysis des $\mathbb{R}^n$ kann man mit dem Begriff der offenen Menge die Konvergenz von Folgen definieren: Eine Folge im $\mathbb{R}^n$ *konvergiert* gegen ein $x \in \mathbb{R}^n$, wenn in jeder offenen Menge, die x enthält, fast alle Folgenglieder liegen. Durch die topologischen Räume werden diese Strukturen auf allgemeine Mengen übertragen.

Definition 1.1. *Eine* Topologie τ *auf einer Menge* X *ist ein System von Teilmengen von* X*, die* offene Mengen *genannt werden, mit:*

(a) $\emptyset$ *und* X *sind offen.*

(b) *Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.*

(c) *Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.*

Das Paar (X, τ) *ist dann ein* topologischer Raum*.*

Ein topologischer Raum heißt Hausdorff-Raum*, wenn das folgende* Trennungsaxiom *erfüllt ist:*

(T) *Zu allen* $x, y \in X$ *mit* $x \neq y$ *gibt es offene Mengen* A, B *mit* $x \in A$*,* $y \in B$ *und* $A \cap B = \emptyset$*.*

Wenn τ_1, τ_2 *Topologien auf der Menge* X *sind mit* $\tau_1 \subset \tau_2$*, so heißt* τ_1 gröber *als* τ_2 *und entsprechend* τ_2 feiner *als* τ_1*.*

Für eine beliebige Menge ist die Potenzmenge von X eine Topologie auf X, die *diskrete Topologie* genannt wird. Sie macht (X, τ) zu einem Hausdorff-Raum und ist die feinste überhaupt mögliche Topologie. Dagegen besteht die gröbste Topologie einer Menge X nur aus der leeren Menge und dem ganzen Raum. Wenn X aus mehr als einem Element besteht, so ist für diese Topologie das Trennungsaxiom nicht erfüllt.

Definition 1.2. *Sei* (X, τ) *ein topologischer Raum und* $A \subset X$ *eine beliebige Teilmenge. Dann ist* A *zusammen mit den Mengen* $\{M \cap A : M \in \tau\}$ *ein topologischer Raum. Diese Topologie heißt* Relativtopologie auf A*.*

M. Dobrowolski, *Angewandte Funktionalanalysis*, Springer-Lehrbuch Masterclass, 2nd ed.,
DOI 10.1007/978-3-642-15269-6_1,

Wenn A nicht selber offen in X ist, so sind die offenen Mengen der Relativtopologie nicht notwendig offen in X.

Analog zu den Begriffen im $\mathbb{R}^n$ definiert man für Teilmengen A eines topologischen Raums X:

A ist abgeschlossen $\Leftrightarrow A^c$ ist offen, $\quad (A^c = X \setminus A =$ Komplement von $A)$

$\operatorname{int} A =$ Vereinigung aller in A enthaltenen offenen Mengen,

$\overline{A} =$ Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die A enthalten.

$\operatorname{int} A$ heißt das *Innere* von A, $\overline{A}$ der *Abschluß* von A. Nach Definition ist $\operatorname{int} A$ offen. Da die abgeschlossenen Mengen durch Komplementbildung definiert sind, gilt: Der beliebige Durchschnitt und die endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen, insbesondere ist $\overline{A}$ abgeschlossen.

In der diskreten Topologie sind alle Mengen A offen und abgeschlossen und es gilt $A = \operatorname{int} A = \overline{A}$. In der gröbsten Topologie sind nur die leere Menge und der ganze Raum offen und abgeschlossen.

Definition 1.3. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Menge $U \subset X$ heißt* Umgebung *eines $x \in X$, wenn U offen ist mit $x \in U$. x heißt* innerer Punkt *einer Menge $A \subset X$, wenn eine Umgebung von x in A enthalten ist. $x \in X$ heißt* Berührpunkt *von $A \subset X$, wenn in jeder Umgebung von x mindestens ein Punkt von A liegt. $x \in X$ heißt* Randpunkt *von $A \subset X$, wenn in jeder Umgebung von X mindestens ein Punkt von A und mindestens ein Punkt von A^c liegt. Mit ∂A wird die Menge der Randpunkte von A bezeichnet.*

Mit diesen Definitionen lassen sich offene und abgeschlossene Mengen auch anders charakterisieren:

Lemma 1.4. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann gilt:*

(a) *A ist offen $\Leftrightarrow$ Jedes $x \in A$ ist innerer Punkt von A,*

(b) *A ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Jeder Berührpunkt von A gehört zu A,*

(c) $\operatorname{int} A =$ *Menge der inneren Punkte von A,*

(d) $\overline{A} =$ *Menge der Berührpunkte von A.*

Beweis. (a): Die Richtung „$\Leftarrow$" gilt wegen $A = \cup_{x \in A} U(x)$, wobei $U(x)$ eine ganz in A liegende Umgebung von x ist. Wenn umgekehrt A offen ist, so ist A auch eine ganz in A enthaltene Umgebung eines jeden $x \in A$.

(b) folgt aus (a) durch Betrachtung des Komplements. (c) und (d) folgen direkt aus (a) bzw. (b). □

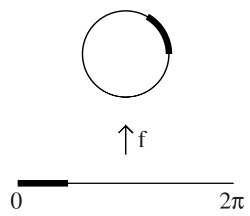
Definition 1.5. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt* konvergent *gegen ein $x \in X$, wenn in jeder Umgebung von x alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen. In diesem Fall schreiben wir $\lim_{k \to \infty} x_k = x$ oder $x_k \to x$.*

Offenbar ist der Grenzwert nur in einem Hausdorff-Raum immer eindeutig, sofern er existiert. Konvergenz läßt sich um so leichter erzwingen, je weniger offene Mengen es gibt. Wenn eine Menge X mit der Topologie $\{\emptyset, X\}$ versehen wird, so ist jede Folge gegen jedes $x \in X$ konvergent. Im anderen Extrem, der diskreten Topologie, konvergieren nur die ab einem Index konstanten Folgen.

Definition 1.6. *Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt* stetig*, wenn die Urbilder offener Mengen offen sind. Die Abbildung heißt* offen*, wenn die Bilder offener Mengen offen sind.*

Auch hier wollen wir uns die Definition an einem Extremfall veranschaulichen. Wenn der Raum X mit der diskreten Topologie ausgestattet ist, so sind unabhängig von der Topologie in Y alle Abbildungen stetig. Der Leser mache sich klar, daß man die Stetigkeit einer Abbildung erzwingen kann, indem man genügend viele offene Mengen zur Topologie des Definitionsraums hinzufügt. Direkt aus der Definition beweist man den bekannten Satz, daß die Komposition stetiger Abbildungen zwischen topologischen Räumen wiederum stetig ist. Weiter folgt aus der Definition der Stetigkeit durch Komplementbildung, daß eine Abbildung genau dann stetig ist, wenn die Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.

