Springer-Lehrbuch

Lie-Gruppen und Lie-Algebren in der Physik

Eine Einführung in die mathematischen Grundlagen

Bearbeitet von
Manfred Böhm

1. Auflage 2011. Taschenbuch. viii, 520 S. Paperback
ISBN 978 3 642 20378 7
Format (B x L): 15,5 x 23,5 cm
Gewicht: 871 g

Kapitel 2
Gruppen

Symmetrieeigenschaften können als Elemente einer mathematischen Gruppe aufgefasst werden. Dabei gehören Gruppen zu den algebraischen Strukturen, die mit einer inneren Verknüpfung ausgestattet sind. Die Aufeinanderfolge von Symmetrieoperationen wird dann durch die Verknüpfung festgelegt. Eine Beschäftigung mit den Eigenschaften einer Gruppe gilt deshalb als notwendige Voraussetzung für den Umgang mit den Gruppenelementen bzw. mit den Symmetrien sowie für das Verständnis der sich daraus ergebenden Folgen.

2.1 Elemente und Verknüpfungen

Eine Menge von Elementen bildet eine *abstrakte Gruppe* $\mathcal{G}$, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) Es gilt das Multiplikationsgesetz, wonach es für jedes geordnete Paar von Elementen a, b genau ein Element $c \in \mathcal{G}$ gibt mit

$$c = a \circ b \qquad a, b, c \in \mathcal{G}. \tag{2.1a}$$

(b) Es gilt das Assoziativgesetz

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \qquad \forall\, a, b, c \in \mathcal{G}. \tag{2.1b}$$

(c) Es gibt genau ein (neutrales) Einselement (Identität) e mit

$$a \circ e = e \circ a = a \qquad \forall\, a \in \mathcal{G}. \tag{2.1c}$$

(d) Es gibt zu jedem Element $a \in \mathcal{G}$ ein inverses Element a^{-1} mit

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e. \tag{2.1d}$$

Demnach ist eine Gruppe eine nicht leere Menge $\mathcal{G}$ zusammen mit einer binären, assoziativen Verknüpfung f, die die Abbildung des kartesischen Produkts

M. Böhm, *Lie-Gruppen und Lie-Algebren in der Physik*, Springer-Lehrbuch,
DOI 10.1007/978-3-642-20379-4_2,

$$\psi : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$$

erlaubt. Zudem existieren die inversen Elemente und ein Einselement. Falls außer den Bedingungen (2.1a–c) noch das Kommutativgesetz erfüllt ist

$$a \circ b = b \circ a \quad \forall\, a,\ b \in \mathcal{G}, \tag{2.1e}$$

liegt eine *abelsche Gruppe* vor.

Bei Verletzung der Forderungen (2.1c) und (2.1d) spricht man von einer *Halbgruppe* (*Semigruppe*). Eine Halbgruppe mit einem Einselement bildet ein *Monoid*. Eine Menge von Elemente, die nur die Forderung (2.1a) erfüllt ist, als *Gruppoid* (*Magma*) bekannt. Falls darüberhinaus mit allen Elementen a, b aus dem Gruppoid die Gleichungen $a \circ x = b$ und $y \circ a = b$ genau eine Lösung haben (unter Verzicht auf die Assoziativität), dann bildet diese Menge eine *Quasigruppe*. Eine solche Gruppe mit einem Einselement gemäß Forderung (2.1c) bildet ein *Loop*.

Beispiel 1 Gruppen sind:

Die triviale Gruppe mit der Identität e als einziges Element $\mathcal{G} = \{e\}$.
Die Menge von zwei Elementen $\mathcal{G} = \{e,\ a = \text{bel.}\}$.
Die Menge von Vektoren im n-dimensionalen Vektorraum mit der Addition als Verknüpfung.
Die Menge $\mathcal{G} = \{t | t \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ e \equiv 1\}$ mit der Multiplikation als Verknüpfung; $\mathcal{G} = (\mathbb{R}\backslash\{0\},\ \cdot)$.
Die Menge $\mathcal{G} = \{t | t \in \mathbb{R},\ e \equiv 0\}$ mit der Addition als Verknüpfung; $\mathcal{G} = (\mathbb{R},\ +)$.
Die Menge $\mathcal{H} = \{l | l \in \mathbb{Z}, e \equiv 0\}$ mit der Addition als Verknüpfung; $\mathcal{G} = (\mathbb{Z},\ +)$.

Eine Halbgruppe ist:

Die Menge $\mathcal{H} = \{n \,|\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ mit der Addition als Verknüpfung; $\mathcal{G} = (\mathbb{N}\backslash\{0\},\ +)$.

Ein Monoid ist:

Die Menge $\mathcal{H} = \{n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ mit der Multiplikation als Verknüpfung; $\mathcal{G} = (\mathbb{N},\ \cdot)$.

Beispiel 2 Ein weiteres Beispiel benutzt die Symmetrie eines Systems im euklidischen Raum $\mathbb{R}^2$. Dabei werden jene isometrischen Symmetrietransformationen betrachtet, die das System in identische Lagen versetzt unter Garantie der Invarianz des Abstands zwischen zwei Punkten sowie des Winkels zwischen zwei Richtungen. Bei einem Quadrat findet man als Symmetrieelemente neben dem Einselement e

$\left(= {c_4}^0\right)$ drei Rotationen c_4, c_4^2, c_4^3 um eine 4-zählige Drehachse c_4 mit den Winkeln $2\pi/4$, $2\pi/4 \cdot 2$, $2\pi/4 \cdot 3$ sowie vier Spiegelungen σ_v, σ_v', σ_d, σ_d' an Ebenen, die die Drehachse enthalten (Abb. 2.1). Die Verknüpfung von Symmetrieelementen geschieht durch eine aufeinanderfolgende Ausführung der Transformationen.

Eine dazu isomorphe Gruppe (s. Abschn. 2.3) ist jene endliche Matrix-Gruppe, die aus acht zweireihigen Matrizen besteht

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{c}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{c}_4^2 = \boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{c}_4^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\sigma}_v = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\sigma}_v' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\sigma}_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\sigma}_d' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Die Verknüpfung ist die übliche Matrizenmultiplikation. Wegen der Nichtvertauschbarkeit der Matrizen gilt diese Gruppe ebenso wie die dazu isomorphe Punktgruppe C_{4v} als nicht-abelsch.

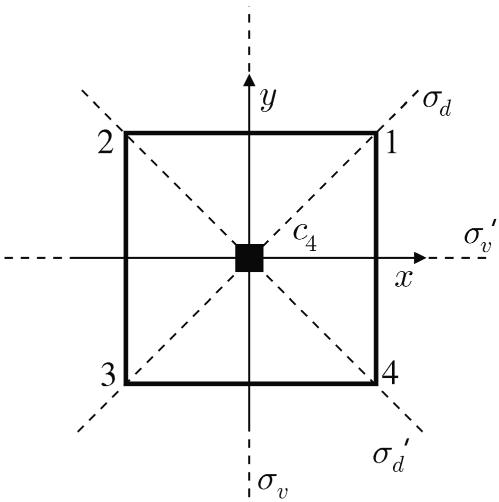

Abb. 2.1 Quadrat mit C_{4v}-Punktsymmetrie; c_4: vierzählige Rotation um die z-Achse; σ_v, σ_d: Spiegelungen an vertikalen und diagonalen Ebenen, die die Drehachse einschließen

Beispiel 3 Betrachtet man eine endliche Anzahl n verschiedener Objekte, etwa die Menge der natürlichen Zahlen $\mathcal{M} = \{1, 2, \ldots, n\}$, die in einer bestimmten Reihenfolge gegeben sind, dann kann eine *Permutation* (*Umordnung*) p im Sinne einer bijektiven Abbildung

$$p : \begin{cases} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \\ \{1, 2, \ldots, n\} \longmapsto \{p(1), p(2), \ldots, p(n)\} \end{cases} \tag{2.3a}$$

ausgedrückt werden durch das Schema

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & \dots & p(n) \end{pmatrix}. \tag{2.3b}$$

In diesem Matrixschema stehen unter den Objekten in der 1. Zeile die Bildobjekte in der 2. Zeile, die nach der Permutation die ursprünglichen Plätze der Objekte einnehmen. Daher treten die Objekte nach der Permutation in der 2. Zeile genau einmal auf.

Mit zwei Permutationen p' und p'' kann man durch Hintereinanderschaltung der Abbildungen ein Produkt $p'p''$ definieren, das erneut eine Permutation liefert

$$p = p'p'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p'(1) & p'(2) & \dots & p'(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p''(1) & p''(2) & \dots & p''(n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p'(p''(1)) & p'(p''((2)) & \dots & p'(p''((n)) \end{pmatrix}.$$

Dieses Produkt genügt dem Assoziativgesetz (2.1b). Mit der identischen Permutation als das Einselement e

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

bildet die Menge aller Permutationen mit der Hintereinanderschaltung als Verknüpfung ein Gruppe, die als *symmetrische Gruppe* (*Permutationsgruppe*) S_n bezeichnet wird. Das inverse Element p^{-1} ist diejenige Permutation, die die Permutation p wieder rückgängig macht. Sie ist durch die Bedingung

$$p^{-1}p = pp^{-1} = e$$

eindeutig bestimmt. Die symmetrische Gruppe ist für $n \geq 3$ keine abelsche Gruppe.

Beispiel 4 Beispiele für abelsche Gruppen sind die Punktgruppen $C_4 = \{e, c_4, c_2, c_4^3\}$, $C_2 = \{e, \sigma_v\}$ oder $C_2 = \{e, \sigma_d\}$.

■

Als *Ordnung* (ord $\mathcal{G}$) *einer Gruppe* $\mathcal{G}$ versteht man die Anzahl g der Elemente in der Gruppe. Diese kann endlich, abzählbar unendlich oder überabzählbar unendlich sein. Daneben versteht man unter der *Ordnung* (ord a) eines Symmetrieelements a die kleinste natürliche Zahl n, mit der es mit sich selbst verknüpft die Identität ergibt. Elemente a mit der Ordnung ord $a = 2$ heißen *Involutionen*.

Tabelle 2.1 Multiplikationstafel $\boldsymbol{A}$ einer endlichen Gruppe $\mathcal{G} = \{a_1, \ldots, a_g\}$

$\boldsymbol{A}$	a_1	a_2	$\cdots$	a_g
a_1	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$	$\cdots$	$a_1 \circ a_g$
a_2	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$	$\cdots$	$a_2 \circ a_g$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_g	$a_g \circ a_1$	$a_g \circ a_2$	$\cdots$	$a_g \circ a_g$

Beispiel 5 Im Beispiel 2 der Punktgruppe C_{4v} des Quadrats findet man für die Ordnung der Gruppe $\operatorname{ord} C_{4v} = 8$ und für die Ordnung der Elemente $\operatorname{ord} c_4 = 4$ bzw. $\operatorname{ord} \sigma_v = 2$.

Im Beispiel 3 der symmetrischen Gruppe S_n ist die Ordnung der Gruppe durch die Anzahl der möglichen Permutationen gegeben

$$\operatorname{ord} S_n = n!.$$

■

Gruppen mit endlicher Ordnung, also einer endlichen Anzahl von Elementen heißen *endliche Gruppen*. Für solche Gruppen kann man eine sogenannte *Multiplikationstafel* (*Gruppentafel*, CALEY-*Tafel*) angeben (Tab. 2.1). In dieser Matrix $\boldsymbol{A}$ ist das Matrixelement A_{ij} der i-ten Zeile und j-ten Spalte das Produkt $a_i \circ a_j$ der Elemente a_i und a_j. Nach dem *Umordnungstheorem* kommt in jeder Zeile und jeder Spalte jedes Gruppenelement genau einmal vor. Die Multiplikationstafel einer abelschen Gruppe ist wegen Gl. (2.1e) symmetrisch zur Hauptdiaonale. Jede endliche Gruppe $\mathcal{G}$ mit der Ordnung $\operatorname{ord} \mathcal{G} = n$ ist isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n.

Beispiel 6 Im Beispiel der Punktgruppe C_{4v}, wo die Verknüpfung der Gruppenelemente eine Hintereinanderschaltung von Transformationen bedeutet, hat die Multiplikationstafel die Form von Tabelle 2.2.

Tabelle 2.2 Multiplikationstafel $A_{ij} = a_i \circ a_j$ mit der aufeinanderfolgenden Ausführung von Symmetrietransformationen als Verknüpfung für die Punktgruppe $\mathcal{G} = C_{4v}$ des Quadrats

$\boldsymbol{A}$	e	c_4	c_2	c_4^3	σ_v	σ_v'	σ_d	σ_d'
e	e	c_4	c_2	c_4^3	σ_v	σ_v'	σ_d	σ_d'
c_4	c_4	c_4^2	c_4^3	e	σ_d'	σ_d	σ_v	σ_v'
c_2	c_2	c_4^3	e	c_4	σ_v'	σ_v	σ_d'	σ_d
c_4^3	c_4^3	e	c_4	c_2	σ_d	σ_d'	σ_v'	σ_v
σ_v	σ_v	σ_d	σ_v'	σ_d'	e	c_2	c_4	c_4^3
σ_v'	σ_v'	σ_d'	σ_v	σ_d	c_2	e	c_4^3	c_4
σ_d	σ_d	σ_v'	σ_d'	σ_v	c_4^3	c_4	e	c_2
σ_d'	σ_d'	σ_v	σ_d	σ_v'	c_4	c_4^3	c_2	e

■

Eine Gruppe heißt *diskret*, falls die Menge ihrer Elemente abzählbar ist. Ein Beispiel ist die abelsche Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ mit unendlich vielen Elementen. Demnach ist auch jede endliche Gruppe eine diskrete Gruppe. Eine Gruppe heißt *kontinuierlich*, falls sie von überabzählbar unendlicher Ordnung ist. Dort spielt der topologische Begriff der Nachbarschaft zwischen zwei Elementen bzw. zwei Punkten einer Mannigfaltigkeit eine wesentliche Rolle (Abschn. 4.1).

