Einleitung.
Numerische Berechnungen im Gebiete der elliptischen Funktionen.

Für die Lösung von Aufgaben mittels elliptischer Funktionen, die bis zur Gewinnung von numerischen Endergebnissen getrieben werden müssen, werden hier zunächst einleitend Regeln und Methoden zur numerischen Berechnung der in der Theorie der elliptischen Funktionen auftretenden Grössen zusammengestellt.

0.1 Berechnung der Perioden bei gegebenen Invarianten.

Es sei eine besondere zweiblättrige Riemannsche Fläche mit vier Verzweigungspunkten über der Ebene einer komplexen Veränderlichen z gegeben. Die Verzweigungspunkte mögen an den Stellen $z = e^{(1)}$, $e^{(2)}$, $e^{(3)}$, $e^{(4)}$ gelegen sein, die die Lösungen der biquadratischen Gleichung:

$$(1) \qquad c_0 z^4 + 4c_1 z^3 + 6c_2 z^2 + 4c_3 z + c_4 = 0$$

sein mögen. Nach I, 121 ff.[1] berechnet man aus den Koeffizienten $c_0, c_1, \dots$ die zugehörigen Werte der rationalen Invarianten g_2, g_3, J.

Die einfachste irrationale absolute Invariante ist nach (8) in I, 345 das „Doppelverhältnis“ λ der vier Verzweigungspunkte, gegeben durch:

$$(2) \qquad \lambda = \frac{e^{(1)} - e^{(2)}}{e^{(1)} - e^{(3)}} : \frac{e^{(4)} - e^{(2)}}{e^{(4)} - e^{(3)}} .$$

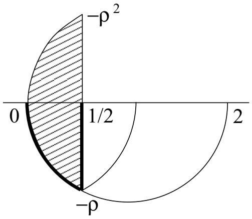

Fig. 1

Nach den in I, 345 ff. gegebenen Entwicklungen lassen sich die Bezeichnungen $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, $e^{(3)}$, $e^{(4)}$ in vier Arten so auf die Verzweigungspunkte verteilen, daß der numerische Wert λ einen Punkt des in Fig. 1 schraffierten Bereiches der λ-Ebene liefert. Unter ρ ist die komplexe dritte Wurzel der Einheit $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ verstanden, so daß die beiden Ecken des Be-

[1] I, 121 heißt Bd. 1, S. 121.

R. Fricke, *Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen, Dritter Teil*,
DOI 10.1007/978-3-642-20954-3_1, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012

reiches bei $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$ liegen. Der Kreis durch die beiden Ecken und den Nullpunkt $\lambda = 0$ begrenzt links den Bereich, während der rechte Rand die Verbindungsgerade der Ecken ist; vom Rande gilt nur der stärker ausgezogene Teil als dem Bereiche angehörig.

Um die transzendente Theorie zugänglich zu machen, bedarf man zunächst der Kenntnis der etwa „reduziert" (vergl. I, 178) gewählten Perioden ω_1, ω_2 des zur Riemannschen Fläche gehörenden Weierstraßschen Normalintegrals erster Gattung oder auch der entsprechenden Jacobischen Grössen iK' und K (vergl. (6) in I, 370). Als erstes Ziel hat man die Berechnung des Periodenquotienten:

$$\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{iK'}{K}$$

oder auch der Jacobischen Entwicklungsgrösse:

$$q = e^{\pi i \omega} = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$$

aus den gegebenen Invarianten anzusehen.

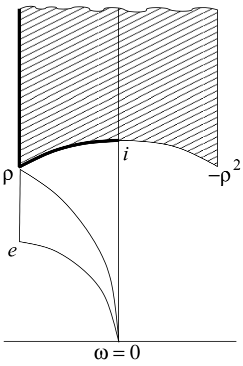

Fig. 2

Bei der Lösung dieser Aufgabe sind die Funktionen zweiter Stufe, und damit das Doppelverhältnis λ, denen der ersten Stufe, den rationalen Invarianten, überlegen. Der „reduzierte" Periodenquotient ω liefert bekanntlich einen Zahlwert, dessen Bildpunkt in der positiven ω-Halbebene dem in Fig. 2 schraffierten Bereiche angehört; dieser Bereich zieht längs der imaginären ω-Achse ins Unendliche, wir sagen „nach der Spitze $\omega = i\infty$", und vom Rande gehört nur der stark ausgezogene Teil dem Bereiche an. Der Ausdruck von ω in $\lambda = k^2$ ist nun aus den Formeln (11) in I, 465 unmittelbar zu entnehmen. Man erhält:

$$(3)\quad \pi i \omega = -\pi \frac{K'}{K} = \log k^2 - 4\log 2 + \frac{F_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; k^2)}{F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; k^2)}\ ,$$

wo F_1 und F die a. a. O. angegebenen Potenzreihen sind. Der Quotient dieser beiden Reihen werde in eine in der Umgebung von $k^2 = 0$ konvergente Reihe entwickelt:

$$(4)\qquad \pi i \omega = \log k^2 - 4\log 2 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{13}{2^6}k^4 + \frac{23}{2^6 \cdot 3}k^6 + \frac{2701}{2^{15}}k^8 + \cdots\ .$$

Man kann dieser Gleichung auch die Gestalt geben:

$$(5)\qquad \frac{\pi i \omega}{4} = \log\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^4 + 13\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^8 + \frac{368}{3}\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^{12} + \frac{2701}{2}\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^{16} + \cdots\ .$$

Durch Vermittlung der Exponentialreihe folgt weiter:

$$q^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^{13} + 1707\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^{17} + \cdots , \tag{6}$$

sowie hieraus endlich durch Erheben zur vierten Potenz:

$$q = \frac{1}{2^4}k^2 + \frac{1}{2^5}k^4 + \frac{21}{2^{10}}k^6 + \frac{31}{2^{11}}k^8 + \frac{6257}{2^{19}}k^{10} + \cdots . \tag{7}$$

Aus dem Vergleich der diedrisch geteilten Ebene von $\lambda = k^2$ (vergl. Fig. 83 in I, 445) mit der Dreiecksteilung der ω-Halbebene geht hervor, daß die vorliegenden Reihen für $|k| < 1$ konvergent sind, während der Punkt $\lambda = k^2 = 1$, dem Werte $\omega = 0$ entsprechend, der am Nullpunkte der λ-Ebene nächst gelegene irreguläre Punkt ist. Alle für uns in Betracht kommenden Werte von $\lambda = k^2$ (vergl. Fig. 1) liegen im Innern des Konvergenzkreises, abgesehen von den beiden Ecken $\lambda = -\rho^2$ und $-\rho$, bei denen man aber von vornherein die zugehörigen Werte $\omega = \rho$ und $-\rho^2$ kennt. Für den Gebrauch der aufgestellten Reihen ist es nötig zu wissen, ob alle Koeffizienten der Potenzen von k^2 positiv sind oder nicht. Hierüber ist bei der vorhin vollzogenen Herstellung der Reihen nicht ohne weiteres zu entscheiden. Es soll demnach noch eine zweite Art, die vorstehenden Formeln zu entwickeln, angegeben werden, bei der zugleich die aufgeworfene Frage im bejahenden Sinne beantwortet wird.

Man gehe von dem Ansatze aus:

$$\pi i\omega = 2\log k - 4\log 2 + a_1k^2 + a_2k^4 + a_3k^6 + a_4k^8 + \cdots \tag{8}$$

und setze entsprechend der Landenschen Transformation[2] 2ω an Stelle von ω, wobei k nach (2) in II, 492 in:

$$k_1 = k(2\omega) = \frac{1-k'}{1+k'} = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}} = \frac{k^2}{(1+\sqrt{1-k^2})^2}$$

übergeht. Aus (8) folgt somit:

$$2\pi i\omega = 4\log k - 4\log(1+\sqrt{1-k^2}) - 4\log 2 + a_1k_1^2 + a_2k_1^4 + a_3k_1^6 + \cdots ,$$

so daß der Vergleich mit (8) ergiebt:

$$2(a_1k^2+a_2k^4+a_3k^6+\cdots) = -4\log(1+\sqrt{1-k^2})+4\log 2+a_1k_1^2+a_2k_1^4+\cdots . \tag{9}$$

[2] Die Transformation ersten Grades $\omega' = \omega + 1$ ergiebt zwar Relationen zwischen den a_1, a_2, $a_3, \ldots$, aus denen diese Koeffizienten aber noch nicht berechenbar sind.

Für $|k| < 1$ kann man die Quadratwurzel nach der binomischen Reihe entwickeln und gewinnt:

$$\log\left(1+\sqrt{1-k^2}\right) = \log 2 + \log\left(1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{16}k^4 - \frac{1}{32}k^6 - \frac{5}{256}k^8 - \cdots\right),$$

wo in der letzten Klammer alle Koeffizienten abgesehen vom Absolutgliede negativ sind. Mit Benutzung der Logarithmusreihe folgt weiter:

$$-\log(1+\sqrt{1-k^2}) + \log 2 = \frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{32}k^4 + \frac{5}{96}k^6 + \frac{35}{1024}k^8 + \cdots$$

mit durchweg positiven Entwicklungskoeffizienten. Die Gleichung (9) ergiebt als identisch bestehend:

(10)

$$2a_1k^2 + 2a_2k^4 + 2a_3k^6 + \cdots = k^2 + \frac{3}{8}k^4 + \frac{5}{24}k^6 + \frac{35}{256}k^8 + \cdots + a_1k_1^2 + a_2k_1^4 + \cdots\ ,$$

wo (um es zu wiederholen) die Koeffizienten der ersten rechts stehenden Reihe durchweg positiv sind. Nun findet man weiter für k_1 folgende in der Umgebung von $k^2 = 0$ konvergente Entwicklung:

$$k_1 = \frac{(1-\sqrt{1-k^2})^2}{k^2} = k^2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}k^2 + \frac{5}{64}k^4 + \frac{7}{128}k^6 + \cdots\right),$$

wo wieder alle Koeffizienten positiv sind. Demnach treten endlich auch bei der Gleichung:

$$k_1^{2n} = k^{4n}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{4n} + \frac{n}{2^{4n}}k^2 + \cdots\right)$$

in der Klammer ausnahmslos positive Entwicklungskoeffizienten auf. Trägt man in (10) rechter Hand für k_1^2, k_1^4, $k_1^6, \ldots$ die hiermit sich ergebenden Potenzreihen in k^2 ein und ordnet die rechte Seite von (10) nach ansteigenden Potenzen von k^2 an, so ergiebt der Vergleich gleich hoher Potenzen von k^2 rechts und links zur Bestimmung der Koeffizienten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die Gleichungen:

$$2a_1 = 1\ , \qquad 2a_2 = \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{16}a_1\ , \qquad 2a_3 = \tfrac{5}{25} + \tfrac{1}{16}a_1\ ,$$
$$2a_4 = \tfrac{35}{256} + \tfrac{7}{128}a_1 + \tfrac{1}{256}a_2\ ,\ \ \ldots\ .$$

Auch weiterhin findet man für $2a_n$ stets einen linearen Ausdruck mit durchweg *positiven* rationalen Koeffizienten in $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{n}{2}}$ oder in $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{n-1}{2}}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Damit berechnen sich die $a_1, a_2, a_3, \ldots$ durchweg als *positive* rationale Zahlen. Insbesondere führen die wirklich ausgerechneten Rekursionsformeln zu einer Bestätigung der schon in (4) angegebenen Anfangskoeffizienten. Daß auch in den weiteren Reihen (5), (6) und (7) die Koeffizienten durchweg positiv sind, ist nun selbstverständlich.

Bei der Berechnung von ω oder q aus k^2 mittels der angegebenen Formeln wendet man zweckmässig vorerst *einmal* die Landensche Transformation an. Schreibt man λ statt k^2 und setzt $k_1^2 = \lambda_1$, so gilt nach (2) in II, 492:[3]

$$\lambda_1 = \frac{\lambda^2}{(1+\sqrt{1-\lambda})^4} \,.$$

Mittels dieser Gleichung hat man den in Fig. 1 dargestellten Bereich von λ auf die λ_1-Ebene abzubilden. Das Bild bedeckt einfach den in Fig. 3 schraffierten ganz nahe am Nullpunkte liegenden Bereich. Von den Randpunkten ist der mit a bezeichnete bei:

$$\lambda_1 = (-1+\sqrt{2})^4 = 0,02944\ldots$$

dem Nullpunkte am nächsten und der mit b bezeichnete bei:

$$\lambda_1 = -(2-\sqrt{3})^2 = -0,07180\ldots$$

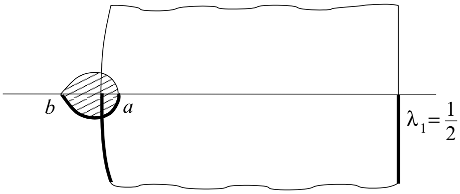

Fig. 3

dem Nullpunkte am fernsten[4]. Hiernach kommen nur noch Zahlen $\lambda_1 = k_1^2$ in Betracht, deren Beträge der Ungleichung:

$$|\lambda_1| < 0,072 \tag{11}$$

genügen. Die Reihen konvergieren für solche Werte λ_1 sehr schnell.

Um in dieser Hinsicht genauere Angaben zu machen, entnehmen wir aus (6) durch Ausübung der Landenschen Transformation:

$$q^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{k_1}}{2}\left(1 + 2\frac{\lambda_1}{16} + 15\left(\frac{\lambda_1}{16}\right)^2 + 150\left(\frac{\lambda_1}{16}\right)^3 + 1707\left(\frac{\lambda_1}{16}\right)^4\right) + R\,, \tag{12}$$

unter R den Reihenrest verstanden:

$$R = \frac{\sqrt{k_1}}{2}\left(a_5\lambda_1^5 + a_6\lambda_1^6 + a_7\lambda_1^7 + \cdots\right). \tag{13}$$

Da alle Koeffizienten a_5, a_6, ... positiv sind und die Bedingung (11) erfüllt ist, so gilt für den Absolutwert des Reihenrestes die Ungleichung:

$$|R| < \frac{1}{2}\sqrt[4]{0,072}\left(a_5(0,072)^5 + a_6(0,072)^6 + \cdots\right). \tag{14}$$

Man weiß nun aus Entwicklungen des zweiten unten folgenden Abschnitts, daß für:

---

[3] Vgl. die Umformung nach Gl. (8), S. 3. [*Anm. d. Hrsg.*]

[4] Man beweist leicht, daß $|\lambda_1|$ als Funktion von λ auf der Geraden zwischen $\lambda = \frac{1}{2}$ und $\lambda = -\rho^2$ keinen Extremwert annimmt.

$$k = -1 + \sqrt{2} < 0,4142136$$

die Werte:

$$\omega = i\sqrt{2}\,, \qquad q^{\frac{1}{4}} = e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$$

zutreffen. Aus (14) folgt die um so mehr bestehende Ungleichung:

$$|R| < \tfrac{\sqrt[4]{0{,}072}\cdot(0{,}072)^5}{\sqrt[4]{-1+\sqrt{2}}(-1+\sqrt{2})^5} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt[4]{-1+\sqrt{2}}\,\big(a_5(-1+\sqrt{2})^5 \\ + a_6(-1+\sqrt{2})^6 + \cdots\big)\,.$$

Der erste Bruch rechts ist $< 0,000126$; der übrige Bestandteil der rechten Seite hat zufolge der eben gemachten Angaben nach Formel (6) den Wert:

$$e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}} - \tfrac{\sqrt{-1+\sqrt{2}}}{2}\left(1 + \tfrac{3-2\sqrt{2}}{8} + 15\Big(\tfrac{3-2\sqrt{2}}{16}\Big)^2 + 150\Big(\tfrac{3-2\sqrt{2}}{16}\Big)^3 \right. \\ \left. + 1707\Big(\tfrac{3-2\sqrt{2}}{16}\Big)^4\right).$$

Man stellt fest, daß diese Zahl $< 0,0000015$ ist. Hieraus geht hervor, daß der absolute Betrag des Restgliedes R in (12) sicher $< 2 \cdot 10^{-10}$ ist.

Vornehmlich wichtig ist der Fall reeller Koeffizienten c in der Gleichung (1). Das gewählte λ ist dann entweder reell und dem Intervall $0 < \lambda \leqq \frac{1}{2}$ angehörig, oder es liefert einen Punkt auf dem stark ausgezogenen Rande des schraffierten Bereiches der Fig. 1. Sollte der Punkt dem von $\lambda = \frac{1}{2}$ nach $\lambda = -\rho$ ziehenden geraden Teile des Randes angehören, so übe man die Substitution:

$$\lambda' = \frac{-1}{\lambda - 1}$$

aus und gewinnt dadurch einen Punkt auf dem durch $\lambda = -\rho$ und $\lambda = 2$ begrenzten Kreisbogen des Radius 1 um $\lambda = 1$ (vergl. Fig. 1). Es läuft dies darauf hinaus, daß wir jetzt nicht mit dem reduzierten ω, sondern mit einem ω auf der Verbindungsgeraden des Punktes $\omega = \rho$ mit der Ecke e in Fig. 2 arbeiten. Hat man nun ein λ auf dem unteren Halbkreise des Radius 1 um $\lambda = 1$ (vergl. Fig. 1) und also ein ω auf der Geraden zwischen e und $\omega = i\infty$ (vergl. Fig. 2), so ist dieser Fall leicht reduzierbar auf den Fall eines reellen λ des Intervalles $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Man übe nämlich einmal die Landensche Transformation aus und gelangt zu:

$$\lambda' = \frac{\lambda^2}{(1 + \sqrt{1-\lambda})^4}\,, \qquad \omega' = 2\omega\,,$$

wo λ' reell im Intervalle $-1 < \lambda' < 0$ und $\omega' = -1 + i\eta$ mit $\eta > 1$ ist. Schreibt man endlich:

$$\lambda'' = \frac{\lambda'}{\lambda' - 1}\,, \qquad \omega'' = \omega' + 1\,,$$

so hat man ein reelles λ'' des Intervalles $0 < \lambda'' < \frac{1}{2}$ und ein $\omega'' = i\eta$ mit $\eta > 1$, womit der genannte einfache Fall erreicht ist.

Für diesen Fall hatte bereits Jacobi[5] eine Tafel berechnet, die sich sogar auf das Intervall $0 < \lambda < 1$ bezieht. Mit Jacobi nehmen wir als Argument nicht $\lambda = k^2$, sondern $\alpha = \arcsin k$; dabei wird α in Graden gemessen, so daß wir das Intervall von $\alpha = 0°$ bis $\alpha = 90°$ haben. Die Jacobische Tafel schreitet nach Zehnteln eines Grades fort und giebt die Werte $({}^{10}\log q + 10)$ mit fünf Dezimalstellen. Am Schlusse der Einleitung ist unter I. eine fünfstellige Tafel für $({}^{10}\log q + 10)$ abgedruckt, die nach Zwölfteln eines Grades fortschreitet[6].

Nach Berechnung von q und damit von ω gilt es weiter, die reduzierten Perioden selbst zu berechnen. Da man (vergl. die Formeln (6) in I, 370):

$$\omega_2 = \frac{2K}{\sqrt{e_2 - e_1}}\,, \qquad \omega_1 = \frac{2iK'}{\sqrt{e_2 - e_1}}\,, \qquad K' = -iK\omega$$

hat, so dürfen wir unsere Aufgabe auf die Berechnung von K beschränken. Unmittelbar ist K als Funktion von $\lambda = k^2$ nach I, 465 durch:

$$K = \frac{\pi}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \lambda + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 \lambda^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2 \lambda^3 + \cdots\right) \tag{15}$$

dargestellt. Aber wenn auch diese Reihe für ein λ im Innern des Bereiches der Fig. 1 konvergent ist, so ist sie doch gleichwohl nur sehr schlecht konvergent, wenn der absolute Betrag von $\lambda = k^2$ nicht hinreichend klein ist. Man hätte also nötigenfalls erst ein oder zwei Male die Landensche Transformation auszuüben, wofür in II, 492 die nötigen Formeln entwickelt sind.

Natürlich ist es auch möglich, ganz von der Darstellung (15) abzusehen und die Berechnung von K allein auf die wiederholte Landensche Transformation und damit auf das arithmetisch-geometrische Mittel von Gauß zu gründen. In dieser Hinsicht sei zunächst an die von Jacobi aufgestellten unendlichen Produkte für K erinnert, die durch die Gleichungen (12) und (14) in II, 494 gegeben sind. Noch geeigneter ist die ebenda unter (20) gewonnene Formel:

$$K = \frac{\pi}{2M(1, k')}\,, \tag{16}$$

wo $k' = \sqrt{1 - \lambda}$ ist und $M(1, k')$ das arithmetisch-geometrische Mittel zwischen 1 und k' ist. Für reelle Werte von λ im Intervalle $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ ist diese Formel zur numerischen Berechnung von K sogar ausserordentlich geeignet, da der Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels sehr schnell konvergiert. Als Beispiel werde $\lambda = \frac{1}{2},\ k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gewählt und der Wert:

---

[5] Vergl. Jacobi's Werke, Bd. 1, S. 363 ff.

[6] Vergl. die im „Traité de calcul intégral“ von Bertrand (Paris, 1870) mitgeteilte Tafel, die gegenüber Jacobi die Zwölfteilung des Grades bevorzugt.

$$K = \frac{\pi}{2M(1, \frac{1}{\sqrt{2}})} = \frac{\pi}{\sqrt{2}M(\sqrt{2}, 1)}$$

bestimmt. Man hat also in die Formelkette (17) in II, 495 für a_0 und b_0 die Werte $\sqrt{2}$ und 1 einzutragen. Man findet nach der von Gauß durchgeführten Rechnung[7]:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1,20710.67811.86547.52440\ldots\ , & b_1 &= 1,18920.71150.02721.06671\ldots\ ,\\
a_2 &= 1,19815.69480.94634.29555\ldots\ , & b_2 &= 1,19812.35214.93120.12260\ldots\ ,\\
a_3 &= 1,19814.02347.93877.20908\ldots\ , & b_3 &= 1,19814.02346.77307.20579\ldots\ ,\\
a_4 &= 1,19814.02347.35592.20744\ldots\ , & b_4 &= 1,19814.02347.35592.20743\ldots\ .
\end{aligned}$$

Bei der zweiten Anwendung des Algorithmus findet man also das Mittel bereits auf vier Stellen genau, bei der dritten auf neun Stellen und bei der vierten sogar auf 19 Dezimalstellen genau. Als Wert für K selbst ergiebt sich:

$$K = 1,8540746\ldots^{8}.$$

Nicht minder geeignet für die numerische Berechnung von K ist die aus (21) in I, 419 folgende Entwicklung:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots\ , \tag{17}$$

wo rechts die Reihe für den Nullwert der ϑ_3-Funktion steht. Man hat sich dabei auf den aus den Invarianten bereits berechneten Wert von q zu stützen. Die für einen reduzierten Periodenquotienten in Betracht kommenden Werte von q entsprechen (vergl. Fig. 2, S. 2) der Ungleichung:

$$|q| \leqq e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} < 0,066\ .$$

Unter dieser Voraussetzung ist die Reihe (17) ausserordentlich schnell konvergent. Nimmt man nur die beiden ersten Reihenglieder, so ist der Reihenrest absolut bereits $< 0,00004$, so daß man für den in (17) links stehenden Ausdruck einen Näherungswert erhält, dessen Differenz gegen den genauen Wert absolut kleiner als eine halbe Einheit der vierten Dezimalstelle ist. Nimmt man das nächste Glied $2q^4$ noch hinzu, so sinkt der Absolutbetrag des Reihenrestes in (17) rechts sogar unter $6 \cdot 10^{-9}$ herab. Wählt man wieder als Beispiel $\lambda = \frac{1}{2}$, also:

$$q = e^{-\pi} = 0,04321.39182.6\ldots\ ,$$

[7] Vergl. Gauß' Werke, Bd. 3, S. 364.