Definition 1.7. *Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt* Homöomorphismus*, wenn sie bijektiv, stetig und die inverse Abbildung f^{-1} ebenfalls stetig ist. Wenn zwischen topologischen Räumen eine solche Abbildung existiert, so heißen die Räume* homöomorph.



Ein Homöomorphismus ist also bijektiv, stetig und offen. Homöomorphe topologische Räume können miteinander identifiziert werden, weil beide Räume die gleiche topologische Struktur besitzen.

In der Analysis einer Veränderlicher gilt der Satz, daß die inverse Funktion einer stetigen und bijektiven Funktion ebenfalls stetig ist. In allgemeinen topologischen Räumen ist das nicht immer richtig.

Beispiel 1.8. Sei X das Intervall $[0, 2\pi)$ und Y der Einheitskreis des $\mathbb{R}^2$, beide Räume seien mit der Relativtopologie des $\mathbb{R}^1$ bzw. $\mathbb{R}^2$ versehen. Die Abbildung $f = (f_1, f_2)^T$ mit

$$f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \sin x,$$

ist bijektiv und stetig, die Inverse ist dagegen unstetig, denn die relativ offene Menge $[0, a)$ wird nicht auf eine offene Menge abgebildet.

Viele Begriffe der Analysis im $\mathbb{R}^n$ lassen sich sowohl mit offenen Mengen als auch mit Hilfe von Folgen unter Verwendung des Konvergenzbegriffs definieren. So gibt es neben dem oben eingeführten Begriff der Stetigkeit auch die Folgenstetigkeit einer Abbildung. Ein weiteres Beispiel im $\mathbb{R}^n$ ist die Charakterisierung des Abschlusses einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ als Menge aller Häufungspunkte von Folgen, die man aus Elementen von A bilden kann. In der mengentheoretischen Topologie ist man übereingekommen, als „richtige" Definition immer diejenige zu nehmen, die ohne den Folgenbegriff auskommt, und damit nur unter Verwendung von offenen und abgeschlossenen Mengen formuliert werden kann. Wir wollen uns nun der Frage zuwenden, wann man eine solche rein topologische Definition auch anders mit Hilfe von Folgen ausdrücken kann und führen daher eine weitere Strukturbedingung an den topologischen Raum ein.

Definition 1.9. *Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Ein System von offenen Teilmengen $\{U_i\}_{i \in I}$ heißt* Umgebungsbasis *von x, wenn jede Umgebung von x eine dieser Mengen U_i enthält. Ein topologischer Raum erfüllt das* erste Abzählbarkeitsaxiom, *wenn jedes Element von X eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.*

Die offenen Kugeln mit Radius $1/k$, $k \in \mathbb{N}$, und Mittelpunkt x bilden eine Umgebungsbasis für die Standardtopologie des $\mathbb{R}^n$, der damit das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Wie in der Analysis des $\mathbb{R}^n$ üblich, nennen wir eine Abbildung f zwischen den topologischen Räumen X und Y *folgenstetig*, wenn für alle $x \in X$ und alle Folgen in X mit $x_k \to x$ gilt $f(x_k) \to f(x)$.

Satz 1.10. *Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt:*

(a) *f ist stetig $\Rightarrow$ f ist folgenstetig.*

(b) *Erfüllt X das erste Abzählbarkeitsaxiom, so ist die Stetigkeit von f mit der Folgenstetigkeit äquivalent.*

Beweis. (a) Sei $x_k \to x$ in X, V eine Umgebung von $f(x)$ und $U = f^{-1}(V)$. Da f stetig ist, ist U offen und damit Umgebung von x. Nach Definition der Konvergenz liegen fast alle Folgenglieder in U. Also befinden sich fast alle Folgenglieder auch in V und die $f(x_k)$ konvergieren gegen $f(x)$.

(b) Angenommen, f wäre folgenstetig, aber nicht stetig. Dann ist für eine offene Menge $V \subset Y$ die Urbildmenge $U = f^{-1}(V)$ nicht offen. Nach Lemma 1.4(a) gibt es daher ein $x \in U$, das keine Umgebung in U besitzt. Sei $\{U_k\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x. Aus jedem $\cap_{i=1}^k U_i$ wählen wir ein beliebiges x_k mit $x_k \notin U$ aus. Dies ist möglich, denn andernfalls wäre $\cap_{i=1}^k U_i \subset U$ und $\cap_{i=1}^k U_i$ wäre Umgebung von x in U. Nun gilt $x_k \to x$, aber $f(x_k) \notin V$. Damit ist f nicht folgenstetig. □

Lemma 1.11. *Wenn der topologische Raum X das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, so gibt es zu jedem Berührpunkt einer Menge in X eine Folge in dieser Menge, die gegen diesen Berührpunkt konvergiert. Insbesondere stimmt der Abschluß einer Menge mit den Grenzwerten der konvergenten Folgen in dieser Menge überein.*

Beweis. Ähnlich wie im Beweis von Satz 1.10 betrachten wir die Schnitte $\cap_{i=1}^k U_i$ der Umgebungsbasis U_i des Berührpunktes und wählen für jedes k ein Element der Menge in diesem Schnitt aus. Auf diese Art gewinnen wir eine Folge, die gegen den Berührpunkt konvergiert. □

Im allgemeinen ist eine Topologie auf einer Menge nicht direkt vorgegeben, sondern wird durch ein einfaches Konstruktionsverfahren erzeugt, das auch bei der Definition der Standardtopologie des $\mathbb{R}^n$ verwendet wird.

Definition 1.12. *Sei X eine beliebige Menge. Ein nichtleeres System von Teilmengen $\{U_i(x)\}_{i\in I}$ heißt* lokale Basis *von $x \in X$, wenn $x \in U_i(x)$ und es zu jedem $i, j \in I$ ein $k \in I$ gibt mit $U_k(x) \subset U_i(x) \cap U_j(x)$.*

Auf der Menge X sei für jedes $x \in X$ eine lokale Basis vorgegeben. Für eine Teilmenge A von X heißt $x \in A$ *innerer Punkt*, wenn es ein Element der lokalen Basis von x gibt mit $U_i(x) \subset A$. A heißt *offen*, wenn alle Punkte von A innere Punkte sind. Wegen seiner Wichtigkeit formulieren wir das an sich selbstverständliche Ergebnis dieser Konstruktion als Satz.