Beispiel 7 Ein Beispiel für eine kontinuierliche Gruppe ist die Menge der linearen, bijektiven Transformationen (Abbildungen) A eines Vektors $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ im N-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^N$ mit der Hintereinanderschaltung (Verkettung) als Verknüpfung

$$A : \begin{cases} \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N \\ \boldsymbol{x} \longmapsto A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'. \end{cases} \tag{2.4a}$$

Diese Gruppe umfasst demnach alle bijektiven Selbstabbildungen des Vektorraumes $\mathcal{V} = \mathbb{R}^N$. Sie ist isomorph zur Gruppe $\mathcal{G}$ der regulären, reellen $N \times N$-Matrizen $\boldsymbol{A}$ ($\det \boldsymbol{A} \neq 0$) mit

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \qquad \text{bzw.} \qquad x_i' = \sum_j^N A_{ij} x_j \quad i = 1, \ldots, N, \tag{2.4b}$$

die als *allgemeine lineare Gruppe* $GL(N, \mathbb{R})$ bezeichnet wird (s. a. Tab. 4.1). Die Hintereinanderschaltung der Abbildungen entspricht der Matrixmultiplikation. Mit dem Einselement

$$\boldsymbol{E} = \mathbf{1}_N,$$

dem reziproken Element $\boldsymbol{A}^{-1}$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \mathbf{1}_N$$

und dem Produktelement

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \qquad \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in GL(N, \mathbb{R})$$

werden alle vier Gruppenaxiome (2.1a) bis (2.1d) erfüllt. Die Nichtvertauschbarkeit der Matrixmultiplikation ist dafür verantwortlich, dass die Gruppe für $N \geq 2$ nicht abelsch ist.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass Vektoren rechts (Gl. 2.3b) bzw. links von einer Matrix als Spaltenvektoren bzw. als Zeilenvektoren aufgefasst werden sollen. Alleine aufgeführt gelten sie stets als Zeilenvektoren.

Betrachtet man allgemein einen linearen Vektorraum $\mathcal{V}$ über dem Körper $\mathbb{K}$, dann bildet die Menge aller linearen, bijektiven Selbstabbildungen

$$A : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$$

eine Gruppe $GL(\mathcal{V})$, die als *Automorphismusgruppe* Aut $(\mathcal{V})$ von $\mathcal{V}$ bekannt ist. Für $\dim\mathcal{V} = N$ ist diese Gruppe isomorph zur *allgemeinen linearen Gruppe* $GL(N, \mathbb{C})$.

Beispiel 8 Weitere Beispiele für kontinuierliche Gruppen $\mathcal{G}$ sind die unitären und orthogonalen Gruppen. Die *unitäre Gruppe* $U(N)$ in N Dimensionen ($N \geq 1$) umfasst die Menge aller komplexen, unitären $N \times N$-Matrizen $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger} = \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A} = \mathbf{1}_N \qquad \text{bzw.} \qquad \boldsymbol{A}^{\dagger} = \boldsymbol{A}^{-1} \tag{2.5}$$

mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung. Wegen

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\dagger} = \boldsymbol{B}^{\dagger}\boldsymbol{A}^{\dagger} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} \qquad \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{G}$$

ist das Produkt zweier unitärer Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ wieder eine unitäre Matrix und somit ein Element der Gruppe $U(N)$.Demnach ist das Multiplikationsgesetz (2.1a) erfüllt. Auch das Assoziativgesetz (2.1b) wird eingehalten. Das Einselement ist die Einheitsmatrix $\mathbf{1}_N$, mit der die Bedingung (2.1e) erfüllt wird. Schließlich ist wegen

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\dagger} = \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}$$

die zur Matrix $\boldsymbol{A}$ inverse Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$ ebenfalls unitär, was von (2.1d) verlangt wird. Das Kommutativgesetz (2.1e) wird nur für $N = 1$ erfüllt, so dass die Gruppe $U(N)$ außer für $N = 1$ als nicht-abelsch gilt.

Beispiel 9 Eine weitere unitäre Gruppe ist die *spezielle unitäre Gruppe* $SU(N)$ in N Dimensionen ($N \geq 1$). Sie umfasst alle unitären $N \times N$-Matrizen $\boldsymbol{A}$ mit der zusätzlichen Bedingung

$$\det \boldsymbol{A} = 1. \tag{2.6}$$

Nachdem die Determinante einer unitären Matrix wegen

$$\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger}) = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{A}^{\dagger} = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{A}^{*} = |\det \boldsymbol{A}|^2 = \det \mathbf{1}_N = 1$$

stets eine reine Phase ist

$$\det \boldsymbol{A} = e^{i\varphi},$$

mit einem beliebigen Phasenwinkel φ, bedeutet obige Bedingung ($\varphi = 0$) eine besondere Einschränkung. Alle speziellen unitären Gruppen sind nicht abelsch (s. a. Tab. 4.1).

Beispiel 10 Die *orthogonale Gruppe* $O(N)$ in N Dimensionen ($N \geq 2$) umfasst die Menge aller reellen, orthogonalen $N \times N$-Matrizen $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\top} = \boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{A} = \mathbf{1}_N \qquad \text{bzw.} \qquad \boldsymbol{A}^{\top} = \boldsymbol{A}^{-1} \tag{2.7}$$

mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung. Auch hier werden die vier Gruppenaxiome (2.1a) bis (2.1d) erfüllt, wobei die Argumentation wie bei der Gruppe $U(N)$ geschieht. Die Gruppen $O(N)$ sind nicht abelsch.

Beispiel 11 Schließlich gibt es die *spezielle orthogonale Gruppe* $SO(N)$ in N Dimensionen ($N \geq 2$). Sie umfasst die Menge aller Matrizen der Gruppe $O(N)$ mit

$$\det \boldsymbol{A} = +1.$$

Diese einschränkende Bedingung resultiert aus der Tatsache, dass wegen

$$\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top) = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{A}^\top = (\det \boldsymbol{A})^2 = \det \mathbf{1}_N = 1$$

die Determinante einer orthogonalen Matrix nur die Werte

$$\det \boldsymbol{A} = \pm 1 \tag{2.8}$$

annehmen kann. Das Kommutativgesetz (2.1e) wird nur für $N = 2$ erfüllt, so dass die Gruppe $SO(N)$ außer für $N = 2$ als nicht-abelsch gilt. Allgemein können die orthogonalen Gruppen als Spezialfall der unitären Gruppen aufgefasst werden unter Berücksichtigung der Bedingung (s. a. Tab. 4.1)

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^*.$$

Beispiel 12 Die *orthogonale Gruppe* $O(N)$ basiert auf der linearen Transformation (2.3) unter Berücksichtigung der Invarianz des Skalarprodukts $\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2$ zweier beliebiger Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^N$. Dies impliziert die Forderung nach Orthogonalität (2.7) der Matrizen $\boldsymbol{A}$. Die Determinante kann dann nur die beiden Werte (2.8) annnehmen, wodurch die *eigentlichen* (*speziellen*, $\det \boldsymbol{A} = +1$) und *uneigentlichen Transformationen* ($\det \boldsymbol{A} = -1$) unterschieden werden. Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ sind die Transformationen eines Ortsvektors $\boldsymbol{x}$ als *eigentliche* d und *uneigentliche Rotationen* (Drehinversionen) bekannt. Letztere, nämlich die *Inversionen* i, die *Spiegelungen* σ sowie die *Drehspiegelungen* s resultieren aus dem Produkt einer eigentlichen Rotation mit einer Inversion. Die Menge aller eigentlicher Rotationen bildet die *spezielle orthogonale* LIE-*Gruppe* $SO(3)$ in drei Dimensionen. Zusammen mit der Menge der uneigentlichen Rotationen erhält man die *orthogonale* LIE-*Gruppe* $O(3)$ in drei Dimensionen (*volle Rotationsgruppe* oder *Rotations-Inversionsgruppe*).

Beispiel 13 Betrachtet man etwa eine (aktive) Rotation $d_z(\varphi)$ eines Systems bzw. eines Vektors $\boldsymbol{x}$ aus dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ im Rechtsschraubensinn um die z-Achse mit dem Winkel φ gemäß

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{d}_z(\varphi)\boldsymbol{x}, \tag{2.9a}$$

dann errechnet sich die Rotationsmatrix $\boldsymbol{d}_z(\varphi)$ bzgl. der Standardbasis $\{\boldsymbol{e}_x = (1,0,0),\ \boldsymbol{e}_y = (0,1,0),\ \boldsymbol{e}_z = (0,0,1)\}$ zu

$$\boldsymbol{d}_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi. \tag{2.9b}$$

Die Matrix ist orthogonal ($\det \boldsymbol{d}_z(\varphi) = +1$) und beschreibt eine aktive Rotation, bei der ein Vektor $\boldsymbol{x}$ im ruhenden Koordinatensystem gedreht wird. Vertritt man den passiven Standpunkt, bei dem das System bzw. der Vektor fest bleibt und das Koordinatensystem im Rechtsschraubensinn gedreht wird, muss der Drehwinkel φ durch den negativen Wert $-\varphi$ ersetzt werden.

Die Inversion i – Spiegelung am Koordinatenursprung – als die einfachste uneigentliche Rotation kann nach

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{i}\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x} \tag{2.10a}$$

durch die Matrix

$$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.10b}$$

beschrieben werden.

Beispiel 14 Betrachtet man neben den Rotationen auch noch *Translationen* (Verschiebungen) eines Vektors $\boldsymbol{x}$ im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ um einen endlichen Vektor $\boldsymbol{t}$, dann wird die gesamte räumliche Transformation eines Vektors $\boldsymbol{x}$ beschrieben durch

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{d}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{t} \qquad \boldsymbol{x},\, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^3. \tag{2.11a}$$

Abbildungen eines Vektorraumes in dieser Form sind nicht mehr linear und werden als *affine Abbildungen* bezeichnet. Dabei ist es üblich, die beiden hintereinander auszuführenden Transformationen der orthogonalen Rotation und der Translation symbolisch durch einen Operator in der Form

$$\boldsymbol{x}' = \{\boldsymbol{d}|\boldsymbol{t}\}\boldsymbol{x} \tag{2.11b}$$

auszudrücken. Für das Produkt zweier Operatoren $\{\boldsymbol{d}_1|\boldsymbol{t}_1\}$ und $\{\boldsymbol{d}_2|\boldsymbol{t}_2\}$ erhält man mit Gl. (2.11a) nach sukzessiver Ausführung beider Transformationen einen weiteren Operator

$$\{\boldsymbol{d}_1|\boldsymbol{t}_1\}\{\boldsymbol{d}_2|\boldsymbol{t}_2\} = \{\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{d}_2|\boldsymbol{d}_1\boldsymbol{t}_2 + \boldsymbol{t}_1\}. \tag{2.12}$$

Mit dem identischen Operator $\{\mathbf{1}|\mathbf{0}\}$ errechnet sich nach (2.13) der inverse Operator zu

$$\{\boldsymbol{d}|\boldsymbol{t}\}^{-1} = \{\boldsymbol{d}^{-1}| - \boldsymbol{d}^{-1}\boldsymbol{t}\}. \tag{2.13}$$

Die Menge aller Operatoren $\{\boldsymbol{d}|\boldsymbol{t}\}$ bilden demnach eine Gruppe, nämlich die 6-dimensionale *euklidische Gruppe* $E(3)$ (*Bewegungsgruppe des* $\mathbb{R}^3$ bzw. *reelle affine Gruppe*). Die reinen orthogonalen Rotationen bzw. die reinen Translationen werden durch die Operatoren $\{\boldsymbol{d}|\boldsymbol{0}\}$ bzw. $\{\boldsymbol{1}|\boldsymbol{t}\}$ beschrieben. Betrachtet man nur die eigentlichen Rotationen ($\det \boldsymbol{d} = +1$, $\boldsymbol{d} \in SO(3)$), dann bilden diese die *eigentliche euklidische Gruppe* $E^+(3)$. Falls man dem Operator $\{\boldsymbol{d}|\boldsymbol{t}\}$ eine 4×4-Matrix zuordnet

$$\{\boldsymbol{d}|\boldsymbol{t}\} := \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.14a}$$

mit dem Spaltenvektor

$$\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, t_3)^\top, \tag{2.14b}$$

dann kann die Transformation (2.11) durch eine Matrixgleichung in der Form

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}' \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

ausgedrückt und die euklidische Gruppe $E(3)$ als eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $GL(4, \mathbb{R})$ aufgefasst werden.