[8] Gauß hat eine nach halben Graden fortschreitende Tafel mit *siebenstelliger* Genauigkeit für die arithmetisch-geometrischen Mittel zwischen 1 und den Sinus der Winkel von 0° bis 90° berechnet (mitgeteilt in Bd. 3 von Gauß' Werken, S. 403), die man zur Berechnung von K auf Grund von (16) benutzen kann.

so findet man:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1{,}08643.48112.1\ldots\ ,$$
$$K = 1{,}85407.46804\ldots$$

In Legendre's „Traité des fonctions elliptiques etc." (Paris, 1825 bis 1828), Bd. 2, ist für die reellen $\lambda = k^2$ des Intervalles $0 < \lambda < 1$ eine Tafel der numerischen Werte von K mitgeteilt. Als Argument ist wieder $\alpha = \arcsin k$ benutzt, so daß das Intervall von $\alpha = 0°$ bis $90°$ in Betracht kommt. Die Tafel schreitet nach Graden fort und giebt die Werte von K auf zwölf Dezimalstellen. Die Legendresche Tafel für K ist auf 10 Stellen gekürzt am Schlusse der Einleitung unter II wiedergegeben. Ist die letzte Ziffer oder sind die letzten Ziffern überstrichen, so bedeutet das hier und weiterhin, daß der angegebene Wert um weniger als die Hälfte einer Einheit der letzten Stelle zu gross ist. Weiter ist am Schlusse der Einleitung unter III eine nach halben Graden fortschreitende Tafel der Werte ${}^{10}\log K$ auf sieben Dezimalstellen mitgeteilt. Die Tafeln geben für das einzelne α immer auch K' als das zum Komplementwinkel von α gehörende K. Die letzte Tafel ist für Interpolationsrechnungen brauchbar, da sich bereits die zweiten Differenzen langsam ändern.

Die Perioden E und E' des Legendreschen Normalintegrals zweiter Gattung sind durch die Gleichungen (14) in I, 373 gegeben. Hat man K und K' bereits berechnet, so kann man sich auf die Berechnung von E beschränken und hernach E' vermittels der Legendreschen Relation:

$$KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2}$$

bestimmen. Es liegt dann am nächsten, für E aus der Erklärung dieser Periode die Potenzreihe:

$$E = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1^2}{2^2}\cdot k^2 - \frac{1^2}{2^2\cdot 4^2}\cdot 3k^4 - \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\cdot 5k^6 - \cdots\right) \tag{18}$$

herzustellen, die für $|k| < 1$ konvergent ist. Indessen konvergiert diese Reihe, wenn nicht $|k|$ bereits sehr klein ist, keineswegs sehr schnell. Es empfiehlt sich demnach, an Stelle von E zunächst die Periode η_2 des Weierstraßschen Normalintegrals zweiter Gattung zu berechnen, die nach I, 372 zu E in der Beziehung steht:

$$\eta_2 = 2\sqrt{e_2 - e_1}E - \frac{2e_2K}{\sqrt{e_2 - e_1}}\ .$$

Dann kann man sich, nachdem q und ω_2 bereits berechnet sind, zur Bestimmung von η_2 der aus (15) in I, 271 folgenden Reihe:

$$\frac{1}{24} - \frac{\eta_2\omega_2}{8\pi^2} = \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{2q^4}{1-q^4} + \frac{3q^6}{1-q^6} + \frac{4q^8}{1-q^8} + \cdots \tag{19}$$

bedienen. Da $|q| < 0,066$ gilt, so konvergiert diese Reihe gut. Nimmt man z. B. nur die beiden ersten Reihenglieder, so ist der Reihenrest absolut genommen, wie die Abschätzung zeigt, bereits kleiner als eine Einheit der vierten Dezimalstelle. Für die reellen Werte von $\lambda = k^2$ zwischen 0 und 1 hat Legendre im zweiten Bande seines oben genannten Werkes eine nach Graden fortschreitende zwölfstellige Tafel mitgeteilt. Am Schlusse der Einleitung sind unter II und III nach Graden bezw. halben Graden fortschreitende Tafeln für E und ${}^{10}\log E$ mit zehn bezw. sieben Dezimalstellen gegeben, die mit den Tafeln für K vereint sind. Die Tafeln liefern wieder zugleich E' als das zum Komplementwinkel von α gehörende E.

0.2 Berechnung der Invarianten bei gegebenen Perioden.

Weit einfacher erledigt sich die Berechnung der Invarianten bei gegebenen Perioden ω_1, ω_2, da man hier an die Reihen für die Nullwerte der drei geraden ϑ-Funktionen anknüpfen kann, die für ein ω des Bereiches der Fig. 2 (S. 2) sehr schnell konvergieren. Nach Bestimmung von q hat man zur Berechnung jener Nullwerte nach I, 419 die Reihen:

$$\begin{aligned} \vartheta_0 &= 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - 2q^{25} + \dots\ , \\ \vartheta_2 &= 2q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + q^{20} + \dots)\ , \\ \vartheta_3 &= 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + 2q^{25} + \dots\ . \end{aligned} \tag{1}$$

Da $|q| < 0,066$ gilt, so ist, falls man sich nur der beiden ersten Reihenglieder bedient, der Fehler bei ϑ_0 und ϑ_3 absolut bereits $< 4 \cdot 10^{-5}$ und bei ϑ_2 sogar $< 2 \cdot 10^{-7}$. Benutzt man die Näherungsformeln:

$$\vartheta_0 = 1 - 2q + 2q^4\ , \qquad \vartheta_2 = 2q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2 + q^6)\ , \qquad \vartheta_3 = 1 + 2q + 2q^4\ , \tag{2}$$

so ist der Fehler bei ϑ_0 und ϑ_3 absolut $< 6 \cdot 10^{-9}$ und bei ϑ_2 absolut $< 4 \cdot 10^{-10}$. Ist insbesondere das Periodenverhältnis ω rein imaginär, so gilt für die in diesem Falle reelle positive Zahl q die Ungleichung $q < 0,0433$. Der in (2) gegebene Wert ϑ_0 ist dann zwar etwas zu groß und der Wert ϑ_3 etwas zu klein; aber der Fehler ist in beiden Fällen $< 3 \cdot 10^{-10}$. Auch ϑ_2 ist etwas zu klein, aber der Fehler ist $< 2 \cdot 10^{-12}$.

Liegt ω auf dem stark ausgezogenen Rande des Bereiches der Fig. 2 (S. 2), so wird man, falls $|\omega| = 1$ ist, statt ω lieber den Periodenquotienten $\omega' = \frac{-1}{\omega+1}$ gebrauchen. Man hat dann nur noch Werte $\omega = -\frac{1}{2} + i\eta$ mit $\eta \geqq \frac{1}{2}$. Die zugehörigen Werte ϑ_0 und ϑ_3 sind konjugiert imaginär:

$$\vartheta_0 = \varphi + i\psi\ , \qquad \vartheta_3 = \varphi - i\psi\ ,$$

wo φ und ψ als reelle positive Grössen gegeben sind durch:

$$\varphi = 1 + 2q^4 + 2q^{16} + \dots\ , \qquad \psi = 2|q|(1 + q^8 + q^{24} + \dots)\ .$$

Man übe dann einmal die Landensche Transformation aus, wofür die Formeln in II, 494 ff. gegeben sind. Setzt man:

$$q' = -q^2 = e^{-2\pi\eta} \ ,$$

so ist wegen $\eta \geqq \frac{1}{2}$ jetzt wieder q' reell, positiv und $< 0,0433$. Man berechne wie oben $\vartheta_0(q')$ und $\vartheta_3(q')$ und findet durch Umkehrung des Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels:

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \vartheta_0 = +\sqrt{\vartheta_0(q')^2 + i\sqrt{\vartheta_3(q')^2 - \vartheta_0(q')^2}} \ , \\ \vartheta_3 = +\sqrt{\vartheta_0(q')^2 - i\sqrt{\vartheta_3(q')^2 - \vartheta_0(q')^2}} \ . \end{cases}$$

Für die Berechnung von ϑ_2 benutze man nach (23) in I, 419 die Beziehung:

$$\vartheta_2 = \sqrt[4]{\vartheta_3^4 - \vartheta_0^4} \ .$$

Aus den drei ϑ-Nullwerten werden nun die Invarianten auf Grund bekannter Formeln gewonnen. Man findet zunächst die achte Wurzel der Diskriminante nach I, 433:

$$\text{(4)} \qquad \sqrt[8]{\Delta} = \frac{\pi}{\omega_2}\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}}\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 \ .$$

Weiter folgert man aus (21) in I, 419:

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} e_1 = -\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi}{\omega_2}\right)^2(\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4) \ , \\ e_2 = +\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi}{\omega_2}\right)^2(\vartheta_0^4 + \vartheta_3^4) \ , \\ e_3 = -\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi}{\omega_2}\right)^2(\vartheta_0^4 - \vartheta_2^4) \ , \end{cases}$$

woraus dann weiter die rationalen Invarianten g_2 und g_3 in der Gestalt:

$$\text{(6)} \qquad g_2 = -4(e_2e_3 + e_3e_1 + e_1e_2) \ , \qquad g_3 = 4e_1e_2e_3$$

gewonnen werden. Der Wert der absoluten rationalen Invariante J berechnet sich aus:

$$\text{(7)} \qquad J : (J-1) : 1 = g_2^3 : 27g_3^2 : \Delta \ .$$

Die Quotienten der ϑ-Nullwerte liefern nach I, 419:

$$\text{(8)} \qquad \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} \ , \qquad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}$$

und damit in der vierten Potenz des ersten Quotienten die absolute irrationale Invariante $\lambda = k^2$.

Ein numerisches Beispiel wird die ausserordentliche Genauigkeit der Formeln (2) mit den drei ersten Reihengliedern noch besser veranschaulichen. Wir setzen etwa $\omega = 2i$ und berechnen aus (2) und (8) einen Näherungswert von $\sqrt{k}(2i)$. Zunächst hat man folgende Werte[9]:

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{\pi}{2}} &= 0,207.879.576.350.761\dots\ , \\
e^{-\pi} &= 0,043.213.918.263.772\dots\ , \\
e^{-2\pi} &= 0,001.867.442.731.707.988\dots\ , \\
e^{-4\pi} &= 0,000.003.487.342.356.208.995\dots\ , \\
e^{-8\pi} &= 0,000.000.000.012.161.556.709\dots\ , \\
e^{-12\pi} &= 0,000.000.000.000.000.042.411.511\dots\ .
\end{aligned}$$

Hieraus findet man mit 15-stelliger Genauigkeit[10] für ϑ_2 und ϑ_3:

$$\begin{aligned}
\vartheta_2 &= 0,415.760.602.596.025\dots\ , \\
\vartheta_3 &= 1,003.734.885.487.739\dots\ .
\end{aligned}$$

Beim Quotienten von ϑ_2 und ϑ_3 wird bei Benutzung dieser Werte die 15[te] Stelle unsicher. Man findet:

$$\sqrt{k}(2i) = 0,414.213.562.373.093\dots\ . \tag{9}$$

Das Ergebnis kann man prüfen. Da nämlich $k^2(i) = \frac{1}{2}$ ist, so ergiebt die Landensche Transformation nach (2) in II, 492:

$$\sqrt{k}(2i) = -1 + \sqrt{2}\ .$$

Nun ist der auf 15 Stellen genaue Wert (vergl. Gauß' Werke, Bd. 3, S. 364):

$$-1 + \sqrt{2} = 0,414.213.562.373.095\dots\ .$$

Der Näherungswert (9) weicht also in der Tat erst in der 15[ten] Stelle vom genauen Werte ab, nämlich um zwei Einheiten dieser Stelle.

Begnügt man sich mit zweigliedrigen Annäherungen:

$$\vartheta_0 = 1 - 2q\ , \qquad \vartheta_2 = 2q^{\frac{1}{4}}(1+q^2)\ , \qquad \vartheta_3 = 1 + 2q\ , \tag{10}$$

so sind die Reihenreste im vorliegenden Beispiele $< 3 \cdot 10^{-11}$. Man findet:

---

[9] Vergl. Gauß' Werke, Bd. 3, S. 426 ff.

[10] Für den vorliegenden Wert q ist bei Benutzung der drei ersten Reihenglieder der Reihenrest absolut kleiner als $2 \cdot 10^{-19}$.

$$\vartheta_2 = 0,415.760.602.594\ldots\ ,$$
$$\vartheta_3 = 1,003.734.885.463\ldots\ .$$

Bei Berechnung des Quotienten wird die zehnte Stelle unsicher. Man erhält:

$$\sqrt{k}(2i) = 0,414.213.562.38\ldots\ ,$$

so daß sogar die zehnte Stelle noch richtig und erst die elfte Stelle um eine Einheit zu groß ist.

Man vergleiche hiermit die Genauigkeit, die eine auf die Tafel I (S. 22–25) gegründete Interpolationsrechnung bei Gebrauch einer siebenstelligen Logarithmentafel hat. Man findet für $\omega = 2i$:

$$^{10}\log q + 10 = 7,271.247.5\ ,$$

wofür die Tafel I beim Interpolieren:

$$\alpha = 9°52'46''$$

liefert. Daraus erhält man:

$$k(2i) = 0,171.575.63\ldots\ , \tag{11}$$

während der auf 13 Stellen genaue Wert:

$$k(2i) = 3 - 2\sqrt{2} = 0,171.572.875.253.8\ldots$$

ist. Der Näherungswert (11) ist also bereits in der sechsten Dezimalstelle um zwei Einheiten zu groß. Die Überlegenheit der auf die Reihen gegründeten Rechnungen ist damit evident.

0.3 Berechnung der elliptischen Funktionen bei gegebenem Argumente und gegebenen Perioden.

An dritter Stelle behandeln wir die Aufgabe, bei gegebenem Argumente u und gegebenen Perioden ω_1, ω_2 die elliptischen Funktionen zu berechnen. Das Periodenpaar sei reduziert gewählt. Die zugehörigen Werte der algebraischen Invarianten, sowie nötigenfalls die Perioden des Integrals zweiter Gattung denken wir nach 0.2 und 0.1 berechnet. An Stelle von u wird man demnach auch:

$$v = \frac{u}{\omega_2} \qquad \text{oder} \qquad w = u\sqrt{e_2 - e_1} \tag{1}$$

als gegebenes Argument benutzen können. Das Argument ist auf ein Periodenparallelogramm zu beschränken. Arbeitet man z. B. mit v, so wird der gegebene Wert v

in der v-Ebene zweckmässig dem in Fig. 4 schraffierten Parallelogramm der Ecken $\frac{\omega+1}{2}$, $\frac{\omega-1}{2}$, $\frac{-\omega+1}{2}$, $\frac{-\omega-1}{2}$ angehörig anzunehmen sein, wobei der Gitterpunkt ω der Parallelogrammteilung im Bereiche der reduzierten Periodenquotienten liegt.

Nach den eben gemachten Erfahrungen wird man die Berechnung der elliptischen Funktionen auf die vier ϑ-Reihen gründen:

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \vartheta_0(v) = 1 - 2q\cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v - 2q^9 \cos 6\pi v + \cdots \ , \\ \vartheta_1(v) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin \pi v - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3\pi v + 2q^{\frac{25}{4}} \sin 5\pi v - \cdots \ , \\ \vartheta_2(v) = 2q^{\frac{1}{4}} \cos \pi v + 2q^{\frac{9}{4}} \cos 3\pi v + 2q^{\frac{25}{4}} \cos 5\pi v + \cdots \ , \\ \vartheta_3(v) = 1 + 2q\cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v + 2q^9 \cos 6\pi v + \cdots \ . \end{cases}$$

Dabei sind zufolge Fig. 4 nur Argumente der Gestalt:

$$\text{(3)} \qquad v = \frac{\lambda\omega + \mu}{2}$$

zuzulassen, wo λ und μ reelle Zahlen des Intervalles $-1 \leqq \lambda, \mu \leqq +1$ sind.

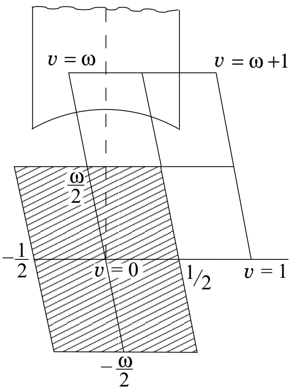

Fig. 4

Wir haben nun die Fehler abzuschätzen, die den Ergebnissen anhaften, wenn man in (2) etwa die drei ersten Reihenglieder zuläßt. Eine Fehlergrenze ist in jedem besonderen Falle leicht angebbar. Allgemein gilt folgende Abschätzung: Man hat erstlich für ϑ_0 die Darstellung:

$$\vartheta_0(v) = 1 - \varepsilon^{-1}q^{1-\lambda} + \varepsilon^{-2}q^{4-2\lambda} - \varepsilon^{-3}q^{9-3\lambda} + \\ \cdots - \varepsilon q^{1+\lambda} + \varepsilon^2 q^{4+2\lambda} - \varepsilon^3 q^{9+3\lambda} + \cdots \ ,$$

wo ε die Zahl $e^{\pi i \mu}$ des absoluten Betrages 1 ist. Da $|\lambda| \leqq 1$ gilt, so ist, wenn man die drei ersten Reihenglieder zuläßt, der Reihenrest, absolut genommen:

$$|R| < 2\left(|q|^6 + |q|^{12} + |q|^{20} + \cdots\right) < \frac{2|q|^6}{1 - |q|^6} \ .$$

Da $|q| < 0{,}066$ gilt, so findet man leicht $|R| < 17 \cdot 10^{-8}$. Handelt es sich um ein Periodenrechteck, so ist $|q| < 0{,}044$. Dann findet man sogar $|R| < 15 \cdot 10^{-9}$. Dieselbe Abschätzung gilt für $\vartheta_3(v)$, so daß man bei Benutzung von drei Reihengliedern bereits sehr genaue Werte dieser Funktionen erhält. Bei der zweiten und dritten Reihe (2) ist, wenn man auch hier drei Glieder benutzt, der Reihenrest, absolut genommen, noch kleiner als bei der ersten und vierten, so daß bei Benutzung der Näherungsformeln:

$$(4)\qquad \begin{cases} \vartheta_0(v) = 1 - 2q\cos 2\pi v + 2q^4\cos 4\pi v\ , \\[2mm] \vartheta_1(v) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin \pi v - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3\pi v + 2q^{\frac{25}{4}}\sin 5\pi v\ , \\[2mm] \vartheta_2(v) = 2q^{\frac{1}{4}}\cos \pi v + 2q^{\frac{9}{4}}\cos 3\pi v + 2q^{\frac{25}{4}}\cos 5\pi v\ , \\[2mm] \vartheta_3(v) = 1 + 2q\cos 2\pi v + 2q^4\cos 4\pi v \end{cases}$$

für alle in Betracht kommenden Werte v und ω ziemlich genaue Werte der ϑ-Funktionen gewonnen werden[11].

Die weiteren Berechnungen sind nach bekannten Regeln zu vollziehen. Die Jacobischen doppeltperiodischen Funktionen $\operatorname{sn} w$, $\operatorname{cn} w$ und $\operatorname{dn} w$ findet man nach I, 420 auf Grund der Formeln:

$$(5)\quad \operatorname{sn} w = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}\,,\qquad \operatorname{cn} w = \sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)}\,,\qquad \operatorname{dn} w = \sqrt{k'}\cdot\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)}\ .$$

Hieraus berechnen sich endlich die Weierstraßschen Funktionen nach I, 389 in der Gestalt:

$$(6)\qquad \wp(u) = e_1 + \frac{e_2 - e_1}{(\operatorname{sn} w)^2}\,,\qquad \wp'(u) = -2(\sqrt{e_2 - e_1})^3\cdot\frac{\operatorname{cn} w\cdot\operatorname{dn} w}{(\operatorname{sn} w)^3}\ .$$

0.4 Berechnung der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung bei gegebenen Grenzen und Invarianten.

Bei der Berechnung des elliptischen Integrals erster Gattung für vorgeschriebene obere Grenze und bei gegebenen algebraischen Invarianten wird angenommen, daß die Perioden nach 0.1 bereits berechnet sind. Es ist dann wegen der Beziehungen (1), S. 13 gleichgültig, ob man auf die Berechnung von u, v oder w ausgeht. Bevorzugt man w, so hat man aus der Gleichung:

$$(1)\qquad w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

bei gegebenen k^2 und z den Wert w zu berechnen.

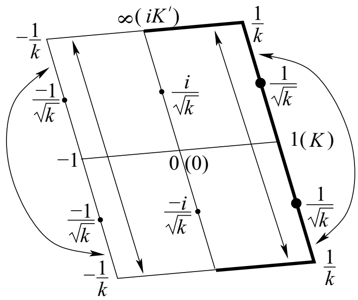

Fig. 5

Der Wert $\lambda = k^2$ kann als dem schraffierten Bereiche der Fig. 1, S. 1, angehörig angenommen werden, was einem reduzierten Periodenpaare ω_1, ω_2 entspricht. Nach I, 394 kann ein erstes Abbild der

[11] Die Abschätzung des Fehlers ist sehr wenig genau. Liegt insbesondere ω nicht sehr nahe am Rande seines Bereiches (Fig. 2, S. 2), so bleiben die Fehler weit unterhalb der berechneten Grenze.

vollen z-Ebene auf die Ebene w in der Gestalt des in Fig. 5 gezeichneten Rechtecks gewählt werden. Der Zusammenschluß der Randstücke zur Vollebene z ist durch die Pfeile angedeutet. Die eingetragenen Werte sind die von z; nur die in Klammern stehenden drei Werte geben w. Die beiden Seitenmitten $w = \pm K$ liefern die festen Verzweigungspunkte bei $z = \pm 1$. Die beiden mit k^2 veränderlichen Verzweigungspunkte bei $z = \pm\frac{1}{k}$ werden von den Parallelogrammecken $w = K + iK'$, $w = -K + iK'$ geliefert.

Den Bereich für den Verzweigungspunkt $\frac{1}{k}$ in der z-Ebene findet man, indem man den in der λ-Ebene gedachten schraffierten Bereich der Fig. 1, S. 1 durch die Gleichung:

$$z = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \tag{2}$$

auf die z-Ebene abbildet. Man gewinnt den in Fig. 6 schraffierten Bereich, der durch Segmente einer gleichseitigen Hyperbel und einer Lemniskate begrenzt ist. Setzt man $z = x + iy$, so sind die Gleichungen dieser Kurven:

$$2(x^2 - y^2) = 1 \ , \qquad (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2) \ .$$

Die in Fig. 6 mit e_1 und e_2 bezeichneten Ecken sind bei $z = \frac{\sqrt{3}\pm i}{2}$ gelegen. Der zur rechten Hand der einen Mittellinie in Fig. 5 stark ausgezogene Rand liefert den in Fig. 6 gleichfalls stark ausgezogenen Schnitt, der wie auch der Bereich für $\frac{1}{k}$ in das Unendliche zieht. Der Verlauf dieses Schnittes ist nur schematisch zu verstehen, d. h. es wird nicht behauptet, daß er ein genaues Abbild des Randes vom Parallelogramm der Fig. 5 sei; der von $z = 1$ bis $z = \frac{1}{k}$ laufende Teil des Schnittes kann als Verzweigungsschnitt der zweiblättrigen Riemannschen Fläche über der z-Ebene dienen. Die Fig. 6 muß man dadurch ergänzen, daß man sie um den Nullpunkt $z = 0$ durch $180°$ herumdreht; dann hat man das volle Abbild des Parallelogramms der Fig. 5.

