

Portfoliotheorie, Risikomanagement und die Bewertung von Derivaten

Bearbeitet von
Jürgen Kremer

1. Auflage 2011. Taschenbuch. xvi, 471 S. Paperback

ISBN 978 3 642 20867 6

Format (B x L): 15,5 x 23,5 cm

Gewicht: 731 g

Wirtschaft > Betriebswirtschaft: Theorie & Allgemeines > Wirtschaftsmathematik und -
statistik

Zu [Inhaltsverzeichnis](#)

schnell und portofrei erhältlich bei

The logo for beck-shop.de features the text 'beck-shop.de' in a bold, red, sans-serif font. Above the 'i' in 'shop' are three red dots of increasing size. Below the main text, the words 'DIE FACHBUCHHANDLUNG' are written in a smaller, red, all-caps, sans-serif font.

beck-shop.de
DIE FACHBUCHHANDLUNG

Die Online-Fachbuchhandlung beck-shop.de ist spezialisiert auf Fachbücher, insbesondere Recht, Steuern und Wirtschaft. Im Sortiment finden Sie alle Medien (Bücher, Zeitschriften, CDs, eBooks, etc.) aller Verlage. Ergänzt wird das Programm durch Services wie Neuerscheinungsdienst oder Zusammenstellungen von Büchern zu Sonderpreisen. Der Shop führt mehr als 8 Millionen Produkte.

Ein-Perioden-Wertpapiermärkte

Die Aktienkurse zum aktuellen Zeitpunkt sind bekannt, nicht aber diejenigen in einem Jahr. Damit ist auch ungewiss, was ein Derivat, etwa eine Call-Option, in einem Jahr wert sein wird. Eine Call-Option beinhaltet das Recht, eine bestimmte Aktie zu einem bereits heute festgelegten Preis K zu einem zukünftigen Zeitpunkt T kaufen zu dürfen. Es liegt im Ermessen des Eigentümers der Call-Option, sein Kaufrecht auszuüben oder nicht. Wird das Optionsrecht nicht ausgeübt, so verfällt die Option und wird wertlos. Besitzt die Aktie zum Zeitpunkt T einen Marktwert von $S > K$, so kann der Inhaber der Option sie mit Hilfe seines Optionsrechts zum Preis K kaufen und anschließend an der Börse zum Preis S wieder veräußern. Auf diese Weise erzielt er einen Gewinn von $S - K > 0$. Liegt der Marktwert der Aktie zum Zeitpunkt T dagegen unterhalb von K , gilt also $S < K$, so kann er das Optionsrecht nicht sinnvoll nutzen, und die Option ist in diesem Fall wertlos. In jedem Fall hängt der Wert der Option zum Zeitpunkt T vom Aktienkurs zu diesem Zeitpunkt ab und ist daher ebenfalls ungewiss.

Nun können zwei extreme Positionen eingenommen werden. Die erste lautet, dass niemand verlässlich in die Zukunft schauen kann, dass nicht einmal eine genaue Vorhersage des Wetters der nächsten zwei Wochen möglich ist, und dass daher jede Prognose über die Aktienkurse in einem Jahr ausgeschlossen ist. Unter diesen Voraussetzungen erscheint die Entwicklung einer sinnvollen Optionspreistheorie aussichtslos. Eine zweite, entgegengesetzte Position lautet, dass es mit einem ausgefeilten ökonomischen Modell möglich sein sollte, genaue Voraussagen über die Kurse der Zukunft zu machen. Werden nur alle wirtschaftlich und psychologisch relevanten Faktoren in einem entsprechend komplexen Modell richtig verarbeitet, so sind Zukunftsprognosen für Aktienkurse zuverlässig möglich. Damit wiederum wird die Bewertung von Optionen zur Trivialität.

Die moderne Finanzmathematik ordnet sich zwischen diesen beiden Alles-oder-nichts-Positionen ein. Die grundlegende Annahme besteht darin, dass zwar die Entwicklung eines betrachteten Finanzmarktes in der Zukunft nicht vorausgesagt werden kann, dass aber die Menge aller möglichen zukünftigen

Szenarien dieses Marktes bekannt ist und dass genau eines dieser Szenarien eintreten wird. In diesem Kontext lassen sich Modelle so formulieren, dass die möglichen Markt-Szenarien für zukünftige Zeitpunkte $t > 0$ zu Zustandsräumen Ω_t zusammengefasst werden. Das einfachste nichttriviale Modell besteht darin, neben dem aktuellen Zeitpunkt 0 einen einzigen weiteren zukünftigen Zeitpunkt 1 zuzulassen, an dem der Markt genau einen Zustand ω aus einer endlichen Menge Ω von Zuständen annehmen wird. Zum aktuellen Zeitpunkt 0 wird der Finanzmarkt als vollständig bekannt vorausgesetzt. So einfach dieses Modell auch erscheinen mag, es ist in der Analyse – wie wir sehen werden – erstaunlich reichhaltig, lässt sich zu komplexeren und realistischeren Modellen ausbauen und zeigt bereits viele wesentliche Eigenschaften der allgemeinen zeitstetigen Modelle.

Die Darstellung der Ein-Perioden-Modelle und der Bewertung zustandsabhängiger Auszahlungsprofile in diesem Kapitel wurde durch Duffie [15] motiviert. Siehe auch Pliska [45], Dothan [14], Föllmer/Schied [16] und Koch Medina/Merino [35].

1.1 Ein-Perioden-Modelle

Das grundlegende Modell wird **Ein-Perioden-Modell** genannt und ist durch folgende Daten gekennzeichnet:

- Es gibt genau zwei Zeitpunkte, den Anfangszeitpunkt 0 und den Endzeitpunkt 1.
- Wir nehmen an, dass der Zustand des Finanzmarktes zum Zeitpunkt 0 bekannt ist und dass der Markt zum Zeitpunkt 1 in genau einen Zustand aus einer endlichen Menge von K Zuständen $\omega_1, \dots, \omega_K$ übergehen wird. Zum Zeitpunkt 0 sind alle diese möglichen zukünftigen Zustände bekannt, nicht aber, welcher Zustand realisiert werden wird. Die Menge der möglichen Szenarien wird zu einem endlichen Zustandsraum Ω zusammengefasst,

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}.$$

- Es wird die Existenz einer endlichen Anzahl N von Wertpapieren S^1, \dots, S^N vorausgesetzt. Es gibt zu diesen Wertpapieren einen Preisprozess $S = \{S_t = (S_t^1, \dots, S_t^N) | t = 0, 1\}$. Dieser Prozess beschreibt die Preise der N Wertpapiere S^1, \dots, S^N zu den beiden möglichen Zeitpunkten 0 und 1. Die Preise S_0^i der Wertpapiere zum Zeitpunkt 0 sind Zahlen. Die Preise S_1^i hängen dagegen vom eintretenden Zustand ab, sind also Funktionen auf Ω ,

$$S_1^i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dabei bezeichnet $S_1^i(\omega)$ den Kurs des i -ten Wertpapiers zum Zeitpunkt 1 im Zustand $\omega \in \Omega$.¹ Sowohl die Preise S_0^i als auch die Werte $S_1^i(\omega)$,

¹ Offensichtlich ist die Menge aller Funktionen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ isomorph zum \mathbb{R}^K , wobei der Isomorphismus gegeben ist durch

$\omega \in \Omega$, sind den Investoren bekannt. Aber erst zum Zeitpunkt 1 entscheidet sich, welche Kurse $S_1^i(\omega)$ zu diesem Zeitpunkt tatsächlich realisiert werden, denn erst dann stellt sich heraus, in welchen Zustand $\omega \in \Omega$ der Finanzmarkt übergegangen ist.

Zum Zeitpunkt 0 sind also die K Zustände der Menge $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$ als Endzustände zum Zeitpunkt 1 möglich, und zum Zeitpunkt 1 wird genau einer dieser Zustände als Endzustand realisiert.