■

2.2 Strukturen

Eine bedeutende Rolle spielt die *Untergruppe*. Sie ist jede nicht leere Teilmenge $\mathcal{H}$ der Gruppe $\mathcal{G}$, deren Elemente die Bedingungen (2.1a) bis (2.1d) für eine Gruppe mit der gleichen Verknüpfung erfüllen

$$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}. \tag{2.16}$$

Danach hat jede Gruppe wenigstens zwei Untergruppen, nämlich das Einselement $\{e\}$ und die Gruppe $\mathcal{G}$ selbst, die als *uneigentliche Untergruppen* zur Unterscheidung von den *eigentlichen (echten) Untergruppen* bezeichnet werden. Da die Untergruppe erneut eine Gruppe bildet, muss die Menge ihrer Elemente eine abgeschlossene algebraische Struktur sein und kann direkt von der Multiplikationstafel abgelesen werden (s. z. B. Tab. 2.2). Es ist leicht nachzuweisen, dass der Durchschnitt von Untergruppen eine Gruppe $\mathcal{G}$ wieder eine Untergruppe von $\mathcal{G}$ ist.

Beispiel 1 Untergruppen der Punktgruppe C_{4v} sind die Punktgruppen $C_4 = \left\{e, c_4, c_4^2, c_4^3\right\}$, $C_{2v} = \left\{e, c_4^2 = c_2, \sigma_v, \sigma_v'\right\}$ sowie $C_s = \{e, \sigma_v\}$ (Abb. 2.2).

■

Eine besondere Gruppe ist die *zyklische Gruppe* $\mathcal{Z}$. Sie besteht aus Elementen, die eine Potenz eines Elements z sind

$$\mathcal{Z} := \{z^n \mid n \in \mathbb{Z}\}. \tag{2.17}$$

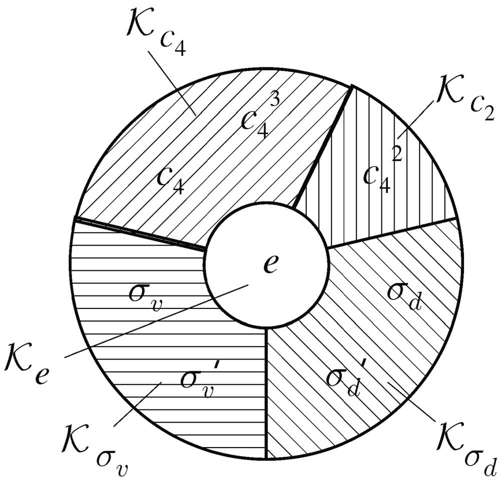

Abb. 2.2 Schematische Darstellung der Punktgruppe C_{4v} mit der Aufteilung in Klassen $\mathcal{K}_a$

Danach gilt für eine zyklische Gruppe

$$\operatorname{ord} \mathcal{Z} = \operatorname{ord} z = n. \tag{2.18}$$

Jedes Element einer endlichen Gruppe $\mathcal{G}$ zusammen mit seiner Potenz eine zyklische Untergruppe $\mathcal{H}_z \subset \mathcal{Z}$

$$\mathcal{H}_z = \{z^n \,|\, z \in \mathcal{Z}, n \in \mathbb{Z}\}. \tag{2.19}$$

Zudem findet man jedes Element einer endlichen Gruppe in mindestens einer Untergruppe enthalten.

Beispiel 2 Die Punktgruppe $C_4 = \left\{e, c_4, c_4^2 = c_2, c_4^3\right\}$ ist eine zyklische Gruppe und zugleich eine Untergruppe $\mathcal{H}_{c_4} \subseteq \mathcal{G} = C_{4v}$. Das gleiche gilt für die Punktgruppe $C_s = \{e, \sigma_v\}$ oder $\{e, \sigma_d\}$.

■

Mit den Elementen $p = z^r$ und $q = z^s$ einer zyklischen Gruppe findet man nach

$$p \circ q = z^r \circ z^s = z^{r+s} = z^s \circ z^r = q \circ p \tag{2.20}$$

die Kommutativität, so dass jede zyklische Gruppe auch abelsch ist.

Eine besondere Untergruppe ist das *Zentrum* $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C} := \{c \in \mathcal{G} |\, c \circ \mathcal{G} = \mathcal{G} \circ c\}. \tag{2.21}$$

Ihre Elemente c sind mit allen Gruppenelementen vertauschbar und gelten deshalb als *invariante Elemente*.

Beispiel 3 Im Fall der Punktgruppe C_{4v} ist das Zentrum die triviale, uneigentliche Untergruppe $\mathcal{C}=\{e\}$. In der Multiplikationstafel (Tab. 2.2) sind Zeilen und Spalten für das Zentrum identisch.

Im Fall der *allgemeinen linearen Gruppe* $GL(N, \mathbb{R})$ besteht das Zentrum aus der Menge $\mathcal{C} = \{\lambda \mathbf{1}_N |\, \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0\}$.

Im Fall der *speziellen unitären Gruppe* $SU(N)$ besteht das Zentrum aus der Menge $\mathcal{C} = \{\lambda \mathbf{1}_N |\, \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda^N = 1,\ |\lambda| = 1\}$.

■

Als Konsequenz findet man zum einen, dass das Zentrum stets eine abelsche Gruppe ist und zum anderen, dass in abelschen Gruppen das Zentrum durch die Menge aller Elemente gebildet wird.

Eine ausgezeichnete Rolle spielen jene Elemente einer Teilmenge, das sogenannte (*freien*) *Erzeugendensystem* $\mathcal{S} = \{s_i |\, i = 1, \dots, r\}$, durch deren faktorielle Anwendung jedes beliebige Element einer Gruppe $\mathcal{G}$ als Produkt von endlich vielen Elementen (*Erzeugende*, *Generatoren*) aus $\mathcal{S}$ und deren Inverse eindeutig dargestellt werden kann. Die Gruppe gilt dann als *freie Gruppe über* $\mathcal{S}$. Das Produkt von endlich vielen Elementen $a = \left\{s_1^{z_1}, s_2^{z_2} \dots s_r^{z_r}\right\} \in \mathcal{G}$ mit $s_1, \dots, s_r \in \mathcal{S}$ ($s_i \neq s_{i+1}\ \forall i$) und $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{Z}$ ($z_i \neq 0\ \forall i$) wird als *reduziertes Wort* über $\mathcal{S}$ bezeichnet. Falls die Teilmenge $\mathcal{S}$ als endliche Menge gewählt werden kann, nennt man die Gruppe $\mathcal{G}$ eine *endlich erzeugte Gruppe*. Die Wahl der unahängigen *Erzeugenden* $\{s_i |\, i = 1, \dots, r\}$ ist nicht eindeutig. Die minimale Menge von Erzeugende, deren Anzahl als der *Rang* r einer (endlichen) Gruppe bezeichnet wird, gilt als eine *Basis*.

Beispiel 4 Die Gruppe der ganzen, additiven Zahlen $\mathcal{G} = (\mathbb{Z}, +)$ ist eine freie Gruppe über dem Erzeugendensystem $\mathcal{S} = \{1\}$.

Bei einer zyklischen Gruppe $\mathcal{Z} = \{e, z, \dots, z^{n-1}\ n \geq 2\}$ besteht die minimale Menge von Generatoren aus einem Element ($s_1 = z^1$), so dass der Rang $r = 1$ beträgt. Jedes Element kann dargestellt werden durch z^k ($k \in \mathbb{Z}$). Diese Darstellung ist wegen $z^n = e$ nicht eindeutig, so dass die Gruppe keine freie Gruppe ist.

Beispiel 5 Bei der Punktgruppe C_{4v} gibt es die Erzeugenden $\mathcal{S} = \{s_1 = c_4, s_2 = \sigma_\mathrm{v}\}$ mit den definierenden Beziehungen

$$s_1^4 = e \qquad s_2^2 = e \qquad (s_1 \circ s_2)^2 = e \qquad \text{bzw.} \qquad s_1 \circ s_2 = (s_1 \circ s_2)^{-1}.$$

Der Rang ist dann $r = 2$. Die Beschreibung der Gruppe durch reduzierte Worte zusammen mit den Relationen geschieht dann in der Form

$$C_{4v} = \left\{e,\ s_1,\ s_1^2,\ s_1^3,\ s_2,\ s_1 \circ s_2,\ s_1^2 \circ s_2,\ s_1^3 \circ s_2\right\},$$

was allgemein als *Gruppenpräsentierung* bezeichnet wird. Die Gruppe ist jedoch keine freie Gruppe, da etwa das Element $c_4 = s_1^1 = s_1^{4n}$ ($n \in \mathbb{N}$) nicht eindeutig dargestellt werden kann.

■

Die Suche nach Elementen mit äquivalenten Eigenschaften führt zu dem Begriff der *Konjugiertheit*, der eine vereinfachende Aufteilung der Gruppe ermöglicht. Ein Element a' ist konjugiert zum Element a, falls es ein Element $b \in \mathcal{G}$ gibt, mit dem a in a' transformiert werden kann

$$a' = b \circ a \circ b^{-1}. \tag{2.22}$$

Daraus erwächst eine Äquivalenzrelation mit den folgenden Eigenschaften:

(a) a ist zu sich selbst konjugiert (Reflexivität).
(b) Falls a' konjugiert ist zu a, ist auch a konjugiert zu a' (Symmetrie).
(c) Falls a konjugiert ist zu a' und a' konjugiert zu a'', ist auch a konjugiert zu a'' (Transitivität).

Mithilfe aller zueinander konjugierter Elemente lässt sich eine Menge definieren, die als die *Klasse der konjugierten Elemente* oder *Konjugiertenklasse* bezeichnet wird (Abb. 2.2)

$$\mathcal{K}_a := \{a, b \in \mathcal{G} | \, b \circ a \circ b^{-1}\}.$$

Diese Festlegung erlaubt eine Einteilung der Gruppe $\mathcal{G}$ in Klassen $\mathcal{K}_i$ konjugierter Elemente

$$\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{K}_i \qquad r : \text{Anzahl der Klassen}. \tag{2.23}$$

Dabei ist zu beachten, dass Konjugiertenklassen keine Gruppen sind, da ihnen das Einselement fehlt. Nachdem jedes Element der Gruppe nur einer Klasse angehört, gilt die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{r} r_i = g \qquad r_i : \text{Anzahl der Elemente einer Klasse}. \tag{2.24}$$

Falls ein Element zu sich selbst konjugiert ist und deshalb nach Gln. (2.21) und (2.22) mit allen Elementen der Gruppe vertauscht, bildet es eine Klasse für sich. Gemäß Gln. (2.1d) und (2.22) bildet in abelschen Gruppen jedes Element eine Klasse für sich. Dort ist die Klassenzahl r nach Gl. (2.24) mit der Gruppenordnung g identisch. Jedes Zentrum $\mathcal{C}$ als die Menge von Elementen, die nach (2.21) mit allen Gruppenelementen vertauscht, ist eine Klasse für sich. Das Einselement e ist demnach als Zentrum ebenfalls immer eine Klasse für sich.

Betrachtet man ein Element a mit der Ordnung n ($a^n = e$), dann findet man für die Elemente a' derselben Klasse mit Gl. (2.22)

$$a^n = (b \circ a' \circ b^{-1})^n = b \circ (a')^n \circ b^{-1} \quad \text{bzw.} \quad e = (a')^n,$$

wonach diese dieselbe Ordnung besitzen. Die Umkehrung dieser Aussage ist nicht gültig. Bleibt darauf hinzuweisen, dass bei einer Gruppe, die aus der Menge von

Rotationen alleine besteht, es keine Klasse gibt, die sowohl eigentliche wie uneigentliche Rotationen umfasst.

Beispiel 6 Bei der Gruppe C_{4v} werden die zueinander konjugierten Elemente in fünf Klassen eingeteilt (Abb. 2.2): $\mathcal{K}_e = \{e\}$, $\mathcal{K}_{c_4} = \left\{c_4, c_4^3\right\}$, $\mathcal{K}_{c_2} = \left\{c_4^2 = c_2\right\}$, $\mathcal{K}_{\sigma_v} = \left\{\sigma_v, \sigma_v'\right\}$, $\mathcal{K}_{\sigma_d} = \left\{\sigma_d, \sigma_d'\right\}$. Die Beziehung (2.24) lautet

$$\sum_{i=1}^{5} r_i = 1 + 2 + 1 + 2 + 2 = 8.$$

■

Eine Zerlegung der Gruppe $\mathcal{G}$ ganz anderer Art verwendet die sogenannte *Nebenklasse*. Mit der Untergruppe $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, \ldots, h_h\}$ und dem Element $a \in \mathcal{G}$, das nicht zur Untergruppe gehört ($a \notin \mathcal{H}$), wird die Menge der Elemente

$$\mathcal{L}_a = a \circ \mathcal{H} = \{a \circ h_1,\ a \circ h_2, \ldots,\ a \circ h_h\}$$

als *Linksnebenklasse* $\mathcal{L}_a$ bzgl. des Elements a bezeichnet. Entsprechendes gilt für die *Rechtsnebenklasse* $\mathcal{R}_a$ (Abb. 2.3). Dabei gilt das Element a als *Vertreter der Nebenklasse* $\mathcal{L}_a$ bzw. $\mathcal{R}_a$. Die Anzahl der verschiedenen Elemente einer Nebenklasse ist nach dem *Umordnungstheorem* mit der Anzahl der Elemente in der Untergruppe identisch

$$g_l = g_r \equiv g_h \equiv \operatorname{ord} \mathcal{H}. \tag{2.25}$$

Für den Fall, dass der Vertreter a zur Untergruppe $\mathcal{H}$ gehört, ist die Nebenklasse $\mathcal{L}_a$ bzw. $\mathcal{R}_a$ mit der Untergruppe $\mathcal{H}$ identisch. Andernfalls ($a \notin \mathcal{H}$) ist die Nebenklasse $\mathcal{L}_a$ bzw. $\mathcal{R}_a$ bzgl. a keine Untergruppe von $\mathcal{G}$. Nachdem das Einselement e in der Untergruppe $\mathcal{H}$ liegt, ist der Vertreter a auch ein Element der Nebenklasse ($a \in a \circ \mathcal{H}$), so dass jedes Element der Gruppe $\mathcal{G}$ mindestens in einer Nebenklasse liegt.