Satz 1.13. *Die so definierten offenen Mengen bilden eine Topologie auf X. Sind alle $U_i(x)$ in dieser Topologie offen, so bilden sie eine Umgebungsbasis von x.*

Beweis. Es ist nur zu bemerken, daß es zu jeder endlichen Indexmenge $I_0 \subset I$ ein $k \in I$ gibt mit $U_k(x) \subset \cap_{i\in I_0} U_i(x)$. Dies stellt sicher, daß ein endlicher Durchschnitt von offenen Mengen offen ist. □

Anmerkung 1.14. Topologien lassen sich noch einfacher konstruieren, indem man ein Teilmengensystem $\{A_i\}_{i\in I}$ als offen auszeichnet. Erklärt man die beliebige Vereinigung von endlichen Durchschnitten dieser Mengen als offen, so bilden diese offenen Mengen zusammen mit X und der leeren Menge eine Topologie auf X, die die von $\{A_i\}$ *erzeugte Topologie* genannt wird. Sie ist gleichzeitig die gröbste Topologie, in der alle A_i offen sind. In diesem Fall heißt die Familie $\{A_i\}$ *Subbasis*, die endlichen Durchschnitte der A_i heißen *Basis* der Topologie, weil jede offene Menge als Vereinigung von Basiselementen dargestellt werden kann.

Sind in Satz 1.13 alle lokalen Basiselemente offen, was in unseren Anwendungen immer der Fall ist, so bilden sie eine Basis der Topologie.

Das zweite Abzählbarkeitsaxiom

Offenbar können die Begriffe Basis und Subbasis auf allgemeine topologische Räume ausgedehnt werden. Dies gibt Anlaß zu einer neuen Definition: Ein topologischer Raum erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, wenn seine Topologie durch eine abzählbare Basis (oder Subbasis) erzeugt werden kann. Das zweite Abzählbarkeitsaxiom impliziert das erste. Der $\mathbb{R}^n$ mit der Standardtopologie erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Als Basis kann man die offenen Intervalle mit rationalen Endpunkten nehmen.

Aufgabe: Zeigen Sie, daß aus dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom die Separabilität des Raums folgt.

Definition 1.15. *Eine Teilmenge A eines topologischen Raums X heißt* dicht*, wenn $\overline{A} = X$. Ein topologischer Raum heißt* separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.*

Der $\mathbb{R}^n$ mit der Standardtopologie ist separabel, weil die Punkte mit rationalen Koordinaten dicht liegen. Man kann dies wegen Lemma 1.11 mit Hilfe des Folgenabschlusses beweisen: Jeder Punkt des $\mathbb{R}^n$ läßt sich durch Punkte mit rationalen Koordinaten beliebig genau approximieren.

Definition 1.16. *Seien* (X, τ_X), (Y, τ_Y) *topologische Räume. Die* Produkttopologie *auf* $X \times Y$ *ist die gröbste Topologie, die alle Mengen der Form* $A \times B$ *mit* $A \in \tau_X$, $B \in \tau_Y$, *umfaßt.*

Sind $\{U_i(x)\}_{i \in I}$, $\{V_j(y)\}_{j \in J}$ Umgebungsbasen der Punkte $x \in X$ und $y \in Y$, so ist $\{U_i \times V_j\}_{i \in I,\, j \in J}$ eine Umgebungsbasis von (x, y) bezüglich der Produkttopologie. Gilt in X und Y das erste Abzählbarkeitsaxiom, so gilt es auch in $X \times Y$. Konvergenz in $X \times Y$ bedeutet

$$(x_k, y_k) \to (x, y) \quad \Leftrightarrow \quad x_k \to x \text{ und } y_k \to y.$$

1.2 Metrische Räume

Mit der metrischen Struktur wird der aus dem $\mathbb{R}^n$ bekannte Abstandsbegriff abstrahiert. Wir können uns einen metrischen Raum als eine Punktmenge vorstellen, in der Entfernungen zwischen den Punkten definiert sind, die den folgenden plausiblen Bedingungen genügen.

Definition 1.17. *Sei* X *eine Menge. Eine Abbildung* $d : X \times X \to [0, \infty)$ *heißt* Metrik *auf* X, *wenn:*

(a) $d(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$,

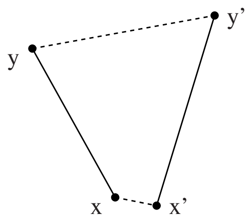
(b) $d(x, y) = d(y, x)$ *(Symmetrie),*

(c) $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$ *(Dreiecksungleichung).*

Das Paar (X, d) *heißt dann* metrischer Raum.

Aus der Definition der Metrik folgt die *Vierecksungleichung*

$$|d(x, y) - d(x', y')| \le d(x, x') + d(y, y'), \tag{1.1}$$



denn die Dreiecksungleichung liefert

$$d(x, y) \le d(x, x') + d(x', y') + d(y, y'),$$

$$d(x', y') \le d(x, x') + d(x, y) + d(y, y'),$$

womit (1.1) gezeigt ist. Analog beweist man die *umgekehrte Dreiecksungleichung*

$$|d(x, y) - d(y, z)| \le d(x, z).$$

Mit der Metrik lassen sich auch die Entfernung zwischen zwei Teilmengen von X angeben, nämlich

$$\operatorname{dist}(A,B) = \inf_{x\in A,\, y\in B} d(x,y).$$

Beispiele 1.18 (i) Der $\mathbb{K}^n$ mit $d(x,y) = |x-y|$ ist metrischer Raum.

(ii) Auf einer beliebigen Menge X läßt sich die *diskrete Metrik* definieren durch $d(x,y) = 1$ für $x \neq y$ und $d(x,x) = 0$.

(iii) Jede Teilmenge eines metrischen Raums ist mit der gleichen Abstandsfunktion selber ein metrischer Raum.

(iv) Für einen metrischen Raum (X,d) setze

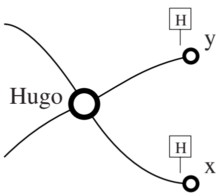
$$\tilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}.$$

Dann ist auch $(X,\tilde{d})$ metrischer Raum. Die Dreiecksungleichung erhält man mit der Funktion $f(t) = t/(1+t)$, $t \geq 0$, die monoton wachsend ist, und für die $f(b+c) \leq f(b) + f(c)$ für alle $b,c \geq 0$ gilt. Für $a \leq b+c$ erhalten wir

$$f(a) \leq f(b+c) \leq f(b) + f(c).$$

Mit $a = d(x,z)$, $b = d(x,y)$, $c = d(y,z)$ folgt die behauptete Dreiecksungleichung.