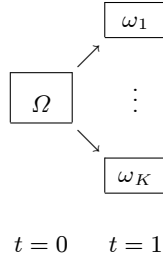
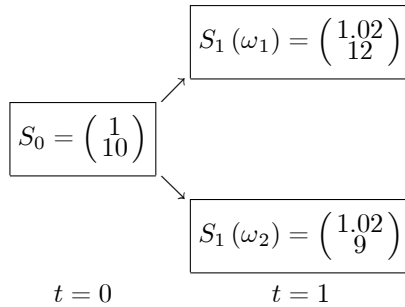


Abb. 1.1. Veranschaulichung des Strukturgerüsts eines Ein-Perioden-Modells mit K Zuständen

Dieses Aufspalten der Menge Ω in die Elementarzustände ω_1 bis ω_K bildet ein Strukturgerüst, das durch das Hinzufügen von Preisen ergänzt wird. Zur Komplettierung des Marktmodells sind für die N Finanzinstrumente S^1, \dots, S^N des Modells zum Zeitpunkt 0 und für jeden Zustand $\omega \in \Omega$ zum Zeitpunkt 1 Kursdaten vorzugeben, siehe Abb. 1.2 und das nachfolgende Beispiel 1.1.

Beispiel 1.1. Wir betrachten folgendes Ein-Perioden-Modell mit den beiden Zuständen ω_1 und ω_2 zum Zeitpunkt 1:



In dieses Strukturgerüst wurden die Daten für zwei Finanzinstrumente S^1 und S^2 eingefügt. Das erste Finanzinstrument S^1 besitzt zum Zeitpunkt 0 den

$$X \mapsto (X(\omega_1), \dots, X(\omega_K)).$$

Damit ist der Preisprozess $S_1 = (S_1^1, \dots, S_1^N)$ isomorph zum \mathbb{R}^{KN} .

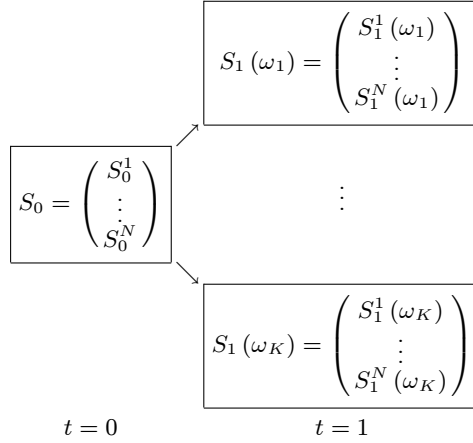


Abb. 1.2. Veranschaulichung der zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$ zu spezifizierenden Kursdaten in einem Ein-Perioden-Modell

Wert $S_0^1 = 1$. Zum Zeitpunkt 1 besitzt S^1 die Werte $S_1^1(\omega_1) = S_1^1(\omega_2) = 1.02$. Da hier die Kurse in beiden Zuständen übereinstimmen, entspricht dieses Finanzinstrument einer festverzinslichen Kapitalanlage. Im Beispiel beträgt der Zinssatz 2%. Das zweite Finanzinstrument S^2 besitzt zum Zeitpunkt 0 den Wert $S_0^2 = 10$. Zum Zeitpunkt 1 besitzt S^2 die Werte $S_1^2(\omega_1) = 12$ und $S_1^2(\omega_2) = 9$. Damit könnte dieses Wertpapier als Aktie interpretiert werden, deren Kurs im ersten Szenario ω_1 vom Anfangskurs 10 auf den Wert 12 steigt und im zweiten Szenario ω_2 von 10 auf den Wert 9 sinkt. \triangle

Anmerkung 1.2. In der Praxis können Ein-Perioden-Modelle beispielsweise mit Hilfe historischer Zeitreihen für jedes der interessierenden Finanzinstrumente S^1, \dots, S^N gebildet werden. Üblich sind Zeitreihen, die für jedes Finanzinstrument S^i , $i = 1, \dots, N$, aus den Tageskursen der letzten K Handelstage bestehen. Als Ausgangsdaten steht dann für jedes der N Finanzinstrumente eine Zeitreihe $(S_0^i, S_1^i, \dots, S_K^i)$ mit je $K+1$ Einträgen zur Verfügung, wobei S_0^i für $i = 1, \dots, N$ den aktuellen Kurs des i -ten Finanzinstruments bezeichnet. Mit Hilfe dieser Daten werden nun für jedes Instrument i die Tagesrenditen $R_j^i := \frac{S_{j-1}^i - S_j^i}{S_j^i}$, $j = 1, \dots, K$, der Vergangenheit berechnet, so dass pro Finanzinstrument K Renditewerte erhalten werden. Eine Modellierung könnte dann darin bestehen, jede der K Tagesrenditen der Vergangenheit als ein mögliches Rendite-Szenario für den zukünftigen Tag zu definieren. Das auf diese Weise entstehende Ein-Perioden-Modell beinhaltet damit folgende Daten:

- Die aktuellen Preise der N Finanzinstrumente,

$$S_0 = \begin{pmatrix} S_0^1 \\ \vdots \\ S_0^N \end{pmatrix}$$

- Die modellierten Szenarien für den nächsten Handelstag,

$$S_1(\omega_j) = \begin{pmatrix} S_0^1 \cdot (1 + R_j^1) \\ \vdots \\ S_0^N \cdot (1 + R_j^N) \end{pmatrix},$$

$$j = 1, \dots, K.$$

Jede Tagesrendite R_j^i der letzten K Handelstage wird also durch die Definition $S_1^i(\omega_j) := S_0^i \cdot (1 + R_j^i)$ in ein Kurs-Szenario für das i -te Finanzinstrument zum Zeitpunkt 1, d.h. für den kommenden Handelstag, umgesetzt.

1.2 Portfolios

Definition 1.3. Ein **Portfolio** ist eine Zusammenfassung von h_1 Finanzinstrumenten S^1 , h_2 Finanzinstrumenten S^2 , ... und h_N Finanzinstrumenten S^N zu einer Gesamtheit. Formal wird ein Portfolio definiert als ein Vektor

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N,$$

wobei eine Komponente h_i als Stückzahl interpretiert wird, mit der das i -te Finanzinstrument S^i in der Gesamtheit vertreten ist.

Das Produkt $h_i S^i$ wird als **Position** des i -ten Finanzinstruments S^i im Portfolio h bezeichnet.

Der Wert $V_0(h)$ des Portfolios h zum Zeitpunkt 0 lautet

$$\begin{aligned} V_0(h) &:= h_1 S_0^1 + \dots + h_N S_0^N \\ &= h \cdot S_0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Der Wert des Portfolios $V_1(h)$ zum Zeitpunkt 1 hängt dagegen vom eintretenden Zustand $\omega_j \in \Omega$ ab. Daher gilt

$$V_1(h) := h \cdot S_1 = \begin{pmatrix} h \cdot S_1(\omega_1) \\ \vdots \\ h \cdot S_1(\omega_K) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^K. \tag{1.2}$$

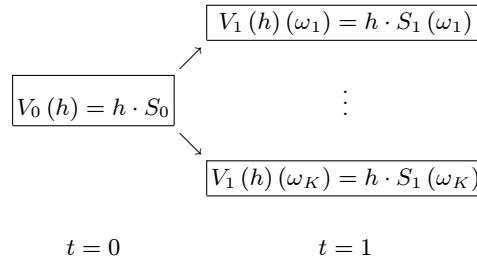


Abb. 1.3. Veranschaulichung der Werte $V_0(h)$ und $V_1(h)$ eines Portfolios h

Alternativ kann $V_1(h)$ als Abbildung von Ω nach \mathbb{R} aufgefasst werden, wobei $V_1(h)(\omega) := h \cdot S_1(\omega)$ für $\omega \in \Omega$. Betrachten wir ein beliebiges Portfolio $h \in \mathbb{R}^N$, so lassen sich die Werte $V_0(h)$ und $V_1(h)$ des Portfolios gemäß Abb. 1.3 veranschaulichen. Im folgenden wird gelegentlich die Angabe des Portfolios h in $V_0(h)$ oder $V_1(h)(\omega)$ weggelassen und einfach V_0 oder $V_1(\omega)$ geschrieben.

Anmerkung 1.4. Mit den Definitionen (1.1) und (1.2) gilt

$$V_1(h) = V_0(h) + h \cdot \Delta S,$$

wobei $\Delta S := S_1 - S_0$. Die Differenz

$$\begin{aligned}
 G(h) &:= V_1(h) - V_0(h) \\
 &= h \cdot \Delta S
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

kennzeichnet den **Gewinn**, der mit der Portfoliostrategie h erzielt wird. An (1.3) wird deutlich, dass der Gewinn eines Portfolios ausschließlich auf die Änderungen ΔS der Wertpapierpreise zurückzuführen ist.