Die Untersuchung zweier Nebenklassen $\mathcal{K}_{a_1}$ und $\mathcal{K}_{a_2}$ verhilft zu der Aussage, dass diese entweder kein Element gemeinsam haben

$$\mathcal{K}_{a_1} \cap \mathcal{K}_{a_2} = \emptyset$$

oder beide identisch sind

$$\mathcal{K}_{a_1} \equiv \mathcal{K}_{a_2}.$$

Sei das Element b ein Mitglied der Linksnebenklasse $a \circ \mathcal{H}$ bzgl. des Vertreters a, dann ist die Linksnebenklasse $b \circ \mathcal{H}$ bzgl. des Vertreters b mit der Linksnebenklasse $a \circ \mathcal{H}$ identisch ($a \circ \mathcal{H} \equiv b \circ \mathcal{H}$). Demnach kann ein und dieselbe Nebenklasse aus jedem ihrer Mitglieder als Vertreter gebildet werden, so dass jedes beliebige Mitglied einer Nebenklasse ein gleichberechtigter Vertreter dieser Nebenklasse ist. Eine bedeutende Folgerung mündet in der Aufteilung einer Gruppe $\mathcal{G}$ nach Nebenklassen (Abb. 2.3a, b)

$$\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^{l} a_i \circ \mathcal{H} = \bigcup_{i=1}^{l} \mathcal{L}_i \tag{2.26a}$$

und

$$\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^{l} \mathcal{H} \circ a_i = \bigcup_{i=1}^{l} \mathcal{R}_i . \tag{2.26b}$$

Dabei ist die Anzahl l der Links- und Rechtsnebenklassen gleich. Die Wahl der Vertreter a_i ist nicht eindeutig. Es können mit verschiedenen Vertretern identische Nebenklassen gewonnen werden. Als *Index l der Untergruppe $\mathcal{H}$* bzgl. der Gruppe $\mathcal{G}$ versteht man die Anzahl l der Nebenklassen

$$\operatorname{ind}\mathcal{H} = l . \tag{2.27}$$

Beispiel 7 Bei der Gruppe C_{4v} erhält man etwa mit der Untergruppe $\mathcal{H} = C_4$ die Zerlegungen in Linksnebenklassen (Abb. 2.3)

$$C_{4v} = \{e \circ C_4,\ \sigma_v \circ C_4\} = \{\mathcal{L}_e, \mathcal{L}_{\sigma_v}\} \qquad \text{mit den Vertretern} \quad \{e, \sigma_v\},$$
$$C_{4v} = \left\{e \circ C_4,\ \sigma_v' \circ C_4\right\} = \{\mathcal{L}_e, \mathcal{L}_{\sigma_v'}\} \qquad \text{mit den Vertretern} \quad \left\{e, \sigma_v'\right\},$$
$$C_{4v} = \{c_4 \circ C_4,\ \sigma_v \circ C_4\} = \{\mathcal{L}_{c_4,}\mathcal{L}_{\sigma_v}\} \qquad \text{mit den Vertretern} \quad \{c_4, \sigma_v\},$$
$$C_{4v} = \{c_4 \circ C_4,\ \sigma_d \circ C_4\} = \{\mathcal{L}_{c_4}, \mathcal{L}_{\sigma_d}\} \qquad \text{mit den Vertretern} \quad \{c_4, \sigma_d\}.$$

■

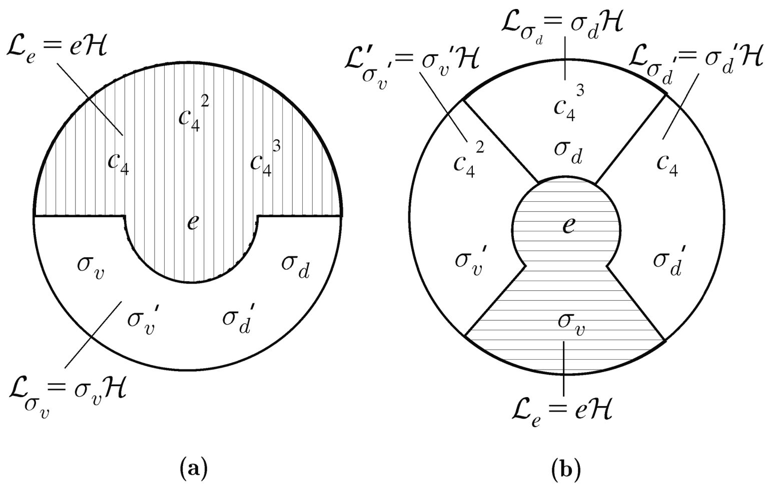

Abb. 2.3 Schematische Darstellung der Punktgruppe C_{4v} mit einer Aufteilung in Linksnebenklassen $\mathcal{L}$ der Untergruppe $\mathcal{H} = C_4 = \left\{e,\ c_4,\ c_4^2,\ c_4^3\right\}$ **(a)** und der Untergruppe $\mathcal{H} = C_s = \{e,\ \sigma_v\}$ **(b)**

Auch die Vertreter bilden nicht notwendig eine Gruppe. Häufig ergibt das Produkt zweier Vertreter ein Element der Untergruppe, so dass die Menge der Vertreter bezüglich der Multiplikation keine abgeschlossene algebraische Struktur bildet. Nachdem in der Zerlegung der Gruppe nach Gl. (2.26) stets einmal die Untergruppe selbst erscheint, kann man die Menge der Vertreter in einer Form wählen, die das Einselement enthält ($a_1 = e$) so dass die Zerlegung einer Gruppe $\mathcal{G}$ die Form

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} \cup \bigcup_{i=2}^{l} a_i \circ \mathcal{H} = \mathcal{H} \cup \bigcup_{i=2}^{l} \mathcal{H} \circ a_i$$

annimmmt.

Mit der vollständigen Aufteilung einer Gruppe nach Gl. (2.26) gewinnt man die Aussage, dass die Ordnung g einer Gruppe $\mathcal{G}$ ein ganzes Vielfaches l ($= \operatorname{ind} \mathcal{H}$) der Ordnung h einer Untergruppe $\mathcal{H}$ ist (Satz v. EULER-LAGRANGE)

$$\operatorname{ord} \mathcal{G} = \operatorname{ind} \mathcal{H} \operatorname{ord} \mathcal{H} \qquad \text{bzw.} \qquad g = l\, h \qquad l,\ h \in \mathbb{N}. \tag{2.28}$$

Wählt man als Untergruppe die zyklische Untergruppe $\mathcal{H}_a = \{e = a^n, a, \ldots, a^{n-1}\}$ eines Elements a mit der Ordnung $\operatorname{ord} a = n$, dann findet man mit Gl. (2.28), dass die Ordnung g der Gruppe ein Vielfaches l der Ordnung n des Elements a ist

$$g = l \operatorname{ord} a = l\, n. \tag{2.29}$$

Mit der Umformung

$$a^g = a^{ln} = (a^n)^l = e^l = e \tag{2.30}$$

erhält man das Ergebnis, dass jedes Element a einer Gruppe mit der Ordnung der Gruppe $\operatorname{ord} \mathcal{G} = g$ potenziert dem Einselement gleich ist (Satz v. FERMAT).

Für den Fall, dass die Ordnung einer Gruppe $\mathcal{G}$ eine Primzahl p ist, bekommt man für den Index der Untergruppe $\operatorname{ind} \mathcal{H} = 1$, so dass eine zyklische Gruppe mit nur einem Generator a ($\operatorname{ord} a = p$) vorliegt. Zudem hat dann die Gruppe außer den uneigentlichen Untergruppen $\mathcal{G}$ und $\{e\}$ keine eigentlichen Untergruppen und gilt deshalb als einfach.

Beispiel 8 Bei der Punktgruppe C_{4v} wird als Untergruppe gewählt:

(a) $\mathcal{H} = C_4$; dann ergibt sich mit den Vertretern $\{e, \sigma_v\}$ nach Gl. (2.26) die Aufteilung (Tab. 2.2) $C_{4v} = \{e \circ C_4,\ \sigma_v \circ C_4\}$. Mit $\operatorname{ord} C_{4v} = g = 8$ und $\operatorname{ord} C_4 = h = 4$ erhält man nach Gl. (2.28) $\operatorname{ind} C_4 = 2$.
(b) $\mathcal{H} = C_s$; dann ergibt sich mit den Vertretern $\left\{e,\ c_4,\ c_4^2,\ c_4^3\right\}$ die Aufteilung $C_{4v} = \left\{e \circ C_s,\ c_4 \circ C_s,\ c_4^2 \circ C_s,\ c_4^3 \circ C_s\right\}$. Mit $\operatorname{ord} C_s = h = 2$ erhält man nach Gl. (2.28) $\operatorname{ind} C_s = 4$.

■

Eine weitere charakteristische Menge von Elementen sind jene, die ein festes Element $a \in \mathcal{G}$ unter Konjugation in sich transformieren bzw. die mit a vertauschbar sind. Sie bilden eine Gruppe, nämlich den *Normalisator* von a in $\mathcal{G}$

$$\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(a) := \{g \,|\, g \circ a = a \circ g, \ g \in \mathcal{G}\}. \tag{2.31a}$$

Nach Potenzieren eines Elements $a = g \circ a \circ g^{-1}$ erhält man

$$a^n = (g \circ a \circ g^{-1})^n = g \circ a^n \circ g^{-1},$$

wonach mit dem Element a auch alle Potenzen von a den gleichen Normalisator besitzen. Der Normalisator einer Teilmenge $\mathcal{A}$ in $\mathcal{G}$ – insbesondere einer Untergruppe – ist die Menge der Gruppenelemente, die mit der Teilmenge vertauschbar sind

$$\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\mathcal{A}) := \{g \,|\, g \circ \mathcal{A} = \mathcal{A} \circ g, \ g \in \mathcal{G}\}. \tag{2.31b}$$

Dabei kann durchaus für einzelne Elemente $a \in \mathcal{A}$ die Vertauschbarkeit nicht erfüllt sein ($g \circ a \neq a \circ g$). Mit der strengeren Forderung, dass die Teilmenge $\mathcal{B}$ elementweise invariant ist unter der Konjugation mit Gruppenelementen $g \in \mathcal{G}$ erhält man den *Zentralisator*

$$\mathcal{C}_{\mathcal{G}}(\mathcal{A}) := \{g \,|\, g \circ a = a \circ g, \ \forall a \in \mathcal{A}, \ g \in \mathcal{G}\}. \tag{2.31c}$$

Er bildet eine Untergruppe und ist bezüglich des Einselements die Gruppe selbst ($\mathcal{C}_{\mathcal{G}}(e) = \mathcal{G}$).

Beispiel 9 Bei der Punktgruppe C_{4v} wird als festes Element a gewählt

(a) $a = e$: dann gilt $\mathcal{N}_{C_{4v}}(e) = C_{4v}$.
(b) $a = c_4$: dann gilt $\mathcal{N}_{C_{4v}}(c_4) = \{e, \ c_4, \ c_4^2, \ c_4^3\}$.
(c) $a = \sigma_v$: dann gilt $\mathcal{N}_{C_{4v}}(\sigma_v) = \{e, \ c_4^2 = c_2, \ \sigma_v, \ \sigma_v'\}$.

■

Falls das Element a des Normalisators selbstkonjugiert ist, dann gilt $\mathcal{N}_{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$. Andernfalls kann die Gruppe in Linksnebenklassen zerlegt werden

$$\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^{r} x_i \circ \mathcal{N}_{\mathcal{G}} \qquad x_1 = e.$$

Die Menge der zu a konjugierten verschiedenen Elemente $\{x_i \circ a \circ x_1^{-1} = a_i \,|\, i = 1, \ldots, r\}$ gehören zu einer Klasse $\mathcal{K}_a$ mit r_a Elementen. Mit der Anzahl v_a von Elementen im Normalisator $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ findet man dann die Beziehung

$$\operatorname{ord} \mathcal{G} = g = v_a \operatorname{ind} \mathcal{N}_{\mathcal{G}} = v_a r_a. \tag{2.32}$$

Danach ist die Anzahl r_a von Elementen einer Klasse $\mathcal{K}_a$ ein Teiler der Gruppenordnung. Die Anzahl r der Klassen ist jedoch im Allgemeinen kein Teiler von g. Die Summation über die Klassen liefert mit Gl. (2.24)

$$\sum_{a=1}^{r} v_a^{-1} = 1, \tag{2.33}$$

so dass mit $v_a \leq g$ die Zahl der Klassen einer endlichen Gruppe beschränkt ist.

Beispiel 10 Bei der Punktgruppe C_{4v} erhält man für die Klassen $\mathcal{K}_e = \{e\}$, $\mathcal{K}_{c_4} = \left\{c_4,\ c_4^3\right\}$, $K_{c_2} = \left\{c_4^2\right\}$, $\mathcal{K}_{\sigma_v} = \left\{\sigma_v,\ \sigma_v'\right\}$ und $\mathcal{K}_{\sigma_d} = \left\{\sigma_d,\ \sigma_d'\right\}$ die Vielfachen $v_e = 8$, $v_{c_4} = 4$, $v_{c_2} = 8$, $v_{\sigma_v} = 4$ und $v_{\sigma_d} = 4$. Insgesamt errechnet sich Gl. (2.33) zu $\sum_a v_a^{-1} = 1/8 + 1/4 + 1/8 + 1/4 + 1/4 = 1$.