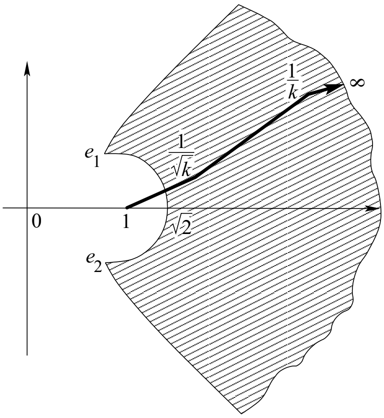

Fig. 6

Man wird nun die obere Grenze z des Integrals (1) auf die so zerschnittene z-Ebene eingrenzen. Der hierbei zu gewinnende Wert w der unendlich-vieldeutigen Funktion (1) möge als „Hauptwert“ bezeichnet werden. Alle übrigen Werte gehen dann aus dem Hauptwerte bekanntlich in den Gestalten hervor:

$$w + 4mK + 2niK' \ , \qquad -w + (4m+2)K + 2niK' \ ,$$

wo m und n alle Paare ganzer Zahlen durchlaufen.

Der nächstliegende Ansatz zur numerischen Berechnung von w knüpft an die Entwicklung von $\left(1-k^2z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ in die binomische Reihe an. Man hat:

$$w = \int_0^z \Big(1 + \frac{1}{2}k^2z^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}k^4z^4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}k^6z^6 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}k^8z^8 + \cdots\Big)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\,, \tag{3}$$

wo die Reihe unter der beschränkenden Voraussetzung $|z| < |\frac{1}{k}|$ gleichmässig konvergiert und also gliedweise integriert werden kann. Für das Integral zweiter Gattung:

$$Z = \int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz \tag{4}$$

findet man unter der gleichen Konvergenzbedingung entsprechend:

$$Z = \int_0^z \Big(1 - \frac{1}{2}k^2z^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}k^4z^4 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}k^6z^6 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}k^8z^8 - \cdots\Big)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\,. \tag{5}$$

Für den besonders wichtigen Fall eines Periodenrechtecks und damit reeller positiver K, K' ist wenigstens für reelle Argumente z des Intervalles von 0 bis 1 von Legendre ein grosses Tafelwerk für w und Z geschaffen und im zweiten Bande seines „Traité“ mitgeteilt. Legendre setzt:

$$z = \sin\varphi\,, \qquad k = \sin\alpha \tag{6}$$

und erstreckt α sogar auf das Intervall von $0°$ bis $90°$.

Man hat hier zunächst folgende weitere Entwicklung der Formeln (3) und (5): Man setzt $z = \sin\varphi$ in (3) ein und benutze φ als Argument. Es ist alsdann gliedweise zu integrieren und die Formel:

$$\int \sin^{2n}\varphi\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdots\tfrac{2n-1}{2n}\varphi - \tfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{2n}\Big(\sin^{2n-2}\varphi + \tfrac{2n-1}{2n-2}\sin^{2n-4}\varphi + \tfrac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)}\sin^{2n-6}\varphi + \cdots + \tfrac{(2n-1)(2n-3)\cdots5\cdot3}{(2n-2)(2n-4)\cdots4\cdot2}\Big)$$

zu benutzen. Man gelangt so für das Integral erster Gattung w zu der Entwicklung:

$$w = A\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\left(B_0 + \frac{2}{3}B_1\sin^2\varphi + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}B_2\sin^4\varphi + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}B_3\sin^6\varphi + \cdots\right). \tag{7}$$

Dabei hat der Koeffizient A die folgende Bedeutung:

(8)
$$A = 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\right)^2 k^4 + \left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\right)^2 k^6 + \left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{7}{8}\right)^2 k^8 + \cdots ,$$

während die Koeffizienten $B_0, B_1, B_2, \ldots$ durch:

(9)
$$\begin{aligned} &B_0 = A - 1 , \qquad B_1 = A - 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 k^2 , \\ &B_2 = A - 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\right)^2 k^4 , \quad \ldots \end{aligned}$$

gegeben sind; sie stellen also die Reste der Reihe (8) bei Fortnahme von einem, zwei, drei usw. Anfangsgliedern dar. Die entsprechende Darstellung des Integrals zweiter Gattung ist:

(10)
$$\begin{aligned} Z = C\varphi + \sin\varphi\cos\varphi \Bigg(& D_0 + \frac{2}{3} D_1 \sin^2\varphi + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} D_2 \sin^4\varphi \\ & + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7} D_3 \sin^6\varphi + \cdots \Bigg) . \end{aligned}$$

Der erste Koeffizient C ist gegeben durch:

(11)
$$C = 1 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} k^2 - \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4} k^4 - \tfrac{1}{16}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6} k^6 - \tfrac{5}{128}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{7}{8} k^8 - \cdots ,$$

während sich die übrigen Koeffizienten wieder aus Reihenresten berechnen:

(12)
$$\begin{aligned} &D_0 = -C + 1 , \qquad D_1 = -C + 1 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} k^2 , \\ &D_2 = -C + 1 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} k^2 - \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4} k^4 , \quad \ldots . \end{aligned}$$

In (7) und (10) ist φ im ersten Gliede in Bogenmaß gemessen.

Die schon genannten Tafeln Legendre's für die Integrale w und Z schreiten sowohl in bezug auf w als auf α nach Graden fort und beziehen sich für α auch auf das Intervall von 45° bis 90°; sie haben deshalb einen erheblichen Umfang. Die Werte w und Z sind für das Intervall von $\alpha = 0°$ bis 45° zehnstellig, dann weiter bis 90° neunstellig angegeben. Am Schlusse der Einleitung ist unter IV eine siebenstellige Tafel des Integrals erster Gattung w mitgeteilt, die für φ nach Graden und für α nach fünf Graden fortschreitet. Tafel V giebt entsprechend die Werte des Integrals zweiter Gattung Z. Eine Überstreichung der letzten Ziffer oder der letzten Ziffern bedeutet wieder, daß der angegebene Wert um weniger als eine halbe Einheit der siebenten Dezimalstelle zu groß ist.

Die Reihen (3) und (5) bleiben natürlich so lange brauchbar, als es sich um ein z im Innern ihres Konvergenzkreises handelt, der den Nullpunkt der z-Ebene (vergl. Fig. 6, S. 16) zum Mittelpunkte hat, und dessen Peripherie durch den Punkt $z = \frac{1}{k}$ hindurchläuft. Handelt es sich um ein z ausserhalb dieses Kreises, so hat man zunächst eine Transformation vorzunehmen, die darauf hinausläuft, die ganze z-Ebene auf das Innere eines Kreises abzubilden. Regeln hierfür sind im Anschluß an Weierstraß von H. A. Schwarz entwickelt[12] und auch von H. Burkhardt ausführlich dargestellt[13].

Die eben genannten Regeln dürften indessen wohl kaum eine ausgedehntere Verwendung bei numerischen Rechnungen gefunden haben, da sie recht umständlich sind. Es ist demnach ein anderer Weg vorzuziehen, der auch hier die schnelle Konvergenz der Thetareihen verwertet. Nach der dritten Formel (27) in I, 420 hat man, wenn $\operatorname{dn} w$ in $z = \operatorname{sn} w$ ausgedrückt wird und für $\vartheta_3(v)$ und $\vartheta_0(v)$ ihre Reihen eingesetzt werden, den Ansatz:

$$\frac{\sqrt{1-k^2z^2}}{\sqrt{k'}} = \frac{1+2q\cos 2\pi v + 2q^4\cos 4\pi v + 2q^9\cos 6\pi v + \cdots}{1-2q\cos 2\pi v + 2q^4\cos 4\pi v - 2q^9\cos 6\pi v + \cdots}\,. \tag{13}$$

Nach den Angaben von S. 14 dürfen wir bei allen für uns in Betracht kommenden Werten v (vergl. das schraffierte Parallelogramm der Fig.4, S. 14) die hier im Zähler und Nenner stehenden Reihen auf die drei ersten Glieder kürzen. Setzt man weiter $\cos 4\pi v = 2\cos^2 2\pi v - 1$, so folgt für die Berechnung von $\cos 2\pi v$ bei gegebenen z und k die quadratische Gleichung:

$$\frac{\sqrt{1-k^2z^2}}{\sqrt{k'}} = \frac{1-2q^4+2q\cos 2\pi v + 4q^4\cos^2 2\pi v}{1-2q^4-2q\cos 2\pi v + 4q^4\cos^2 2\pi v}\,. \tag{14}$$

Es bleibt dann noch die Bestimmung von v und damit von $w = 2Kv$ aus dem berechneten Werte von $\cos 2\pi v$.

In vielen Fällen ist es aber auch schon ausreichend, die Reihen in (13) auf ihre zwei ersten Glieder zu beschränken. Man findet dann die fertige Formel:

$$w = \frac{K}{\pi}\arccos\left(\frac{1}{2q}\cdot\frac{\sqrt{1-k^2z^2}-\sqrt{k'}}{\sqrt{1-k^2z^2}+\sqrt{k'}}\right). \tag{15}$$

Um diese Formel an einem Beispiele zu prüfen, das mittels der Legendreschen Tafel der Werte w nachgeprüft werden kann, wählen wir zwei reelle Werte z und k, etwa die zu den Winkeln $\varphi = 30°$, $\alpha = 40°$ gehörenden. Bei Benutzung einer siebenstelligen Tafel für die Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Funktionen findet man zunächst:

$$\begin{aligned}
{}^{10}\log z + 10 &= \,{}^{10}\log\sin 30° + 10 = 9{,}698\,9700\,,\\
{}^{10}\log k + 10 &= \,{}^{10}\log\sin 40° + 10 = 9{,}808\,0675\,,\\
{}^{10}\log\sqrt{k'} + 10 &= \tfrac12\,{}^{10}\log\cos 40° + 10 = 9{,}942\,1270\,.
\end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich nach kurzer Zwischenrechnung:

[12] Man vergl. H. A. Schwarz „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Hrn. Prof. K. Weierstraß“, Göttingen, 1881 ff., S. 53 u. 67 ff.

[13] Man vergl. H. Burkhardt „Elliptische Funktionen“, Leipzig, 1906, § 120 ff.

$$\sqrt{1-k^2z^2} = 0,946\,9457\ , \qquad \sqrt{k'} = 0,875\,2396\ .$$

Für den Kosinus von $\frac{\pi w}{K}$ findet man:

$$\cos\frac{\pi w}{K} = \frac{1}{2q}\cdot\frac{717061}{18221853}\ .$$

Da die Jacobische Tafel für ${}^{10}\!\log q$ nur fünfstellig ist, so schreiben wir:

$$(16)\quad {}^{10}\!\log\cos\frac{\pi w}{K} = \frac{\pi K'}{K}\,{}^{10}\!\log e + {}^{10}\!\log 717061 - {}^{10}\!\log 2 - {}^{10}\!\log 18221853\ .$$

Aus der unten folgenden Tafel III und der Logarithmentafel entnehmen wir die Werte:

$$\begin{aligned} {}^{10}\!\log K' &= 0,286\,8114\ ,\\ {}^{10}\!\log K &= 0,252\,0684\ ,\\ {}^{10}\!\log \pi &= 0,497\,1499\ ,\\ {}^{10}\!\log({}^{10}\!\log e) + 10 &= 9,637\,7843\ , \end{aligned}$$

woraus man leicht berechnet:

$$\frac{\pi K'}{K}\,{}^{10}\!\log e = 1,478\,0103\ .$$ [14]

Damit findet sich der Wert der rechten Seite der Gleichung (16) sowie das Argument $\frac{\pi w}{K}$ in Gradmaß ausgedrückt:

$${}^{10}\!\log\cos\frac{\pi w}{K} + 10 = 9,771\,9439\ , \qquad 53^\circ\ 44'\ 15''.$$

Da w in Bogenmaß auszudrücken ist, so findet man bei Entnahme des Wertes von K aus der Tafel II:

$$w = 1,786\,7691\cdot\frac{1}{180}\left(53+\frac{4425}{6000}\right) = 0,533\,4250\ .$$

Nach der Tafel IV ist der auf sieben Stellen genaue Wert $0,533427\overline{5}$. Der berechnete Wert ist also um weniger als drei Einheiten der *sechsten* Dezimalstelle zu klein, so daß die Kürzung der in (13) rechts stehenden Reihe und damit die Benutzung der Näherungsformel (15) zur Berechnung des Integrals erster Gattung zu einem sehr günstigen Ergebnis führt.

[14] Hier scheint Fricke eine Ungenauigkeit im Rechnen unterlaufen zu sein. Die letzten drei Dezimalen sollten lauten: 094. – Ungenauigkeiten in den Rechnungen wurden von den Herausgebern nicht überall korrigiert. [*Anm. d. Hrsg.*]

0.5 Tafeln.

Dieser Abschnitt enthält folgende Tafeln[15]:

[15] Bei Bedarf stehen weitere Tafeln zur Verfügung z. B. im „Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables“, edited by M. Abramowitz and I. A. Stegun, National Bureau of Standards, Washington (D. C.) 1964 (reprinted by Dover Publications, New York (N. Y.) 1965). [*Anm. d. Hrsg.*]

Tafel I: Werte von $({}^{10}\log q + 10)$ **bei gegebenem** $\alpha = \arcsin k$.

α	$0'$	$5'$	$10'$	$15'$	$20'$	$25'$
0	$-\infty$	3,12127	3,72333	4,07552	4,32539	4,51922
1	5,27966	5,34918	5,41356	5,47349	5,52955	5,58221
2	5,88178	5,91725	5,95132	5,98411	6,01571	6,04620
3	6,23408	6,25789	6,28106	6,30363	6,32564	6,34710
4	6,48411	6,50203	6,51960	6,53681	6,55369	6,57025
5	6,67813	6,69250	6,70664	6,72056	6,73426	6,74775
6	6,83673	6,84874	6,86058	6,87226	6,88379	6,89516
7	6,97071	6,98122	6,99140	7,00147	7,01143	7,02127
8	7,08723	7,09626	7,10520	7,11405	7,12281	7,13148
9	7,18991	7,19795	7,20592	7,21381	7,22164	7,22939
10	7,28185	7,28910	7,29628	7,30341	7,31048	7,31750
11	7,36510	7,37170	7,37825	7,38475	7,39120	7,39760
12	7,44119	7,44725	7,45326	7,45924	7,46517	7,47107
13	7,51128	7,51688	7,52244	7,52797	7,53346	7,53893
14	7,57625	7,58146	7,58664	7,59178	7,59690	7,60199
15	7,63683	7,64170	7,64654	7,65136	7,65615	7,66091
16	7,69359	7,69816	7,70271	7,70724	7,71174	7,71622
17	7,74699	7,75130	7,75560	7,75987	7,76402	7,76835
18	7,79743	7,80151	7,80558	7,80962	7,81365	7,81766
19	7,84524	7,84911	7,85297	7,85681	7,86064	7,86445
20	7,89068	7,89437	7,89804	7,90170	7,90535	7,90898
21	7,93400	7,93752	7,94103	7,94452	7,94801	7,95147
22	7,97540	7,97877	7,98213	7,98547	7,98880	7,99212
23	8,01505	8,01828	8,02150	8,02471	8,02791	8,03109
24	8,05311	8,05621	8,05931	8,06239	8,06547	8,06853
25	8,08971	8,09270	8,09568	8,09865	8,10161	8,10456
26	8,12498	8,12786	8,13073	8,13360	8,13645	8,13930
27	8,15901	8,16179	8,16457	8,16734	8,17010	8,17285
28	8,19190	8,19459	8,19728	8,19996	8,20263	8,20529
29	8,22374	8,22635	8,22895	8,23155	8,23414	8,23672
30	8,25461	8,25714	8,25966	8,26218	8,26469	8,26719
31	8,28456	8,28702	8,28947	8,29191	8,29435	8,29679
32	8,31367	8,31606	8,31844	8,32082	8,32319	8,32556
33	8,34199	8,34431	8,34664	8,34895	8,35126	8,35357
34	8,36957	8,37184	8,37410	8,37636	8,37861	8,38086
35	8,39646	8,39867	8,40088	8,40308	8,40528	8,40747
36	8,42271	8,42487	8,42702	8,42917	8,43132	8,43346
37	8,44835	8,45046	8,45256	8,45467	8,45677	8,45886
38	8,47342	8,47548	8,47754	8,47960	8,48166	8,48371
39	8,49796	8,49998	8,50200	8,50401	8,50602	8,50803
40	8,52199	8,52397	8,52595	8,52792	8,52990	8,53186
41	8,54555	8,54750	8,54944	8,55137	8,55331	8,55824
42	8,56867	8,57058	8,57249	8,57439	8,57629	8,57818
43	8,59138	8,59325	8,59512	8,59699	8,59885	8,60072
44	8,61368	8,61553	8,61737	8,61920	8,62104	8,62287

Tafel I: Werte von $({}^{10}\log q + 10)$ **bei gegebenem** $\alpha = \arcsin k$.

α	$30'$	$35'$	$40'$	$45'$	$50'$	$55'$
0	4,67758	4,81148	4,92746	5,02977	5,12129	5,20408
1	5,63187	5,67883	5,72339	5,76578	5,80619	5,84481
2	6,07565	6,10414	6,13173	6,15847	6,18441	6,20960
3	6,36804	6,38849	6,40847	6,42801	6,44711	6,46581
4	6,58651	6,60246	6,61813	6,63352	6,64864	6,66351
5	6,76103	6,77411	6,78700	6,79970	6,81222	6,82456
6	6,90639	6,91748	6,92843	6,93925	6,94993	6,96049
7	7,03100	7,04063	7,05015	7,05957	7,06888	7,07811
8	7,14007	7,14858	7,15700	7,16534	7,17361	7,18180
9	7,23707	7,24470	7,25226	7,25975	7,26718	7,27454
10	7,32446	7,33136	7,33821	7,34501	7,35176	7,35846
11	7,40396	7,41028	7,41655	7,42277	7,42896	7,43510
12	7,47693	7,48274	7,48852	7,49427	7,49997	7,50564
13	7,54436	7,54975	7,55511	7,56045	7,56575	7,57101
14	7,60705	7,61208	7,61709	7,62206	7,62701	7,63194
15	7,66566	7,67037	7,67506	7,67973	7,68437	7,68899
16	7,72068	7,72512	7,72954	7,73393	7,73831	7,74266
17	7,77256	7,77675	7,78093	7,78508	7,78922	7,79333
18	7,82165	7,82562	7,82958	7,83352	7,83744	7,84135
19	7,86824	7,87202	7,87578	7,87953	7,88326	7,88698
20	7,91259	7,91620	7,91979	7,92336	7,92692	7,93047
21	7,95493	7,95837	7,96180	7,96522	7,96863	7,97202
22	7,99543	7,99873	8,00202	8,00529	8,00856	8,01181
23	8,03427	8,03744	8,04059	8,04374	8,04687	8,05000
24	8,07159	8,07463	8,07767	8,08069	8,08371	8,08672
25	8,10751	8,11044	8,11336	8,11628	8,11919	8,12209
26	8,14214	8,14497	8,14780	8,15061	8,15342	8,15622
27	8,17559	8,17833	8,18106	8,18378	8,18650	8,18920
28	8,20795	8,21060	8,21324	8,21588	8,21851	8,22113
29	8,23929	8,24186	8,24442	8,24698	8,24953	8,25207
30	8,26969	8,27219	8,27467	8,27715	8,27963	8,28210
31	8,29922	8,30164	8,30406	8,30647	8,30887	8,31127
32	8,32792	8,33028	8,33263	8,33498	8,33732	8,33966
33	8,35587	8,35816	8,36046	8,36274	8,36502	8,36730
34	8,38310	8,38534	8,38757	8,38980	8,39203	8,39425
35	8,40966	8,41185	8,41403	8,41620	8,41838	8,42054
36	8,43560	8,43774	8,43987	8,44199	8,44411	8,44623
37	8,46095	8,46304	8,46512	8,46720	8,46928	8,47135
38	8,48575	8,48779	8,48983	8,49187	8,49390	8,49593
39	8,51003	8,51204	8,51403	8,51603	8,51802	8,52001
40	8,53383	8,53579	8,53775	8,53971	8,54166	8,54361
41	8,55717	8,55909	8,56101	8,56293	8,56485	8,56676
42	8,58007	8,58197	8,58385	8,58574	8,58762	8,58950
43	8,60258	8,60443	8,60629	8,60814	8,60999	8,61184
44	8,62470	8,62653	8,62835	8,63017	8,63199	8,63381

Tafel I: Werte von $({}^{10}\log q + 10)$ **bei gegebenem** $\alpha = \arcsin k$.

α	$0'$	$5'$	$10'$	$15'$	$20'$	$25'$
45	8,63562	8,63744	8,63925	8,64105	8,64286	8,64466
46	8,65722	8,65900	8,66078	8,66256	8,66434	8,66611
47	8,67848	8,68024	8,68200	8,68375	8,68550	8,68725
48	8,69944	8,70118	8,70291	8,70464	8,70636	8,70809
49	8,72012	8,72183	8,72353	8,72524	8,72695	8,72865
50	8,74052	8,74221	8,74390	8,74558	8,74726	8,74895
51	8,76067	8,76234	8,76401	8,76567	8,76733	8,76900
52	8,78059	8,78224	8,78389	8,78554	8,78718	8,78883
53	8,80030	8,80193	8,80356	8,80519	8,80682	8,80845
54	8,81980	8,82142	8,82303	8,82464	8,82626	8,82787
55	8,83911	8,84072	8,84232	8,84392	8,84552	8,84711
56	8,85826	8,85985	8,86144	8,86302	8,86461	8,86619
57	8,87726	8,87883	8,88041	8,88198	8,88356	8,88513
58	8,89611	8,89768	8,89924	8,90080	8,90237	8,90393
59	8,91484	8,91640	8,91795	8,91951	8,92106	8,92261
60	8,93347	8,93501	8,93656	8,93811	8,93965	8,94120
61	8,95200	8,95354	8,95508	8,95662	8,95816	8,95970
62	8,97045	8,97199	8,97352	8,97506	8,97659	8,97812
63	8,98885	8,99038	8,99191	8,99344	8,99497	8,99650
64	9,00720	9,00873	9,01026	9,01178	9,01331	9,01484
65	9,02553	9,02704	9,02856	9,03011	9,03163	9,03316
66	9,04385	9,04537	9,04690	9,04883	9,04996	9,05148
67	9,06218	9,06371	9,06524	9,06677	9,06830	9,06983
68	9,08055	9,08208	9,08361	9,08515	9,08668	9,08822
69	9,09897	9,10051	9,10205	9,10359	9,10513	9,10667
70	9,11748	9,11902	9,12057	9,12212	9,12367	9,12522
71	9,13609	9,13765	9,13920	9,14076	9,14232	9,14388
72	9,15484	9,15641	9,15798	9,15955	9,16113	9,16270
73	9,17376	9,17535	9,17693	9,17852	9,18011	9,18170
74	9,19289	9,19450	9,19610	9,19771	9,19932	9,20094
75	9,21228	9,21391	9,21554	9,21717	9,21880	9,22044
76	9,23197	9,23362	9,23528	9,23694	9,23861	9,24027
77	9,25202	9,25371	9,25540	9,25709	9,25879	9,26050
78	9,27250	9,27423	9,27597	9,27770	9,27944	9,28119
79	9,29351	9,29529	9,29707	9,29886	9,30065	9,30244
80	9,31515	9,31699	9,31883	9,32067	9,32253	9,32438
81	9,33756	9,33946	9,34138	9,34330	9,34523	9,34716
82	9,36091	9,36291	9,36491	9,36692	9,36894	9,37097
83	9,38545	9,38756	9,38968	9,39181	9,39395	9,39610
84	9,41152	9,41377	9,41604	9,41833	9,42063	9,42294
85	9,43962	9,44207	9,44455	9,44704	9,44956	9,45210
86	9,47054	9,47328	9,47605	9,47886	9,48169	9,48456
87	9,50569	9,50889	9,51213	9,51542	9,51877	9,52218
88	9,54798	9,55200	9,55613	9,56036	9,56472	9,56921
89	9,60564	9,61185	9,61844	9,62547	9,63302	9,64122

Tafel I: Werte von $({}^{10}\log q + 10)$ **bei gegebenem** $\alpha = \arcsin k$.