Anmerkung 1.5. Bei der Definition der Stückzahlen h_i werden sowohl nicht-ganzzahlige als auch negative Werte zugelassen. Während die Zulassung nicht-ganzzahliger Werte vorwiegend technische Gründe hat, die später erläutert werden, haben negative Werte eine ökonomische Bedeutung. Enthält ein Portfolio etwa eine negative Anzahl h_i an Aktien, so bedeutet dies, dass $|h_i|$ Aktien von einer Finanzinstitution geliehen und diese anschließend am Markt verkauft wurden. Damit bestehen bei dem Verleiher der Aktien Schulden der Höhe $|h_i|$. Eine negative Stückzahl an Finanzinstrumenten in einem Portfolio entspricht also Schulden in diesem Finanzinstrument. Dies ist analog zu Schulden in einer Währung. Um Schulden zu machen, wird Kapital bei einer finanziellen Institution geliehen und dieses Kapital wird dann „verkauft“, also gegen ein anderes Gut eingetauscht. Entsprechend werden Kapitalschulden in einem Portfolio durch eine negative Zahl an geschuldeten Einheiten des Kapitals, also z.B. in Euro, ausgedrückt. Während die Verschuldung an Kapital jedem Privatanleger über einen Bankkredit zugänglich ist, sind Leihgeschäfte für Aktien Privatanlegern in der Regel verwehrt. Der Grund ist das

hohe, mit diesen Leihegeschäften verbundene Risiko. Theoretisch sind die mit Leihegeschäften verbundenen Verlustrisiken nach oben unbeschränkt. Denn um die Leiheschulden zurückzahlen zu können, muss der Leihende die geliehenen Aktien am Markt zurückkaufen. Da der Kurs der Aktien theoretisch beliebig hoch steigen kann, ist entsprechend das potentielle, für den Rückkauf aufzuwendende Kapital nicht begrenzt.

Beispiel 1.6. Wir legen das Modell in Beispiel 1.1 zugrunde und betrachten ein Portfolio

$$h = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies bedeutet, dass vom ersten Finanzinstrument S^1 Schulden in Höhe von 10 Stück bestehen und vom zweiten Finanzinstrument S^2 1 Stück im Portfolio enthalten ist. Wird S^1 mit einer festverzinslichen Kapitalanlage in Euro identifiziert, so entsprechen die Schulden von 10 Stück einer Kreditaufnahme von 10 Euro. Wird das zweite Finanzinstrument S^2 als Aktie interpretiert, so beinhaltet das Portfolio h neben einem Kredit von 10 Euro den Bestand von einer Aktie. Mit diesen Daten gilt

$$V_0 = h \cdot S_0 = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} = 0$$

und

$$V_1(\omega_1) = h \cdot S_1(\omega_1) = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.02 \\ 12 \end{pmatrix} = 1.8,$$

sowie

$$V_1(\omega_2) = h \cdot S_1(\omega_2) = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.02 \\ 9 \end{pmatrix} = -1.2.$$

Zum Zeitpunkt 0 besitzt das Portfolio den Wert $V_0 = 0$, d.h. die Schulden über 10 Euro entsprechen gerade dem Wert der einen Aktie S^2 zum Zeitpunkt 0.

Zum Zeitpunkt 1 führt das Steigen des Aktienkurses im Szenario ω_1 zu einem positiven Wert des Portfolios von $V_1(\omega_1) = 1.8$, während das Sinken des Aktienkurses im Szenario ω_2 zu einem negativen Wert $V_1(\omega_2) = -1.2$ führt, siehe Abb. 1.4. Im Zustand ω_2 reicht der Wert der Aktie von 9 Euro nicht aus, um den Kreditbetrag plus Kreditzinsen in Höhe von 10.20 Euro zurückzuzahlen, sondern es besteht nach Liquidierung des Portfolios eine Zahlungsverpflichtung über den Betrag von 1.20 Euro. \triangle

1.3 Optionen und Forward-Kontrakte

Auf der Basis der Instrumente, die in einem Marktmodell enthalten sind, lassen sich weitere Finanzinstrumente definieren, deren Eigenschaften von denjenigen des Marktmodells abhängen. Solche, von anderen Finanzprodukten abgeleitete Instrumente, heißen *Derivate*. Zu diesen zählen Optionen und Forward-Kontrakte.

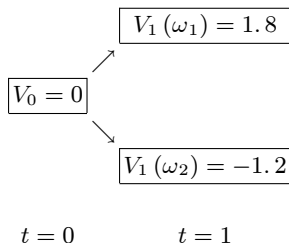


Abb. 1.4. Eine Investition in das Portfolio h ist zum Zeitpunkt 0 mit einem Kapitaleinsatz von 0 möglich und führt zum Zeitpunkt 1 in dem einem Zustand zu einem Gewinn und im dem anderen zu einem Verlust.

1.3.1 Optionen

Definition 1.7. Eine **Call-Option** beinhaltet das Recht,

- ein bestimmtes Wertpapier, das Underlying,
- zu einem in der Zukunft liegenden Zeitpunkt, dem Fälligkeitszeitpunkt,
- zu einem heute schon festgesetzten Preis, dem Strike- oder Basispreis,

zu kaufen. Eine Call-Option heißt daher auch Kaufoption.

Es besteht das Recht, nicht jedoch die Pflicht, das Underlying zu erwerben. Sollte also der aktuelle Marktpreis des Underlyings zum Fälligkeitszeitpunkt unterhalb des Basispreises liegen, so ist es nicht sinnvoll, das Optionsrecht auszuüben, da in diesem Fall für das Underlying mehr als notwendig bezahlt werden müsste. Ist umgekehrt der Marktpreis des Underlyings zum Fälligkeitszeitpunkt höher als der Basispreis, so ist es sinnvoll, das Optionsrecht der Call-Option auszuüben, da sich durch den Kauf des Underlyings zum Basispreis und den sofortigen Verkauf zum – höheren – Marktpreis ein Gewinn erzielen lässt.

Bezeichnen wir den Kurs des Underlyings zum Fälligkeitszeitpunkt mit S und den Basispreis mit K , so lautet der Wert der Option bei Fälligkeit somit

$$\max(S - K, 0) =: (S - K)^+.$$

Da wir unterstellen, dass der Investor rational handelt, wird er nur im Falle von $S(\omega) > K$ von seinem Optionsrecht Gebrauch machen, und aus diesem Grund ist der Wert einer Option niemals negativ.

Betrachten wir eine Call-Option in einem Ein-Perioden-Modell, so lassen sich die Werte

$$c_j = (S_1(\omega_j) - K)^+$$

für alle $j = 1, \dots, K$ als Vektor des \mathbb{R}^K oder als Funktion $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ interpretieren. c wird als **Auszahlungsprofil** oder als **zustandsabhängige Auszahlung** bezeichnet.

Definition 1.8. Eine **Put-Option** beinhaltet das Recht,

- ein bestimmtes Wertpapier, das Underlying,
 - zu einem in der Zukunft liegenden Zeitpunkt, dem Fälligkeitszeitpunkt,
 - zu einem heute schon festgesetzten Preis, dem Strike- oder Basispreis,
- zu verkaufen. Eine Put-Option heißt daher auch Verkaufsoption.

Das Auszahlungsprofil einer Put-Option bei Fälligkeit lautet dementsprechend

$$\max(K - S, 0) =: (K - S)^+.$$

Analog gilt für das Auszahlungsprofil $c \in \mathbb{R}^K$ in einem Ein-Perioden-Modell

$$c_j = (K - S_1(\omega_j))^+$$

für alle $j = 1, \dots, K$.

Kann ein Optionsrecht wie oben definiert nur zu einem zuvor festgelegten zukünftigen Zeitpunkt, dem Fälligkeitszeitpunkt, ausgeübt werden, so heißt die Option *europäisch*. Kann es dagegen zu einem beliebigen Zeitpunkt während der Laufzeit bis zum Fälligkeitszeitpunkt ausgeübt werden, so heißt die Option *amerikanisch*. Offenbar können im Rahmen unseres Ein-Perioden-Modells europäische und amerikanische Optionen nicht voneinander unterschieden werden.