(v) (*Erlanger Metrik*) Um in Erlangen mit dem Bus von einem Ortsteil in den benachbarten zu kommen (Fußweg 5'), muß man zuerst zum zentralen Busbahnhof fahren, dort umsteigen und dann im wesentlichen die gleiche Strecke wieder zurückfahren. Diese Metrik, die nicht nur bei den Mathematikern, sondern auch bei den Benutzern des öffentlichen Nahverkehrs immer wieder neu auf große Begeisterung stößt, kann folgendermaßen abstrakt definiert werden: Grundraum ist der $\mathbb{R}^2$ mit dem Ursprung als ausgezeichneten Punkt, die Metrik ist



$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{wenn } x = \lambda y \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}, \\ |x| + |y| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Beweis der Dreiecksungleichung macht einige Fallunterscheidungen notwendig, ist ansonsten trivial. Ich habe übrigens diese Metrik unter dem Namen „Französische Eisenbahn Metrik” kennengelernt (fährt immer über Paris), in einem amerikanischen Buch wird sie „Washington D.C. Metrik” genannt. Die Probleme sind also überall die gleichen.

Wir definieren die Kugeln

$$B_R(x) = \{y \in X : d(x,y) < R\}, \quad \tilde{B}_R(x) = \{y \in X : d(x,y) \leq R\},$$

und machen den metrischen Raum zu einem Hausdorff-Raum, indem wir $B_{1/k}(x)$ zur lokalen Basis von $x \in X$ erklären (siehe Satz 1.13), insbesondere:

$$A \subset X \textit{ ist offen } \Leftrightarrow \textit{ Zu jedem } x \in A \textit{ gibt es ein } k > 0, \textit{ so daß } B_{1/k} \subset A.$$

Wie aus der Dreiecksungleichung sofort folgt, ist $B_{1/k}(x)$ selber offen. Das Mengensystem $\{B_{1/k}(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist daher eine Umgebungsbasis des Punktes x, womit die so definierte Topologie das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Damit ist die Stetigkeit einer Abbidung zwischen metrischen Räumen mit der Folgenstetigkeit äquivalent (siehe Lemma 1.10). Konvergenz einer Folge $x_k \to x$ bedeutet, daß in jeder Umgebung von x fast alle Folgenglieder liegen müssen, also:

$$\textit{Zu jedem } \varepsilon > 0 \textit{ gibt es ein } K \in \mathbb{N}, \textit{ so daß } d(x_k, x) < \varepsilon \textit{ für alle } k \geq K.$$

Im Gegensatz zum $\mathbb{R}^n$ gilt nicht immer $\overline{B_R(x)} = \tilde{B}_R$. Für die diskrete Metrik aus Beispiel 1.18(ii), deren induzierte Topologie gerade die diskrete Topologie ist, erhalten wir $\overline{B_1(x)} = \{x\}$ und $\tilde{B}_1(x) = X$.

Die Metrik eines metrischen Raums ist folgenstetig, denn wenn $x_k \to x$ und $y_k \to y$, so folgt aus der Vierecksungleichung (1.1)

$$|d(x,y) - d(x_k,y_k)| \leq d(x,x_k) + d(y,y_k) < 2\varepsilon,$$

also $d(x_k,y_k) \to d(x,y)$. Mit dem ersten Abzählbarkeitsaxiom auf $X \times X$ (vergleiche Definition 1.16) ist die Abstandsfunktion auch stetig.

Analog zur Analysis des $\mathbb{R}^n$ definieren wir:

Definition 1.19. *Eine Folge* (x_k) *im metrischen Raum* X *heißt* Cauchy-Folge, *wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $K \in \mathbb{N}$ *gibt mit*

$$d(x_k, x_l) < \varepsilon \quad \textit{für alle } k, l \geq K.$$

X *heißt* vollständig, *wenn jede Cauchy-Folge gegen ein* $x \in X$ *konvergiert.*

Jede konvergente Folge ist Cauchy-Folge, denn aus $d(x_k,x) < \varepsilon$, $d(x_l,x) < \varepsilon$ für alle $k,l \geq K$ folgt mit der Dreiecksungleichung $d(x_k,x_l) < 2\varepsilon$. Weiter ist jede Cauchy-Folge *beschränkt*, also für ein $x \in X$ in einer Kugel $B_R(x)$ enthalten.

Lemma 1.20. *Sei* X *ein vollständiger metrischer Raum und* $A \subset X$. *Dann gilt:*

$$A \textit{ ist vollständig } \Leftrightarrow A \textit{ ist abgeschlossen.}$$

Beweis. Sei A abgeschlossene Teilmenge des vollständigen metrischen Raums X. Eine Cauchy-Folge (x_k) in A hat einen Grenzwert $x \in X$. x ist Berührpunkt von A und gehört nach Lemma 1.4 ebenfalls zu A. Wenn umgekehrt A nicht abgeschlossen ist, so gibt es einen Berührpunkt von A, der nicht zu A gehört. Nach Lemma 1.11 existiert eine Folge in A, die gegen diesen Berührpunkt konvergiert. Da eine konvergente Folge auch eine Cauchy-Folge ist, ist die Behauptung gezeigt. □

Definition 1.21. *Seien* $(X, d_x), (Y, d_y)$ *metrische Räume. Eine Abbildung* $T : X \to Y$ *heißt* Isometrie, *wenn für alle* $x, x' \in X$ *gilt*

$$d_x(x, x') = d_y(T(x), T(x')).$$

Zwei metrische Räume heißen isometrisch, *wenn es eine bijektive Isometrie zwischen ihnen gibt.*

Eine Isometrie ist injektiv und stetig. Die auf dem Bildbereich definierte Umkehrabbildung einer Isometrie ist ebenfalls eine Isometrie. Daher sind isometrische Räume als topologische Räume homöomorph und besitzen überdies die gleiche metrische Struktur, können also miteinander identifiziert werden.

In der elementaren Analysis konstruiert man die reellen aus den rationalen Zahlen, indem man Cauchy-Folgen in den rationalen Zahlen zu Äquivalenzklassen zusammenfaßt und diese mit einer reellen Zahl identifiziert. Die gleiche „Vervollständigung" kann bei allgemeinen metrischen Räumen durchgeführt werden. Wir können uns daher den Beweis des nächsten Satzes schenken.

Satz 1.22. *Sei* X *ein metrischer Raum. Dann gibt es einen vollständigen metrischen Raum* $\tilde{X}$ *und eine Isometrie* $i : X \to \tilde{X}$, *so daß* $i(X)$ *dicht in* $\tilde{X}$ *ist.*

1.3 Der Banachsche Fixpunktsatz

Für eine Abbildung $T : X \to X$ in einem metrischen Raum X möchten wir die *Fixpunktgleichung*

$$T\tilde{x} = \tilde{x}$$

mit Hilfe des einfachsten Verfahrens, der *sukzessiven Approximation*,

$$x_{k+1} = Tx_k, \quad x_0 \in X \text{ vorgegeben,} \tag{1.2}$$

lösen. Da schon einfachste Beispiele im $\mathbb{R}^1$ zeigen, daß dieses Verfahren auch bei Existenz eines Fixpunktes nicht konvergieren muß, benötigen wir einschränkende Voraussetzungen an die Abbildung T.