■

Bedeutender als der Normalisator ist jene Untergruppe $\mathcal{N}$, deren Elemente b mit allen Gruppenelementen vertauschen und die deshalb zu sich selbst konjugiert ist

$$\mathcal{N} := a \circ \mathcal{N} \circ a^{-1} \quad \forall a \in \mathcal{G} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathcal{N} := \{b|\,\mathcal{G} \circ b = b \circ \mathcal{G},\ b \in \mathcal{G}\}. \tag{2.34a}$$

Sie wird als *invariante Untergruppe* bzw. als *Normalteiler* $\mathcal{N}$ bezeichnet. Gleichbedeutend damit ist die Forderung nach Übereinstimmung von Links- und Rechtsnebenklasse

$$\mathcal{L}_a = \mathcal{R}_a \qquad \forall a \in \mathcal{G}. \tag{2.34b}$$

Betrachtet man etwa abelsche Gruppen, dann ist wegen Gl. (2.1d) jede Untergruppe ein Normalteiler. Demnach ist auch das Zentrum $\mathcal{C}$ (2.21) ein Normalteiler. Einfach einzusehen ist die Aussage, dass Untergruppen vom Index zwei stets Normalteiler sind. Eine Untergruppe ist genau dann ein Normalteiler, wenn sie aus ganzen Klassen der Gruppe besteht. Jede Gruppe $\mathcal{G}$ besitzt deshalb zwei triviale Normalteiler, nämlich die uneigentliche Gruppen $\{e\}$ und $\mathcal{G}$.

Durch Bildung der sogenannten *Kommutatorgruppe* (1. *Ableitung von* $\mathcal{G}$)

$$\mathcal{G}' := \{a, b \in \mathcal{G}|\, a^{-1} \circ b^{-1} \circ a \circ b\}$$

erhält man eine Untergruppe von $\mathcal{G}$, die stets ein Normalteiler ist. Sie kann als Gegenstück zum Zentrum der Gruppe (2.21) aufgefasst werden. Während die Größe von letzterer ein „Maß“ für die Kommutativität darstellt, ist die Kommutatorgruppe umso größer, je weniger kommutativ die Gruppe ist. Eine Gruppe $\mathcal{G}$ ist genau dann abelsch, wenn die Kommutatorgruppe nur aus dem Einselement besteht ($\mathcal{G}' = \{e\}$).

Im Hinblick auf den Normalteiler kann man zwischen zwei Arten von Gruppen unterscheiden. Die *einfache Gruppe* besitzt keinen nicht-trivialen Normalteiler. Die *halbeinfache Gruppe* besitzt keinen abelschen Normalteiler. Folglich ist jede einfache Gruppe auch eine halbeinfache Gruppe und jede abelsche Gruppe ist weder einfach noch halbeinfach. Der Durchschnitt von Normalteiler einer Gruppe $\mathcal{G}$ ist ebenfalls ein Normalteiler von $\mathcal{G}$. Es ist leicht einzusehen, dass das Zentrum $\mathcal{C}$ einer

Gruppe $\mathcal{G}$ sowie deren Untergruppen auch Normalteiler von $\mathcal{G}$ sind. Sie werden als *zentrale Normalteiler* der Gruppe $\mathcal{G}$ bezeichnet.

Die Bedeutung von einfachen Gruppen liegt darin, dass sie die elementaren Bausteine von Gruppen darstellen. Zudem ist es gelungen, diese einfachen Gruppen vollständig zu klassifizieren, was mit allgemeinen endlichen Gruppen nicht möglich ist.

Man kann ausgehend von einer endlichen Gruppe $\mathcal{G}$ rekursiv eine abnehmende Folge von Untergruppen $\{\mathcal{G}_{(k)}\}$ definieren durch

$$\mathcal{G}_0 := \mathcal{G} \qquad \mathcal{G}_{(k)} := [\mathcal{G}, \mathcal{G}_{(k-1)}] \qquad k \geq 1$$

mit

$$\mathcal{G}_{(k)} \supseteq \mathcal{G}_{(k+1)} \quad k \geq 0,$$

so dass bei jedem Schritt die Kommutatorgruppe zwischen allen Elementen der Gruppe $\mathcal{G}$ und den der Untergruppen $\{\mathcal{G}_{(k-1)} | k \geq 1\}$ gebildet wird. Man erhält so eine Folge von Untergruppen $\{\mathcal{G}_{(k)}\}$, die sogenannte *untere Zentralreihe* (*absteigende Reihe*). Ein Gruppe $\mathcal{G}$ heißt *nilpotent* genau dann, wenn es ein k gibt, für das die Untergruppe $\mathcal{G}_{(k)}$ der unteren Zentralreihe trivial ist ($\mathcal{G}_{(k)} = \{e\}$). Diese Eigenschaft der *Nilpotenz* eignet sich als Kriterium zur Charakterisierung von endlichen Gruppen. Daneben kann man rekursiv abgeleitete Gruppen definieren durch

$$\mathcal{G}^0 := \mathcal{G} \qquad \mathcal{G}^{(k)} := [\mathcal{G}^{(k-1)}, \mathcal{G}^{(k-1)}] \qquad k \geq 1$$

mit

$$\mathcal{G}^{(k)} \supseteq \mathcal{G}^{(k+1)} \quad k \geq 0,$$

wodurch eine abnehmende Folge von Untergruppen, die sogenannte *Kommutatorreihe* (*abgeleitete Reihe*) erzeugt wird. Ein Gruppe $\mathcal{G}$ heißt *auflösbar*, wenn es ein k gibt, für das die Untergruppe $\mathcal{G}^{(k)}$ der unteren Zentralreihe trivial ist ($\mathcal{G}^{(k)} = \{e\}$).

Im Folgenden werden die Nebenklassen $\mathcal{L}_{a_i} = \{a_i \circ \mathcal{N} = \mathcal{N} \circ a_i | i = 1, \ldots, \mathrm{ind}\mathcal{N}\}$ bzgl. des Normalteilers $\mathcal{N}$ als Elemente einer Gruppe betrachtet, um damit die Gruppenaxiome (2.1) zu überprüfen.

(a) Mit

$$\mathcal{L}_{a_i} \circ \mathcal{L}_{a_j} = a_i \circ \mathcal{N} \circ a_j \circ \mathcal{N} = a_i \circ a_j \circ \mathcal{N} \circ \mathcal{N} = \mathcal{L}_{a_i \circ a_j}$$

findet man für das Produkt zweier Nebenklassen erneut eine Nebenklasse.

(b) Das Assoziativgesetz ist erfüllt.

(c) Mit dem Element

$$\mathcal{L}_e = e \circ \mathcal{N} = \mathcal{N}$$

erhält man für beliebige Nebenklassen

$$\mathcal{L}_{a_i} \circ \mathcal{N} = a_i \circ \mathcal{N} \circ \mathcal{N} = \mathcal{L}_{a_i},$$

so dass dieses das Einselement ist.

(d) Mit dem Element

$$\mathcal{L}_{a_i}^{-1} = (a_i \circ \mathcal{N})^{-1} = a_i^{-1} \circ \mathcal{N}$$

erhält man für beliebige Nebenklassen mit Gl. (2.34a)

$$\mathcal{L}_{a_i} \circ \mathcal{L}_{a_i}^{-1} = a_i \circ \mathcal{N} \circ a_i^{-1} \circ \mathcal{N} = a_i \circ a_i^{-1} \circ \mathcal{N} \circ \mathcal{N} = e \circ \mathcal{N} = \mathcal{L}_e,$$

so dass dieses das inverse Element ist.

Damit erfüllen die Nebenklassen bzgl. eines Normalteilers die Axiome einer Gruppe und gelten als Elemente der sogenannten *Faktorgruppe* (*Quotientengruppe*)

$$\mathcal{G}/\mathcal{N} := \{a_i \circ \mathcal{N}\} = \{\mathcal{N} \circ a_i\} \qquad a_i \in \mathcal{G}. \tag{2.35}$$

Nach dem Satz von EULER-LAGRANGE (Gl. 2.28) gilt für die Ordnung der Faktorgruppe

$$\operatorname{ord}(\mathcal{G}/\mathcal{N}) = g/\operatorname{ord}\mathcal{N} = \operatorname{ind}\mathcal{N}. \tag{2.36}$$

Die Zahl der Elemente ist so im Vergleich zur Gruppe $\mathcal{G}$ vermindert. Die Diskussion der Faktorgruppe erlaubt deshalb durch die Verdichtung auf eine kleinere Gruppe mitunter eine wesentliche Vereinfachung. Die Gruppe $\mathcal{G}$ lässt sich so durch den Normalteiler $\mathcal{N}$ in elementfremde Nebenklassen äquivalenter Elemente (Äquivalenzklassen) zerlegen.

Nachdem jede Gruppe mit Primzahlordnung p ($= \operatorname{ord}\mathcal{G}$) eine zyklische Gruppe und deshalb auch eine abelsche Gruppe mit der Ordnung des Generators p ($= \operatorname{ord} a$) ist, findet man eine solche Gruppe isomorph zur additiven Faktorgruppe $\mathbb{Z}_p = (\{0, 1, \ldots, p-1\} \bmod p, +)$ ($\cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$). Dabei bedeutet $\mathbb{Z}$ bzw. $p\mathbb{Z}$ die Gruppe der additiven ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +)$ bzw. $(p\mathbb{Z} = \{pz | z \in \mathbb{Z}\}, +)$.

Beispiel 11 Bei der Punktgruppe C_{4v} werden die folgenden Untergruppen betrachtet:

(a) $C_s = \{e, \sigma_v\}$ besteht nicht aus ganzen Klassen und ist kein Normalteiler.

(b) $C_{2v} = \{e, c_4^2, \sigma_v, \sigma_v'\}$ besteht aus den ganzen Klassen $\{e\}$, $\{c_4^2\}$, $\{\sigma_v, \sigma_v'\}$ und ist ein Normalteiler.

(c) $C_4 = \{e, c_4, c_4^2, c_4^3\}$ besteht aus den ganzen Klassen $\{e\}$, $\{c_4, c_4^3\}$, $\{c_4^2\}$ und ist ein Normalteiler; die Faktorgruppe ist $C_{4v}/C_4 = \{\{e, c_4, c_4^2, c_4^3\}, \{\sigma_v, \sigma_v', \sigma_d, \sigma_d'\}\} = \{e \circ C_4, \sigma_v \circ C_4\} = \{\mathcal{L}_e, \mathcal{L}_{\sigma_v}\}$ mit der Ordnung (Gl. 2.36) $\operatorname{ord}(C_{4v}/C_4) = \operatorname{ind} C_4 = 2$.

C_{4v} hat einen nicht-trivialen Normalteiler und ist deshalb nicht einfach. Der Normalteiler ist eine abelsche Gruppe, so dass die Punktgruppe C_{4v} auch nicht als halbeinfach gilt.

Beispiel 12 Die *spezielle orthogonale Gruppe* $SO(3)$ besitzt nur triviale Normalteiler und gilt deshalb als einfach.

Beispiel 13 Die *eigentliche euklidische Gruppe* $E^+(3)$, die neben den eigentlichen Rotationen $\boldsymbol{d} \in SO(3)$ auch die Translationen $\boldsymbol{t}$ im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ umfasst, hat wegen

$$\boldsymbol{d}\boldsymbol{t}\boldsymbol{d}^{-1} = \boldsymbol{t}' \qquad \boldsymbol{d} \in SO(3) \qquad \boldsymbol{t},\ \boldsymbol{t}' \in \mathbb{R}$$

die Menge der Translationen als Normalteiler. Sie ist deshalb keine einfache Gruppe. Darüberhinaus ist wegen der Vertauschbarkeit der Translationen dieses Normalteilers eine abelsche Untergruppe, so dass die Gruppe $E^+(3)$ auch nicht halbeinfach ist.

Beispiel 14 Vergleicht man die Transformation (2.15) der Operatoren $\boldsymbol{B}$ (2.14a) mit der Transformation (2.3) der Operatoren $\boldsymbol{A}$, dann kann die *euklidische Gruppe* $E(3)$ in drei Dimensionen als eine Untergruppe der *allgemeinen linearen Gruppe* $GL(4, \mathbb{R})$ in vier Dimensionen aufgefasst werden

$$E(3) = \{\{\boldsymbol{d}|\boldsymbol{t}\} \in GL(4, \mathbb{R})|\boldsymbol{d} \in O(3), \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^3\}.$$

■

2.3 Abbildungen

Bei den Abbildungen einer Gruppe $\mathcal{G}$ in eine andere Gruppe $\mathcal{G}'$ können unterschiedliche Forderungen gestellt werden. Setzt man den Erhalt der algebraischen Struktur $\{\mathcal{G}, \circ\}$ voraus, so spricht man von Morphismen.

Ein *Gruppen-Homomorphismus* ist die Abbildung ψ einer Gruppe $\mathcal{G}$ mit der Verknüpfung „$\circ$" in eine Gruppe $\mathcal{G}'$ mit der Verknüpfung „$*$"

$$\psi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}', \tag{2.37a}$$

so dass die Forderung nach Strukturerhaltung

$$\psi(a \circ b) = \psi(a) * \psi(b) \qquad \forall a, b \in \mathcal{G}, \tag{2.37b}$$

erfüllt ist (Abb. 2.4). Demnach ist das Bild der Verknüpfung der Elemente a und b gleich der Verknüpfung der Bilder von a und b. Falls die Abbildung injektiv ist, nennt man sie einen *Monomorphismus*, im surjektiven Fall wird die Bezeichnung *Epimorphismus* benutzt.