Warum könnte es sinnvoll sein, Optionen zu erwerben? Angenommen, ein Investor möchte in der Zukunft ein Wertpapier kaufen. Mit einer Call-Option, das dieses Wertpapier als Underlying besitzt, kann er sich heute gegen einen unerwarteten Preisanstieg versichern. Denn steigt der Preis des betrachteten Wertpapiers am Markt an, so muss der Investor dennoch nur den vereinbarten Basispreis zahlen. Sinkt dagegen der Kurs unter den Basispreis, so lässt der Investor sein Optionsrecht verfallen und kauft das Wertpapier günstiger am Markt. Sei weiter angenommen, ein Investor verfügt heute über einen Wertpapierbestand. Mit einer Reihe von Put-Optionen auf diesen Bestand kann er sich gegen einen unerwarteten Preisverfall versichern. Sollte nämlich der Kurs eines Wertpapiers einbrechen, so garantiert ihm die Option dennoch die Möglichkeit des Verkaufs zum vereinbarten Basispreis. Damit wirkt eine Put-Option wie eine Versicherung gegenüber negativen Kursentwicklungen. Dieses Optionsrecht hat einen Preis, so wie Versicherungen ihren Preis besitzen. Ein zentrales Thema dieses Buches ist die Entwicklung und Analyse einer sinnvollen Strategie zur Preisfindung für Optionen und andere Derivate.

Beispiel 1.9. Wir wählen wieder das Ein-Perioden-Zwei-Zustands-Modell aus Beispiel 1.1 und betrachten eine Call-Option auf das Finanzinstrument S^2 mit Ausübungspreis $K = 10.5$ Euro und Fälligkeitszeitpunkt 1.

Zum Zeitpunkt 1 besitzt die Option je nach eintretendem Zustand die Werte

$$c(\omega_1) = (S_1^2(\omega_1) - K)^+ = (12 - 10.5)^+ = 1.5 \text{ und}$$

$$c(\omega_2) = (S_1^2(\omega_2) - K)^+ = (9 - 10.5)^+ = 0.$$

Die zustandsabhängige Auszahlung c der Call-Option beträgt damit zusammengefasst

$$c = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir in diesem Beispiel dagegen eine Put-Option mit Ausübungspreis $K = 11$, so ergeben sich je nach Zustand die Auszahlungen

$$c(\omega_1) = (K - S_1^2(\omega_1))^+ = (11 - 12)^+ = 0 \text{ und}$$

$$c(\omega_2) = (K - S_1^2(\omega_2))^+ = (11 - 9)^+ = 2,$$

also zusammengefasst die Auszahlung

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

△

Der Käufer einer Option hat also bei $t = 1$ niemals eine Zahlungsverpflichtung gegenüber dem Verkäufer. Aus Sicht des Käufers verfällt die Option im ungünstigsten Fall wertlos oder aber er besitzt gegenüber dem Verkäufer einen Zahlungsanspruch.

Bevor wir der Frage nachgehen, wie sinnvolle Preise für Optionen bestimmt werden können, stellen wir zunächst noch ein weiteres wichtiges Finanzinstrument vor.

1.3.2 Forward-Kontrakte

Definition 1.10. Ein **Forward-Kontrakt** ist eine zum Zeitpunkt 0 eingegangene Verpflichtung,

- ein bestimmtes Wertpapier, das Underlying,
- zu einem in der Zukunft liegenden Zeitpunkt, dem Fälligkeitszeitpunkt,
- zu einem heute, bei $t = 0$, festgesetzten Preis F , dem **Forward-Preis**,

zu kaufen. Dabei wird der Forward-Preis F so bestimmt, dass das Eingehen der Kauf- bzw. Verkaufs-Verpflichtung zum Zeitpunkt 0 kostenlos ist.

Auch bei Forward-Kontrakten wird zum Zeitpunkt 0 der Preis vereinbart, der für das Underlying zum Zeitpunkt 1 zu bezahlen ist. Aber im Gegensatz zur Situation bei Optionen ist der Kauf des Wertpapiers, auf das sich der Kontrakt bezieht, verbindlich. Während der Käufer einer Option entscheiden kann, ob er von seinem Optionsrecht Gebrauch macht oder nicht, hat sich der

Käufer eines Forward-Kontrakts verpflichtet, das Wertpapier zum Fälligkeitszeitpunkt zu erwerben. Er ist also auch dann verpflichtet, es zum vereinbarten Preis F zu kaufen, wenn er das betreffende Wertpapier an der Börse billiger erhalten könnte. Andererseits ist das Eingehen eines Forward-Kontraktes kostenfrei, während der Käufer einer Option eine Optionsprämie zu bezahlen hat.

Der Wert eines Forward-Kontraktes bei $t = 1$ lautet einfach

$$S - F.$$

Also ist das zugehörige Auszahlungsprofil $c \in \mathbb{R}^K$ in einem Ein-Perioden-Modell gegeben durch

$$c_j = S_1(\omega_j) - F.$$

Forward-Kontrakte werden häufig nicht auf Aktien, sondern auf Wechselkursen gehandelt und können, wie Optionen, dazu dienen, Risiken zu kontrollieren. Wenn ein Unternehmen in einem halben Jahr beispielsweise Maschinen in einer Fremdwährung erwerben möchte, so kann durch einen Forward-Kontrakt auf die Fremdwährung das Wechselkursrisiko ausgeschlossen werden. Das Unternehmen gewinnt damit Planungssicherheit.

Beispiel 1.11. Im Marktmodell des Beispiels 1.1 betrachten wir einen Forward-Kontrakt auf die Aktie S^2 mit Forward-Preis F . Damit gilt für die zugehörige Auszahlung

$$c(\omega_1) = S_1^2(\omega_1) - F = 12 - F$$

und

$$c(\omega_2) = S_1^2(\omega_2) - F = 9 - F.$$

Der Forward-Preis F ist nun so anzupassen, dass der Wert des Kontraktes zum Zeitpunkt 0 gerade Null beträgt.

Legen wir den Forward-Preis beispielsweise auf einen willkürlichen Wert, etwa $F = 10$, fest, so ergeben sich als Auszahlung c des Forward-Kontraktes die Werte

$$c(\omega_1) = S_1^2(\omega_1) - F = 12 - 10 = 2$$

und

$$c(\omega_2) = S_1^2(\omega_2) - F = 9 - 10 = -1,$$

also

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aber welchen Wert besitzt die Auszahlung c zum Zeitpunkt 0? Und wie kann der Forward-Preis so angepasst werden, dass der Wert der auf diese Weise entstehenden Auszahlung gleich Null ist? \triangle

Eine Besonderheit des Forward-Kontraktes besteht also darin, dass hier der Preis zum Zeitpunkt 0 auf Null festgelegt wird und dass der Forward-Preis F so bestimmt werden muss, dass der Kontrakt bei $t = 0$ tatsächlich kostenfrei ist.

Für Forward-Kontrakte gibt es – im Gegensatz zu Optionen – eine sehr einfache Strategie, um den Forward-Preis F festzulegen. Angenommen, ein Kontrahent kauft von uns einen Forward-Kontrakt auf eine Aktie S mit Fälligkeit $t = 1$. Die Aktie habe heute, zum Zeitpunkt 0, einen Wert S_0 . Wir sind nun verpflichtet, zum Zeitpunkt 1 eine Aktie S an den Kontrahenten zu einem Preis F auszuliefern. Um dies garantieren zu können, kaufen wir die Aktie bereits heute, zum Zeitpunkt 0, und finanzieren sie durch einen Kredit in Höhe von S_0 Euro. Dieses Portfolio, Leihe von S_0 Euro und Kauf einer Aktie S , ist zum Zeitpunkt 0 kostenfrei.

Zum Zeitpunkt 1 verkaufen wir dem Kontrahenten die Aktie S zum Forward-Preis F . Wählen wir F so, dass mit diesem Betrag die entstandenen Verpflichtungen über $S_0(1+r)$, d.h. Kreditbetrag S_0 plus Zinskosten rS_0 , aus dem Kredit beglichen werden können, so lässt sich der Kontrakt ohne Gewinn oder Verlust erfüllen. Daher sollte $F = S_0(1+r)$ gewählt werden.

Bemerkenswert ist, dass der Forward-Preis lediglich vom risikolosen Zinssatz r abhängt und nicht, wie zunächst vermutet werden könnte, von den modellierten Wertentwicklungen der Aktie zum Zeitpunkt 1.