Definition 1.23. *Seien* (X, d_x) *und* (Y, d_y) *metrische Räume.* $T : X \to Y$ *heißt* lipschitzstetig, *wenn es ein* $L \in \mathbb{R}_+$ *gibt mit*

$$d_y(Tx, Tx') \leq L d_x(x, x') \quad \forall x, x' \in X.$$

L *heißt dann* Lipschitzkonstante. *Wenn* $X = Y$ *und* $L < 1$ *in dieser Abschätzung gewählt werden kann, so heißt* T Kontraktion.

Man weist aus der Definition nach, daß eine lipschitzstetige Abbildung stetig ist.

Satz 1.24 (Banachscher Fixpunktsatz). *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : X \to X$ eine Kontraktion. Dann besitzt T genau einen Fixpunkt $\tilde{x}$ und die Folge der sukzessiven Approximation (1.2) konvergiert für alle Startwerte $x_0 \in X$ gegen $\tilde{x}$. Weiter gilt die Fehlerabschätzung*

$$d(x_k, \tilde{x}) \le \frac{L^k}{1-L} d(x_0, Tx_0).$$

Beweis. Es gibt höchstens einen Fixpunkt, denn für Fixpunkte $\tilde{x}, \tilde{y} \in X$ folgt

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}) = d(T\tilde{x}, T\tilde{y}) \le L d(\tilde{x}, \tilde{y})$$

und damit $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ und $\tilde{x} = \tilde{y}$.

Aus (1.2) erhalten wir

$$d(x_k, x_{k+1}) = d(Tx_{k-1}, Tx_k) \le L d(x_{k-1}, x_k) \le L^k d(x_0, Tx_0)$$

und aus der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} d(x_k, x_{k+l}) &\le \sum_{i=0}^{l-1} d(x_{k+i}, x_{k+i+1}) \le \sum_{i=0}^{l-1} L^{k+i} d(x_0, Tx_0) \\ &= \frac{L^k - L^{k+l}}{1-L} d(x_0, Tx_0). \end{aligned}$$

Damit ist (x_k) Cauchy-Folge und konvergiert wegen der Vollständigkeit von X gegen ein $x \in X$. Aufgrund der Stetigkeit von T kann man in der Gleichung (1.2) zum Grenzwert $k \to \infty$ gehen und erhält $x = Tx$. Die Fehlerabschätzung ergibt sich aus der letzten Ungleichung für $l \to \infty$. □

Beispiel 1.25 (Gewöhnliche Differentialgleichungen). Für $f : [0, a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ vorgegeben.} \tag{1.3}$$

Unter einer Lösung dieses Problems verstehen wir eine Funktion $x \in C^1([0, a])^n$, für die die Differentialgleichung in jedem Punkt des Intervalls erfüllt ist. f sei stetig bezüglich t und lipschitzstetig bezüglich x, d.h.

$$|f(t, x) - f(t, y)| \le L|x - y| \quad \text{für alle } t \in [0, a] \text{ und } x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

Unter diesen Voraussetzungen ist das Anfangswertproblem zur Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

äquivalent: Jede Lösung $x \in C([0, a])^n$ dieser Integralgleichung ist aufgrund der Voraussetzungen an f stetig differenzierbar und eine Lösung der Anfangswertaufgabe (1.3). Wir zeigen nun, daß die Integralgleichung eine eindeutige Lösung im Raum $C([0, a])^n$ mit Metrik

$$d(x,y) = \max_{t\in[0,a]} |x(t) - y(t)|\,\mathrm{e}^{-2Lt}$$

besitzt. Die Metrik ist aus technischen Gründen etwas anders gewählt als die übliche Maximumsmetrik (vgl. Abschnitt 2.5), die beiden Metriken können jedoch mit einer Konstanten gegenseitig abgeschätzt werden und erzeugen daher den gleichen Konvergenzbegriff. Somit ist $C([0,a])^n$ auch mit der modifizierten Metrik ein vollständiger metrischer Raum. Der Integralgleichung ordnen wir den Operator

$$Tx(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

zu, der wegen

$$\begin{aligned}
|Tx(t) - Ty(t)|\,\mathrm{e}^{-2Lt} &= \left| \int_0^t \big\{ f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau)) \big\}\, d\tau \right| \mathrm{e}^{-2Lt} \\
&\le L \int_0^t |x(\tau) - y(\tau)|\,\mathrm{e}^{-2L\tau} e^{2L\tau}\, d\tau\,\mathrm{e}^{-2Lt} \\
&\le Ld(x,y) \int_0^t \mathrm{e}^{2L\tau}\, d\tau\,\mathrm{e}^{-2Lt} \le \frac{L}{2L} d(x,y)
\end{aligned}$$

eine Kontraktion auf $(C([0,a])^n, d)$ mit Konstante $\le \frac{1}{2}$ ist. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz besitzt das Anfangswertproblem genau eine Lösung. Wenn $f : [0,a] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ nur in einer offenen Menge Ω mit $x_0 \in \Omega$ einer Lipschitzbedingung genügt, so erhalten wir Existenz und Eindeutigkeit in einem Intervall $[0, a']$, siehe [Wal72, S. 51f.].

Wir wollen uns nun der Bedingung (1.4) zuwenden, also der Frage, wann eine Funktion einer Lipschitzbedingung genügt.

Lemma 1.26. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexes Gebiet. Dann ist jede in Ω stetig differenzierbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ mit beschränkter Ableitung $\sup_{x\in\Omega} |Df(x)| = K$ lipschitzstetig in Ω mit Lipschitzkonstante K,*

$$|f(x) - f(y)| \le K|x - y| \quad \forall x, y \in \Omega. \tag{1.5}$$

Beweis. Für $x, y \in \Omega$ liegt die Verbindungsstrecke ebenfalls in Ω. Aus $\frac{d}{dt} f(tx + (1-t)y) = Df(\ldots)(x - y)$ folgt

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 Df(tx + (1-t)y))(x - y)\, dt.$$

In dieser Gleichung setzen wir Beträge und schätzen $|Df|$ durch K ab. □

Eine differenzierbare Funktion mit unbeschränkter Ableitung ist nicht lipschitzstetig, wie z.B. die Funktion $f(x) = x^2$. Die Differentialgleichung $x' = x^2$ zeigt dann auch, daß das Resultat aus Beispiel 1.25 nicht zu verbessern ist, denn diese Gleichung hat mit $x(t) = 1/(c - t)$ Lösungen, die nicht für alle t existieren.