Die *Selbstabbildung* bzw. der *Endomorphismus* bezeichnet die homomorphe Abbildung ψ einer Gruppe $\mathcal{G}$ in die Gruppe $\mathcal{G}'$ mit derselben Verknüpfung

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{G}\times\mathcal{G} \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "\psi\times\psi"'] & \mathcal{G} \arrow[d, "\psi"] \\
\mathcal{G}'\times\mathcal{G}' \arrow[r, "*"'] & \mathcal{G}'
\end{tikzcd}
$$

Abb. 2.4 Schematische Darstellung des Homomorphismus ψ zwischen den Gruppen $\{\mathcal{G}, \circ\}$ und $\{\mathcal{G}, *\}$ durch ein kommutatives Diagramm ($\psi \circ = * \, (\psi \times \psi)$)

$$\psi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}' \qquad \text{mit} \qquad \mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}. \tag{2.38}$$

Der *Isomorphismus* bezeichnet die umkehrbar eindeutige (injektive und surjektive = bijektive) homomorphe Abbildung ψ (2.37) einer Gruppe $\mathcal{G}$ auf eine Gruppe $\mathcal{G}'$, wodurch die algebraischen Strukturen beider Gruppen isomorph sind, was als Äquivalenzbeziehung

$$\mathcal{G} \cong \mathcal{G}'. \tag{2.39}$$

ausgedrückt wird. Für den Fall, dass die Strukturen $\{\mathcal{G}, \circ\}$ und $\{\mathcal{G}', *\}$ identisch sind, ist die isomorphe Abbildung ψ der Gruppe $\mathcal{G}$ auf sich selbst ein *Automorphismus*.

Betrachtet man etwa eine Abbildung ψ_b in der Form einer Konjugation mit einem festen Element b

$$\psi_b : \begin{cases} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \\ a \longmapsto b \circ a \circ b^{-1}, \end{cases} \tag{2.40}$$

dann ist diese nach (2.37)

$$(b \circ a' \circ b^{-1}) \circ (b \circ a'' \circ b^{-1}) = b \circ a' \circ a'' \circ b^{-1} \qquad a', a'' \in \mathcal{G}$$

ein Homomorphismus. Mit

$$b \circ a' \circ b^{-1} = b \circ a'' \circ b^{-1} \qquad \text{folgt} \qquad a' = a'',$$

so dass die Abbildung eindeutig (injektiv) ist. Zudem gibt es zu jedem Element $(b \circ a \circ b^{-1})$ genau ein Urbild a, so dass die Abbildung auch umkehrbar eindeutig (surjektiv) ist. Demnach ist die Abbildung (2.40) insgesamt ein Automorphismus von $\mathcal{G}$ mit Umkehrabbildung

$$(\psi_b)^{-1} = \psi_{b^{-1}},$$

der als *innerer Automorphismus* bezeichnet wird. Jeder andere Automorphismus, der nicht diese Form (2.40) annimmt heißt *äußerer Automorphismus*. Die Automorphismen der Gruppe $\mathcal{G}$ bilden mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe Aut($\mathcal{G}$). Dabei sind alle inneren Automorphismen eine Untergruppe Int($\mathcal{G}$), die sogar ein Normalteiler ist.

Beispiel 1 Ein Beispiel zum Homomorphismus ist die Abbildung ψ der Menge aller reellen Zahlen mit der Verknüpfung „Addition" $(\mathbb{R}, +)$ in die Menge aller reellen Zahlen mit der Verknüpfung „Multiplikation" $(\mathbb{R}, \cdot)$

$$\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

gemäß der Definition

$$\psi := a \longmapsto \exp a \qquad a \in (\mathbb{R}, +) \qquad \exp a \in (\mathbb{R}, \cdot).$$

Wegen

$$\exp(a_1 + a_2) = \exp a_1 \exp a_2 \qquad a_1, a_2 \in (\mathbb{R}, +)$$

wird die Forderung (2.37) erfüllt.

Beispiel 2 Ein Beispiel zum Endomorphismus ist die Abbildung der Punktgruppe $\mathcal{G} = C_{4v}$ in die Untergruppe $\mathcal{G}' = C_s = \{e, \sigma_v\}$ gemäß

$$\left\{e, c_4, c_4^2, c_4^3\right\} \xrightarrow{\psi} e, \quad \left\{\sigma_v, \sigma_v', \sigma_d, \sigma_d'\right\} \xrightarrow{\psi} \sigma_v$$

bzw.

$$L_e = e \circ \mathcal{N} \xrightarrow{\psi} e, \quad L_{\sigma_v} = \sigma_v \circ \mathcal{N} \xrightarrow{\psi} \sigma_v.$$

Beispiel 3 Ein Beispiel zum Isomorphismus ist die Abbildung ψ der Menge aller positiven, reellen Zahlen mit der Verknüpfung „Multiplikation" $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ auf die Menge der reellen Zahlen mit der Verknüpfung „Addition" $(\mathbb{R}, +)$

$$\psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

gemäß der Definition

$$\psi := a \longmapsto \ln a \qquad a \in (\mathbb{R}^+, \cdot) \qquad \ln a \in (\mathbb{R}, +).$$

Wegen

$$\ln(a_1 a_2) = \ln a_1 + \ln a_2$$

wird die Forderung (2.37) erfüllt.

Beispiel 4 Ein weiteres Beispiel zum Isomorphismus ist die Abbildung ψ der Punktgruppe $\mathcal{G} = C_{4v}$ auf die Punktgruppe $\mathcal{G}' = D_4 = \{e, c_4, c_4^2, c_4^3, c_2, c_2', c_2'', c_2'''\}$ gemäß

$$e \xrightarrow{\psi} e, \quad c_4 \xrightarrow{\psi} c_4, \quad c_4^2 \xrightarrow{\psi} c_4^2, \quad c_4^3 \xrightarrow{\psi} c_4^3$$
$$\sigma_v \xrightarrow{\psi} c_2, \quad \sigma_v' \xrightarrow{\psi} c_2', \quad \sigma_d \xrightarrow{\psi} c_2'', \quad \sigma_d' \xrightarrow{\psi} c_2'''.$$

Dabei sind die Elemente c_2, c_2', c_2'' und c_2''' zweizählige Rotationen, deren Achsen senkrecht zur Hauptrotationsachse gerichtet sind und in den Spiegelebenen σ liegen (Abb. 2.1)

Beispiel 5 Als Beispiel zum Automorphismus wird die Menge der positiven reellen Zahlen mit der Multiplikation als Verknüpfung betrachtet. Diese Gruppe $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ ist isomorph zur Komponente der Einheit $GL^+(1, \mathbb{R})$ der *allgemeinen linearen Gruppe* $GL(1, \mathbb{R})$ in einer Dimension (Beispiel 12 v. Abschn. 6.3). Die Abbildung ψ definiert durch

$$\psi := t \longmapsto t^2 \qquad t \in (\mathbb{R}^+, \cdot)$$

erfüllt die Forderung (2.37) und bedeutet ein isomorphe Abbildung von $\mathbb{R}^+$ auf sich selbst

$$\psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+.$$

Die Elemente t und t^2 sind zueinander konjugiert, so dass ein innerer Automorphismus vorliegt.

■

Bei einer homomorphen Abbildung ψ einer Gruppe $\mathcal{G}$ in eine Gruppe $\mathcal{G}'$ wird die Menge jener Elemente, die auf das Einselement e' abgebildet werden, als *Kern der Abbildung* $\mathrm{Ker}(\psi)$ bezeichnet

$$\mathrm{Ker}(\psi) := \{a \in \mathcal{G} \mid \psi(a) = e' \in \mathcal{G}'\}. \tag{2.41}$$

In solchen Fällen lässt sich zeigen, dass der Kern ein Normalteiler $\mathcal{N}$ der Gruppe $\mathcal{G}$ ist. Zudem ist die Abbildung $\psi(\mathcal{G})$ der Gruppe $\mathcal{G}$ auf die Faktorgruppe $\mathcal{G}/\mathrm{Ker}(\psi)$ isomorph (*Homomorphiesatz*)

$$\psi(\mathcal{G}) \cong \mathcal{G}/\mathcal{N} \qquad \mathcal{N} = \mathrm{Ker}(\psi). \tag{2.42}$$

Die Abbildung ψ ist im Besonderen isomorph genau dann, wenn der Kern der Abbildung ψ nur das Einselement e enthält ($\mathrm{Ker}(\psi) = \{e\}$) Diese bedeutenden Aussagen erlauben häufig an Stelle der Gruppe $\mathcal{G}$ die einfachere, zur Faktorgruppe isomorphe Gruppe $\psi(\mathcal{G})$ zu diskutieren.

Beispiel 6 Ein wichtiges Beispiel für eine homomorphe Abbildung – insbesondere in der nicht-relativistischen Quantenmechanik bei der Berücksichtigung des Elektronenspins – ist die Abbildung der *speziellen unitären Gruppe* $SU(2)$ auf die *spezielle orthogonale Gruppe* $SO(3)$. Während die erste die Transformationen eines zweikomponentigen Spinors $|\chi^{\mu}>$ mit der Spinvariablen $\mu = 1/2$ im zweidimensionalen HILBERT-Raum der Spinzustände erfasst, ermöglichen die Elemente der anderen Gruppe die eigentlichen Rotationen d ($\det \boldsymbol{d} = +1$) im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$.

Die Korrelation eines Elements $\boldsymbol{U} \in SU(2)$ mit einem Element $\boldsymbol{d} \in SO(3)$ gelingt mithilfe einer hermiteschen, spurlosen 2×2-Matrix $\boldsymbol{C}$, die sich als Linearkombination der drei Generatoren (4.43) bzw. der PAULI'schen Spinmatrizen

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

in der Form

$$\boldsymbol{C} = \sum_{k=1}^{3} x_k \boldsymbol{\sigma}_k = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & -x_3 \end{pmatrix} \tag{2.44}$$

ausdrücken lässt. Dabei verhalten sich die Spinmatrizen wie die drei Komponenten eines Basisvektors $\boldsymbol{\sigma}$ und die Entwicklungskoeffizienten $\{x_k | k = 1, 2, 3\}$ sind als Koordinaten eines Vektors $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ aufzufassen. Im Ergebnis wird der Vektor $\boldsymbol{x}$ als Matrix $\boldsymbol{C}$ ausgedrückt. Betrachtet man die unitäre Transformation

$$\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{U}\boldsymbol{C}\boldsymbol{U}^{-1} \tag{2.45}$$

mittels eines Elements $\boldsymbol{U} \in SU(2)$, so erhält man erneut eine hermitesche, spurlose Matrix $\boldsymbol{C}'$ verbunden mit den neuen Entwicklungskoeffizienten $\left\{x_k' | k = 1, 2, 3\right\}$ gemäß

$$\boldsymbol{C}' = \sum_{k=1}^{3} x_k' \sigma_k. \tag{2.46}$$

Nach Berechnung der rechten Seite von Gl. (2.45) und Gleichsetzen der Matrixelemente kann die lineare Transformation des Vektors $\boldsymbol{x}$ im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ ausgedrückt werden durch

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{x}. \tag{2.47}$$

Dabei ist die 3×3-Matrix $\boldsymbol{d}$ nur vom Element $\boldsymbol{U}$ abhängig. Die Länge des Vektors $\boldsymbol{x}$ bleibt bei dieser Transformation invariant, was mit der Invarianz der Determinante bei einer Äquivalenztransformation begründet werden kann (s. Gln. 2.44 und 2.45)

$$-\det \boldsymbol{C}' = -\det \boldsymbol{U} \det \boldsymbol{C} \det \boldsymbol{U}^{-1} = -\det \boldsymbol{C} = \sum_{k=1}^{3} x_k^2 = \sum_{k=1}^{3} \left(x_k'\right)^2. \tag{2.48}$$

Demnach ist die Transformation $\boldsymbol{d}$ eine Rotation im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$, die durch eine unitäre Transformation $\boldsymbol{U} \in SU(2)$ im zweidimensionalen Spinraum induziert wird. Mit dem Einselement $\boldsymbol{U} = \mathbf{1}_2$ bleibt nach Gln. (2.45) und (2.46) der Vektor $\boldsymbol{r}$ invariant, so dass die zugehörige Rotation nach (2.47) das Einselement impliziert ($\boldsymbol{d}(\boldsymbol{U} = \mathbf{1}_2) = \mathbf{1}_3$). Die Determinante nimmt dann den Wert Eins an ($\det \boldsymbol{d}(\boldsymbol{U} = \mathbf{1}_2) = 1$). Dieser Wert muss für alle Elemente $\boldsymbol{U}$ der kontinuierlich zusammenhängenden LIE-Gruppe $SU(2)$ gelten, da bei der kontinuierlichen Variation der Werte $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{U})$ keine Diskontinuität der Determinante $\det \boldsymbol{d}$ erlaubt ist. Demzufolge ist die Transformation $\boldsymbol{d}$ eine eigentliche Rotation, so dass jedem Element $\boldsymbol{U}$ der Gruppe $SU(2)$ ein Element $\boldsymbol{d}$ der Gruppe $SO(3)$ zugeordnet werden kann. Daneben erhält man dasselbe Element $\boldsymbol{d}$ auch durch die gleiche Abbildung ψ des Elements $-\boldsymbol{U}$, was durch die Form der Transformation (2.45) offensichtlich wird. Während nach Gln. (2.46) und (2.47) die Transformation der Matrix $\boldsymbol{C}$ linear mit der Rotation $\boldsymbol{d}$ verläuft, erkennt man in Gl. (2.45) eine Bilinearität der Transformation mit dem Element $\boldsymbol{U}$, die die Unabhängigkeit des Ergebnisses vom Vorzeichen garantiert. Damit kann die homomorphe Abbildung der Gruppe $SU(2)$ auf die Gruppe $SO(3)$ (*Epimorphismus*) mit der „zweideutigen“ Zuordnung

$$\psi(\pm \boldsymbol{U}) = \boldsymbol{d} \tag{2.49}$$

begründet werden.