Beispiel 1.12. Für den Forward-Kontrakt aus Beispiel 1.11 ergibt sich wegen $r = 2\%$ somit ein Forward-Preis von $F = S_0(1+r) = 10 \cdot (1+0.02) = 10.2$ Euro. \triangle

1.4 Die Bewertung von Auszahlungsprofilen

Allen Beispielen des vorigen Abschnitts ist gemeinsam, dass der Wert des jeweiligen Finanzkontraktes zum Endzeitpunkt 1 leicht zu ermitteln und damit für jedes mögliche Szenario bekannt ist. In allen Fällen ergibt sich eine zustandsabhängige Auszahlung $c \in \mathbb{R}^K$ zum Zeitpunkt 1, wobei K die Anzahl der Zustände zum Endzeitpunkt bezeichnet. Das zu lösende Problem besteht darin, für eine möglichst große Klasse von Auszahlungsprofilen $c \in \mathbb{R}^K$ einen sinnvollen Preis zum Zeitpunkt 0 anzugeben.

Wir werden im folgenden das Problem der Bewertung von Auszahlungsprofilen ganz allgemein behandeln. Es wird sich zeigen, dass es nicht erforderlich ist, Call- und Put-Optionen sowie Forward-Kontrakte getrennt zu behandeln, obwohl für Forward-Kontrakte die im letzten Abschnitt vorgestellte, verblüffend einfache Bewertungsstrategie existiert, für Optionen dagegen nicht. Bei der Entwicklung eines Verfahrens zur Preisbestimmung lassen wir uns von einem vertrauten deterministischen Beispiel leiten.

1.4.1 Die zeitliche Transformation deterministischer Zahlungsströme

Angenommen, eine Bank hat zu einem zukünftigen Zeitpunkt 1 die Zahlungsverpflichtung über einen Kapitalbetrag $c > 0$. Dies bedeutet, dass die Bank zum Zeitpunkt 1 einen Zahlungsstrom von $-c$ erfahren wird.

$$\begin{array}{cc} \boxed{} & \boxed{\downarrow -c} \\ t = 0 & t = 1 \end{array}$$

Diese zukünftige Zahlungsverpflichtung kann wie folgt in eine äquivalente Zahlungsverpflichtung zum aktuellen Zeitpunkt 0 umgewandelt werden.

- Zum Zeitpunkt 0 kauft die Bank eine Anleihe mit der Auszahlung c zum Zeitpunkt 1.
- Für diese Anleihe bezahlt die Bank heute, zum Zeitpunkt 0, den Betrag $c_0 := dc$, wobei d den Diskontfaktor zwischen $t = 0$ und $t = 1$ bezeichnet.
- Zum Zeitpunkt 1 erhält die Bank den Betrag c als Rückzahlung aus der Anleihe.
- Mit dieser Auszahlung begleicht die Bank die Zahlungsverpflichtung c zum Zeitpunkt 1, so dass netto zu diesem Zeitpunkt kein Kapital fließt.

$$\begin{array}{cc} \boxed{\downarrow -c_0 = -dc} & \boxed{\uparrow c - c = 0} \\ t = 0 & t = 1 \end{array}$$

Insgesamt wurde auf diese Weise eine zukünftige Zahlungsverpflichtung c in eine äquivalente Zahlungsverpflichtung über den Betrag $c_0 = dc$ zum Zeitpunkt 0 transformiert.

Umgekehrt nehmen wir an, dass die Bank zu einem zukünftigen Zeitpunkt 1 einen Kapitalbetrag c erhalten wird. Auch dieser Betrag lässt sich in einen Kapitalbetrag c_0 zum Zeitpunkt 0 transformieren.

- Dazu verkauft die Bank zum Zeitpunkt 0 eine Anleihe, die zum Zeitpunkt 1 mit dem Wert c zurückgezahlt werden muss.
- Die Bank nimmt auf diese Weise zum Zeitpunkt 0 den Kapitalbetrag $c_0 = dc$ ein, wobei d den Diskontfaktor zwischen $t = 0$ und $t = 1$ bezeichnet.
- Zum Zeitpunkt 1 erhält die Bank den angenommenen Kapitalbetrag c , mit dem nun die Schuld aus der Anleihe beglichen wird.

Auch hier fließt zum Zeitpunkt 1 netto kein Kapital, und der zukünftige Zahlungsstrom c wird in einen äquivalenten Zahlungsstrom c_0 zum Zeitpunkt 0 umgewandelt.

In jedem Fall lässt sich also ein beliebiger Betrag c , der zum Zeitpunkt 1 fließt, mit Hilfe von Handelsaktivitäten in eine äquivalente Zahlung $c_0 = dc$ zum Zeitpunkt 0 transformieren.

1.4.2 Die zeitliche Transformation zustandsabhängiger Zahlungsströme

Die Idee, Zahlungsströme durch Handelsaktivitäten in der Zeit zu verschieben, übertragen wir nun auf zustandsabhängige Auszahlungen.

Zunächst betrachten wir erneut die bereits angesprochene Bewertungsstrategie für einen Forward-Kontrakt. Bezeichnet s_0 den Kurs einer Aktie s zum Zeitpunkt 0, r den risikolosen Zinssatz und $F = s_0(1+r)$ den Forward-Preis, so besitzt der Forward-Kontrakt das Auszahlungsprofil

$$c_j = s_1(\omega_j) - s_0(1+r) \quad (1.4)$$

für $j = 1, \dots, K$ zum Zeitpunkt 1. Wir betrachten nun ein Marktmodell, das aus den beiden Finanzinstrumenten S^1 und S^2 besteht, wobei

- S^1 eine festverzinsliche Kapitalanlage der Höhe 1 zum Zinssatz r und
- S^2 die Aktie s

bezeichnet. Damit gilt $S_0^1 = 1$ und $S_1^1 = 1+r$, sowie $S^2 = s$. Die Bewertungsstrategie für die Auszahlung $c \in \mathbb{R}^K$ des Forward-Kontrakts kann damit wie folgt formuliert werden:

Investiere zum Zeitpunkt 0 in das Portfolio $h = (-s_0, 1)$, bestehend aus einem Kredit in Höhe von s_0 Euro und aus einer Aktie s . Dieses Portfolio besitzt zum Zeitpunkt 1 in einem beliebigen Szenario ω_j den Wert

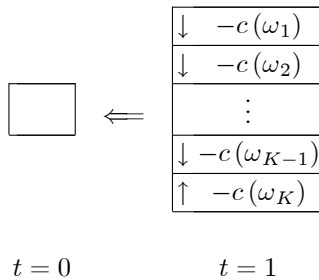
$$\begin{aligned} V_1(h)(\omega_j) &= h \cdot S_1(\omega_j) \\ &= \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1^1(\omega_j) \\ S_1^2(\omega_j) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -s_0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+r \\ s_1(\omega_j) \end{pmatrix} \\ &= -s_0(1+r) + s_1(\omega_j) \\ &= c_j. \end{aligned}$$

Die Auszahlungen c_j des Forward-Kontrakts aus (1.4) werden durch das Portfolio $h = (-s_0, 1)$ also exakt nachgebildet. Der Wert des Portfolios h zum Zeitpunkt 0 beträgt

$$\begin{aligned}
 V_0(h) &= h \cdot S_0 \\
 &= \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_0^1 \\ S_0^2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -s_0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ s_0 \end{pmatrix} \\
 &= -s_0 \cdot 1 + 1 \cdot s_0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Damit entstehen für das Portfolio h , genau wie für den Forward-Kontrakt, zum Zeitpunkt 0 keine Kosten. Das Portfolio und der Forward-Kontrakt sind bezüglich Preis und Auszahlung also vollkommen identisch.