α	$30'$	$35'$	$40'$	$45'$	$50'$	$55'$
45	8,64646	8,64826	8,65006	8,65185	8,65364	8,65543
46	8,66789	8,66966	8,67143	8,67320	8,67496	8,67672
47	8,68900	8,69074	8,69249	8,69423	8,69597	8,69771
48	8,70981	8,71154	8,71326	8,71497	8,71669	8,71840
49	8,73035	8,73205	8,73375	8,73544	8,73714	8,73883
50	8,75063	8,75231	8,75398	8,75566	8,75733	8,75900
51	8,77066	8,77232	8,77398	8,77563	8,77729	8,77894
52	8,79047	8,79211	8,79375	8,79539	8,79703	8,79866
53	8,81007	8,81170	8,81332	8,81494	8,81656	8,81818
54	8,82948	8,83109	8,83270	8,83430	8,83591	8,83751
55	8,84871	8,85030	8,85190	8,85349	8,85508	8,85667
56	8,86778	8,86936	8,87094	8,87252	8,87410	8,87568
57	8,88670	8,88827	8,88984	8,89141	8,89298	8,89454
58	8,90549	8,90705	8,90861	8,91017	8,91173	8,91329
59	8,92417	8,92572	8,92727	8,92882	8,93037	8,93192
60	8,94274	8,94429	8,94583	8,94737	8,94891	8,95046
61	8,96123	8,96277	8,96431	8,96584	8,96738	8,96892
62	8,97966	8,98119	8,98272	8,98425	8,98579	8,98732
63	8,99803	8,99956	9,00109	9,00261	9,00414	9,00567
64	9,01637	9,01789	9,01942	9,02095	9,02247	9,02400
65	9,03469	9,03621	9,03774	9,03927	9,04079	9,04232
66	9,05301	9,05454	9,05607	9,05760	9,05912	9,06065
67	9,07136	9,07289	9,07442	9,07595	9,07748	9,07902
68	9,08975	9,09129	9,09282	9,09436	9,09590	9,09743
69	9,10821	9,10975	9,11130	9,11284	9,11439	9,11593
70	9,12677	9,12832	9,12987	9,13142	9,13298	9,13453
71	9,14544	9,14701	9,14857	9,15014	9,15170	9,15327
72	9,16428	9,16585	9,16743	9,16901	9,17059	9,17218
73	9,18330	9,18489	9,18649	9,18809	9,18969	9,19129
74	9,20255	9,20417	9,20578	9,20740	9,20903	9,21065
75	9,22208	9,22372	9,22537	9,22701	9,22866	9,23031
76	9,24194	9,24361	9,24529	9,24697	9,24865	9,25033
77	9,26220	9,26391	9,26562	9,26734	9,26906	9,27078
78	9,28294	9,28469	9,28645	9,28821	9,28997	9,29174
79	9,30424	9,30605	9,30786	9,30968	9,31150	9,31332
80	9,32625	9,32812	9,32999	9,33187	9,33376	9,33566
81	9,34910	9,35105	9,35301	9,35497	9,35694	9,35892
82	9,37301	9,37506	9,37712	9,37919	9,38127	9,38335
83	9,39827	9,40044	9,40263	9,40483	9,40705	9,40928
84	9,42527	9,42762	9,42998	9,43237	9,43476	9,43718
85	9,45466	9,45724	9,45985	9,46248	9,46514	9,46783
86	9,48746	9,49040	9,49338	9,49639	9,49945	9,50255
87	9,52565	9,52918	9,53278	9,53646	9,54021	9,54405
88	9,57384	9,57863	9,58359	9,58875	9,59412	9,59974
89	9,65025	9,66035	9,67196	9,68579	9,70342	9,72938

Tafel II: Werte von K und E bei gegebenem $\alpha = \arcsin k$.

α	K	E
0	$1,57079\;6326\overline{8}$	$1,57079\;6326\overline{8}$
1	$1,57091\;59581$	$1,57067\;67091$
2	$1,57127\;4952\overline{4}$	$1,57031\;7919\overline{9}$
3	$1,57187\;36105$	$1,56972\;01504$
4	$1,57271\;243\overline{50}$	$1,56888\;37196$
5	$1,57379\;21309$	$1,56780\;907\overline{40}$
6	$1,57511\;3607\overline{8}$	$1,56649\;6787\overline{8}$
7	$1,57667\;7981\overline{6}$	$1,56494\;756\overline{30}$
8	$1,57848\;6577\overline{7}$	$1,56316\;22295$
9	$1,58054\;0933\overline{9}$	$1,56114\;1745\overline{4}$
10	$1,58284\;28043$	$1,55888\;71966$
11	$1,58539\;4163\overline{8}$	$1,55639\;9797\overline{8}$
12	$1,58819\;72125$	$1,55368\;08919$
13	$1,59125\;43820$	$1,55073\;195\overline{10}$
14	$1,59456\;83409$	$1,54755\;4575\overline{9}$
15	$1,59814\;20021$	$1,54415\;04969$
16	$1,60197\;8530\overline{1}$	$1,54052\;15741$
17	$1,60608\;13494$	$1,53666\;9797\overline{6}$
18	$1,61045\;4153\overline{8}$	$1,53259\;72877$
19	$1,61510\;0916\overline{1}$	$1,52830\;6296\overline{1}$
20	$1,62002\;58991$	$1,52379\;9205\overline{3}$
21	$1,62523\;3667\overline{8}$	$1,51907\;85300$
22	$1,63072\;91016$	$1,51414\;6917\overline{5}$
23	$1,63651\;74093$	$1,50900\;71479$
24	$1,64260\;41437$	$1,50366\;2135\overline{4}$
25	$1,64899\;5218\overline{5}$	$1,49811\;49284$
26	$1,65569\;69263$	$1,49236\;87111$
27	$1,66271\;5958\overline{5}$	$1,48642\;68037$
28	$1,67005\;9426\overline{3}$	$1,48029\;26638$
29	$1,67773\;4884\overline{1}$	$1,47396\;98872$
30	$1,68575\;03548$	$1,46746\;22093$
31	$1,69411\;43573$	$1,46077\;35062$
32	$1,70283\;52364$	$1,45390\;7796\overline{1}$
33	$1,71192\;4695\overline{2}$	$1,44686\;9240\overline{7}$
34	$1,72139\;0831\overline{4}$	$1,43966\;21471$
35	$1,73124\;5175\overline{7}$	$1,43229\;09693$
36	$1,74149\;92344$	$1,42476\;03101$
37	$1,75216\;5236\overline{5}$	$1,41707\;4923\overline{4}$
38	$1,76325\;6184\overline{1}$	$1,40923\;97160$
39	$1,77478\;59091$	$1,40125\;9750\overline{8}$
40	$1,78676\;9134\overline{9}$	$1,39314\;02485$
41	$1,79922\;1544\overline{1}$	$1,38488\;6591\overline{4}$
42	$1,81215\;9853\overline{7}$	$1,37650\;4325\overline{8}$
43	$1,82560\;18981$	$1,36799\;9165\overline{9}$
44	$1,83956\;6721\overline{1}$	$1,35937\;6997\overline{3}$
45	$1,85407\;4677\overline{3}$	$1,35064\;38810$

Tafel II: Werte von K und E bei gegebenem $\alpha = \arcsin k$.

α	K	E
45	$1,85407\,46773$	$1,35064\,38810$
46	$1,86914\,75460$	$1,34180\,60581$
47	$1,88480\,8657\overline{4}$	$1,33286\,99541$
48	$1,90108\,3036\overline{5}$	$1,32384\,2184\overline{5}$
49	$1,91799\,75464$	$1,31472\,9560\overline{3}$
50	$1,93558\,10960$	$1,30553\,9094\overline{3}$
51	$1,95386\,4809\overline{3}$	$1,29627\,800\overline{80}$
52	$1,97288\,2266\overline{3}$	$1,28695\,3738\overline{8}$
53	$1,99266\,97557$	$1,27757\,3948\overline{3}$
54	$2,01326\,65652$	$1,26814\,6531\overline{1}$
55	$2,03471\,5312\overline{2}$	$1,25867\,9624\overline{8}$
56	$2,05706\,2322\overline{8}$	$1,24918\,16206$
57	$2,08035\,8066\overline{7}$	$1,23966\,1175\overline{3}$
58	$2,10465\,7658\overline{5}$	$1,23012\,7224\overline{2}$
59	$2,13002\,1438\overline{4}$	$1,22058\,8995\overline{8}$
60	$2,15651\,56475$	$1,21105\,6027\overline{6}$
61	$2,18421\,32169$	$1,20153\,81841$
62	$2,21319\,469\overline{50}$	$1,19204\,5676\overline{6}$
63	$2,24354\,9341\overline{7}$	$1,18258\,90849$
64	$2,27537\,64296$	$1,17317\,9382\overline{7}$
65	$2,30878\,6798\overline{2}$	$1,16382\,7964\overline{5}$
66	$2,34390\,47244$	$1,15454\,66775$
67	$2,38087\,01906$	$1,14534\,4856\overline{7}$
68	$2,41984\,16537$	$1,13624\,4364\overline{7}$
69	$2,46099\,94583$	$1,12724\,9637\overline{8}$
70	$2,50455\,00790$	$1,11837\,773\overline{80}$
71	$2,55073\,14496$	$1,10964\,34135$
72	$2,59981\,9730\overline{1}$	$1,10106\,2168\overline{8}$
73	$2,65213\,80046$	$1,09265\,03455$
74	$2,70806\,7614\overline{6}$	$1,08442\,5219\overline{4}$
75	$2,76806\,3145\overline{4}$	$1,07640\,5113\overline{1}$
76	$2,83267\,25829$	$1,06860\,953\overline{30}$
77	$2,90256\,4940\overline{7}$	$1,06105\,9333\overline{8}$
78	$2,97856\,8951\overline{2}$	$1,05377\,69204$
79	$3,06172\,86120$	$1,04678\,64993$
80	$3,15338\,5251\overline{9}$	$1,04011\,43957$
81	$3,25530\,29421$	$1,03378\,9462\overline{4}$
82	$3,36986\,8026\overline{7}$	$1,02784\,36197$
83	$3,50042\,2499\overline{2}$	$1,02231\,2588\overline{2}$
84	$3,65185\,5969\overline{5}$	$1,01723\,69183$
85	$3,83174\,1999\overline{8}$	$1,01266\,35062$
86	$4,05275\,81665$	$1,00864\,79569$
87	$4,33865\,39760$	$1,00525\,85872$
88	$4,74271\,72653$	$1,00258\,40855$
89	$5,43490\,9829\overline{6}$	$1,00075\,15777$
90	∞	$1,00000\,00000$

Tafel III: Werte von $^{10}\log K$ **und** $^{10}\log E$ **bei gegebenem** $\alpha = \arcsin k$.

α	$^{10}\log K$	$^{10}\log E$	α	$^{10}\log K$	$^{10}\log E$
0, 0	0, 196 1199	0, 196 1199	22, 5	0, 213 1421	0, 179 4377
0, 5	0, 196 1281	0, 196 1116	23, 0	0, 213 9206	0, 178 6913
1, 0	0, 196 1530	0, 196 0868	23, 5	0, 214 7175	0, 177 9288
1, 5	0, 196 1943	0, 196 0455	24, 0	0, 215 5329	0, 177 1503
2, 0	0, 196 2522	0, 195 9876	24, 5	0, 216 3668	0, 176 3557
2, 5	0, 196 3266	0, 195 9132	25, 0	0, 217 2194	0, 175 5451
3, 0	0, 196 4176	0, 195 8222	25, 5	0, 218 0907	0, 174 7186
3, 5	0, 196 5252	0, 195 7148	26, 0	0, 218 9808	0, 173 8761
4, 0	0, 196 6493	0, 195 5908	26, 5	0, 219 8899	0, 173 0178
4, 5	0, 196 7900	0, 195 4502	27, 0	0, 220 8181	0, 172 1435
5, 0	0, 196 9474	0, 195 2932	27, 5	0, 221 7654	0, 171 2535
5, 5	0, 197 1213	0, 195 1196	28, 0	0, 222 7319	0, 170 3476
6, 0	0, 197 3119	0, 194 9295	28, 5	0, 223 7179	0, 169 4260
6, 5	0, 197 5191	0, 194 7229	29, 0	0, 224 7233	0, 168 4886
7, 0	0, 197 7430	0, 194 4998	29, 5	0, 225 7484	0, 167 5356
7, 5	0, 197 9836	0, 194 2602	30, 0	0, 226 7933	0, 166 5669
8, 0	0, 198 2409	0, 194 0041	30, 5	0, 227 8580	0, 165 5827
8, 5	0, 198 5149	0, 193 7314	31, 0	0, 228 9427	0, 164 5829
9, 0	0, 198 8057	0, 193 4423	31, 5	0, 230 0476	0, 163 5676
9, 5	0, 199 1134	0, 193 1367	32, 0	0, 231 1728	0, 162 5369
10, 0	0, 199 4378	0, 192 8147	32, 5	0, 232 3184	0, 161 4907
10, 5	0, 199 7791	0, 192 4762	33, 0	0, 233 4847	0, 160 4293
11, 0	0, 200 1373	0, 192 1212	33, 5	0, 234 6716	0, 159 3525
11, 5	0, 200 5124	0, 191 7497	34, 0	0, 235 8795	0, 158 2606
12, 0	0, 200 9044	0, 191 3618	34, 5	0, 237 1084	0, 157 1535
12, 5	0, 201 3135	0, 190 9575	35, 0	0, 238 3586	0, 156 0313
13, 0	0, 201 7396	0, 190 5367	35, 5	0, 239 6301	0, 154 8940
13, 5	0, 202 1828	0, 190 0996	36, 0	0, 240 9233	0, 153 7418
14, 0	0, 202 6431	0, 189 6460	36, 5	0, 242 2382	0, 152 5747
14, 5	0, 203 1206	0, 189 1760	37, 0	0, 243 5751	0, 151 3928
15, 0	0, 203 6154	0, 188 6896	37, 5	0, 244 9341	0, 150 1962
15, 5	0, 204 1274	0, 188 1869	38, 0	0, 246 3154	0, 148 9849
16, 0	0, 204 6567	0, 187 6678	38, 5	0, 247 7193	0, 147 7590
16, 5	0, 205 2034	0, 187 1323	39, 0	0, 249 1460	0, 146 5186
17, 0	0, 205 7675	0, 186 5806	39, 5	0, 250 5956	0, 145 2639
17, 5	0, 206 3492	0, 186 0125	40, 0	0, 252 0684	0, 143 9948
18, 0	0, 206 9484	0, 185 4281	40, 5	0, 253 5647	0, 142 7116
18, 5	0, 207 5652	0, 184 8274	41, 0	0, 255 0846	0, 141 4142
19, 0	0, 208 1997	0, 184 2104	41, 5	0, 256 6285	0, 140 1028
19, 5	0, 208 8519	0, 183 5772	42, 0	0, 258 1965	0, 138 7776
20, 0	0, 209 5220	0, 182 9277	42, 5	0, 259 7889	0, 137 4385
20, 5	0, 210 2099	0, 182 2621	43, 0	0, 261 4061	0, 136 0858
21, 0	0, 210 9158	0, 181 5802	43, 5	0, 263 0482	0, 134 7196
21, 5	0, 211 6398	0, 180 8822	44, 0	0, 264 7155	0, 133 3399
22, 0	0, 212 3818	0, 180 1680	44, 5	0, 266 4085	0, 131 9470

Tafel III: Werte von $^{10}\log K$ **und** $^{10}\log E$ **bei gegebenem** $\alpha = \arcsin k$.

α	$^{10}\log K$	$^{10}\log E$	α	$^{10}\log K$	$^{10}\log E$
45,0	0,268 1272	0,130 5409	67,5	0,380 2283	0,057 2032
45,5	0,269 8722	0,129 1217	68,0	0,383 7869	0,055 4717
46,0	0,271 6436	0,127 6897	68,5	0,387 4139	0,053 7438
46,5	0,273 4418	0,126 2450	69,0	0,391 1115	0,052 0201
47,0	0,275 2673	0,124 7878	69,5	0,394 8825	0,050 3014
47,5	0,277 1202	0,123 3181	70,0	0,398 7297	0,048 5885
48,0	0,279 0011	0,121 8362	70,5	0,402 6560	0,046 8822
48,5	0,280 9102	0,120 3423	71,0	0,406 6647	0,045 1834
49,0	0,282 8480	0,118 8364	71,5	0,410 7592	0,043 4930
49,5	0,284 8150	0,117 3189	72,0	0,414 9432	0,041 8118
50,0	0,286 8114	0,115 7899	72,5	0,419 2208	0,040 1409
50,5	0,288 8377	0,114 2496	73,0	0,423 5961	0,038 4812
51,0	0,290 8945	0,112 6982	73,5	0,428 0740	0,036 8337
51,5	0,292 9822	0,111 1359	74,0	0,432 6595	0,035 1996
52,0	0,295 1012	0,109 5629	74,5	0,437 3581	0,033 5799
52,5	0,297 2520	0,107 9796	75,0	0,442 1760	0,031 9758
53,0	0,299 4353	0,106 3860	75,5	0,447 1196	0,030 3884
53,5	0,301 6515	0,104 7826	76,0	0,452 1964	0,028 8190
54,0	0,303 9013	0,103 1694	76,5	0,457 4142	0,027 2690
54,5	0,306 1851	0,101 5469	77,0	0,462 7819	0,025 7397
55,0	0,308 5037	0,099 9152	77,5	0,468 3095	0,024 2324
55,5	0,310 8575	0,098 2747	78,0	0,474 0077	0,022 7487
56,0	0,313 2474	0,096 6256	78,5	0,479 8888	0,021 2901
56,5	0,315 6741	0,094 9683	79,0	0,485 9667	0,019 8581
57,0	0,318 1381	0,093 3030	79,5	0,492 2569	0,018 4545
57,5	0,320 6403	0,091 6301	80,0	0,498 7770	0,017 0811
58,0	0,323 1815	0,089 9500	80,5	0,505 5474	0,015 7396
58,5	0,325 7624	0,088 2630	81,0	0,512 5914	0,014 4321
59,0	0,328 3840	0,086 5694	81,5	0,519 9360	0,013 1605
59,5	0,331 0471	0,084 8697	82,0	0,527 6129	0,011 9270
60,0	0,333 7526	0,083 1642	82,5	0,535 6595	0,010 7340
60,5	0,336 5016	0,081 4534	83,0	0,544 1205	0,009 5837
61,0	0,339 2950	0,079 7376	83,5	0,553 0498	0,008 4788
61,5	0,342 1340	0,078 0173	84,0	0,562 5136	0,007 4221
62,0	0,345 0196	0,076 2929	84,5	0,572 5943	0,006 4165
62,5	0,347 9531	0,074 5649	85,0	0,583 3963	0,005 4652
63,0	0,350 9356	0,072 8339	85,5	0,595 0549	0,004 5716
63,5	0,353 9686	0,071 1002	86,0	0,607 7507	0,003 7396
64,0	0,357 0533	0,069 3644	86,5	0,621 7319	0,002 9734
64,5	0,360 1912	0,067 6271	87,0	0,637 3550	0,002 2778
65,0	0,363 3838	0,065 8888	87,5	0,655 1599	0,001 6581
65,5	0,366 6329	0,064 1501	88,0	0,676 0272	0,001 1208
66,0	0,369 9400	0,062 4115	88,5	0,701 5560	0,000 6736
66,5	0,373 3069	0,060 6737	89,0	0,735 1923	0,000 3263
67,0	0,376 7357	0,058 9374	89,5	0,787 3031	0,000 0931

Tafel IV: Werte von $w = F(k, \varphi)$ **bei gegebenen** $\varphi = \arcsin z$ **und** $\alpha = \arcsin k$.