1.4 Kompakte Räume

In unzähligen Prüfungen spielt sich folgendes Gespräch ab:

P: Was ist eine kompakte Menge? S: Eine Menge ist kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. P: Ich hatte nach einer Definition gefragt, aber Sie antworten mit einem Satz. S: ???

Freilich hat S nicht genug in die Bücher geschaut, aber Kompaktheitsbeweise können geführt werden, ohne diesen Begriff überhaupt zu erwähnen. Als Beispiel für einen typischen Kompaktheitsschluß, wollen wir den Beweis des Satzes „Auf einer beschränkten und abgeschlossenen Menge nimmt eine stetige Funktion ihr Minimum an" kurz rekapitulieren.

Sei $d = \inf_{x\in K} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ das Infimum der stetigen Funktion f auf der beschränkten und abgeschlossenen Menge K. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine *Minimalfolge* in K, d.h. $f(x_k) \to d$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es ein $x \in K$ und eine Teilfolge (x_{k_l}) mit $x_{k_l} \to x$. Wegen der Stetigkeit von f folgt $f(x_{k_l}) \to f(x) = d$. Damit ist d endlich und das Minimum wird in x angenommen.

Eine Überprüfung des Beweises zeigt, daß eine stetige Funktion auf jeder Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ das Minimum annimmt, die die Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft hat: Jede Folge in K besitzt eine konvergente Teilfolge. Im $\mathbb{R}^n$ sind dies genau die beschränkten und abgeschlossenen Mengen. Allgemeiner definieren wir:

Definition 1.27. *Sei X ein topologischer Raum.*

(a) *$A \subset X$ heißt* kompakt*, wenn jedes System von offenen Mengen, das A überdeckt, eine endliche Teilüberdeckung enthält.*

(b) *$A \subset X$ heißt* folgenkompakt*, wenn jede Folge in A eine Teilfolge besitzt, die gegen ein $x \in A$ konvergiert.*

(c) *$A \subset X$ heißt* relativ kompakt*, wenn $\overline{A}$ kompakt ist.*

Diese Definitionen werden natürlich auch für den Fall $X = A$ angewendet. Der Satz, daß beschränkte und abgeschlossene Mengen kompakt sind, ist in allgemeinen topologischen Räumen nicht richtig.

Lemma 1.28. *Wenn der topologische Raum X das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, so folgt aus der Kompaktheit von X die Folgenkompaktheit von X.*

Beweis. Sei X kompakt. Wir zeigen durch indirekten Beweis, daß X folgenkompakt ist. Angenommen, es gibt eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die keine konvergente Teilfolge besitzt. Als erstes beweisen wir die Zwischenbehauptung:

Zu jedem $x \in X$ gibt es eine Umgebung $U(x)$, so daß $U(x)$ nur endlich viele Folgenglieder enthält.

Zum Beweis benötigen wir das erste Abzählbarkeitsaxiom. Zur Umgebungsbasis $\{U_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ des Punktes x definieren wir die Mengen $V_m = \cap_{i=1}^m U_i$. Wenn in jedem V_m unendlich viele Folgenglieder liegen, so können wir induktiv aus V_m

ein Folgenglied x_{k_m} auswählen mit $k_m > k_{m-1}$. Da jede Umgebung von x ein V_m enthält, enthält sie auch fast alle Glieder dieser Teilfolge, d.h. $x_{k_m} \to x$. Widerspruch!

Die auf diese Art gewonnenen $U(x)$ bilden eine offene Überdeckung, die wegen der Kompaktheit von X eine endliche Teilüberdeckung enthält. Nach Konstruktion liegen in dieser Teilüberdeckung nur endlich viele Folgenglieder, was einen Widerspruch bedeutet. □

Satz 1.29. *Die Teilmengen eines kompakten Hausdorff-Raums sind genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen sind.*

Beweis. $\Rightarrow$: Sei $A \subset X$ kompakt. Wir zeigen, daß A^c offen ist. Sei $z \in A^c$. Zu jedem $x \in A$ gibt es nach dem Trennungsaxiom offene Umgebungen V_x von z und U_x von x mit leerem Durchschnitt. Dann ist $\{U_x \cap A : x \in A\}$ eine offene Überdeckung von A bezüglich der Relativtopologie. Weil A kompakt ist, existieren $x_1, \ldots, x_k \in A$ mit $A \subset \cup_{i=1}^k U_{x_i}$. Dann ist $V = \cap_{i=1}^k V_{x_i}$ eine Umgebung von z mit $V \cap A = \emptyset$, also $V \subset A^c$.

$\Leftarrow$: Sei A abgeschlossen und $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von A. Dann ist das System $\{U_i\}_{i\in I}$, A^c eine offene Überdeckung des ganzen Raums X, das wegen der Kompaktheit von X eine endliche Teilübeckung von X und damit auch von A enthält. □

Im metrischen Raum lassen sich präzisere Aussagen machen. Wenn ein metrischer Raum folgenkompakt ist, so ist er vollständig. Um dies einzusehen, geben wir uns eine beliebige Cauchy-Folge (x_k) vor. Diese besitzt aufgrund der Folgenkompaktheit eine Teilfolge mit $x_{k_l} \to x$. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ existiert ein $l \in \mathbb{N}$ und ein $M \in \mathbb{N}$ mit $d(x_{k_l}, x) < \varepsilon$ und $d(x_{k_l}, x_m) < \varepsilon$ für alle $m \geq M$. Daher $d(x_m, x) < 2\varepsilon$ für alle $m \geq M$. Eine Cauchy-Folge ist bereits konvergent, wenn eine Teilfolge konvergent ist.

Definition 1.30. *Ein metrischer Raum X heißt* präkompakt, *wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele offene Kugeln vom Radius ε gibt, die X überdecken.*

Satz 1.31. *Sei X ein vollständiger metrischer Raum und A eine Teilmenge von X.*

(a) *Die Menge A ist genau dann kompakt, wenn sie folgenkompakt ist.*

(b) *Wenn A abgeschlossen ist, so ist auch die Präkompaktheit von A mit der Kompaktheit äquivalent.*

Anmerkung 1.32. Man überlege sich, daß der Abschluß einer präkompakten Menge ebenfalls präkompakt ist (vergleiche Aufgabe 1.8). Daher gilt im vollständigen metrischen Raum

$$A \text{ präkompakt} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ relativ kompakt.}$$

Beweis. A kompakt $\Rightarrow$ A folgenkompakt: Da ein metrischer Raum das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ist dies eine Konsequenz aus Lemma 1.28.