In Verallgemeinerung dieses Beispiels nehmen wir nun an, dass eine Bank die Verpflichtung hat, mit einem Kontrahenten je nach eintretendem Zustand ω_j einen von diesem Zustand abhängigen Betrag $c(\omega_j) = c_j \in \mathbb{R}$ zum Zeitpunkt 1 auszutauschen. Ist $c(\omega_j) > 0$, so muss die Bank dem Kontrahenten $c(\omega_j)$ auszahlen, ist $c(\omega_j) < 0$, so hat der Kontrahent die Verpflichtung, der Bank den Betrag $|c(\omega_j)|$ zu zahlen:



Eine derartige Verpflichtung könnte beispielsweise dadurch entstehen, dass die Bank einem Kunden eine Option, einen Forward-Kontrakt oder ein anderes Finanzprodukt verkauft hat. Um für die betrachtete Auszahlung c einen Preis c_0 zum Zeitpunkt 0 zu finden, versuchen wir, ein Portfolio $h \in \mathbb{R}^N$ so zu bestimmen, dass der Wert des Portfolios mit der Auszahlung c zum Zeitpunkt 1 in jedem Zustand exakt übereinstimmt. Das Portfolio h soll also die Bedingungen

$$\begin{aligned}
 c(\omega_1) &= h \cdot S_1(\omega_1) \\
 &\vdots \\
 c(\omega_K) &= h \cdot S_1(\omega_K)
 \end{aligned}$$

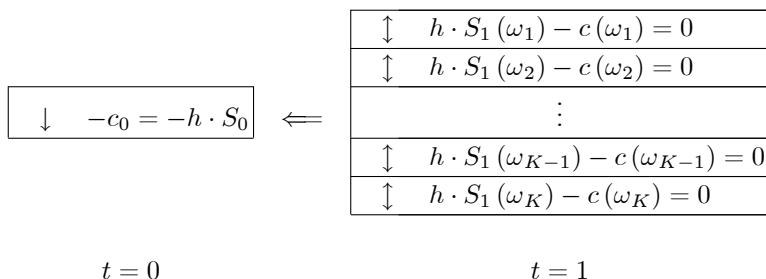
erfüllen. Kann ein derartiges Portfolio gefunden werden, dann lässt sich der Wert c_0 dieses Portfolios zum Zeitpunkt 0 sofort angeben, denn die Preise S_0 aller Finanzinstrumente zum Zeitpunkt 0 sind bekannt. Es gilt

$$c_0 = h \cdot S_0.$$

Damit erhalten wir folgende Strategie, um die zustandsabhängige Zahlung $c \in \mathbb{R}^K$ zum Zeitpunkt 1 in die Zahlung $c_0 \in \mathbb{R}$ zum Zeitpunkt 0 zu transformieren:

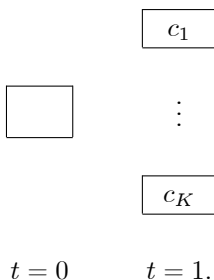
- Bestimme das Portfolio h , welches zum Zeitpunkt 1 die Auszahlung c besitzt und
- kaufe dieses Portfolio zum Zeitpunkt 0 für den Preis von $c_0 = h \cdot S_0$.
- Zum Zeitpunkt 1 wird je nach eintretendem Zustand ω der Betrag $c(\omega) = h \cdot S_1(\omega)$ aus dem Portfolio erhalten, wenn $c(\omega) > 0$ ist, oder es wird der Betrag $c(\omega)$ geschuldet, falls $c(\omega) < 0$ ist.
- In jedem Fall ist $h \cdot S_1(\omega)$ gerade der Betrag, der dem Kontrahenten geschuldet oder von diesem erhalten wird, so dass netto zum Zeitpunkt 1 kein Kapital fließt.

Verkauft eine Bank also zum Zeitpunkt 0 ein Finanzprodukt, das beinhaltet, zum Zeitpunkt 1 je nach eintretendem Zustand ω die Zahlung $c(\omega)$ zu leisten, so kann sich die Bank gegen die mit dem Verkauf des Finanzprodukts verbundenen Risiken vollständig absichern, wenn sie als Preis den Wert $c_0 = h \cdot S_0$ verlangt und mit diesem Kapital das Portfolio h zum Zeitpunkt 0 kauft.



1.4.3 Die Bewertung von Auszahlungsprofilen mit Hilfe von Replikation

Wir betrachten eine zukünftige zustandsabhängige Zahlung $c = (c_1, \dots, c_K) \in \mathbb{R}^K$,



Die Idee der Transformation von $c \in \mathbb{R}^K$ in einen äquivalenten Betrag $c_0 \in \mathbb{R}$ zum Zeitpunkt 0 besteht zusammengefasst aus den beiden Schritten:

1. Suche ein Portfolio $h \in \mathbb{R}^N$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} c_1 &= V_1(h)(\omega_1) = h \cdot S_1(\omega_1) \\ &\vdots \\ c_K &= V_1(h)(\omega_K) = h \cdot S_1(\omega_K). \end{aligned}$$

Wir veranschaulichen dies wie folgt:

$$\begin{array}{ccc} & \boxed{c_1 = h \cdot S_1(\omega_1)} & \\ & \vdots & \\ \boxed{} & & \boxed{c_K = h \cdot S_1(\omega_K)} \\ t = 0 & & t = 1. \end{array}$$

2. Definiere den Wert $c_0 := V_0(h) = h \cdot S_0$ dieses Portfolios als Preis von c zum Zeitpunkt 0:

$$\begin{array}{ccc} & \boxed{c_1 = h \cdot S_1(\omega_1)} & \\ & \vdots & \\ \boxed{c_0 = h \cdot S_0} & \Longleftarrow & \boxed{c_K = h \cdot S_1(\omega_K)} \\ t = 0 & & t = 1. \end{array}$$

Wir untersuchen nun, ob und wie zu gegebenem $c \in \mathbb{R}^K$ ein derartiges Portfolio $h \in \mathbb{R}^N$ gefunden werden kann. Dazu ist folgender einfache Zusammenhang hilfreich.

Lemma 1.13. *Für jedes $h \in \mathbb{R}^N$ gilt*

$$h \cdot S_1 = D^\top h, \tag{1.5}$$

wobei

$$D^\top = \begin{pmatrix} S_1^1(\omega_1) & \cdots & S_1^N(\omega_1) \\ \vdots & & \vdots \\ S_1^1(\omega_K) & \cdots & S_1^N(\omega_K) \end{pmatrix}$$

die Transponierte der Matrix

$$D := \begin{pmatrix} S_1^1(\omega_1) & \cdots & S_1^1(\omega_K) \\ \vdots & & \vdots \\ S_1^N(\omega_1) & \cdots & S_1^N(\omega_K) \end{pmatrix}$$

bezeichnet, die spaltenweise aus den Preisen aller Finanzinstrumente in jeweils einem Zustand besteht.

Beweis. Offenbar gilt

$$\begin{aligned} h \cdot S_1 &= \begin{pmatrix} h \cdot S_1(\omega_1) \\ \vdots \\ h \cdot S_1(\omega_K) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h_1 S_1^1(\omega_1) + \cdots + h_N S_1^N(\omega_1) \\ \vdots \\ h_1 S_1^1(\omega_K) + \cdots + h_N S_1^N(\omega_K) \end{pmatrix} \\ &= D^\top h. \end{aligned} \tag{1.6}$$

□

Definition 1.14. Die $N \times K$ -Matrix

$$D := (S_1(\omega_1), \dots, S_1(\omega_K)) = \begin{pmatrix} S_1^1(\omega_1) & \cdots & S_1^1(\omega_K) \\ \vdots & & \vdots \\ S_1^N(\omega_1) & \cdots & S_1^N(\omega_K) \end{pmatrix}$$

wird **Auszahlungsmatrix** oder **Payoffmatrix** genannt.

Die Auszahlungsmatrix D wurde so definiert, dass jede ihrer Spalten dieselbe Struktur besitzt wie der Preisvektor S_0 . Wir definieren also die Komponenten von D durch $D_{ij} := S_1^i(\omega_j)$ für $i = 1, \dots, N$ und $j = 1, \dots, K$.

Wir sehen, dass Schritt 1. der Bewertungsstrategie für Auszahlungsprofile $c \in \mathbb{R}^K$ auf ein Standardproblem der Linearen Algebra führt, nämlich auf das Lösen eines linearen Gleichungssystems

$$c = D^\top h. \tag{1.7}$$

Ist $h \in \mathbb{R}^N$ eine Lösung von (1.7), so sagen wir, h repliziert c .