φ	$\alpha = 5°$	$\alpha = 10°$	$\alpha = 15°$	$\alpha = 20°$	$\alpha = 25°$	$\alpha = 30°$
1	$0,017\,453\overline{3}$	$0,017\,4533$	$0,017\,453\overline{4}$	$0,017\,453\overline{4}$	$0,017\,453\overline{5}$	$0,017\,4535$
2	$0,034\,9066$	$0,034\,906\overline{8}$	$0,034\,907\overline{1}$	$0,034\,9074$	$0,034\,907\overline{9}$	$0,034\,908\overline{4}$
3	$0,052\,360\overline{1}$	$0,052\,360\overline{6}$	$0,052\,361\overline{5}$	$0,052\,362\overline{7}$	$0,052\,3641$	$0,052\,365\overline{9}$
4	$0,069\,8136$	$0,069\,814\overline{9}$	$0,069\,81\overline{70}$	$0,069\,819\overline{8}$	$0,069\,823\overline{3}$	$0,069\,8273$
5	$0,087\,2673$	$0,087\,269\overline{8}$	$0,087\,273\overline{9}$	$0,087\,2794$	$0,087\,2862$	$0,087\,2941$
6	$0,104\,7212$	$0,104\,7255$	$0,104\,732\overline{6}$	$0,104\,7421$	$0,104\,753\overline{9}$	$0,104\,767\overline{6}$
7	$0,122\,1753$	$0,122\,182\overline{2}$	$0,122\,193\overline{4}$	$0,122\,2085$	$0,122\,2272$	$0,122\,2489$
8	$0,139\,629\overline{8}$	$0,139\,6\overline{400}$	$0,139\,6566$	$0,139\,679\overline{3}$	$0,139\,707\overline{2}$	$0,139\,739\overline{6}$
9	$0,157\,0845$	$0,157\,0990$	$0,157\,1227$	$0,157\,1549$	$0,157\,194\overline{7}$	$0,157\,240\overline{8}$
10	$0,174\,5396$	$0,174\,559\overline{5}$	$0,174\,59\overline{20}$	$0,174\,6361$	$0,174\,6906$	$0,174\,753\overline{9}$
11	$0,191\,9951$	$0,192\,0215$	$0,192\,0647$	$0,192\,1234$	$0,192\,1959$	$0,192\,2801$
12	$0,209\,4510$	$0,209\,4853$	$0,209\,5413$	$0,209\,617\overline{5}$	$0,209\,7115$	$0,209\,8208$
13	$0,226\,9074$	$0,226\,9509$	$0,227\,022\overline{1}$	$0,227\,1188$	$0,227\,238\overline{4}$	$0,227\,377\overline{3}$
14	$0,244\,3643$	$0,244\,418\overline{6}$	$0,244\,5073$	$0,244\,6280$	$0,244\,7772$	$0,244\,9507$
15	$0,261\,8218$	$0,261\,8884$	$0,261\,997\overline{4}$	$0,262\,145\overline{7}$	$0,262\,3291$	$0,262\,542\overline{5}$
16	$0,279\,2798$	$0,279\,3605$	$0,279\,492\overline{6}$	$0,279\,672\overline{4}$	$0,279\,8948$	$0,280\,153\overline{8}$
17	$0,296\,738\overline{5}$	$0,296\,8351$	$0,296\,9932$	$0,297\,2086$	$0,297\,4753$	$0,297\,785\overline{8}$
18	$0,314\,197\overline{8}$	$0,314\,3122$	$0,314\,4997$	$0,314\,75\overline{50}$	$0,315\,071\overline{3}$	$0,315\,4398$
19	$0,331\,6577$	$0,331\,792\overline{1}$	$0,332\,0121$	$0,332\,31\overline{20}$	$0,332\,683\overline{7}$	$0,333\,1170$
20	$0,349\,1184$	$0,349\,274\overline{8}$	$0,349\,5309$	$0,349\,880\overline{2}$	$0,350\,313\overline{3}$	$0,350\,818\overline{7}$
21	$0,366\,579\overline{9}$	$0,366\,7604$	$0,367\,056\overline{4}$	$0,367\,4600$	$0,367\,96\overline{10}$	$0,368\,5459$
22	$0,384\,042\overline{1}$	$0,384\,249\overline{2}$	$0,384\,5887$	$0,385\,0521$	$0,385\,6275$	$0,386\,299\overline{9}$
23	$0,401\,505\overline{1}$	$0,401\,741\overline{2}$	$0,402\,128\overline{3}$	$0,402\,656\overline{9}$	$0,403\,313\overline{7}$	$0,404\,081\overline{8}$
24	$0,418\,9689$	$0,419\,2364$	$0,419\,675\overline{3}$	$0,420\,274\overline{8}$	$0,421\,0202$	$0,421\,892\overline{7}$
25	$0,436\,4336$	$0,436\,735\overline{2}$	$0,437\,2\overline{300}$	$0,437\,9063$	$0,438\,7479$	$0,439\,733\overline{8}$
26	$0,453\,8992$	$0,454\,2374$	$0,454\,792\overline{7}$	$0,455\,55\overline{20}$	$0,456\,497\overline{5}$	$0,457\,606\overline{1}$
27	$0,471\,3567$	$0,471\,743\overline{4}$	$0,472\,3635$	$0,473\,212\overline{2}$	$0,474\,269\overline{7}$	$0,475\,510\overline{7}$
28	$0,488\,833\overline{2}$	$0,489\,2530$	$0,489\,9428$	$0,490\,887\overline{3}$	$0,492\,0651$	$0,493\,4486$
29	$0,506\,301\overline{6}$	$0,506\,766\overline{6}$	$0,507\,5307$	$0,508\,577\overline{8}$	$0,509\,884\overline{5}$	$0,511\,4209$
30	$0,523\,77\overline{10}$	$0,524\,2840$	$0,525\,1275$	$0,526\,28\overline{40}$	$0,527\,728\overline{5}$	$0,529\,4286$
31	$0,541\,2413$	$0,541\,805\overline{5}$	$0,542\,7334$	$0,544\,006\overline{4}$	$0,545\,5977$	$0,547\,4726$
32	$0,558\,712\overline{8}$	$0,559\,3311$	$0,560\,3485$	$0,561\,7472$	$0,563\,492\overline{8}$	$0,565\,553\overline{9}$
33	$0,576\,1852$	$0,576\,8608$	$0,577\,973\overline{1}$	$0,579\,500\overline{9}$	$0,581\,4142$	$0,583\,6733$
34	$0,593\,6587$	$0,594\,394\overline{9}$	$0,595\,6072$	$0,597\,2737$	$0,599\,362\overline{7}$	$0,601\,8318$
35	$0,611\,1333$	$0,611\,933\overline{2}$	$0,613\,2511$	$0,615\,064\overline{1}$	$0,617\,338\overline{6}$	$0,622\,030\overline{2}$
36	$0,628\,6090$	$0,629\,475\overline{9}$	$0,630\,90\overline{50}$	$0,632\,8721$	$0,635\,342\overline{5}$	$0,638\,2692$
37	$0,646\,0858$	$0,647\,0230$	$0,648\,5688$	$0,650\,6982$	$0,653\,374\overline{9}$	$0,656\,549\overline{8}$
38	$0,663\,5637$	$0,664\,574\overline{7}$	$0,666\,2429$	$0,668\,5426$	$0,671\,4361$	$0,674\,872\overline{5}$
39	$0,681\,042\overline{8}$	$0,682\,130\overline{9}$	$0,683\,9272$	$0,686\,405\overline{5}$	$0,689\,5267$	$0,693\,2381$
40	$0,698\,52\overline{30}$	$0,699\,691\overline{6}$	$0,701\,62\overline{20}$	$0,704\,287\overline{1}$	$0,707\,6470$	$0,711\,647\overline{3}$
41	$0,716\,004\overline{3}$	$0,717\,2569$	$0,719\,327\overline{2}$	$0,722\,1875$	$0,725\,797\overline{4}$	$0,730\,100\overline{6}$
42	$0,733\,4867$	$0,734\,8269$	$0,737\,04\overline{30}$	$0,740\,107\overline{1}$	$0,743\,978\overline{1}$	$0,748\,5086$
43	$0,750\,970\overline{4}$	$0,752\,401\overline{6}$	$0,754\,7693$	$0,758\,0458$	$0,762\,189\overline{5}$	$0,767\,1419$
44	$0,768\,455\overline{2}$	$0,769\,9809$	$0,772\,506\overline{4}$	$0,776\,0039$	$0,780\,4317$	$0,785\,7309$
45	$0,785\,9411$	$0,787\,5649$	$0,790\,254\overline{2}$	$0,793\,9814$	$0,798\,7051$	$0,804\,3661$

Tafel IV: Werte von $w = F(k, \varphi)$ bei gegebenen $\varphi = \arcsin z$ und $\alpha = \arcsin k$.

φ	$\alpha = 35°$	$\alpha = 40°$	$\alpha = 45°$	$\alpha = 50°$	$\alpha = 55°$	$\alpha = 60°$
1	0,017 453$\overline{6}$	0,017 453$\overline{7}$	0,017 4537	0,017 4538	0,017 453$\overline{9}$	0,017 45$\overline{40}$
2	0,034 9089	0,034 9095	0,034 9102	0,034 9107	0,034 9113	0,034 9119
3	0,052 3677	0,052 369$\overline{8}$	0,052 3718	0,052 3739	0,052 3759	0,052 3778
4	0,069 8318	0,069 836$\overline{6}$	0,069 8415	0,069 846$\overline{5}$	0,069 8512	0,069 8557
5	0,087 302$\overline{9}$	0,087 3122	0,087 321$\overline{9}$	0,087 331$\overline{5}$	0,087 3408	0,087 3496
6	0,104 782$\overline{7}$	0,104 7988	0,104 815$\overline{5}$	0,104 832$\overline{2}$	0,104 8483	0,104 8635
7	0,122 27$\overline{30}$	0,122 298$\overline{6}$	0,122 325$\overline{1}$	0,122 351$\overline{6}$	0,122 377$\overline{3}$	0,122 401$\overline{5}$
8	0,139 7754	0,139 8137	0,139 853$\overline{3}$	0,139 8929	0,139 931$\overline{4}$	0,139 9675
9	0,157 291$\overline{9}$	0,157 3464	0,157 4028	0,157 459$\overline{3}$	0,157 514$\overline{2}$	0,157 565$\overline{8}$
10	0,174 82$\overline{40}$	0,174 898$\overline{9}$	0,174 9763	0,175 0539	0,175 129$\overline{4}$	0,175 200$\overline{3}$
11	0,192 373$\overline{5}$	0,192 4732	0,192 5764	0,192 6799	0,192 780$\overline{6}$	0,192 875$\overline{3}$
12	0,209 942$\overline{1}$	0,210 0717	0,210 2059	0,210 3405	0,210 4715	0,210 5948
13	0,227 5315	0,227 6965	0,227 867$\overline{4}$	0,228 0389	0,228 2059	0,228 3632
14	0,245 143$\overline{5}$	0,245 349$\overline{8}$	0,245 5635	0,245 7783	0,245 9875	0,246 1847
15	0,262 7796	0,263 033$\overline{7}$	0,263 297$\overline{1}$	0,263 5619	0,263 820$\overline{1}$	0,264 0635
16	0,280 4417	0,280 7504	0,281 0707	0,281 3930	0,281 707$\overline{4}$	0,282 004$\overline{1}$
17	0,298 131$\overline{4}$	0,298 5021	0,298 887$\overline{1}$	0,299 274$\overline{8}$	0,299 653$\overline{3}$	0,300 010$\overline{8}$
18	0,315 8503	0,316 29$\overline{10}$	0,316 74$\overline{90}$	0,317 2105	0,317 661$\overline{6}$	0,318 08$\overline{80}$
19	0,333 6001	0,334 1191	0,334 65$\overline{90}$	0,335 203$\overline{6}$	0,335 736$\overline{3}$	0,336 240$\overline{3}$
20	0,351 3824	0,351 988$\overline{7}$	0,352 619$\overline{9}$	0,353 2572	0,353 8812	0,354 472$\overline{2}$
21	0,369 1989	0,369 9018	0,370 634$\overline{4}$	0,371 3748	0,372 100$\overline{5}$	0,372 788$\overline{4}$
22	0,387 0512	0,387 860$\overline{7}$	0,388 705$\overline{2}$	0,389 559$\overline{7}$	0,390 39$\overline{80}$	0,391 1935
23	0,404 9408	0,405 8673	0,406 8349	0,407 8151	0,408 777$\overline{9}$	0,409 692$\overline{5}$
24	0,422 8694	0,423 923$\overline{9}$	0,425 0264	0,426 1446	0,427 244$\overline{2}$	0,428 2900
25	0,440 838$\overline{5}$	0,442 032$\overline{5}$	0,443 2823	0,444 5515	0,445 8011	0,446 991$\overline{2}$
26	0,458 849$\overline{6}$	0,460 1951	0,461 605$\overline{5}$	0,463 0392	0,464 452$\overline{9}$	0,465 800$\overline{9}$
27	0,476 9042	0,478 4139	0,479 9982	0,481 611$\overline{3}$	0,483 2037	0,484 724$\overline{3}$
28	0,495 0039	0,496 690$\overline{9}$	0,498 4636	0,500 2710	0,502 0579	0,503 766$\overline{6}$
29	0,513 1501	0,515 028$\overline{1}$	0,517 0042	0,519 02$\overline{20}$	0,521 019$\overline{9}$	0,522 9330
30	0,531 344$\overline{3}$	0,533 427$\overline{5}$	0,535 6227	0,537 867$\overline{7}$	0,540 0939	0,542 2291
31	0,549 5877	0,551 8910	0,554 3218	0,556 8115	0,559 2845	0,561 660$\overline{3}$
32	0,567 88$\overline{20}$	0,570 4207	0,573 1041	0,575 857$\overline{1}$	0,578 5962	0,581 2321
33	0,586 228$\overline{3}$	0,589 0185	0,591 972$\overline{4}$	0,595 0079	0,598 0336	0,600 950$\overline{4}$
34	0,604 62$\overline{80}$	0,607 6861	0,610 929$\overline{1}$	0,614 2675	0,617 6012	0,620 8208
35	0,623 082$\overline{4}$	0,626 4256	0,629 9769	0,633 639$\overline{5}$	0,637 3037	0,640 8494
36	0,641 592$\overline{7}$	0,645 2387	0,649 1184	0,653 127$\overline{3}$	0,657 145$\overline{9}$	0,661 042$\overline{3}$
37	0,660 1600	0,664 127$\overline{3}$	0,668 3562	0,672 734$\overline{5}$	0,677 132$\overline{4}$	0,681 405$\overline{5}$
38	0,678 7857	0,683 0929	0,687 6928	0,692 4646	0,697 268$\overline{1}$	0,701 945$\overline{3}$
39	0,697 4707	0,702 137$\overline{4}$	0,707 130$\overline{7}$	0,712 321$\overline{3}$	0,717 557$\overline{8}$	0,722 6682
40	0,716 216$\overline{2}$	0,721 262$\overline{4}$	0,726 6722	0,732 307$\overline{9}$	0,738 0063	0,743 5807
41	0,735 0230	0,740 469$\overline{4}$	0,746 319$\overline{9}$	0,752 4280	0,758 6187	0,764 6894
42	0,753 8923	0,759 7$\overline{600}$	0,766 0760	0,772 6851	0,779 399$\overline{9}$	0,786 001$\overline{2}$
43	0,772 824$\overline{9}$	0,779 1356	0,785 9429	0,793 0826	0,800 3547	0,807 522$\overline{8}$
44	0,791 8215	0,798 5977	0,805 9228	0,813 62$\overline{40}$	0,821 488$\overline{3}$	0,829 261$\overline{3}$
45	0,810 8831	0,818 147$\overline{7}$	0,826 017$\overline{9}$	0,834 312$\overline{5}$	0,842 805$\overline{5}$	0,851 2237

Tafel IV: Werte von $w = F(k, \varphi)$ bei gegebenen $\varphi = \arcsin z$ und $\alpha = \arcsin k$.

φ	$\alpha = 65°$	$\alpha = 70°$	$\alpha = 75°$	$\alpha = 80°$	$\alpha = 85°$	$\alpha = 90°$
1	0,017 4540	0,017 454$\overline{1}$	0,017 4541	0,017 454$\overline{2}$	0,017 454$\overline{2}$	0,017 454$\overline{2}$
2	0,034 9124	0,034 9128	0,034 9132	0,034 913$\overline{5}$	0,034 9136	0,034 913$\overline{7}$
3	0,052 3795	0,052 3810	0,052 3822	0,052 383$\overline{1}$	0,052 3836	0,052 3838
4	0,069 859$\overline{8}$	0,069 863$\overline{3}$	0,069 8661	0,069 8682	0,069 8695	0,069 8699
5	0,087 357$\overline{6}$	0,087 3644	0,087 3$\overline{700}$	0,087 3741	0,087 376$\overline{6}$	0,087 3774
6	0,104 877$\overline{3}$	0,104 8891	0,104 898$\overline{8}$	0,104 905$\overline{9}$	0,104 9102	0,104 911$\overline{7}$
7	0,122 4233	0,122 4422	0,122 457$\overline{6}$	0,122 468$\overline{9}$	0,122 475$\overline{8}$	0,122 4781
8	0,140 0002	0,140 028$\overline{5}$	0,140 051$\overline{5}$	0,140 068$\overline{4}$	0,140 078$\overline{8}$	0,140 0822
9	0,157 612$\overline{5}$	0,157 6528	0,157 6856	0,157 709$\overline{8}$	0,157 7246	0,157 7296
10	0,175 2645	0,175 3201	0,175 3652	0,175 3985	0,175 41$\overline{90}$	0,175 4258
11	0,192 961$\overline{1}$	0,193 035$\overline{3}$	0,193 0956	0,193 1401	0,193 1674	0,193 176$\overline{6}$
12	0,210 7066	0,210 803$\overline{4}$	0,210 8820	0,210 940$\overline{1}$	0,210 975$\overline{7}$	0,210 987$\overline{7}$
13	0,228 5059	0,228 629$\overline{5}$	0,228 7$\overline{300}$	0,228 804$\overline{2}$	0,228 849$\overline{7}$	0,228 86$\overline{50}$
14	0,246 363$\overline{7}$	0,246 5187	0,246 644$\overline{9}$	0,246 738$\overline{1}$	0,246 7952	0,246 814$\overline{5}$
15	0,264 284$\overline{7}$	0,264 4763	0,264 632$\overline{4}$	0,264 747$\overline{7}$	0,264 8184	0,264 8422
16	0,282 273$\overline{8}$	0,282 507$\overline{7}$	0,282 698$\overline{2}$	0,282 83$\overline{90}$	0,282 925$\overline{4}$	0,282 9545
17	0,300 335$\overline{9}$	0,300 618$\overline{1}$	0,300 8480	0,301 018$\overline{1}$	0,301 122$\overline{5}$	0,301 157$\overline{7}$
18	0,318 4760	0,318 8131	0,319 0879	0,319 291$\overline{3}$	0,319 4161	0,319 458$\overline{3}$
19	0,336 6993	0,337 098$\overline{4}$	0,337 4239	0,337 6649	0,337 81$\overline{30}$	0,337 8629
20	0,355 0109	0,355 479$\overline{6}$	0,355 8622	0,356 1456	0,356 319$\overline{8}$	0,356 3785
21	0,373 4161	0,373 9626	0,374 409$\overline{2}$	0,374 7400	0,374 943$\overline{5}$	0,375 0121
22	0,391 9202	0,392 5534	0,393 071$\overline{3}$	0,393 455$\overline{2}$	0,393 691$\overline{3}$	0,393 77$\overline{10}$
23	0,410 5288	0,411 258$\overline{3}$	0,411 8552	0,412 2981	0,412 5706	0,412 6626
24	0,429 2474	0,430 0833	0,430 7679	0,431 276$\overline{2}$	0,431 589$\overline{1}$	0,431 6947
25	0,448 081$\overline{8}$	0,449 0350	0,449 8164	0,450 39$\overline{70}$	0,450 754$\overline{6}$	0,450 8753
26	0,467 037$\overline{8}$	0,468 1200	0,469 008$\overline{1}$	0,469 6683	0,470 0752	0,470 212$\overline{7}$
27	0,486 121$\overline{3}$	0,487 3451	0,488 3503	0,489 0983	0,489 5595	0,489 715$\overline{4}$
28	0,505 3385	0,506 717$\overline{3}$	0,507 8510	0,508 6953	0,509 2162	0,509 392$\overline{3}$
29	0,524 6957	0,526 243$\overline{8}$	0,527 518$\overline{1}$	0,528 4680	0,529 054$\overline{4}$	0,529 252$\overline{7}$
30	0,544 199$\overline{3}$	0,545 9319	0,547 3599	0,548 4253	0,549 0835	0,549 3061
31	0,563 855$\overline{8}$	0,565 7894	0,567 385$\overline{1}$	0,568 576$\overline{8}$	0,569 313$\overline{5}$	0,569 5627
32	0,583 6720	0,585 824$\overline{2}$	0,587 6024	0,588 93$\overline{20}$	0,589 754$\overline{5}$	0,590 0329
33	0,603 6549	0,606 044$\overline{3}$	0,608 0213	0,609 5011	0,610 417$\overline{3}$	0,610 7275
34	0,623 811$\overline{6}$	0,626 458$\overline{2}$	0,628 651$\overline{3}$	0,630 294$\overline{8}$	0,631 3131	0,631 6581
35	0,644 149$\overline{3}$	0,647 074$\overline{6}$	0,649 502$\overline{4}$	0,651 3239	0,652 453$\overline{7}$	0,652 836$\overline{6}$
36	0,664 6756	0,667 902$\overline{5}$	0,670 5849	0,672 6002	0,673 851$\overline{3}$	0,674 275$\overline{5}$
37	0,685 398$\overline{3}$	0,688 9512	0,691 309$\overline{8}$	0,694 1356	0,695 518$\overline{8}$	0,695 98$\overline{80}$
38	0,706 325$\overline{2}$	0,710 2304	0,713 4882	0,715 942$\overline{9}$	0,717 4697	0,717 98$\overline{80}$
39	0,727 464$\overline{5}$	0,731 750$\overline{2}$	0,735 332$\overline{1}$	0,738 0351	0,739 718$\overline{4}$	0,740 290$\overline{1}$
40	0,748 8246	0,753 520$\overline{8}$	0,757 4536	0,760 426$\overline{4}$	0,762 279$\overline{8}$	0,762 909$\overline{7}$
41	0,770 414$\overline{3}$	0,775 5531	0,779 8658	0,783 131$\overline{3}$	0,785 1697	0,785 86$\overline{30}$
42	0,792 242$\overline{3}$	0,797 8583	0,802 5819	0,806 1652	0,808 4050	0,809 1672
43	0,814 3178	0,820 4480	0,825 616$\overline{3}$	0,829 544$\overline{5}$	0,832 003$\overline{3}$	0,832 840$\overline{7}$
44	0,836 650$\overline{3}$	0,843 334$\overline{4}$	0,848 9835	0,853 2861	0,855 9833	0,856 9026
45	0,859 249$\overline{4}$	0,866 5$\overline{300}$	0,872 6992	0,877 4083	0,880 3650	0,881 373$\overline{6}$

Tafel IV: Werte von $w = F(k, \varphi)$ **bei gegebenen** $\varphi = \arcsin z$ **und** $\alpha = \arcsin k$.