A folgenkompakt $\Rightarrow A$ präkompakt und abgeschlossen: Da jeder Grenzwert von Folgen in A zu A gehören muß, ist A abgeschlossen. Angenommen, A wäre folgenkompakt, aber nicht präkompakt. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge (x_k) in A mit $d(x_k, x_l) \geq \varepsilon$. Diese x_k besitzen offenbar keine konvergente Teilfolge.

A präkompakt und abgeschlossen $\Rightarrow A$ kompakt: Angenommen, $\{A_i\}_{i \in I}$ wäre eine offene Überdeckung von A, die keine endliche Teilüberdeckung enthält. A läßt sich durch Kugeln $B^1, \ldots, B^i$ vom Radius 1 überdecken. Unter diesen muß es eine Kugel $B_0(x_0)$ geben, so daß die Menge $B_0(x_0)$ sich ebenfalls nicht durch endlich viele dieser A_i überdecken läßt. $B_0(x_0)$ wird durch endlich viele Kugeln vom Radius $\varepsilon_1 = 2^{-1}$ überdeckt und wieder wird eine Kugel $B_1(x_1)$ gefunden, die sich nicht durch endlich viele A_i überdecken läßt. Dieses Argument wird mit $\varepsilon_k = 2^{-k}$ iteriert. Wir erhalten eine Folge von Kugeln $U_k = B_{2^{-k}}(x_k)$, die sich nicht durch endlich viele A_i überdecken lassen. Nach Konstruktion kann auch $U_k \cap U_{k+1} \neq \emptyset$ erreicht werden. Damit gilt $d(x_k, x_{k+1}) < 2^{-k+1}$ und (x_k) ist Cauchy-Folge, die aufgrund der Vollständigkeit von A einen Grenzwert $x \in A$ besitzt. Für ein i ist $x \in A_i$ und mit A_i offen ist $B_r(x) \subset A_i$ mit $r > 0$. Daher $U_k \subset A_i$ für genügend großes k. Widerspruch! □

Als Anwendung dieses Satzes beweisen wir folgende Eigenschaft kompakter metrischer Räume.

Satz 1.33. *Ein kompakter metrischer Raum ist separabel.*

Beweis. Für $\varepsilon_k = 1/k$ können wir den Raum durch endlich viele Kugeln mit Mittelpunkten $x_{kl}, l = 1, \ldots, N_k$, überdecken. Diese Mittelpunkte liegen dicht, denn jeder Punkt des Raums läßt sich durch solche Mittelpunkte beliebig genau approximieren. □

Nun verallgemeinern wir einen aus der Analysis wohlbekannten Satz.

Satz 1.34. *Das stetige Bild eines kompakten Raums ist kompakt. Insbesondere nehmen auf kompakten Räumen stetige, reellwertige Abbildungen Maximum und Minimum an.*

Anmerkung 1.35. Wie das Beweisbeispiel zu Beginn dieses Abschnitts zeigt, bleibt der Satz richtig, wenn man kompakt durch folgenkompakt und stetig durch folgenstetig (siehe Lemma 1.10(b)) ersetzt.

Beweis. Seien X, Y topologische Räume mit X kompakt und $f : X \to Y$ sei stetig. Wir betrachten die Urbildmengen einer offenen Überdeckung von $f(X)$. Diese bilden eine offene Überdeckung von X, aus der wir eine endliche Teilüberdeckung auswählen können. Die zugehörigen Mengen im Bildbereich bilden die gesuchte endliche Überdeckung von $f(X)$. □

Der folgende Satz zeigt, daß es in einer Folge von Topologien (τ_k) auf einer Menge X mit $\tau_k \subset \tau_{k+1}$ höchstens eine gibt, die X zu einem kompakten Hausdorff-Raum macht.

Satz 1.36. *Sei (X, τ) ein kompakter Hausdorff-Raum.*

(a) *Ist $\tau_g \subset \tau$, $\tau_g \neq \tau$, so ist (X, τ_g) nicht mehr hausdorffsch.*

(b) *Ist $\tau_f \supset \tau$, $\tau_f \neq \tau$, so ist (X, τ_f) nicht mehr kompakt.*

Beweis. In (a) ist (X, τ_g) kompakt und in (b) ist (X, τ_f) ein Hausdorff-Raum. Für die Beweisteile (a) und (b) genügt es daher folgendes zu zeigen:

Sind $\tau_1 \subset \tau_2$ Topologien auf der Menge X, so daß (X, τ_i) kompakte Hausdorff-Räume sind, so gilt $\tau_1 = \tau_2$.

Es gilt für jedes $A \subset X$

$$A \text{ ist } \tau_2\text{-kompakt} \;\Rightarrow\; A \text{ ist } \tau_1\text{-kompakt.}$$

Nach Satz 1.29 ist eine Teilmenge eines kompakten Hausdorff Raums genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist. Daher

$$A \text{ ist } \tau_2\text{-abgeschlossen} \;\Rightarrow\; A \text{ ist } \tau_1\text{-abgeschlossen.}$$

Da τ_2 mehr offene Mengen als τ_1 enthält, ist dies nur möglich, wenn $\tau_1 = \tau_2$. □

Aufgaben

Die den Aufgaben beigefügten Zahlen sollen eine grobe Information über den Schwierigkeitsgrad geben:

1 = trivial, 2 = heminormal, 3 = normal, 4 = doktoral, 5 = suizidal.

1.1. (2) Endliche Mengen in einem Hausdorff-Raum sind abgeschlossen.

1.2. (1) Seien X, Y topologische Räume. Welche Abbildungen $f : X \to Y$ sind unabhängig von den Topologien auf X, Y immer stetig?

1.3. (2) Ein offenes Intervall von $\mathbb{R}$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}$, ein abgeschlossenes beschränktes Intervall ist nicht homöomooph zu $\mathbb{R}$.

1.4. (3) Sei X eine unendliche Menge. τ bestehe aus der leeren Menge und allen Teilmengen von X, deren Komplement endlich ist. Man zeige: τ ist eine Topologie auf X, die nicht hausdorffsch ist, in der aber alle einpunktigen Teilmengen abgeschlossen sind. Wie sehen die Berührpunkte einer Folge aus? Welche Folgen sind konvergent?