Definition 1.15. Ein Auszahlungsprofil $c \in \mathbb{R}^K$ heißt **replizierbar** oder **erreichbar**, wenn c im Bild von D^\top liegt, also wenn

$$c \in \text{Im } D^\top.$$

Definition 1.16. Ein Tupel $(S_0, S_1) \cong (b, D) \in \mathbb{R}^N \times M_{N \times K}(\mathbb{R})$ heißt **Marktmodell** mit **Preisvektor**

$$b := S_0 = \begin{pmatrix} S_0^1 \\ \vdots \\ S_0^N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

und **Auszahlungsmatrix**

$$D := (S_1(\omega_1), \dots, S_1(\omega_K)) = \begin{pmatrix} S_1^1(\omega_1) & \cdots & S_1^1(\omega_K) \\ \vdots & & \vdots \\ S_1^N(\omega_1) & \cdots & S_1^N(\omega_K) \end{pmatrix} \in M_{N \times K}(\mathbb{R}).$$

Dabei bezeichnet $M_{N \times K}(\mathbb{R})$ die Menge aller reellen $N \times K$ -Matrizen.

Die Schreibweise $(S_0, S_1) \cong (b, D)$ bedeutet, dass sich ein Marktmodell $(S_0, S_1) \in \mathbb{R}^N \times \{X \mid X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N\}$ auf äquivalente Weise auch durch $(b, D) \in \mathbb{R}^N \times M_{N \times K}(\mathbb{R})$ beschreiben lässt. Aus einem vorgegebenen Tupel $(b, D) \in \mathbb{R}^N \times M_{N \times K}(\mathbb{R})$ lassen sich alle charakterisierenden Bestandteile eines Ein-Perioden-Modells ableiten. Die gemeinsame Anzahl der Zeilen von b und D entspricht der Anzahl der Finanzinstrumente des Modells, und die Anzahl der Spalten von D entspricht der Anzahl der Zustände des Modells. Der Vektor b wird als Preisvektor S_0 interpretiert, der die Preise aller N Finanzinstrumente zum Zeitpunkt 0 zusammenfasst, während die j -te Spalte von D als Preisvektor $S_1(\omega_j) = (S_1^1(\omega_j), \dots, S_1^N(\omega_j))^T$ interpretiert wird, der die Preise aller Finanzinstrumente zum Zeitpunkt 1 im Zustand ω_j enthält.

Definition 1.17. Ein Marktmodell (b, D) heißt **vollständig**, wenn D^T surjektiv ist, wenn also gilt

$$\text{Im } D^T = \mathbb{R}^K.$$

Wenn (b, D) vollständig ist, dann ist jedes Auszahlungsprofil c replizierbar, d.h. in diesem Fall gibt es zu jedem $c \in \mathbb{R}^K$ ein $h \in \mathbb{R}^N$ mit $c = D^T h$.

Anmerkung 1.18. Beachten Sie, dass etwaige Wahrscheinlichkeiten p_j , mit denen die jeweiligen Zustände $\omega_j \in \Omega$ zum Zeitpunkt 1 eintreten, bei der oben vorgestellten Preisfindung nirgends auftreten. Diese auf den ersten Blick überraschende Tatsache erklärt sich durch die Bewertungsstrategie. Ein vorgegebenes Auszahlungsprofil c wird durch ein Portfolio h repliziert. Da jede Komponente c_j repliziert wird, spielen die Eintrittswahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Zustände keine Rolle.

Anmerkung 1.19. Die dargestellte Strategie verwendet entscheidend Argumente aus der Linearen Algebra. Dies setzt jedoch voraus, dass die Portfoliovektoren als Elemente aus \mathbb{R}^N – und nicht aus \mathbb{Z}^N – interpretiert werden. Tatsächlich können jedoch keine Bruchteile von Aktien gehandelt werden. Andererseits sind in der Praxis Transaktionen über eine einzige Aktie auch selten.

Üblicherweise werden Vielfache, wie etwa 50 oder 100 Stücke, gehandelt. Daher wird mit reellwertigen Stückzahlen gerechnet, die für die Umsetzung in die Praxis auf die nächste ganze Zahl gerundet werden.

Beispiel 1.20. Das zu Beispiel 1.1 gehörende Marktmodell lautet

$$(b, D) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.02 & 1.02 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \right).$$

Der Preisvektor b und die Payoffmatrix D enthalten jeweils 2 Zeilen. Also besteht das Marktmodell aus zwei Finanzinstrumenten. Ferner besitzt D auch 2 Spalten, also werden hier zwei Szenarien zum Zeitpunkt 1 modelliert. Die Payoffmatrix D ist regulär, also ist das zugehörige Marktmodell (b, D) vollständig. \triangle

Beispiel 1.21. Ein Marktmodell (b, D) sei durch folgende Daten gegeben:

$$(b, D) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 120 \\ 24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.2 & 1.2 \\ 110 & 130 \\ 26 & 23 \end{pmatrix} \right).$$

Es enthält drei Finanzinstrumente und zwei Zustände ω_1 und ω_2 bei $t = 1$, so dass

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 120 \\ 24 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_1) = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 110 \\ 26 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_2) = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 130 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

Der Rang von D^\top hat den Wert 2. Also ist $D^\top : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ surjektiv, und das Marktmodell ist vollständig. \triangle

Beispiel 1.22. Wir betrachten die Daten des Beispiels 1.20 und versuchen, mit der beschriebenen Strategie den Preis einer Call-Option auf Finanzinstrument S^2 mit Ausübungspreis $K = 10.5$ zu ermitteln. Das Auszahlungsprofil dieser Option lautet

$$c = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da D regulär ist, besitzt das Gleichungssystem $c = D^\top h$, gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.02 & 12 \\ 1.02 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},$$

die eindeutig bestimmte Lösung

$$h = \begin{pmatrix} -4.412 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Für den Preis $c_0 := h \cdot S_0$ der Call-Option zum Zeitpunkt 0 erhalten wir daher

$$c_0 = \begin{pmatrix} -4.412 \\ 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} = 0.588.$$

Analog lässt sich der Preis der Put-Option auf Finanzinstrument S^2 mit Ausübungspreis $K = 10$ berechnen. Hier lautet das Auszahlungsprofil

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

und das Gleichungssystem $c = D^\top h$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.02 & 12 \\ 1.02 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

besitzt die eindeutig bestimmte Lösung

$$h = \begin{pmatrix} 7.843 \\ -0.667 \end{pmatrix},$$

so dass sich der Preis

$$c_0 = \begin{pmatrix} 7.843 \\ -0.667 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} = 1.176$$

für die Put-Option zum Zeitpunkt 0 ergibt. \triangle

Beispiel 1.23. Wieder basierend auf Beispiel 1.20 wird der Wert eines Forward-Kontrakts auf S^2 mit Forward-Preis F berechnet. Für das Auszahlungsprofil c des Forward-Kontrakts gilt

$$c = \begin{pmatrix} 12 - F \\ 9 - F \end{pmatrix}.$$

Das replizierende Portfolio h löst das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 12 - F \\ 9 - F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.02 & 12 \\ 1.02 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},$$

d.h., es gilt

$$h = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1.02}F \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Preis $c_0 := h \cdot S_0$ von h zum Zeitpunkt 0 beträgt daher

$$c_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1.02}F \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} = 10 - \frac{1}{1.02}F.$$

Wir bestimmen schließlich F so, dass $c_0 = 0$ wird, also $F = 10 \cdot 1.02 = S_0(1 + r)$ und erhalten genau den Wert, den wir bereits im Rahmen der Diskussion im Anschluss an Beispiel 1.11 ermittelt hatten. Das Portfolio h besteht

aus einer Anleihe von 10 Einheiten des festverzinslichen Finanzinstruments S^1 , also aus einem Kredit von 10 Euro, und aus dem Bestand einer Aktie S^2 . Der Gesamtwert des Portfolios beträgt somit gerade 0. Zum Zeitpunkt 1 besitzt das Portfolio in jedem Zustand genau den Gegenwert der Verpflichtung, die durch den Verkauf des Forward-Kontrakts entstanden ist. \triangle

Das vorangegangene Beispiel zeigt auch, wie Forward-Kontrakte bewertet werden, wenn $F \neq S_0(1+r)$ gilt. In der Praxis tritt dieser Fall z.B. dann auf, wenn ein Forward-Kontrakt abgeschlossen wurde und zu einem späteren Zeitpunkt, aber vor dem Fälligkeitszeitpunkt, erneut bewertet wird. Im Handelsgeschäft beispielsweise werden sämtliche Handelspositionen am Ende jedes Handelstages bewertet, und im Rahmen dessen muss der Wert jedes gehandelten Finanzinstruments täglich neu ermittelt werden.