φ	$\alpha = 5°$	$\alpha = 10°$	$\alpha = 15°$	$\alpha = 20°$	$\alpha = 25°$	$\alpha = 30°$
46	0,803 4282	0,805 153$\overline{7}$	0,808 012$\overline{7}$	0,811 9784	0,817 0098	0,823 047$\overline{8}$
47	0,820 916$\overline{5}$	0,822 747$\overline{1}$	0,825 7819	0,829 99$\overline{50}$	0,835 34$\overline{60}$	0,841 776$\overline{3}$
48	0,838 4059	0,840 345$\overline{2}$	0,843 5619	0,848 0311	0,853 713$\overline{7}$	0,860 551$\overline{9}$
49	0,855 8965	0,857 94$\overline{80}$	0,861 352$\overline{7}$	0,866 086$\overline{9}$	0,872 1129	0,879 3748
50	0,873 388$\overline{3}$	0,875 5554	0,879 1541	0,884 1621	0,890 543$\overline{9}$	0,898 2452
51	0,890 881$\overline{2}$	0,893 167$\overline{6}$	0,896 9662	0,902 2569	0,909 0064	0,917 1632
52	0,908 3752	0,910 784$\overline{3}$	0,914 78$\overline{90}$	0,920 371$\overline{2}$	0,927 500$\overline{6}$	0,936 128$\overline{8}$
53	0,925 870$\overline{4}$	0,928 405$\overline{6}$	0,932 622$\overline{3}$	0,938 5048	0,946 026$\overline{2}$	0,955 1419
54	0,943 366$\overline{7}$	0,946 0314	0,950 4660	0,956 657$\overline{7}$	0,964 5831	0,974 202$\overline{6}$
55	0,960 864$\overline{1}$	0,963 661$\overline{8}$	0,968 3201	0,974 829$\overline{6}$	0,983 171$\overline{3}$	0,993 310$\overline{6}$
56	0,978 836$\overline{3}$	0,981 2966	0,986 1845	0,993 020$\overline{5}$	1,001 790$\overline{4}$	1,012 4657
57	0,995 8621	0,998 935$\overline{8}$	1,004 0591	1,011 230$\overline{1}$	1,020 4401	1,031 667$\overline{7}$
58	1,013 3627	1,016 5793	1,021 943$\overline{7}$	1,029 458$\overline{2}$	1,039 1203	1,050 916$\overline{1}$
59	1,030 8644	1,034 2271	1,039 8381	1,047 7045	1,057 8305	1,070 215$\overline{6}$
60	1,048 3671	1,051 9791	1,057 742$\overline{3}$	1,065 9689	1,076 5704	1,089 550$\overline{7}$
61	1,065 870$\overline{9}$	1,069 5352	1,075 6560	1,084 25$\overline{10}$	1,095 3395	1,108 935$\overline{8}$
62	1,083 375$\overline{6}$	1,087 195$\overline{4}$	1,093 579$\overline{1}$	1,102 550$\overline{5}$	1,114 137$\overline{4}$	1,128 365$\overline{3}$
63	1,100 881$\overline{3}$	1,104 8594	1,111 5113	1,120 86$\overline{70}$	1,132 963$\overline{5}$	1,147 8384
64	1,118 387$\overline{9}$	1,122 527$\overline{4}$	1,129 4525	1,139 200$\overline{2}$	1,151 817$\overline{3}$	1,167 354$\overline{6}$
65	1,135 8954	1,140 199$\overline{1}$	1,147 4024	1,157 549$\overline{7}$	1,170 6981	1,186 9127
66	1,153 403$\overline{9}$	1,157 8744	1,165 360$\overline{9}$	1,175 9150	1,180 605$\overline{4}$	1,206 5121
67	1,170 913$\overline{2}$	1,175 553$\overline{3}$	1,183 327$\overline{6}$	1,194 2958	1,208 5384	1,226 151$\overline{7}$
68	1,188 4233	1,193 2356	1,201 3023	1,212 6916	1,227 496$\overline{5}$	1,245 8303
69	1,205 934$\overline{3}$	1,210 921$\overline{3}$	1,219 284$\overline{8}$	1,231 10$\overline{20}$	1,246 4788	1,265 5470
70	1,223 4460	1,228 610$\overline{1}$	1,237 2747	1,249 526$\overline{3}$	1,265 484$\overline{6}$	1,285 300$\overline{6}$
71	1,240 9585	1,246 3020	1,255 2718	1,267 964$\overline{1}$	1,284 51$\overline{30}$	1,305 089$\overline{7}$
72	1,258 4717	1,263 996$\overline{9}$	1,273 2758	1,286 4148	1,303 5631	1,324 9130
73	1,275 9856	1,281 6945	1,291 2864	1,304 8779	1,322 6341	1,344 7693
74	1,293 500$\overline{2}$	1,299 394$\overline{9}$	1,303 303$\overline{3}$	1,323 352$\overline{9}$	1,341 7249	1,364 65$\overline{70}$
75	1,311 015$\overline{4}$	1,317 097$\overline{8}$	1,327 3261	1,341 8390	1,360 834$\overline{7}$	1,384 574$\overline{6}$
76	1,328 5311	1,334 803$\overline{1}$	1,345 354$\overline{6}$	1,360 3357	1,379 962$\overline{3}$	1,404 520$\overline{5}$
77	1,346 0474	1,352 5106	1,363 388$\overline{3}$	1,378 8424	1,399 1067	1,424 493$\overline{2}$
78	1,363 564$\overline{3}$	1,370 2202	1,381 4269	1,397 358$\overline{5}$	1,418 2669	1,444 490$\overline{9}$
79	1,381 081$\overline{6}$	1,387 9318	1,399 470$\overline{2}$	1,415 8831	1,437 441$\overline{8}$	1,464 5119
80	1,398 5993	1,405 6452	1,417 5176	1,434 415$\overline{8}$	1,456 6301	1,484 554$\overline{6}$
81	1,416 1174	1,423 3360	1,435 5689	1,452 9557	1,475 830$\overline{9}$	1,504 6169
82	1,433 6359	1,441 107$\overline{7}$	1,453 6237	1,471 5023	1,495 0428	1,524 697$\overline{2}$
83	1,451 1547	1,458 7946	1,471 681$\overline{7}$	1,490 0547	1,514 264$\overline{8}$	1,544 7934
84	1,468 6738	1,476 5136	1,489 7423	1,508 612$\overline{4}$	1,533 4955	1,564 903$\overline{8}$
85	1,486 1932	1,494 2336	1,507 8053	1,527 174$\overline{5}$	1,552 7338	1,585 0262
86	1,503 7127	1,511 9544	1,525 8703	1,545 740$\overline{3}$	1,571 978$\overline{5}$	1,605 1588
87	1,521 2324	1,529 6759	1,543 9368	1,564 309$\overline{1}$	1,591 2282	1,625 299$\overline{6}$
88	1,538 752$\overline{3}$	1,547 39$\overline{80}$	1,562 004$\overline{6}$	1,582 880$\overline{1}$	1,610 481$\overline{8}$	1,645 4464
89	1,556 272$\overline{2}$	1,565 120$\overline{3}$	1,580 073$\overline{1}$	1,601 4526	1,629 737$\overline{9}$	1,665 597$\overline{4}$
90	1,573 7921	1,592 8428	1,598 1420	1,620 025$\overline{9}$	1,648 9952	1,685 750$\overline{4}$

Tafel IV: Werte von $w = F(k, \varphi)$ bei gegebenen $\varphi = \arcsin z$ und $\alpha = \arcsin k$.

φ	$\alpha = 35°$	$\alpha = 40°$	$\alpha = 45°$	$\alpha = 50°$	$\alpha = 55°$	$\alpha = 60°$
46	$0,830\,010\overline{3}$	$0,837\,786\overline{6}$	$0,846\,230\overline{2}$	$0,855\,151\overline{5}$	$0,864\,311\overline{4}$	$0,873\,4174$
47	$0,849\,2037$	$0,857\,5175$	$0,866\,561\overline{7}$	$0,876\,144\overline{2}$	$0,886\,0109$	$0,895\,849\overline{6}$
48	$0,868\,46\overline{40}$	$0,877\,336\overline{2}$	$0,887\,014\overline{4}$	$0,897\,2937$	$0,907\,9091$	$0,918\,527\overline{7}$
49	$0,887\,7915$	$0,897\,2489$	$0,907\,5900$	$0,918\,6032$	$0,930\,0108$	$0,941\,459\overline{2}$
50	$0,907\,186\overline{8}$	$0,917\,254\overline{9}$	$0,928\,290\overline{4}$	$0,940\,075\overline{7}$	$0,952\,3209$	$0,964\,651\overline{6}$
51	$0,926\,650\overline{2}$	$0,937\,354\overline{8}$	$0,949\,1169$	$0,961\,7139$	$0,974\,844\overline{3}$	$0,988\,1125$
52	$0,946\,1818$	$0,957\,549\overline{4}$	$0,970\,0712$	$0,983\,520\overline{7}$	$0,997\,585\overline{6}$	$1,011\,8496$
53	$0,965\,7820$	$0,977\,8392$	$0,991\,154\overline{6}$	$1,005\,498\overline{6}$	$1,020\,5494$	$1,035\,8705$
54	$0,985\,4507$	$0,998\,224\overline{8}$	$1,012\,368\overline{2}$	$1,027\,6500$	$1,043\,7403$	$1,060\,1829$
55	$1,005\,1880$	$1,018\,7063$	$1,033\,71\overline{30}$	$1,049\,977\overline{4}$	$1,067\,162\overline{7}$	$1,084\,7943$
56	$1,024\,993\overline{8}$	$1,039\,2841$	$1,055\,189\overline{9}$	$1,072\,482\overline{6}$	$1,090\,8206$	$1,109\,712\overline{4}$
57	$1,044\,8677$	$1,059\,9582$	$1,076\,799\overline{6}$	$1,095\,167\overline{6}$	$1,114\,7181$	$1,134\,9444$
58	$1,064\,8096$	$1,080\,7285$	$1,098\,542\overline{5}$	$1,118\,03\overline{40}$	$1,138\,8589$	$1,160\,497\overline{8}$
59	$1,084\,8190$	$1,101\,5948$	$1,120\,41\overline{90}$	$1,141\,0832$	$1,163\,2465$	$1,186\,379\overline{6}$
60	$1,104\,8954$	$1,122\,556\overline{7}$	$1,142\,429\overline{1}$	$1,164\,316\overline{4}$	$1,187\,884\overline{1}$	$1,212\,5366$
61	$1,125\,0382$	$1,143\,613\overline{6}$	$1,164\,5726$	$1,187\,7342$	$1,212\,774\overline{4}$	$1,239\,155\overline{5}$
62	$1,145\,2466$	$1,164\,7648$	$1,186\,8492$	$1,211\,337\overline{4}$	$1,237\,9\overline{200}$	$1,266\,0624$
63	$1,165\,5198$	$1,186\,009\overline{6}$	$1,209\,258\overline{3}$	$1,235\,125\overline{9}$	$1,263\,322\overline{7}$	$1,293\,3231$
64	$1,185\,8568$	$1,207\,346\overline{7}$	$1,231\,7988$	$1,259\,0996$	$1,288\,984\overline{3}$	$1,320\,9429$
65	$1,206\,256\overline{6}$	$1,228\,77\overline{50}$	$1,254\,469\overline{8}$	$1,283\,25\overline{80}$	$1,314\,905\overline{7}$	$1,348\,9264$
66	$1,226\,7179$	$1,250\,293\overline{1}$	$1,277\,269\overline{7}$	$1,307\,\overline{6000}$	$1,341\,087\overline{4}$	$1,377\,277\overline{7}$
67	$1,247\,2395$	$1,271\,899\overline{3}$	$1,300\,196\overline{8}$	$1,332\,1241$	$1,367\,529\overline{3}$	$1,405\,9999$
68	$1,267\,8199$	$1,293\,5919$	$1,323\,2490$	$1,356\,828\overline{6}$	$1,394\,2305$	$1,435\,095\overline{5}$
69	$1,288\,457\overline{7}$	$1,315\,36\overline{90}$	$1,346\,424\overline{2}$	$1,381\,7110$	$1,421\,1896$	$1,464\,5657$
70	$1,309\,1510$	$1,337\,2282$	$1,369\,719\overline{5}$	$1,406\,7685$	$1,448\,4043$	$1,494\,410\overline{9}$
71	$1,329\,8983$	$1,359\,1674$	$1,393\,132\overline{1}$	$1,431\,9978$	$1,475\,871\overline{5}$	$1,524\,6300$
72	$1,350\,697\overline{6}$	$1,381\,18\overline{40}$	$1,416\,6586$	$1,457\,3949$	$1,503\,5872$	$1,555\,2209$
73	$1,371\,546\overline{9}$	$1,403\,275\overline{1}$	$1,440\,295\overline{6}$	$1,482\,9554$	$1,531\,546\overline{6}$	$1,586\,179\overline{8}$
74	$1,392\,444\overline{1}$	$1,425\,4379$	$1,464\,0390$	$1,508\,674\overline{4}$	$1,559\,743\overline{9}$	$1,617\,5013$
75	$1,413\,3870$	$1,447\,669\overline{4}$	$1,487\,8847$	$1,534\,546\overline{2}$	$1,588\,1723$	$1,649\,178\overline{7}$
76	$1,434\,373\overline{4}$	$1,469\,9661$	$1,511\,828\overline{1}$	$1,560\,564\overline{8}$	$1,616\,824\overline{2}$	$1,681\,2030$
77	$1,455\,4007$	$1,492\,324\overline{7}$	$1,535\,864\overline{3}$	$1,586\,723\overline{5}$	$1,645\,690\overline{6}$	$1,713\,563\overline{8}$
78	$1,476\,4666$	$1,514\,741\overline{5}$	$1,559\,988\overline{2}$	$1,613\,015\overline{1}$	$1,674\,7618$	$1,746\,248\overline{5}$
79	$1,497\,5684$	$1,537\,2127$	$1,584\,1942$	$1,639\,4318$	$1,704\,027\overline{1}$	$1,779\,242\overline{6}$
80	$1,518\,703\overline{5}$	$1,559\,7344$	$1,608\,4767$	$1,665\,9654$	$1,733\,4744$	$1,812\,5295$
81	$1,539\,8690$	$1,582\,302\overline{5}$	$1,632\,829\overline{7}$	$1,692\,6070$	$1,763\,0911$	$1,846\,0908$
82	$1,561\,0622$	$1,604\,9127$	$1,657\,2468$	$1,719\,3474$	$1,792\,863\overline{3}$	$1,879\,9058$
83	$1,582\,2802$	$1,627\,560\overline{8}$	$1,681\,721\overline{6}$	$1,746\,1768$	$1,822\,7762$	$1,913\,952\overline{2}$
84	$1,603\,5\overline{200}$	$1,650\,2421$	$1,706\,2473$	$1,773\,0851$	$1,852\,814\overline{4}$	$1,948\,2054$
85	$1,624\,778\overline{6}$	$1,672\,952\overline{3}$	$1,730\,8171$	$1,800\,061\overline{8}$	$1,882\,9614$	$1,982\,639\overline{6}$
86	$1,646\,0529$	$1,695\,6865$	$1,755\,423\overline{9}$	$1,827\,095\overline{9}$	$1,913\,2003$	$2,017\,2270$
87	$1,667\,339\overline{9}$	$1,718\,4401$	$1,780\,0604$	$1,854\,1763$	$1,943\,513\overline{5}$	$2,051\,9388$
88	$1,688\,6363$	$1,741\,2083$	$1,804\,7193$	$1,881\,2917$	$1,973\,8827$	$2,086\,7449$
89	$1,709\,939\overline{2}$	$1,763\,986\overline{3}$	$1,829\,3932$	$1,908\,430\overline{6}$	$2,004\,289\overline{6}$	$2,121\,614\overline{4}$
90	$1,731\,245\overline{2}$	$1,786\,7691$	$1,854\,0747$	$1,935\,581\overline{1}$	$2,034\,7153$	$2,156\,5156$

Tafel IV: Werte von $w = F(k, \varphi)$ **bei gegebenen** $\varphi = \arcsin z$ **und** $\alpha = \arcsin k$.

φ	$\alpha = 65^\circ$	$\alpha = 70^\circ$	$\alpha = 75^\circ$	$\alpha = 80^\circ$	$\alpha = 85^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
46	$0{,}882\,1250$	$0{,}890\,047\overline{8}$	$0{,}896\,7797$	$0{,}901\,9302$	$0{,}905\,1695$	$0{,}906\,275\overline{5}$
47	$0{,}905\,287\overline{5}$	$0{,}913\,9015$	$0{,}921\,242\overline{1}$	$0{,}926\,872\overline{1}$	$0{,}930\,419\overline{4}$	$0{,}931\,6316$
48	$0{,}928\,7472$	$0{,}938\,105\overline{3}$	$0{,}946\,1043$	$0{,}952\,2554$	$0{,}956\,138\overline{5}$	$0{,}957\,466\overline{9}$
49	$0{,}952\,515\overline{1}$	$0{,}962\,673\overline{9}$	$0{,}971\,3854$	$0{,}978\,1031$	$0{,}982\,352\overline{6}$	$0{,}983\,807\overline{9}$
50	$0{,}976\,602\overline{1}$	$0{,}987\,6225$	$0{,}997\,105\overline{4}$	$1{,}004\,4394$	$1{,}009\,08\overline{90}$	$1{,}010\,683\overline{2}$
51	$1{,}001\,0196$	$1{,}012\,967\overline{3}$	$1{,}023\,285\overline{2}$	$1{,}031\,2902$	$1{,}036\,3771$	$1{,}038\,123\overline{5}$
52	$1{,}025\,779\overline{3}$	$1{,}038\,7247$	$1{,}049\,9470$	$1{,}058\,6831$	$1{,}064\,248\overline{5}$	$1{,}066\,1617$
53	$1{,}050\,892\overline{9}$	$1{,}064\,912\overline{1}$	$1{,}077\,1145$	$1{,}086\,647\overline{5}$	$1{,}092\,7370$	$1{,}094\,833\overline{5}$
54	$1{,}076\,3726$	$1{,}091\,547\overline{4}$	$1{,}104\,812\overline{3}$	$1{,}115\,214\overline{9}$	$1{,}121\,8792$	$1{,}124\,1772$
55	$1{,}102\,230\overline{8}$	$1{,}118\,649\overline{2}$	$1{,}133\,066\overline{5}$	$1{,}144\,4189$	$1{,}151\,714\overline{6}$	$1{,}154\,234\overline{6}$
56	$1{,}128\,479\overline{9}$	$1{,}146\,23\overline{70}$	$1{,}161\,904\overline{8}$	$1{,}174\,2958$	$1{,}182\,285\overline{8}$	$1{,}185\,050\overline{7}$
57	$1{,}155\,1327$	$1{,}174\,3307$	$1{,}191\,3564$	$1{,}204\,8843$	$1{,}213\,6391$	$1{,}216\,6748$
58	$1{,}182\,2020$	$1{,}202\,951\overline{4}$	$1{,}221\,452\overline{4}$	$1{,}236\,226\overline{2}$	$1{,}245\,82\overline{50}$	$1{,}249\,1606$
59	$1{,}209\,700\overline{9}$	$1{,}232\,1203$	$1{,}252\,2253$	$1{,}268\,3663$	$1{,}278\,898\overline{2}$	$1{,}282\,5668$
60	$1{,}237\,6421$	$1{,}261\,859\overline{9}$	$1{,}283\,7099$	$1{,}301\,3532$	$1{,}312\,9187$	$1{,}316\,9579$
61	$1{,}266\,0387$	$1{,}292\,1929$	$1{,}315\,942\overline{8}$	$1{,}335\,2392$	$1{,}347\,952\overline{2}$	$1{,}352\,4048$
62	$1{,}294\,9036$	$1{,}323\,1429$	$1{,}348\,9625$	$1{,}370\,0809$	$1{,}384\,070\overline{7}$	$1{,}388\,98\overline{60}$
63	$1{,}324\,2493$	$1{,}354\,7340$	$1{,}382\,8101$	$1{,}405\,9396$	$1{,}421\,353\overline{7}$	$1{,}426\,7882$
64	$1{,}354\,0882$	$1{,}386\,9907$	$1{,}417\,528\overline{7}$	$1{,}442\,88\overline{20}$	$1{,}459\,889\overline{1}$	$1{,}465\,9083$
65	$1{,}384\,4322$	$1{,}419\,93\overline{80}$	$1{,}453\,163\overline{6}$	$1{,}480\,980\overline{1}$	$1{,}499\,7741$	$1{,}506\,4542$
66	$1{,}415\,2927$	$1{,}453\,6008$	$1{,}489\,7627$	$1{,}520\,3125$	$1{,}541\,1172$	$1{,}548\,547\overline{2}$
67	$1{,}446\,680\overline{3}$	$1{,}488\,0044$	$1{,}527\,3761$	$1{,}560\,964\overline{9}$	$1{,}584\,039\overline{3}$	$1{,}592\,3237$
68	$1{,}478\,604\overline{6}$	$1{,}523\,173\overline{7}$	$1{,}566\,056\overline{4}$	$1{,}603\,030\overline{2}$	$1{,}628\,6760$	$1{,}637\,938\overline{7}$
69	$1{,}511\,0743$	$1{,}559\,1331$	$1{,}605\,8578$	$1{,}646\,6\overline{100}$	$1{,}675\,1800$	$1{,}685\,568\overline{5}$
70	$1{,}544\,096\overline{8}$	$1{,}595\,9062$	$1{,}646\,8371$	$1{,}691\,814\overline{9}$	$1{,}723\,72\overline{40}$	$1{,}735\,415\overline{2}$
71	$1{,}577\,6776$	$1{,}633\,515\overline{5}$	$1{,}689\,0522$	$1{,}738\,7655$	$1{,}774\,5037$	$1{,}787\,7120$
72	$1{,}611\,820\overline{8}$	$1{,}671\,9814$	$1{,}732\,5623$	$1{,}787\,5930$	$1{,}827\,743\overline{1}$	$1{,}842\,7300$
73	$1{,}646\,52\overline{80}$	$1{,}711\,3224$	$1{,}777\,42\overline{70}$	$1{,}838\,440\overline{1}$	$1{,}883\,6985$	$1{,}900\,786\overline{7}$
74	$1{,}681\,7986$	$1{,}751\,5538$	$1{,}823\,7051$	$1{,}891\,4610$	$1{,}942\,665\overline{8}$	$1{,}962\,257\overline{2}$
75	$1{,}717\,629\overline{4}$	$1{,}792\,687\overline{4}$	$1{,}871\,45\overline{40}$	$1{,}946\,8223$	$2{,}004\,987\overline{8}$	$2{,}027\,5894$
76	$1{,}754\,0137$	$1{,}834\,730\overline{2}$	$1{,}920\,7272$	$2{,}004\,702\overline{1}$	$2{,}071\,0641$	$2{,}097\,32\overline{40}$
77	$1{,}790\,94\overline{20}$	$1{,}877\,684\overline{1}$	$1{,}971\,5733$	$2{,}065\,2889$	$2{,}141\,363\overline{4}$	$2{,}172\,1218$
78	$1{,}828\,400\overline{8}$	$1{,}921\,544\overline{4}$	$2{,}024\,0327$	$2{,}128\,7797$	$2{,}216\,4375$	$2{,}252\,8027$
79	$1{,}866\,3728$	$1{,}966\,2991$	$2{,}078\,1349$	$2{,}195\,375\overline{2}$	$2{,}296\,9400$	$2{,}340\,400\overline{7}$
80	$1{,}904\,8367$	$2{,}011\,92\overline{80}$	$2{,}133\,8951$	$2{,}265\,273\overline{3}$	$2{,}383\,647\overline{1}$	$2{,}436\,246\overline{1}$
81	$1{,}943\,7668$	$2{,}058\,4012$	$2{,}191\,3102$	$2{,}338\,659\overline{1}$	$2{,}477\,4815$	$2{,}542\,0904$
82	$1{,}983\,13\overline{30}$	$2{,}105\,679\overline{2}$	$2{,}250\,3543$	$2{,}415\,6900$	$2{,}579\,5368$	$2{,}660\,3061$
83	$2{,}022\,9007$	$2{,}153\,7112$	$2{,}310\,9748$	$2{,}496\,4757$	$2{,}691\,094\overline{4}$	$2{,}794\,219\overline{1}$
84	$2{,}063\,031\overline{3}$	$2{,}202\,435\overline{8}$	$2{,}373\,0880$	$2{,}581\,0521$	$2{,}813\,617\overline{8}$	$2{,}948\,7002$
85	$2{,}103\,481\overline{7}$	$2{,}251\,7\overline{800}$	$2{,}436\,5761$	$2{,}669\,3504$	$2{,}948\,688\overline{8}$	$3{,}131\,3013$
86	$2{,}144\,205\overline{2}$	$2{,}301\,6602$	$2{,}501\,2851$	$2{,}761\,16\overline{40}$	$3{,}097\,820\overline{3}$	$3{,}354\,6735$
87	$2{,}185\,1515$	$2{,}351\,9829$	$2{,}567\,0253$	$2{,}856\,1187$	$3{,}261\,9792$	$3{,}642\,533\overline{4}$
88	$2{,}226\,2677$	$2{,}402\,6458$	$2{,}633\,57\overline{30}$	$2{,}953\,656\overline{3}$	$3{,}441\,160\overline{4}$	$4{,}048\,1254$
89	$2{,}267\,4984$	$2{,}453\,5396$	$2{,}700\,6764$	$3{,}053\,0391$	$3{,}632\,792\overline{9}$	$4{,}741\,348\overline{8}$
90	$2{,}308\,786\overline{8}$	$2{,}504\,550\overline{1}$	$2{,}768\,0631$	$3{,}153\,385\overline{3}$	$3{,}831\,7420$	∞

Tafel V: Werte von $Z = E(k, \varphi)$ **bei gegebenen** $\varphi = \arcsin z$ **und** $\alpha = \arcsin k$.