Den funktionalen Zusammenhang der Abbildung ψ erhält man nach Zusammenfassung der Gln. (2.44), (2.45) und (2.46) zu

$$\sum_{k=1}^{3} x_k' \boldsymbol{\sigma}_k = \sum_{l=1}^{3} x_l \boldsymbol{U} \boldsymbol{\sigma}_l \boldsymbol{U}^{-1}, \tag{2.50a}$$

bzw. nach Substitution von $\boldsymbol{x}$ durch Gl. (2.47) und Koeffizientenvergleich zu

$$\sum_{l=1}^{3} \boldsymbol{d}_{lk} \boldsymbol{\sigma}_l = \boldsymbol{U} \boldsymbol{\sigma}_k \boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{\sigma}_k'. \tag{2.50b}$$

Danach transformieren sich die Spinmatrizen bei einer Rotation im $\mathbb{R}^3$ wie die Komponenten eines Basisvektors. Die nachfolgende sukzessive Multiplikation mit den Generatoren (2.43) und die Spurbildung unter Beachtung der Beziehung

$$\mathrm{sp}(\boldsymbol{\sigma}_k \boldsymbol{\sigma}_l) = \mathrm{sp}(\mathbf{1}_2 \delta_{kl} + i\epsilon_{klm} \boldsymbol{\sigma}_m) = \delta_{kl}\, \mathrm{sp}\, \mathbf{1}_2 + i\epsilon_{klm}\, \mathrm{sp}\, \boldsymbol{\sigma}_m = 2\delta_{kl} \tag{2.51}$$

(ϵ_{klm}: LEVI-CIVITA-Symbol s. Gl. 5.41) liefert

$$2x'_l = \sum_{k=1}^{3} x_k \,\mathrm{sp}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\sigma}_k\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_l), \tag{2.52}$$

woraus mit den Komponenten $\{x_k | k = 1, 2, 3\}$ als Basis die Elemente d_{kl} der Rotationsmatrix $\boldsymbol{d}$ resultieren

$$d_{kl}(\boldsymbol{U}) = \psi_{kl}(\boldsymbol{U}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sp}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\sigma}_k\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_l) \qquad k, l = 1, 2, 3 \quad \forall\, \boldsymbol{U} \in SU(2). \tag{2.53}$$

Bei der homomorphen Abbildung (2.49) bzw. (2.53) besteht der Kern aus den beiden Elementen

$$\mathcal{N}_K = \{\mathbf{1}_2\,,\ -\mathbf{1}_2\}.$$

Er ist ein (diskreter) Normalteiler, da er mit allen Elementen $\boldsymbol{U} \in SU(2)$ vertauscht. Demzufolge ist die Abbildung (2.49) – nämlich die Gruppe $SO(3)$ – isomorph zur Faktorgruppe

$$SO(3) \cong SU(2)/\mathcal{N}_K\,. \tag{2.54}$$

Umgekehrt gilt die Aussage, dass die surjektive Abbildung (2.49) homomorph ist und die Faktorgruppe isomorph ist zur Gruppe $SO(3)$ abgebildet wird (Gl. 2.54). Bleibt anzumerken, dass die kontinuierliche LIE-Gruppe $SU(2)$ trotz des Normalteilers $\mathcal{N}_K$ als einfach gilt, da sie keine kontinuierliche invariante Untergruppe (LIE'schen Normalteiler bzw. Ideal) besitzt (s. a. Beispiel 2 v. Abschn. 6.6).

■

2.4 Produkte

Eine Vereinfachung der Diskussion einer Gruppe gelingt häufig durch die Faktorisierung in Gruppen mit geringerer Ordnung. Dabei spielt der Begriff des direkten Produkts eine wesentliche Rolle.

Das *äußere direkte Produkt* ist die Menge aller Elemente $a \in \mathcal{G}$ mit

$$\mathcal{G} := \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2, \tag{2.55}$$

wobei die Untergruppen $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{G}$ und $\mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{G}$ den folgenden Bedingungen genügen:

(a) Vertauschbarkeit jedes Elements $h_1 \in \mathcal{H}_1$ mit jedem Element $h_2 \in \mathcal{H}_2$

$$h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1 \qquad \forall\, h_1 \in \mathcal{H}_1, h_2 \in \mathcal{H}_2. \tag{2.56a}$$

(b) Die Untergruppen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ haben nur das Einselement e gemeinsam

$$\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = e. \tag{2.56b}$$

(c) Jedes Element $a \in \mathcal{G}$ kann dargestellt werden durch

$$a = h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1 \qquad h_1 \in \mathcal{H}_1 \quad h_2 \in \mathcal{H}_2. \tag{2.56c}$$

Die Ordnung der Produktgruppe $\mathcal{G}$ ist dann

$$\operatorname{ord} \mathcal{G} = \operatorname{ord} \mathcal{H}_1 \operatorname{ord} \mathcal{H}_2.$$

Wegen der Vertauschbarkeit (2.56a) sind die Untergruppen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ Normalteiler. Demnach kann die Produktgruppe nicht eine einfache Gruppe sein. Betrachtet man die Faktorgruppe $\mathcal{G}/\mathcal{H}_1$ bzw. $\mathcal{G}/\mathcal{H}_2$, so findet man einen Isomorphismus zu den Untergruppen $\mathcal{H}_2$ bzw. $\mathcal{H}_1$

$$\mathcal{G}/\mathcal{H}_1 \cong \mathcal{H}_2 \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{G}/\mathcal{H}_2 \cong \mathcal{H}_1. \tag{2.57}$$

Hier ist zu beachten, dass die Umkehrung nicht gültig ist. Das bedeutet, dass mit dem Normalteiler $\mathcal{H}$ einer Gruppe $\mathcal{G}$ und der Faktorgruppe $\mathcal{G}/\mathcal{H} \cong \mathcal{H}'$ die Bildung der Produktgruppe

$$\mathcal{G}' = \mathcal{H} \times \mathcal{H}'$$

nicht die Gruppe liefert ($\mathcal{G} \neq \mathcal{G}'$).

Ausgehend von zwei Gruppen $\mathcal{G}_a = \{a_1, a_2, \ldots\}$ und $\mathcal{G}_b = \{b_1, b_2, \ldots\}$ kann eine Produktgruppe

$$\mathcal{G} := \mathcal{G}_a \times \mathcal{G}_b$$

festgelegt werden. Dabei ist das Produkt seiner Elemente gegeben durch

$$(a_i \circ b_j) \circ (a_k \circ b_l) = (a_i \circ a_k) \circ (b_j \circ b_l),$$

so dass die Bedingungen (2.56) erfüllt sind. Für den Fall $\mathcal{G}_a = \mathcal{G}_b = \mathcal{G}$ erhält man das Produkt

$$\mathcal{G}' = \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}, \tag{2.58}$$

das durch die Elemente $(a_i \circ a_j \in \mathcal{G}')$ erklärt wird. Es ist isomorph zur Gruppe $\mathcal{G}$

$$\mathcal{G}' \cong \mathcal{G}$$

und wird als *inneres direktes Produkt* bezeichnet. Ausgehend von zwei einfachen Gruppen $\mathcal{G}_a$ und $\mathcal{G}_b$, die keinen Normalteiler besitzen, erhält man in der Produktgruppe $\mathcal{G}' = \mathcal{G}_a \times \mathcal{G}_b$ einen Normalteiler, der nicht abelsch ist. Demnach ist jede Gruppe, die als direktes Produkt von einfachen Gruppe ausgedrückt werden kann, eine halbeinfache Gruppe. Umgekehrt kann jede halbeinfache Gruppe als direktes Produkt von einfachen Gruppen dargestellt werden.

Ersetzt man die Bedingung (2.56a) durch die schwächere Forderung nach nur einem Normalteiler, etwa $\mathcal{H}_1$ mit

$$h_2 \circ h_1 \circ h_2^{-1} = h_1 \quad \forall \ h_2 \in \mathcal{H}_2, \tag{2.59}$$

so kann man das sogenannte *halbdirekte Produkt* durch

$$G := H_1 \rtimes H_2 \tag{2.60}$$

definieren.

Beispiel 1 Die *orthogonale Gruppe* $O(3)$ in drei Dimensionen (*volle Rotationsgruppe*), die sowohl die eigentlichen wie die uneigentlichen Rotationen umfasst, besitzt zwei Untergruppen, die zudem Normalteiler sind. Es sind dies die *spezielle orthogonale Gruppe* $SO(3)$ als die Menge der eigentlichen Rotationen sowie die *Inversionsgruppe* C_i mit nur zwei diskreten Elementen nämlich dem Einselement e und der Inversion i ($C_i = \{e, i\}$). Damit kann die Gruppe als direktes Produkt

$$O(3) = SO(3) \times C_i. \tag{2.61}$$

formuliert werden. Als Produkt zweier einfacher Gruppen gilt die Produktgruppe $O(3)$ als halbeinfach. Nach Gl. (2.42) wird die Faktorgruppe isomorph auf die Gruppe $SO(3)$ abgebildet (s. a. Beispiel 1 v. Abschn. 6.5).

Beispiel 2 Die Rotationen zweier verschiedener Systeme im Raum $\mathbb{R}^3$ – etwa der Vektoren $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_2$ – werden im Ganzen betrachtet durch die Produktgruppe $\mathcal{G}$ der beiden einfachen speziellen orthogonalen Gruppe $SO(3)$ beschrieben

$$\mathcal{G} = SO(3) \times SO(3).$$

Dabei sind die Elemente $\boldsymbol{d}_1 \in SO(3)$ und $\boldsymbol{d}_2 \in SO(3)$, die die Rotationen der beiden Systeme darstellen, untereinander vertauschbar

$$\left\{\boldsymbol{x}_1' \, \boldsymbol{x}_2'\right\} = \boldsymbol{d}_1 \boldsymbol{d}_2 \left\{\boldsymbol{x}_1' \, \boldsymbol{x}_2'\right\} = \boldsymbol{d}_2 \boldsymbol{d}_1 \left\{\boldsymbol{x}_1' \, \boldsymbol{x}_2'\right\}$$

und erfüllen so die Bedingung (2.56). Für die Produktgruppe $\mathcal{G}$ existiert mit der Gruppe $SO(3)$ ein nicht-abelscher Normalteiler, so dass sie als halbeinfach gilt.

Beispiel 3 Bei der Punktgruppe C_{4v} kann mit dem Normalteiler $C_4 = \left\{e, \, c_4, \, c_4^2, \, c_4^3\right\}$ und der Untergruppe $C_s = \{e, \, \sigma_v\}$ das halbdirekte Produkt

$$C_{4v} = C_4 \rtimes C_s$$

gebildet werden.

Beispiel 4 Betrachtet man etwa die 6-dimensionale *euklidische Gruppe* $E(3)$, so findet man dort zwei Untergruppen. Einmal die Menge der Rotationen $\boldsymbol{d}$ und Rotations-Inversionen $-\boldsymbol{d}$, die isomorph ist zur 3-dimensionalen *orthogonalen Gruppe* ($\{\boldsymbol{d}|\boldsymbol{0}\} \in O(3)$). Zum anderen die Menge der Translationen, die isomorph ist zur 3-dimensionalen *Translationsgruppe* $\mathcal{T}$ als die Menge der Translationsvektoren

($\{\mathbf{1}|\boldsymbol{t}\} \in \mathcal{T}$) im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$. Betrachtet man nur den euklidischen Raum $\mathbb{R}^1$ in einer Dimension, so ist die Translationsgruppe isomorph zur Menge der reellen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung. Mit den Gln. (2.12) und (2.13) ergibt sich für die Transformation einer Translation $\{\mathbf{1}|\boldsymbol{t}\}$

$$\{\boldsymbol{d}|\boldsymbol{t}\}\{\mathbf{1}|\boldsymbol{t}\}\{\boldsymbol{d}|\boldsymbol{t}\}^{-1} = \{\boldsymbol{d}|\boldsymbol{t}+\boldsymbol{dt}\}\{\boldsymbol{d}|\boldsymbol{t}\}^{-1} = \{\mathbf{1}|\boldsymbol{dt}\} \qquad \forall\, \{\boldsymbol{d}|\boldsymbol{t}\} \in E(3)$$

erneut eine Translation. Diese ist zu sich selbst konjugiert, so dass nach Gl. (2.22) die Translationsgruppe $\mathcal{T}$ ein Normalteiler ist, der zudem eine abelsche Gruppe bildet. Die euklidische Gruppe ist demnach nicht einfach und erst recht nicht halbeinfach. Damit wird neben der Bedingung (2.56b) und (2.56c) die abgeschwächte Bedingung (2.59) erfüllt, wonach die gesamte euklidische Gruppe isomorph ist zu dem halbdirekten Produkt

$$E(3) \cong O(3) \ltimes \mathcal{T}. \tag{2.62a}$$

Beschränkt man die obigen Diskussionen auf die *eigentliche euklidische Gruppe* $E^+(3)$ mit nur eigentlichen Rotationen ($\boldsymbol{d} \in SO(3)$), dann gilt analog

$$E^+(3) \cong SO(3) \ltimes \mathcal{T}. \tag{2.62b}$$

■

Auch für zwei Klassen $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ einer Gruppe $\mathcal{G}$ kann eine *Produktklasse* $\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$ festgelegt werden als die Menge aller Elemente $k_1 \circ k_2$ mit $k_1 \in \mathcal{K}_1$ und $k_2 \in \mathcal{K}_2$. Die Zahl der insgesamt erreichbaren Produktelemente $k_1 \circ k_2$ ist das Produkt aus den Ordnungen der Klassen. Die Produktgruppe selbst lässt sich dann in ganze Klassen zerlegen

$$\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2 = \sum_{l=1}^{r} c_{12\,l}\, \mathcal{K}_l. \tag{2.63}$$

Beispiel 5 Bei der Punktgruppe C_{4v} wird die Multiplikationstafel der Klassen $\mathcal{K}_e, \mathcal{K}_{c_2}, \mathcal{K}_{c_4}, \mathcal{K}_{\sigma_v}, \mathcal{K}_{\sigma_d}$ unter Verwendung der Multiplikationstafel für die Elemente (Tab. 2.2) berechnet. Das Ergebnis ist in Tabelle 2.3 aufgelistet.