1.5. (4) Sei l der Raum aller reellwertigen Zahlenfolgen. Zu einer Zahlenfolge $a = (a(i))$ mit $a(i) > 0$ definieren wir die Mengen

$$V_a = \{x \in l : |x(i)| < a(i) \;\; \forall i \in \mathbb{N}\}$$

und $U_a(x) = x + V_a \subset l$ für $x \in l$. Das „+” ist dabei komponentenweise Addition. Das System $\{U_a(x)\}$ für alle solchen Folgen a sei die Umgebungsbasis von $x \in l$. Charakterisieren Sie die Folgen (x_k) mit $x_k \to 0$ in dieser Topologie und konstruieren Sie eine Menge $A \subset l$, die den Berührpunkt 0 besitzt, ohne eine Folge (x_k), $x_k \in A$, zu enthalten mit $x_k \to 0$.

Bemerkung: Wegen Lemma 1.11 ist damit gezeigt, daß in dieser Topologie das erste Abzählbarkeitsaxiom nicht gilt.

1.6. (3) Ist X ein topologischer Raum, Y ein Hausdorff-Raum und $f : X \to Y$ stetig, so ist der *Graph* von f,

$$G(f) = \{(x, f(x) : x \in X\} \subset X \times Y,$$

abgeschlossen in $X \times Y$.

Bemerkung: Man vergleiche mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen 3.9.

1.7. (2) Die drei Axiome der Metrik sind redundant. Zeigen Sie, daß eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mit

(i) $d(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$

(ii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$

eine Metrik auf der Menge X ist.

1.8. (2) Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\overline{A} \subset A_\varepsilon = \cup_{x \in A} B_\varepsilon(x).$$

1.9. Sei l der Raum aller Zahlenfolgen in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

a) (1) Jedem $x \in l$ ordnen wir die Umgebungsbasis $U_k(x) = x + V_k$ zu mit

$$V_k = \{x \in l : \; |x(i)| < 1/k \;\; \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Was bedeutet $x_k \to x$ in der so erzeugten Topologie?

b) (3) Auf l definieren wir die Metrik

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{|x(i) - y(i)|}{1 + |x(i) - y(i)|}.$$

Was bedeutet $x_k \to x$ in der durch diese Metrik erzeugten Topologie? Ist (l, d) vollständig?

1.10. (3) Eine Teilmenge eines separablen metrischen Raums ist separabel.

Bemerkung: Diese Aussage ist für allgemeine topologische Räume nicht richtig.

1.11. (3) Für eine Teilmenge A eines metrischen Raums X definieren wir den *Durchmesser* durch

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y).$$

Beweisen Sie: X ist genau dann vollständig, wenn eine fallende Folge nichtleerer abgeschlossener Teilmengen A_k mit $\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam} A_k = 0$ genau ein Element von X enthält, d.h. $\cap_{k=1}^{\infty} A_k = \{x\}$.

1.12. (3) Geben Sie auf $\mathbb{R}$ eine Metrik an, so daß die Folge $(k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, die keinen Grenzwert besitzt. Machen Sie den Raum vollständig, indem Sie weitere Elemente hinzufügen.

1.13. (3) Geben Sie ein Beispiel für homöomorphe metrische Räume, so daß der eine vollständig, der andere unvollständig ist.

Bemerkung: Vollständigkeit ist keine topologische Eigenschaft eines metrischen Raums.

1.14. (4) Der Raum l_∞ der beschränkten Zahlenfolgen ist mit $d_\infty(x,y) = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x(i) - y(i)|$ offenbar ein metrischer Raum. Beweisen Sie: (*Frechet*) Jeder separable metrische Raum kann isometrisch auf eine Teilmenge von l_∞ abgebildet werden.

1.15. (2) Sei $X = C([0,1])$ versehen mit der Maximumsmetrik. Sei

$$Tx(t) = \int_0^t x(\xi)\, d\xi.$$

Zeigen Sie, daß T lipschitz ist und bestimmen Sie die Lipschitzkonstante. Hat T einen Fixpunkt?

1.16. (3) Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : X \to X$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, daß T^m eine Kontraktion ist für ein $m \in \mathbb{N}$. Dann besitzt T einen eindeutigen Fixpunkt.

1.17. (2) Sei X eine unendliche Menge. Gibt es eine Hausdorff-Topologie auf X, in der jede Teilmenge von X kompakt ist?

1.18. (3) Sei (X,τ) ein nichtkompakter Hausdorff-Raum. Zu $x^* \notin X$ setze $X^* = X \cup \{x^*\}$ und definiere auf folgende Weise eine Topologie τ^* auf X^*. Zu τ^* gehören alle Elemente von τ, der ganze Raum X^* sowie die Teilmengen A^* von X^* mit $x^* \in A^*$, so daß $X^* \setminus A^*$ kompakt in (X,τ) ist. (X^*,τ^*) heißt *Alexandrovsche Ein-Punkt-Kompaktifizierung* von (X,τ).

a) (X^*,τ^*) ist ein kompakter Hausdorff-Raum mit X dicht in X^*.

b) Ist $X = \mathbb{R}^n$ versehen mit der Standard-Topologie, so ist seine Ein-Punkt-Kompaktifizierung homöomorph zur Einheitssphäre des $\mathbb{R}^{n+1}$.

1.19. (2) Ein System $\{A_i\}_{i\in I}$ von Teilmengen eines topologischen Raums X heißt *zentriert*, wenn die A_i abgeschlossen sind und $\cap_{i\in I_0} A_i \neq \emptyset$ für jede endliche Indexmenge $I_0 \subset I$. Beweisen Sie: X ist genau dann kompakt, wenn für jedes zentrierte System $\cap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ erfüllt ist.

1.20. (3) Sei X ein vollständiger metrischer Raum. Zu $A \subset X$ und $x \in X$ hatten wir den Abstand zwischen x und A durch

$$\operatorname{dist}(x,A) = \inf_{y\in A} d(x,y)$$

definiert.

a) Zeigen Sie, daß A genau dann abgeschlossen ist, wenn für alle $x \in X$ gilt

$$\operatorname{dist}(x,A) = 0 \;\Rightarrow\; x \in A.$$

b) Zeigen Sie, daß in der Definition des Abstands das Infimum angenommen wird, falls A kompakt ist.

1.21. (1) Zeigen Sie, daß die abgeschlossene Einheitskugel der Erlanger Metrik nicht kompakt ist.

1.22. (4) Jede Isometrie eines kompakten metrischen Raums in sich ist bijektiv.

1.23. (3) Ist X ein kompakter Raum und gibt es stetige reellwertige Abbildungen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die die Punkte in X trennen, so ist X metrisierbar.

Bemerkung und Hinweis: „Punkte trennen" bedeutet, daß es zu verschiedenen $x, y \in X$ ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $f_k(x) \neq f_k(y)$. Man versuche, mit Hilfe der f_k überhaupt eine Metrik auf X anzugeben. Für den Nachweis, daß die Metrik die gleiche Topologie erzeugt, verwende man Satz 1.36.