φ	$\alpha = 5°$	$\alpha = 10°$	$\alpha = 15°$	$\alpha = 20°$	$\alpha = 25°$	$\alpha = 30°$
1	0,017 453$\overline{3}$	0,017 453$\overline{3}$	0,017 4532	0,017 453$\overline{2}$	0,017 4531	0,017 453$\overline{1}$
2	0,034 9065	0,034 906$\overline{4}$	0,034 9061	0,034 905$\overline{8}$	0,034 9053	0,034 9048
3	0,052 359$\overline{7}$	0,052 359$\overline{2}$	0,052 358$\overline{3}$	0,052 357$\overline{1}$	0,052 3556	0,052 353$\overline{9}$
4	0,069 8127	0,069 811$\overline{5}$	0,069 809$\overline{4}$	0,069 8065	0,069 8030	0,069 7990
5	0,087 2656	0,087 2631	0,087 259$\overline{1}$	0,087 2535	0,087 2467	0,087 2388
6	0,104 7183	0,104 71$\overline{40}$	0,104 70$\overline{70}$	0,104 6974	0,104 6856	0,104 67$\overline{20}$
7	0,122 1707	0,122 1639	0,122 1527	0,122 137$\overline{6}$	0,122 1189	0,122 0972
8	0,139 6229	0,139 6127	0,139 596$\overline{1}$	0,139 573$\overline{5}$	0,139 545$\overline{6}$	0,139 513$\overline{3}$
9	0,157 0747	0,157 0602	0,157 036$\overline{6}$	0,157 0044	0,156 964$\overline{8}$	0,156 918$\overline{8}$
10	0,174 5262	0,174 506$\overline{4}$	0,174 4739	0,174 4298	0,174 375$\overline{5}$	0,174 312$\overline{5}$
11	0,191 9773	0,191 9509	0,191 907$\overline{8}$	0,191 849$\overline{2}$	0,191 7769	0,191 6931
12	0,209 40$\overline{80}$	0,209 3937	0,209 337$\overline{8}$	0,209 2618	0,209 1681	0,209 0594
13	0,226 8782	0,226 834$\overline{7}$	0,226 763$\overline{7}$	0,226 6672	0,226 548$\overline{2}$	0,226 410$\overline{2}$
14	0,244 3278	0,244 2736	0,244 185$\overline{1}$	0,244 064$\overline{8}$	0,243 9163	0,243 7441
15	0,261 77$\overline{70}$	0,261 7104	0,261 601$\overline{7}$	0,261 4539	0,261 271$\overline{6}$	0,261 060$\overline{1}$
16	0,279 2255	0,279 144$\overline{9}$	0,279 0131	0,278 8341	0,278 613$\overline{2}$	0,278 356$\overline{8}$
17	0,296 673$\overline{5}$	0,296 5769	0,296 419$\overline{2}$	0,296 204$\overline{9}$	0,295 9402	0,295 633$\overline{2}$
18	0,314 120$\overline{8}$	0,314 0064	0,313 8195	0,313 565$\overline{6}$	0,313 25$\overline{20}$	0,312 88$\overline{80}$
19	0,331 567$\overline{4}$	0,331 433$\overline{2}$	0,331 213$\overline{9}$	0,330 915$\overline{8}$	0,330 5476	0,330 120$\overline{2}$
20	0,349 013$\overline{3}$	0,348 8571	0,348 601$\overline{9}$	0,348 2549	0,347 8263	0,347 3286
21	0,366 458$\overline{5}$	0,366 2781	0,365 9833	0,365 5825	0,365 087$\overline{4}$	0,364 5122
22	0,383 9028	0,383 6960	0,383 3579	0,382 8981	0,382 3$\overline{300}$	0,381 6699
23	0,401 3464	0,401 1107	0,400 725$\overline{4}$	0,400 2013	0,399 553$\overline{5}$	0,398 800$\overline{7}$
24	0,418 789$\overline{2}$	0,418 5221	0,418 0854	0,417 491$\overline{5}$	0,416 7571	0,415 9035
25	0,436 231$\overline{1}$	0,435 9301	0,435 4379	0,434 7683	0,433 940$\overline{3}$	0,432 977$\overline{5}$
26	0,453 672$\overline{1}$	0,453 334$\overline{6}$	0,452 2725	0,452 031$\overline{4}$	0,451 1022	0,450 0216
27	0,471 1121	0,470 735$\overline{4}$	0,470 1190	0,469 280$\overline{2}$	0,468 242$\overline{4}$	0,467 03$\overline{50}$
28	0,488 551$\overline{3}$	0,488 132$\overline{5}$	0,487 4472	0,486 5144	0,485 3601	0,484 016$\overline{7}$
29	0,505 989$\overline{5}$	0,505 5257	0,504 766$\overline{9}$	0,503 7337	0,502 4548	0,500 96$\overline{60}$
30	0,523 4267	0,522 9151	0,522 0778	0,520 937$\overline{7}$	0,519 52$\overline{60}$	0,517 8819
31	0,540 8629	0,540 300$\overline{5}$	0,539 379$\overline{9}$	0,538 1260	0,536 5730	0,534 763$\overline{9}$
32	0,558 298$\overline{1}$	0,557 681$\overline{8}$	0,556 672$\overline{9}$	0,555 2983	0,553 595$\overline{5}$	0,551 61$\overline{10}$
33	0,575 7322	0,575 0589	0,573 956$\overline{6}$	0,572 454$\overline{4}$	0,570 5928	0,568 4226
34	0,593 1653	0,592 431$\overline{9}$	0,591 2308	0,589 593$\overline{9}$	0,587 5646	0,585 1981
35	0,610 5973	0,609 800$\overline{6}$	0,608 495$\overline{6}$	0,606 7165	0,604 5105	0,601 936$\overline{9}$
36	0,628 028$\overline{3}$	0,627 164$\overline{9}$	0,625 7506	0,623 822$\overline{1}$	0,621 4300	0,618 638$\overline{3}$
37	0,645 458$\overline{1}$	0,644 5248	0,642 9958	0,640 910$\overline{4}$	0,638 3228	0,635 301$\overline{8}$
38	0,662 886$\overline{8}$	0,661 8803	0,660 2311	0,657 981$\overline{2}$	0,655 1886	0,651 926$\overline{9}$
39	0,680 314$\overline{4}$	0,679 2313	0,677 456$\overline{4}$	0,675 034$\overline{3}$	0,672 027$\overline{1}$	0,668 513$\overline{2}$
40	0,697 7408	0,696 5778	0,694 6715	0,692 0695	0,688 8379	0,685 0602
41	0,715 1661	0,713 919$\overline{9}$	0,711 876$\overline{5}$	0,709 0868	0,705 6209	0,701 567$\overline{7}$
42	0,732 5903	0,731 257$\overline{2}$	0,729 071$\overline{2}$	0,726 08$\overline{60}$	0,722 375$\overline{9}$	0,718 0352
43	0,750 0133	0,748 5899	0,746 255$\overline{6}$	0,743 06$\overline{70}$	0,739 102$\overline{7}$	0,734 4626
44	0,767 435$\overline{2}$	0,765 918$\overline{1}$	0,763 429$\overline{7}$	0,760 029$\overline{7}$	0,755 801$\overline{1}$	0,750 849$\overline{6}$
45	0,784 855$\overline{9}$	0,783 2416	0,780 593$\overline{4}$	0,776 9740	0,772 471$\overline{1}$	0,767 19$\overline{60}$

Tafel V: Werte von $Z = E(k, \varphi)$ bei gegebenen $\varphi = \arcsin z$ und $\alpha = \arcsin k$.

φ	$\alpha = 35°$	$\alpha = 40°$	$\alpha = 45°$	$\alpha = 50°$	$\alpha = 55°$	$\alpha = 60°$
1	0,017 4530	0,017 4529	0,017 4528	0,017 452$\overline{8}$	0,017 452$\overline{7}$	0,017 4526
2	0,034 904$\overline{3}$	0,034 903$\overline{7}$	0,034 9030	0,034 9024	0,034 9018	0,034 901$\overline{3}$
3	0,052 3520	0,052 3$\overline{500}$	0,052 3479	0,052 3458	0,052 3438	0,052 3419
4	0,069 7945	0,069 789$\overline{8}$	0,069 7848	0,069 7799	0,069 7751	0,069 7707
5	0,087 230$\overline{1}$	0,087 2207	0,087 2111	0,087 2015	0,087 192$\overline{2}$	0,087 1834
6	0,104 656$\overline{9}$	0,104 640$\overline{8}$	0,104 624$\overline{2}$	0,104 6076	0,104 591$\overline{5}$	0,104 5763
7	0,122 073$\overline{3}$	0,122 0477	0,122 021$\overline{4}$	0,121 99$\overline{50}$	0,121 9694	0,121 945$\overline{4}$
8	0,139 4775	0,139 439$\overline{4}$	0,139 400$\overline{1}$	0,139 360$\overline{7}$	0,139 3225	0,139 286$\overline{7}$
9	0,156 8659	0,156 8136	0,156 7576	0,156 7016	0,156 6472	0,156 5962
10	0,174 2427	0,174 168$\overline{4}$	0,174 091$\overline{6}$	0,174 0147	0,173 9401	0,173 8701
11	0,191 600$\overline{4}$	0,191 5014	0,191 3992	0,191 29$\overline{70}$	0,191 1977	0,191 1045
12	0,208 939$\overline{1}$	0,208 810$\overline{7}$	0,208 6781	0,208 5454	0,208 416$\overline{6}$	0,208 2955
13	0,226 2573	0,226 094$\overline{2}$	0,225 925$\overline{7}$	0,225 7570	0,225 5932	0,225 4393
14	0,243 553$\overline{4}$	0,243 349$\overline{8}$	0,243 139$\overline{5}$	0,242 9288	0,242 724$\overline{3}$	0,242 532$\overline{1}$
15	0,260 825$\overline{7}$	0,260 575$\overline{5}$	0,260 3169	0,260 05$\overline{80}$	0,259 806$\overline{4}$	0,259 5$\overline{700}$
16	0,278 0726	0,277 7692	0,277 455$\overline{7}$	0,277 141$\overline{5}$	0,276 8362	0,276 5492
17	0,295 2927	0,294 9291	0,294 553$\overline{3}$	0,294 176$\overline{6}$	0,293 810$\overline{5}$	0,293 466$\overline{2}$
18	0,312 484$\overline{4}$	0,312 0532	0,311 607$\overline{4}$	0,311 160$\overline{4}$	0,310 7258	0,310 3171
19	0,329 6461	0,329 1395	0,328 615$\overline{6}$	0,328 0901	0,327 5791	0,327 098$\overline{4}$
20	0,346 776$\overline{5}$	0,346 186$\overline{3}$	0,345 5756	0,344 9630	0,344 3671	0,343 8063
21	0,363 8740	0,363 1915	0,362 4852	0,361 7764	0,361 0867	0,360 437$\overline{4}$
22	0,380 9372	0,380 153$\overline{5}$	0,379 3421	0,378 5276	0,377 734$\overline{8}$	0,376 988$\overline{1}$
23	0,397 9648	0,397 0704	0,396 144$\overline{2}$	0,395 21$\overline{40}$	0,394 3082	0,393 4548
24	0,414 9554	0,413 9406	0,412 889$\overline{3}$	0,411 8330	0,410 804$\overline{1}$	0,409 8343
25	0,431 907$\overline{8}$	0,430 762$\overline{4}$	0,429 5752	0,428 3821	0,427 219$\overline{4}$	0,426 123$\overline{1}$
26	0,448 8205	0,447 5340	0,446 2001	0,444 858$\overline{9}$	0,443 5512	0,442 3178
27	0,465 692$\overline{5}$	0,464 25$\overline{40}$	0,462 7618	0,461 260$\overline{9}$	0,459 7968	0,458 415$\overline{3}$
28	0,482 522$\overline{5}$	0,480 9207	0,479 2585	0,477 5857	0,475 9533	0,474 4122
29	0,499 3093	0,497 532$\overline{8}$	0,495 688$\overline{3}$	0,493 831$\overline{2}$	0,492 018$\overline{1}$	0,490 3055
30	0,516 05$\overline{20}$	0,514 0886	0,512 0493	0,509 9950	0,507 988$\overline{4}$	0,506 092$\overline{1}$
31	0,532 7493	0,530 5869	0,528 3398	0,526 0750	0,523 861$\overline{7}$	0,521 768$\overline{9}$
32	0,549 4003	0,547 026$\overline{4}$	0,544 558$\overline{2}$	0,542 0692	0,539 6354	0,537 3320
33	0,566 004$\overline{1}$	0,563 405$\overline{7}$	0,560 702$\overline{7}$	0,557 975$\overline{5}$	0,555 3072	0,552 7816
34	0,582 559$\overline{7}$	0,579 723$\overline{6}$	0,576 7718	0,573 7919	0,570 8747	0,568 1118
35	0,599 066$\overline{2}$	0,595 97$\overline{90}$	0,592 764$\overline{1}$	0,589 5166	0,586 3356	0,583 3210
36	0,615 5228	0,612 170$\overline{8}$	0,608 678$\overline{1}$	0,605 147$\overline{9}$	0,601 6877	0,598 406$\overline{6}$
37	0,631 9289	0,628 2979	0,624 5124	0,620 6839	0,616 92$\overline{90}$	0,613 365$\overline{9}$
38	0,648 2836	0,644 359$\overline{5}$	0,640 265$\overline{9}$	0,636 1231	0,632 057$\overline{3}$	0,628 1965
39	0,664 5864	0,660 3545	0,655 937$\overline{3}$	0,651 4640	0,647 070$\overline{8}$	0,642 896$\overline{2}$
40	0,680 8366	0,676 282$\overline{3}$	0,671 525$\overline{5}$	0,666 7051	0,661 967$\overline{6}$	0,657 4625
41	0,697 033$\overline{8}$	0,692 1420	0,687 0295	0,681 8451	0,676 7460	0,671 8935
42	0,713 177$\overline{4}$	0,707 9330	0,702 4484	0,696 882$\overline{8}$	0,691 404$\overline{5}$	0,686 1870
43	0,729 26$\overline{70}$	0,723 654$\overline{7}$	0,717 781$\overline{4}$	0,711 816$\overline{9}$	0,705 9414	0,700 3411
44	0,745 3023	0,739 3065	0,733 0276	0,726 6464	0,720 3554	0,714 3541
45	0,761 2830	0,754 888$\overline{1}$	0,748 1865	0,741 370$\overline{5}$	0,734 6452	0,728 2241

Tafel V: Werte von $Z = E(k, \varphi)$ bei gegebenen $\varphi = \arcsin z$ und $\alpha = \arcsin k$.

φ	$\alpha = 65°$	$\alpha = 70°$	$\alpha = 75°$	$\alpha = 80°$	$\alpha = 85°$	$\alpha = 90°$
1	$0,017\,452\overline{6}$	$0,017\,4525$	$0,017\,452\overline{5}$	$0,017\,4524$	$0,017\,4524$	$0,017\,4524$
2	$0,034\,900\overline{8}$	$0,034\,9003$	$0,034\,\overline{9000}$	$0,034\,8997$	$0,034\,899\overline{6}$	$0,034\,899\overline{5}$
3	$0,052\,3402$	$0,052\,338\overline{8}$	$0,052\,337\overline{6}$	$0,052\,336\overline{7}$	$0,052\,3361$	$0,052\,33\overline{60}$
4	$0,069\,7666$	$0,069\,7631$	$0,069\,760\overline{3}$	$0,069\,758\overline{2}$	$0,069\,7569$	$0,069\,756\overline{5}$
5	$0,087\,1755$	$0,087\,1687$	$0,087\,1631$	$0,087\,159\overline{1}$	$0,087\,156\overline{6}$	$0,087\,1557$
6	$0,104\,562\overline{7}$	$0,104\,550\overline{9}$	$0,104\,541\overline{3}$	$0,104\,5342$	$0,104\,5299$	$0,104\,528\overline{5}$
7	$0,121\,923\overline{7}$	$0,121\,9049$	$0,121\,8897$	$0,121\,8785$	$0,121\,871\overline{7}$	$0,121\,8693$
8	$0,139\,2542$	$0,139\,226\overline{3}$	$0,139\,2035$	$0,139\,1868$	$0,139\,176\overline{6}$	$0,139\,1731$
9	$0,156\,5500$	$0,156\,510\overline{2}$	$0,156\,4778$	$0,156\,4540$	$0,156\,439\overline{4}$	$0,156\,434\overline{5}$
10	$0,173\,806\overline{8}$	$0,173\,752\overline{1}$	$0,173\,707\overline{7}$	$0,173\,6750$	$0,173\,6549$	$0,173\,648\overline{2}$
11	$0,191\,0202$	$0,190\,947\overline{4}$	$0,190\,888\overline{3}$	$0,190\,844\overline{7}$	$0,190\,81\overline{80}$	$0,190\,80\overline{90}$
12	$0,208\,186\overline{1}$	$0,208\,091\overline{5}$	$0,208\,014\overline{7}$	$0,207\,958\overline{1}$	$0,207\,923\overline{4}$	$0,207\,911\overline{7}$
13	$0,225\,300\overline{1}$	$0,225\,179\overline{8}$	$0,225\,082\overline{1}$	$0,225\,010\overline{1}$	$0,224\,966\overline{0}$	$0,224\,951\overline{1}$
14	$0,242\,3581$	$0,242\,207\overline{8}$	$0,242\,085\overline{7}$	$0,241\,9956$	$0,241\,940\overline{5}$	$0,241\,921\overline{9}$
15	$0,259\,3559$	$0,259\,170\overline{9}$	$0,259\,0206$	$0,258\,9098$	$0,258\,8419$	$0,258\,8190$
16	$0,276\,289\overline{4}$	$0,276\,0647$	$0,275\,8822$	$0,275\,7476$	$0,275\,6651$	$0,275\,637\overline{4}$
17	$0,293\,154\overline{4}$	$0,292\,884\overline{8}$	$0,292\,6657$	$0,292\,5041$	$0,292\,405\overline{1}$	$0,292\,3717$
18	$0,309\,946\overline{9}$	$0,309\,626\overline{6}$	$0,309\,3663$	$0,309\,1743$	$0,309\,0566$	$0,309\,01\overline{70}$
19	$0,326\,6627$	$0,326\,2858$	$0,325\,979\overline{5}$	$0,325\,7534$	$0,325\,6148$	$0,325\,568\overline{2}$
20	$0,343\,29\overline{80}$	$0,342\,8580$	$0,342\,5004$	$0,342\,236\overline{5}$	$0,342\,074\overline{7}$	$0,342\,0201$
21	$0,359\,8486$	$0,359\,3390$	$0,358\,9246$	$0,358\,6187$	$0,358\,431\overline{2}$	$0,358\,36\overline{80}$
22	$0,376\,3108$	$0,375\,724\overline{4}$	$0,375\,247\overline{5}$	$0,374\,8953$	$0,374\,679\overline{4}$	$0,374\,606\overline{6}$
23	$0,392\,680\overline{6}$	$0,392\,0\overline{100}$	$0,391\,4644$	$0,391\,0615$	$0,390\,8144$	$0,390\,7311$
24	$0,408\,9541$	$0,408\,1915$	$0,407\,57\overline{10}$	$0,407\,1126$	$0,406\,8314$	$0,406\,7366$
25	$0,425\,127\overline{7}$	$0,424\,2649$	$0,423\,5627$	$0,423\,043\overline{9}$	$0,422\,725\overline{6}$	$0,422\,618\overline{3}$
26	$0,441\,197\overline{5}$	$0,440\,2261$	$0,439\,435\overline{2}$	$0,438\,8507$	$0,438\,492\overline{1}$	$0,438\,3711$
27	$0,457\,159\overline{9}$	$0,456\,07\overline{10}$	$0,455\,184\overline{1}$	$0,454\,5285$	$0,454\,1261$	$0,453\,9905$
28	$0,473\,0112$	$0,471\,7955$	$0,470\,8050$	$0,470\,0727$	$0,469\,6231$	$0,469\,471\overline{6}$
29	$0,488\,7479$	$0,487\,3958$	$0,486\,2938$	$0,485\,478\overline{8}$	$0,484\,978\overline{4}$	$0,484\,8096$
30	$0,504\,366\overline{6}$	$0,502\,8680$	$0,501\,6462$	$0,500\,7423$	$0,500\,1872$	$0,500\,0000$
31	$0,519\,863\overline{7}$	$0,518\,2083$	$0,516\,858\overline{1}$	$0,515\,858\overline{9}$	$0,515\,245\overline{1}$	$0,515\,038\overline{1}$
32	$0,535\,235\overline{9}$	$0,533\,412\overline{9}$	$0,531\,9253$	$0,530\,824\overline{1}$	$0,530\,147\overline{5}$	$0,529\,919\overline{3}$
33	$0,550\,479\overline{9}$	$0,548\,478\overline{1}$	$0,546\,843\overline{9}$	$0,545\,633\overline{7}$	$0,544\,8899$	$0,544\,6390$
34	$0,565\,592\overline{5}$	$0,563\,4002$	$0,561\,609\overline{8}$	$0,560\,283\overline{4}$	$0,559\,46\overline{80}$	$0,559\,1929$
35	$0,580\,5705$	$0,578\,1758$	$0,576\,219\overline{1}$	$0,574\,76\overline{90}$	$0,573\,8773$	$0,573\,5764$
36	$0,595\,41\overline{10}$	$0,592\,8014$	$0,590\,6680$	$0,589\,086\overline{4}$	$0,588\,113\overline{6}$	$0,587\,785\overline{3}$
37	$0,610\,1108$	$0,607\,273\overline{6}$	$0,604\,9528$	$0,603\,2315$	$0,602\,172\overline{5}$	$0,601\,8150$
38	$0,624\,667\overline{2}$	$0,621\,58\overline{90}$	$0,619\,0697$	$0,617\,2004$	$0,616\,049\overline{9}$	$0,615\,661\overline{5}$
39	$0,639\,077\overline{3}$	$0,635\,744\overline{4}$	$0,633\,0151$	$0,630\,98\overline{90}$	$0,629\,741\overline{6}$	$0,629\,320\overline{4}$
40	$0,653\,3384$	$0,649\,736\overline{7}$	$0,646\,785\overline{5}$	$0,644\,593\overline{5}$	$0,643\,2435$	$0,642\,7876$
41	$0,667\,4480$	$0,663\,562\overline{8}$	$0,660\,3773$	$0,658\,010\overline{1}$	$0,656\,551\overline{7}$	$0,656\,0590$
42	$0,681\,403\overline{5}$	$0,677\,2197$	$0,673\,7872$	$0,671\,2350$	$0,669\,6620$	$0,669\,1306$
43	$0,695\,2025$	$0,690\,7047$	$0,687\,01\overline{20}$	$0,684\,264\overline{7}$	$0,682\,570\overline{8}$	$0,681\,998\overline{4}$
44	$0,708\,842\overline{8}$	$0,704\,014\overline{9}$	$0,700\,048\overline{3}$	$0,697\,0954$	$0,695\,2740$	$0,694\,658\overline{4}$
45	$0,722\,322\overline{2}$	$0,717\,147\overline{7}$	$0,712\,8930$	$0,709\,7238$	$0,707\,76\overline{80}$	$0,707\,106\overline{8}$

Tafel V: Werte von $Z = E(k,\varphi)$ **bei gegebenen** $\varphi = \arcsin z$ **und** $\alpha = \arcsin k$.