Tabelle 2.3 Multiplikationstafel für die Klassen $\mathcal{K}_e = \{e\}$, $\mathcal{K}_{c_4} = \left\{c_4,\, c_4^3\right\}$, $\mathcal{K}_{c_4^2=c_2} = \left\{c_4^2 = c_2\right\}$, $\mathcal{K}_{\sigma_v} = \left\{\sigma_v,\, \sigma_v'\right\}$, $\mathcal{K}_{\sigma_d'} = \left\{\sigma_d,\, \sigma_d'\right\}$ der Punktgruppe C_{4v}

$\mathcal{G} = C_{4v}$	$\mathcal{K}_e$	$\mathcal{K}_{c_4}$	$\mathcal{K}_{c_2}$	$\mathcal{K}_{\sigma_v}$	$\mathcal{K}_{\sigma_d}$
$\mathcal{K}_e$	$\mathcal{K}_e$	$\mathcal{K}_{c_4}$	$\mathcal{K}_{c_2}$	$\mathcal{K}_{\sigma_v}$	$\mathcal{K}_{\sigma_d}$
$\mathcal{K}_{c_4}$	$\mathcal{K}_{c_4}$	$\{2\mathcal{K}_e,\, 2\mathcal{K}_{c_2}\}$	$\mathcal{K}_{c_4}$	$2\mathcal{K}_{\sigma_d}$	$2\mathcal{K}_{\sigma_v}$
$\mathcal{K}_{c_2}$	$\mathcal{K}_{c_2}$	$\mathcal{K}_{c_4}$	$\mathcal{K}_e$	$\mathcal{K}_{\sigma_v}$	$\mathcal{K}_{\sigma_d}$
$\mathcal{K}_{\sigma_v}$	$\mathcal{K}_{\sigma_v}$	$2\mathcal{K}_{\sigma_d}$	$\mathcal{K}_{\sigma_v}$	$\{2\mathcal{K}_e,\, 2\mathcal{K}_{c_2}\}$	$2\mathcal{K}_{c_4}$
$\mathcal{K}_{\sigma_d}$	$\mathcal{K}_{\sigma_d}$	$2\mathcal{K}_{\sigma_v}$	$\mathcal{K}_{\sigma_d}$	$2\mathcal{K}_{c_4}$	$\{2\mathcal{K}_e,\, 2\mathcal{K}_{c_2}\}$

■

2.5 Operationen

Beim Zusammenspiel von Gruppen mit anderen Strukturen wird man den sogenannten *Transformationsgruppen* begegnen, mit deren Hilfe die Symmetrie von Räumen bzw. Mannigfaltigkeiten beschrieben werden kann. Dabei spielt der Begriff der *Gruppenoperation* (*Gruppenaktion*) eine wesentliche Rolle.

Eine Gruppe $\mathcal{G}$ mit der Verknüpfung $\circ$ wirkt als Transformationsgruppe auf einer nicht leeren Menge $\mathcal{M}$, falls jedes Element a der Gruppe eine bijektive (invertierbare) Selbstabbildung ist

$$a : \begin{cases} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \\ x \longmapsto a(x) \qquad \forall a \in \mathcal{G}, \end{cases} \tag{2.64a}$$

wobei die Verknüpfung $\circ$ die Hintereinanderschaltung zweier Operationen definiert

$$a \circ b(x) := a(b(x)) \qquad \forall a, b \in \mathcal{G} \qquad x \in \mathcal{M}. \tag{2.64b}$$

Mit diesen Voraussetzungen gilt für jede abstrakte Gruppe die Isomorphie zu einer Transformationsgruppe, die nach (2.64) eine Linksoperation erlaubt.

Betrachtet man einen Punkt x der Menge $\mathcal{M}$, dann erzeugt die Transformationsgruppe $\mathcal{G}$ eine Untermenge

$$\mathcal{O}(x) := \{y = a(x) \,|\, a \in \mathcal{G}\}, \tag{2.65}$$

die als das von $\mathcal{G}$ auf $\mathcal{M}$ erzeugte *Orbit* (*Bahn*) $\mathcal{O}(x)$ durch den Punkt x bezeichnet wird. Daneben definiert jeder Punkt x der Menge $\mathcal{M}$ eine Teilmenge $\mathcal{S}(x)$ der Gruppe $\mathcal{G}$, die den Punkt x invariant lässt

$$\mathcal{S}(x) := \{b \in \mathcal{G} \,|\, b(x) = x\}. \tag{2.66}$$

Sie bildet eine Untergruppe und wird als *Stabilisator* (*Isotropiegruppe*, *kleine Gruppe*) von x bezeichnet. Falls der Stabilisator nicht die triviale Gruppe ist, heißt der Punkt x ein *Fixpunkt* der Transformationsgruppe. Das Orbit eines Fixpunktes besteht nur aus einem Element. Nachdem jede Gruppe auf sich selbst durch Konjugation operiert, ist der Zentralisator eines Elements x gerade der Stabilisator bezüglich der Gruppenoperation.

Die Zerlegung der Transformationsgruppe $\mathcal{G}$ in Nebenklassen bezüglich des Stabilisators $\mathcal{S}(x)$

$$\mathcal{G} = \sum_{i=1}^{s} a_i \circ \mathcal{S}(x) \tag{2.67}$$

liefert die Vertreter $\{a_i \,|\, i = 1, \ldots, s(x)\}$, die das Orbit $\mathcal{O}(x)$ mit der Ordnung $s(x)$ gemäß

$$x_i = a_i(x) \qquad i = 1, \ldots, s(x) \tag{2.68}$$

erzeugen. Die Stabilisatoren $\mathcal{S}(x_i)$ von Punkten x_i desselben Orbits $\mathcal{O}(x)$ sind zueinander konjugierte Gruppen und gehen durch einen inneren Automorphismus auseinander hervor

$$\mathcal{S}(x_i) = a_i \circ \mathcal{S}(x) \circ a_i^{-1} = \mathcal{S}_{a_i}(x) \qquad i = 1, \ldots, s. \tag{2.69}$$

Ihre Elemente b_{a_i} sind zu $b \in \mathcal{S}(x)$ konjugiert

$$b_{a_i}(x_i) = a_i \circ b \circ a_i^{-1}(x_i) = a_i \circ b(x) = a_i(x) = x_i \tag{2.70}$$

und lassen die Punkte des Orbits (2.68) invariant. Für den Fall, dass die Vertreter $\{a_i \,|\, i = 1, \ldots, s(x)\}$ der Nebenklassen selbst einen Normalteiler $\mathcal{P}$ bilden, kann die gesamte Transformationsgruppe $\mathcal{G}$ als halbdirektes Produkt ausgedrückt werden

$$\mathcal{G} = \mathcal{S}(x) \ltimes \mathcal{P}. \tag{2.71}$$

Dabei wird die Gruppe $\mathcal{P}$ als symmetrische Gruppe des Orbits zum Stabilisator $\mathcal{S}(x)$ bezeichnet.

Die Wirkung einer Gruppe $\mathcal{G}$ auf die Menge $\mathcal{M}$ gilt genau dann als *treu* (*effektiv*), falls mit

$$a(x) = x \qquad a \in \mathcal{G} \quad \forall x \in \mathcal{M} \qquad \text{folgt} \qquad a = e. \tag{2.72}$$

Danach lässt nur das Einselement e alle Punkte der Menge fest, so dass der Kern der Abbildung (2.64) trivial ist. Als Konsequenz daraus findet man für zwei beliebige verschiedene Elemente a und b der treuen Gruppe $\mathcal{G}$ eine unterschiedliche Wirkung $a(x)$ und $b(x)$ auf einen beliebigen Punkt x der Menge.

Die Wirkung einer Gruppe $\mathcal{G}$ auf die Menge $\mathcal{M}$ wird genau dann als *frei* bezeichnet, falls mit

$$a \neq e \qquad a \in \mathcal{G} \qquad \text{folgt} \qquad a(x) \neq x \qquad \forall x \in \mathcal{M}. \tag{2.73}$$

Demnach hat bei einer freien Gruppe nur das Einselement e Fixpunkte, so dass es trivial wirkt.

Schließlich wirkt eine Gruppe $\mathcal{G}$ auf die Menge $\mathcal{M}$ *transitiv* genau dann, falls sich zwei beliebige Punkte x und x' von $\mathcal{M}$ stets durch ein Orbit verbinden lassen, wonach die Menge nur aus einem Orbit besteht. Demnach existiert zu zwei beliebigen Punkten von $\mathcal{M}$ wenigstens ein Gruppenelement $a \in \mathcal{G}$, so dass gilt

$$x' = a(x). \tag{2.74}$$

Für den Fall, dass es genau ein Gruppenelement a gibt, wirkt die Gruppe *einfach transitiv*.

Beispiel 1 Betrachtet man etwa ein Quadrat, dann wird dessen Symmetrie durch die endliche Punktgruppe $\mathcal{G} = C_{4v}$ beschrieben (Abb. 2.1). Die Punktmenge ist die Menge der Eckpunkte $\mathcal{M} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Nach Wahl des Punktes 1 findet man als Stabilisator nach Gl. (2.66) die Untergruppe $\mathcal{S}(1) = C_s$, deren Elemente e und σ_d die Invarianz des Punktes 1 garantieren. Die Zerlegung der gesamten Gruppe nach Nebenklassen bzgl. dieser Untergruppe C_s nach Gl. (2.67) ergibt (s. a. Beispiel 8 v. Abschn. 2.2)

$$C_{4v} = e \circ C_s + c_4 \circ C_s + c_4^2 \circ C_s + c_e^3 \circ C_s.$$

Mit den Vertretern $\{e, c_4, c_4^2, c_4^3\}$ der Nebenklassen erhält man nach Gl. (2.68) die Punktmenge $\{1, 2, 3, 4\}$, die das Orbit $\mathcal{O}(1)$ des Punktes 1 zur Untergruppe C_s mit der Ordnung $s(1) = 4$ bildet. Die zur Untergruppe C_s konjugierten Gruppen sind nach Gl. (2.69)

$$C_{s,e} = \{e, \sigma_v\}, \quad C_{s,c_4} = \{e, \sigma_v'\}, \quad C_{s,c_4^2} = \{e, \sigma_d\}, \quad C_{s,c_4^3} = \{e, \sigma_d'\},$$

deren Elemente jeweils den Punkt 1, 2, 3 und 4 invariant lassen. Nachdem die Vertreter der Nebenklassen selbst eine invariante Untergruppe bilden, nämlich die (zyklische) Punktgruppe C_4, die zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_4 isomorph ist, gelingt eine Faktorisierung der gesamten Gruppe durch ein halbdirektes Produkt (Beispiel 3 v. Abschn. 2.4).

Die Wirkung der Gruppe C_{4v} auf die Punktmenge $\mathcal{M}$ ist treu, da nur das Einselement e alle Punkte $\mathcal{M}$ invariant lässt. Betrachtet man etwa die Punkte 1 und 3 – bzw. 2 und 4 – dann findet man außer dem Einselement e auch das Element σ_d – bzw. σ_d' –, das trivial auf diese Punkte wirkt und sie invariant lässt. Demzufolge wirkt die Gruppe C_{4v} nicht frei auf $\mathcal{M}$.

Schließlich wirkt die Gruppe C_{4v} transitiv auf $\mathcal{M}$, da es zu zwei Punkten x und x' wenigstens ein Gruppenelement gibt, das den Punkt x in x' überführt. Für das Punktepaar 1 und 2 etwa ist es das Gruppenelement c_4, nämlich eine Rotation mit dem Winkel $\pi/2$ nach links. Daneben ermöglicht auch die Spiegelung σ_v diese Transformation. Demnach gibt es für jedes Punktepaar x und x' mehr als ein Gruppenelement, das die Transformation (2.74) erfüllt, so dass die Gruppe C_{4v} nicht einfach transitiv auf $\mathcal{M}$ wirkt.

■

http://www.springer.com/978-3-642-20378-7

Lie-Gruppen und Lie-Algebren in der Physik
Eine Einführung in die mathematischen Grundlagen
Böhm, M.
2011, VIII, 520 S. 65 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-642-20378-7