φ	$\alpha = 5^\circ$	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 20^\circ$	$\alpha = 25^\circ$	$\alpha = 30^\circ$
46	$0,802\,275\overline{4}$	$0,800\,5605$	$0,797\,746\overline{7}$	$0,793\,9000$	$0,789\,112\overline{6}$	$0,783\,501\overline{7}$
47	$0,819\,693\overline{8}$	$0,817\,8748$	$0,814\,8896$	$0,810\,807\overline{7}$	$0,805\,7255$	$0,799\,766\overline{6}$
48	$0,837\,1110$	$0,835\,184\overline{5}$	$0,832\,0222$	$0,827\,6969$	$0,822\,3\overline{100}$	$0,815\,990\overline{7}$
49	$0,854\,527\overline{1}$	$0,852\,4895$	$0,849\,144\overline{5}$	$0,844\,5679$	$0,838\,8659$	$0,832\,1740$
50	$0,871\,94\overline{20}$	$0,869\,7900$	$0,866\,2564$	$0,861\,4206$	$0,855\,3934$	$0,848\,3166$
51	$0,889\,355\overline{8}$	$0,887\,0859$	$0,883\,3581$	$0,878\,2551$	$0,871\,8926$	$0,864\,4186$
52	$0,906\,7684$	$0,904\,377\overline{3}$	$0,900\,4496$	$0,895\,071\overline{6}$	$0,888\,363\overline{7}$	$0,880\,4802$
53	$0,924\,1799$	$0,921\,664\overline{2}$	$0,917\,5310$	$0,911\,870\overline{1}$	$0,904\,8067$	$0,896\,501\overline{7}$
54	$0,941\,5903$	$0,938\,946\overline{6}$	$0,934\,5024$	$0,928\,650\overline{8}$	$0,921\,22\overline{20}$	$0,912\,4831$
55	$0,958\,9996$	$0,956\,2246$	$0,951\,6638$	$0,945\,413\overline{9}$	$0,937\,6097$	$0,928\,4250$
56	$0,976\,407\overline{9}$	$0,973\,498\overline{3}$	$0,968\,715\overline{5}$	$0,962\,159\overline{5}$	$0,953\,9702$	$0,944\,3277$
57	$0,993\,81\overline{50}$	$0,990\,767\overline{6}$	$0,985\,7574$	$0,978\,887\overline{9}$	$0,970\,303\overline{8}$	$0,960\,1916$
58	$1,011\,221\overline{1}$	$1,008\,0327$	$1,002\,789\overline{9}$	$0,995\,5993$	$0,986\,610\overline{8}$	$0,976\,017\overline{2}$
59	$1,028\,6261$	$1,025\,2936$	$1,019\,812\overline{9}$	$1,012\,29\overline{40}$	$1,002\,891\overline{6}$	$0,991\,80\overline{50}$
60	$1,046\,0301$	$1,042\,550\overline{5}$	$1,036\,8266$	$1,028\,9722$	$1,019\,1466$	$1,007\,555\overline{6}$
61	$1,063\,4331$	$1,059\,803\overline{3}$	$1,053\,831\overline{4}$	$1,045\,634\overline{3}$	$1,035\,3763$	$1,023\,269\overline{6}$
62	$1,080\,8351$	$1,077\,052\overline{2}$	$1,070\,827\overline{2}$	$1,062\,2805$	$1,051\,5812$	$1,038\,947\overline{7}$
63	$1,098\,2362$	$1,094\,297\overline{2}$	$1,087\,8143$	$1,078\,911\overline{3}$	$1,067\,7618$	$1,054\,590\overline{6}$
64	$1,115\,6363$	$1,111\,5384$	$1,104\,79\overline{30}$	$1,095\,5269$	$1,083\,918\overline{7}$	$1,070\,1991$
65	$1,133\,0355$	$1,128\,7760$	$1,121\,763\overline{4}$	$1,112\,127\overline{8}$	$1,100\,052\overline{4}$	$1,085\,7740$
66	$1,150\,433\overline{9}$	$1,146\,010\overline{1}$	$1,138\,7257$	$1,128\,714\overline{3}$	$1,116\,163\overline{5}$	$1,101\,316\overline{3}$
67	$1,167\,8313$	$1,163\,2406$	$1,155\,680\overline{3}$	$1,145\,286\overline{9}$	$1,132\,252\overline{7}$	$1,116\,826\overline{7}$
68	$1,185\,2279$	$1,180\,467\overline{9}$	$1,172\,627\overline{3}$	$1,161\,8459$	$1,148\,3206$	$1,132\,3062$
69	$1,202\,6237$	$1,197\,691\overline{9}$	$1,189\,56\overline{70}$	$1,178\,39\overline{20}$	$1,164\,368\overline{1}$	$1,147\,75\overline{60}$
70	$1,220\,018\overline{8}$	$1,214\,9127$	$1,206\,4996$	$1,194\,9254$	$1,180\,395\overline{7}$	$1,163\,176\overline{9}$
71	$1,237\,413\overline{1}$	$1,232\,1306$	$1,223\,4255$	$1,211\,446\overline{8}$	$1,196\,404\overline{3}$	$1,178\,5700$
72	$1,254\,8066$	$1,249\,345\overline{7}$	$1,240\,3449$	$1,227\,9565$	$1,212\,394\overline{6}$	$1,193\,9366$
73	$1,272\,1995$	$1,266\,5579$	$1,257\,258\overline{2}$	$1,244\,4552$	$1,228\,367\overline{4}$	$1,209\,277\overline{8}$
74	$1,289\,5918$	$1,283\,7676$	$1,274\,1655$	$1,260\,943\overline{4}$	$1,244\,3236$	$1,224\,594\overline{7}$
75	$1,306\,9834$	$1,300\,9748$	$1,291\,067\overline{3}$	$1,277\,4215$	$1,260\,2640$	$1,239\,888\overline{6}$
76	$1,324\,374\overline{5}$	$1,318\,1797$	$1,307\,963\overline{8}$	$1,293\,8902$	$1,276\,189\overline{6}$	$1,255\,1607$
77	$1,341\,76\overline{50}$	$1,335\,3824$	$1,324\,8553$	$1,310\,350\overline{1}$	$1,292\,1011$	$1,270\,412\overline{5}$
78	$1,359\,15\overline{50}$	$1,352\,583\overline{1}$	$1,341\,742\overline{3}$	$1,326\,801\overline{7}$	$1,307\,999\overline{6}$	$1,285\,645\overline{1}$
79	$1,376\,544\overline{5}$	$1,369\,7818$	$1,358\,624\overline{9}$	$1,343\,2455$	$1,323\,885\overline{9}$	$1,300\,8599$
80	$1,393\,933\overline{7}$	$1,386\,978\overline{9}$	$1,375\,503\overline{6}$	$1,359\,6823$	$1,339\,76\overline{10}$	$1,316\,0584$
81	$1,411\,322\overline{3}$	$1,404\,174\overline{3}$	$1,392\,378\overline{7}$	$1,376\,112\overline{7}$	$1,355\,625\overline{9}$	$1,331\,2419$
82	$1,428\,7106$	$1,421\,368\overline{3}$	$1,409\,250\overline{5}$	$1,392\,5371$	$1,371\,481\overline{5}$	$1,346\,4119$
83	$1,446\,0986$	$1,438\,56\overline{10}$	$1,426\,119\overline{4}$	$1,408\,956\overline{4}$	$1,387\,328\overline{9}$	$1,361\,5698$
84	$1,463\,486\overline{4}$	$1,455\,7525$	$1,442\,985\overline{8}$	$1,425\,371\overline{1}$	$1,403\,16\overline{90}$	$1,371\,7171$
85	$1,480\,8738$	$1,472\,9431$	$1,459\,849\overline{9}$	$1,441\,781\overline{8}$	$1,419\,002\overline{9}$	$1,391\,8553$
86	$1,498\,2611$	$1,490\,1329$	$1,476\,7122$	$1,458\,1892$	$1,434\,8315$	$1,406\,985\overline{9}$
87	$1,515\,648\overline{3}$	$1,507\,322\overline{1}$	$1,493\,573\overline{1}$	$1,474\,5940$	$1,450\,656\overline{1}$	$1,422\,1103$
88	$1,533\,035\overline{3}$	$1,524\,5107$	$1,510\,4328$	$1,490\,996\overline{9}$	$1,466\,4774$	$1,437\,230\overline{2}$
89	$1,550\,422\overline{2}$	$1,541\,6990$	$1,527\,2918$	$1,507\,398\overline{4}$	$1,482\,296\overline{7}$	$1,452\,34\overline{70}$
90	$1,567\,809\overline{1}$	$1,558\,8872$	$1,544\,150\overline{5}$	$1,523\,7992$	$1,498\,1149$	$1,467\,4622$

Tafel V: Werte von $Z = E(k, \varphi)$ **bei gegebenen** $\varphi = \arcsin z$ **und** $\alpha = \arcsin k$.

φ	$\alpha = 35°$	$\alpha = 40°$	$\alpha = 45°$	$\alpha = 50°$	$\alpha = 55°$	$\alpha = 60°$
46	$0{,}777\,20\overline{90}$	0,770 3990	$0{,}763\,257\overline{5}$	0,755 9882	0,748 8097	0,741 9497
47	$0{,}793\,079\overline{9}$	$0{,}785\,83\overline{90}$	0,778 2400	0,770 4989	$0{,}762\,847\overline{8}$	0,755 5293
48	$0{,}808\,895\overline{8}$	$0{,}801\,207\overline{9}$	0,793 1338	$0{,}784\,90\overline{20}$	$0{,}776\,758\overline{5}$	$0{,}768\,961\overline{7}$
49	$0{,}824\,656\overline{6}$	0,816 5055	0,807 9386	$0{,}799\,19\overline{70}$	0,790 5411	0,782 2456
50	0,840 3623	$0{,}831\,731\overline{9}$	0,822 6542	$0{,}813\,383\overline{5}$	$0{,}804\,19\overline{50}$	0,795 3801
51	$0{,}856\,013\overline{2}$	$0{,}846\,887\overline{1}$	$0{,}837\,280\overline{7}$	$0{,}827\,461\overline{3}$	0,817 7196	0,808 3643
52	$0{,}871\,609\overline{3}$	0,861 9712	0,851 8179	$0{,}841\,430\overline{3}$	0,831 1146	0,821 1974
53	0,887 1508	0,876 9845	0,866 2662	0,855 2905	0,844 3798	0,833 8789
54	0,902 6382	$0{,}891\,927\overline{4}$	0,880 6258	$0{,}869\,042\overline{2}$	0,857 5151	$0{,}846\,408\overline{4}$
55	$0{,}918\,071\overline{9}$	$0{,}906\,800\overline{2}$	0,894 8971	0,882 6855	$0{,}870\,520\overline{7}$	0,858 7856
56	0,933 4521	$0{,}921\,603\overline{4}$	$0{,}909\,080\overline{7}$	$0{,}896\,22\overline{10}$	$0{,}883\,396\overline{7}$	$0{,}871\,010\overline{6}$
57	0,948 7796	$0{,}936\,337\overline{7}$	$0{,}923\,177\overline{1}$	0,909 6492	0,896 1436	0,883 0833
58	$0{,}964\,054\overline{9}$	0,951 0037	0,937 1870	$0{,}922\,970\overline{9}$	$0{,}908\,762\overline{1}$	0,895 0043
59	$0{,}979\,278\overline{6}$	$0{,}965\,602\overline{3}$	0,951 1115	$0{,}936\,186\overline{9}$	$0{,}921\,252\overline{9}$	$0{,}906\,774\overline{1}$
60	0,994 4515	$0{,}980\,134\overline{3}$	$0{,}964\,951\overline{5}$	$0{,}949\,298\overline{3}$	0,933 6169	$0{,}918\,393\overline{3}$
61	1,009 5744	0,994 6007	$0{,}978\,70\overline{80}$	$0{,}962\,306\overline{3}$	0,945 8554	$0{,}929\,86\overline{30}$
62	$1{,}024\,648\overline{3}$	$1{,}009\,002\overline{6}$	0,992 3823	0,975 2121	0,957 9697	$0{,}941\,184\overline{3}$
63	$1{,}039\,673\overline{9}$	1,023 3411	$1{,}005\,975\overline{9}$	0,988 0174	0,969 9613	$0{,}952\,358\overline{7}$
64	$1{,}054\,652\overline{4}$	1,037 6175	1,019 4901	$1{,}000\,723\overline{8}$	$0{,}981\,83\overline{20}$	$0{,}963\,387\overline{8}$
65	$1{,}069\,584\overline{8}$	1,051 8332	1,032 9266	1,013 3330	0,993 5836	0,974 2735
66	$1{,}084\,472\overline{3}$	$1{,}065\,989\overline{6}$	1,046 2871	$1{,}025\,847\overline{2}$	$1{,}005\,218\overline{5}$	0,985 0180
67	1,099 3160	1,080 0882	1,059 5735	$1{,}038\,268\overline{4}$	1,016 7388	$0{,}995\,623\overline{9}$
68	$1{,}114\,117\overline{4}$	$1{,}094\,130\overline{7}$	1,072 7877	$1{,}050\,598\overline{9}$	$1{,}028\,147\overline{3}$	$1{,}006\,093\overline{6}$
69	$1{,}128\,877\overline{6}$	$1{,}108\,118\overline{7}$	1,085 9319	$1{,}062\,841\overline{2}$	1,039 4466	$1{,}016\,430\overline{2}$
70	1,143 5981	$1{,}122\,054\overline{1}$	$1{,}099\,008\overline{3}$	$1{,}074\,99\overline{80}$	1,050 6398	$1{,}026\,636\overline{9}$
71	1,158 2804	1,135 9387	$1{,}112\,019\overline{2}$	$1{,}087\,07\overline{20}$	1,061 7301	$1{,}036\,717\overline{3}$
72	1,172 9260	$1{,}149\,774\overline{6}$	$1{,}124\,96\overline{70}$	$1{,}099\,066\overline{2}$	$1{,}072\,72\overline{10}$	1,046 6752
73	$1{,}187\,536\overline{5}$	1,163 5637	1,137 8583	1,110 9837	1,083 6160	1,056 5147
74	1,202 1134	1,177 3082	1,150 6839	$1{,}122\,827\overline{9}$	$1{,}094\,419\overline{2}$	1,066 2403
75	1,216 6585	$1{,}191\,010\overline{4}$	$1{,}163\,458\overline{5}$	$1{,}134\,60\overline{20}$	$1{,}105\,134\overline{5}$	$1{,}075\,856\overline{7}$
76	$1{,}231\,173\overline{6}$	1,204 6723	$1{,}176\,180\overline{9}$	1,146 3097	1,115 7662	1,085 3688
77	$1{,}245\,660\overline{3}$	1,218 2965	$1{,}188\,854\overline{2}$	1,157 9547	1,126 3189	$1{,}094\,782\overline{1}$
78	1,260 1205	1,231 8853	1,201 4814	1,169 5408	$1{,}136\,797\overline{3}$	1,104 1020
79	1,274 5561	1,245 4412	$1{,}214\,065\overline{8}$	$1{,}181\,072\overline{1}$	1,147 2061	$1{,}113\,334\overline{6}$
80	1,288 9690	$1{,}258\,966\overline{8}$	$1{,}226\,610\overline{5}$	$1{,}192\,552\overline{6}$	$1{,}157\,550\overline{7}$	$1{,}122\,485\overline{9}$
81	$1{,}303\,361\overline{2}$	$1{,}272\,464\overline{5}$	1,239 1189	$1{,}203\,986\overline{5}$	1,167 8360	$1{,}131\,562\overline{4}$
82	1,317 7345	1,285 9370	1,251 5945	1,215 3781	$1{,}178\,067\overline{7}$	$1{,}140\,570\overline{8}$
83	$1{,}332\,091\overline{1}$	$1{,}299\,387\overline{1}$	$1{,}264\,040\overline{7}$	1,226 7320	1,188 2511	$1{,}149\,51\overline{80}$
84	1,346 4329	$1{,}312\,817\overline{4}$	1,276 4610	$1{,}238\,052\overline{6}$	$1{,}198\,392\overline{2}$	$1{,}158\,411\overline{1}$
85	$1{,}360\,762\overline{1}$	$1{,}326\,230\overline{7}$	$1{,}288\,859\overline{1}$	$1{,}249\,344\overline{5}$	$1{,}208\,496\overline{6}$	$1{,}167\,257\overline{5}$
86	1,375 0806	1,339 6297	$1{,}301\,238\overline{5}$	$1{,}260\,612\overline{4}$	1,218 5702	1,176 0646
87	$1{,}389\,390\overline{7}$	$1{,}353\,017\overline{4}$	$1{,}313\,60\overline{30}$	$1{,}271\,86\overline{10}$	$1{,}228\,619\overline{3}$	$1{,}184\,840\overline{3}$
88	1,403 6943	1,366 3964	$1{,}325\,956\overline{2}$	1,283 0951	1,238 6497	1,193 5921
89	1,417 9937	$1{,}379\,769\overline{8}$	1,338 3019	1,294 3195	$1{,}248\,667\overline{8}$	$1{,}202\,328\overline{1}$
90	$1{,}432\,29\overline{10}$	1,393 1402	$1{,}350\,643\overline{9}$	$1{,}305\,539\overline{1}$	1,258 6796	1,211 0560

Tafel V: Werte von $Z = E(k, \varphi)$ **bei gegebenen** $\varphi = \arcsin z$ **und** $\alpha = \arcsin k$.

φ	$\alpha = 65^\circ$	$\alpha = 70^\circ$	$\alpha = 75^\circ$	$\alpha = 80^\circ$	$\alpha = 85^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
46	0,735 6385	0,730 100$\overline{5}$	0,725 543$\overline{3}$	0,722 146$\overline{4}$	0,720 0490	0,719 3398
47	0,748 790$\overline{1}$	0,742 8709	0,737 9960	0,734 359$\overline{8}$	0,732 1135	0,731 3537
48	0,761 7749	0,755 4567	0,750 2485	0,746 360$\overline{8}$	0,743 957$\overline{9}$	0,743 1448
49	0,774 591$\overline{5}$	0,767 8556	0,762 2980	0,758 146$\overline{2}$	0,755 578$\overline{6}$	0,754 709$\overline{6}$
50	0,787 2382	0,780 0656	0,774 14$\overline{20}$	0,769 71$\overline{30}$	0,766 9723	0,766 0444
51	0,799 713$\overline{8}$	0,792 0848	0,785 7778	0,781 058$\overline{2}$	0,778 1357	0,777 14$\overline{60}$
52	0,812 0169	0,803 911$\overline{5}$	0,797 2033	0,792 178$\overline{9}$	0,789 0655	0,788 010$\overline{8}$
53	0,824 1467	0,815 54$\overline{40}$	0,808 416$\overline{3}$	0,803 0723	0,799 7586	0,798 6355
54	0,836 1022	0,826 980$\overline{9}$	0,819 414$\overline{6}$	0,813 7358	0,810 211$\overline{9}$	0,809 01$\overline{70}$
55	0,847 882$\overline{8}$	0,838 220$\overline{9}$	0,830 1962	0,824 1669	0,820 4223	0,819 1520
56	0,859 4878	0,849 26$\overline{30}$	0,840 759$\overline{6}$	0,834 363$\overline{2}$	0,830 3870	0,829 037$\overline{6}$
57	0,870 917$\overline{2}$	0,860 1061	0,851 1029	0,844 322$\overline{2}$	0,840 103$\overline{2}$	0,838 670$\overline{6}$
58	0,882 1706	0,870 7497	0,861 224$\overline{9}$	0,854 041$\overline{9}$	0,849 568$\overline{1}$	0,848 048$\overline{1}$
59	0,893 2483	0,881 1932	0,871 124$\overline{2}$	0,863 520$\overline{2}$	0,858 779$\overline{1}$	0,857 1673
60	0,904 1506	0,891 4364	0,880 7997	0,872 7552	0,867 7336	0,866 0254
61	0,914 878$\overline{1}$	0,901 479$\overline{2}$	0,890 250$\overline{7}$	0,881 7452	0,876 4293	0,874 6197
62	0,925 431$\overline{6}$	0,911 321$\overline{8}$	0,899 476$\overline{5}$	0,890 4887	0,884 8638	0,882 947$\overline{6}$
63	0,935 8121	0,920 9646	0,908 4766	0,898 984$\overline{3}$	0,893 0349	0,891 0065
64	0,946 021$\overline{1}$	0,930 408$\overline{5}$	0,917 2510	0,907 2306	0,900 940$\overline{6}$	0,898 7940
65	0,956 0601	0,939 654$\overline{5}$	0,925 7998	0,915 2269	0,908 5787	0,906 307$\overline{8}$
66	0,965 9311	0,948 703$\overline{9}$	0,934 123$\overline{4}$	0,922 972$\overline{3}$	0,915 947$\overline{6}$	0,913 545$\overline{5}$
67	0,975 6364	0,957 558$\overline{5}$	0,942 2225	0,930 4662	0,923 0454	0,920 504$\overline{9}$
68	0,985 1785	0,966 220$\overline{3}$	0,950 0983	0,937 708$\overline{5}$	0,929 8707	0,927 183$\overline{9}$
69	0,994 5603	0,974 691$\overline{8}$	0,957 7522	0,944 6991	0,936 4220	0,933 5804
70	1,003 785$\overline{1}$	0,982 9758	0,965 186$\overline{3}$	0,951 438$\overline{5}$	0,942 6981	0,939 6926
71	1,012 856$\overline{5}$	0,991 0757	0,972 4026	0,957 9273	0,948 69$\overline{80}$	0,945 518$\overline{6}$
72	1,021 7784	0,998 995$\overline{2}$	0,979 404$\overline{3}$	0,964 166$\overline{8}$	0,954 420$\overline{8}$	0,951 0565
73	1,030 555$\overline{4}$	1,006 7385	0,986 194$\overline{5}$	0,970 158$\overline{5}$	0,959 865$\overline{9}$	0,956 304$\overline{8}$
74	1,039 1921	1,014 310$\overline{5}$	0,992 7773	0,975 904$\overline{6}$	0,965 0330	0,961 261$\overline{7}$
75	1,047 693$\overline{9}$	1,021 7163	0,999 1574	0,981 4078	0,969 9221	0,965 9258
76	1,056 066$\overline{3}$	1,028 9620	1,005 3402	0,986 6716	0,974 533$\overline{6}$	0,970 2957
77	1,064 3153	1,036 0540	1,011 3316	0,991 7003	0,978 8682	0,974 370$\overline{1}$
78	1,072 4475	1,042 9994	1,017 1388	0,996 4990	0,982 9273	0,978 1476
79	1,080 469$\overline{8}$	1,049 8060	1,022 7697	1,001 074$\overline{1}$	0,986 712$\overline{9}$	0,981 627$\overline{2}$
80	1,088 3894	1,056 4822	1,028 233$\overline{1}$	1,005 4329	0,990 227$\overline{8}$	0,984 807$\overline{8}$
81	1,096 214$\overline{3}$	1,063 037$\overline{1}$	1,033 5389	1,009 584$\overline{7}$	0,993 4759	0,987 6883
82	1,103 952$\overline{4}$	1,069 4803	1,038 6984	1,013 5399	0,996 4626	0,990 268$\overline{1}$
83	1,111 6123	1,075 8224	1,043 723$\overline{7}$	1,017 311$\overline{3}$	0,999 195$\overline{1}$	0,992 546$\overline{2}$
84	1,119 203$\overline{1}$	1,082 0743	1,048 6281	1,020 913$\overline{6}$	1,001 683$\overline{2}$	0,994 521$\overline{9}$
85	1,126 7337	1,088 2477	1,053 4263	1,024 3639	1,003 940$\overline{3}$	0,996 194$\overline{7}$
86	1,134 213$\overline{9}$	1,094 354$\overline{8}$	1,058 1339	1,027 682$\overline{1}$	1,005 9845	0,997 564$\overline{1}$
87	1,141 6533	1,100 408$\overline{1}$	1,062 767$\overline{7}$	1,030 890$\overline{4}$	1,007 840$\overline{8}$	0,998 6295
88	1,149 0620	1,106 4207	1,067 3451	1,034 013$\overline{6}$	1,009 5423	0,999 3908
89	1,156 450$\overline{2}$	1,112 406$\overline{1}$	1,071 884$\overline{7}$	1,037 0787	1,011 1323	0,999 847$\overline{7}$
90	1,163 82$\overline{80}$	1,118 3777	1,076 4051	1,040 114$\overline{4}$	1,012 6635	1,000 0000

http://www.springer.com/978-3-642-20953-6

Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen
Dritter Teil: Anwendungen
Fricke, R.
(Eds.)C. Adelmann; J. Elstrodt; E. Klimenko
2012, XVII, 323 S. 35 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-642-20953-6