Beispiel 1.24. Es sei (b, D) ein Ein-Perioden-Zwei-Zustands-Modell, wobei das erste Finanzinstrument eine festverzinsliche Kapitalanlage zum Zinssatz r ist. Also gilt

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ S_0 \end{pmatrix} = S_0, \quad D = \begin{pmatrix} 1+r & 1+r \\ S_1(\omega_1) & S_1(\omega_2) \end{pmatrix} \cong S_1.$$

Ferner setzen wir $S_1(\omega_1) \neq S_1(\omega_2)$ voraus. Sei

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

ein beliebiges Auszahlungsprofil. Dann betrachten wir mit $s_1 := S_1(\omega_1)$ und $s_2 := S_1(\omega_2)$ das Gleichungssystem

$$h \cdot S_1 = D^\top h = \begin{pmatrix} h_1(1+r) + h_2 s_1 \\ h_1(1+r) + h_2 s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Durch Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung folgt

$$h_2 = \frac{c_1 - c_2}{s_1 - s_2}.$$

Multiplizieren wir nun die erste Gleichung mit $s_2 = S_1(\omega_2)$ und die zweite mit $s_1 = S_1(\omega_1)$ so erhalten wir nach Subtraktion

$$h_1 = \frac{1}{1+r} \frac{c_2 s_1 - c_1 s_2}{s_1 - s_2}.$$

Damit lautet der Wert $c_0 := V_0(h)$ des replizierenden Portfolios

$$\begin{aligned} c_0 &= h \cdot S_0 = h_1 + h_2 S_0 \\ &= \frac{1}{1+r} \frac{c_2 s_1 - c_1 s_2}{s_1 - s_2} + \frac{c_1 - c_2}{s_1 - s_2} S_0 \\ &= \frac{1}{1+r} \left(\frac{(1+r) S_0 - s_2}{s_1 - s_2} c_1 + \frac{s_1 - (1+r) S_0}{s_1 - s_2} c_2 \right) \\ &= \frac{1}{1+r} (q c_1 + (1-q) c_2), \end{aligned} \tag{1.8}$$

wobei

$$q := \frac{(1+r)S_0 - s_2}{s_1 - s_2}.$$

Speziell für Forward-Kontrakte mit Forward-Preis F gilt

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1(\omega_1) - F \\ S_1(\omega_2) - F \end{pmatrix},$$

und (1.8) liefert

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{1+r} \left(\frac{(1+r)S_0 - s_2}{s_1 - s_2} (s_1 - F) + \frac{s_1 - (1+r)S_0}{s_1 - s_2} (s_2 - F) \right) \\ &= S_0 - \frac{1}{1+r} F. \end{aligned}$$

Dies ist genau dann 0, falls $F = (1+r)S_0$, und für das replizierende Portfolio erhalten wir

$$h = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+r} \frac{c_2 s_1 - c_1 s_2}{s_1 - s_2} \\ \frac{c_1 - c_2}{s_1 - s_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{F}{1+r} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

△

1.5 Replikation und das „Law of One Price“

Der im letzten Abschnitt entwickelte Ansatz zur Bewertung zustandsabhängiger Auszahlungen $c \in \mathbb{R}^K$ lautet:

- Löse das Gleichungssystem $c = h \cdot S_1 = D^\top h$ und
- definiere den Preis c_0 von c zum Zeitpunkt 0 als $c_0 = h \cdot S_0$.

Mit Hilfe dieser Strategie kann das zum Zeitpunkt 1 fließende zustandsabhängige Auszahlungsprofil $c \in \mathbb{R}^K$ in eine Zahlung $c_0 \in \mathbb{R}$ transformiert werden, die zum Zeitpunkt 0 erfolgt. Bei der Umsetzung der Bewertungsstrategie können zwei grundsätzliche Probleme auftreten. Sei dazu $(S_0, S_1) \cong (b, D)$ ein Marktmodell und sei $c \in \mathbb{R}^K$ ein Auszahlungsprofil. Folgende Situationen sind denkbar:

- **Die Replikation ist nicht möglich:** Es gibt kein Portfolio h mit der Eigenschaft $c = D^\top h$, also $c \notin \text{Im } D^\top$.
- **Die Replikation ist nicht eindeutig bestimmt:** Es gibt verschiedene Portfolios h und h' mit $c = D^\top h = D^\top h'$. Dies ist gleichbedeutend mit $c \in \text{Im } D^\top$ und $\ker D^\top \neq \{0\}$, wobei $\ker D^\top$ den Kern von D^\top bezeichnet. In diesem Fall stimmen möglicherweise die Preise $h \cdot b$ und $h' \cdot b$ nicht überein, so dass kein eindeutig bestimmter Preis für c angegeben werden kann.

Wir betrachten die beiden Fälle nun genauer.

Die Replikation ist nicht möglich

Wenn eine Auszahlung $c \in \mathbb{R}^K$ nicht replizierbar ist, dann kann c nicht mit Hilfe eines replizierenden Portfolios in einen äquivalenten Zahlungsstrom zum Zeitpunkt 0 transformiert werden. Wir betrachten nun einige mögliche Bewertungsstrategien für diesen Fall, d.h. für die Situation $c \notin \text{Im } D^\top$.

Superhedging.

Sei $c \geq 0$. Wir setzen voraus, dass es wenigstens ein Instrument S^k für ein $1 \leq k \leq N$ gibt, mit $S_0^k > 0$ und $S_1^k(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$, etwa eine festverzinsliche Kapitalanlage mit Zinssatz $r > -1$. Wir betrachten die Menge $\mathcal{C}_+(c)$ der replizierbaren Auszahlungsprofile c' mit $c' \geq c$, also

$$\mathcal{C}_+(c) := \{c' \in \mathbb{R}^K \mid c' \geq c, c' \in \text{Im } D^\top\}.$$

Die Menge $\mathcal{C}_+(c)$ ist nicht leer, denn es gibt zu jedem $c \in \mathbb{R}^K$ ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda S_1^k \geq c$, und es gilt $\lambda S_1^k = D^\top(\lambda e_k)$. Damit definieren wir

$$V_+(c) := \inf_{h \in \mathbb{R}^N} \{h \cdot b \mid D^\top h \geq c\}.$$

Wir haben nun ein typisches Problem der linearen Optimierung vor uns. Zu lösen ist

$$\inf h \cdot b$$

unter der Nebenbedingung

$$D^\top h \geq c.$$

Eine Lösung v^* dieses Optimierungsproblems kann als der kleinste Preis interpretiert werden, zu dem ein Verkäufer die Auszahlung c ohne Verlustrisiko verkaufen kann.

Analog definieren wir

$$\mathcal{C}_-(c) := \{c' \in \mathbb{R}^K \mid 0 \leq c' \leq c, c' \in \text{Im } D^\top\}$$

und

$$V_-(c) := \sup_{h \in \mathbb{R}^N} \{h \cdot b \mid D^\top h \leq c\}.$$

Auch $\mathcal{C}_-(c)$ ist nicht leer, denn es gibt zu jedem $c \in \mathbb{R}^K$ ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \lambda S_1^k \leq c$. Wieder erhalten wir ein Problem der linearen Optimierung; es lautet:

$$\sup h \cdot b$$

unter der Nebenbedingung

$$D^\top h \leq c.$$

Eine Lösung v_* dieses Optimierungsproblems kann entsprechend als höchster Preis interpretiert werden, zu dem ein Käufer für die Auszahlung c in keinem Zustand zuviel bezahlt².

² Zunächst ist nicht klar, ob v^* oder v_* beschränkt sind. Tatsächlich werden wir in Abschnitt 1.5 sehen, dass es zu jeder replizierbaren Auszahlung $c \in \mathbb{R}^K$ und zu

Projektionsansatz.

Für $c \notin \text{Im } D^\top$ besteht ein weiterer Ansatz zur Preisfindung darin, ein Portfolio h zu suchen, dessen Auszahlung $D^\top h$ möglichst nahe bei c liegt. Die Aufgabe besteht also darin, die Funktion

$$\|D^\top h - c\|^2 = \sum_{j=1}^K \left((D^\top h)_j - c_j \right)^2 \quad (1.9)$$

für $h \in \mathbb{R}^N$ zu minimieren. Dies entspricht der Bestimmung der Projektion von c auf den Bildraum $\text{Im } D^\top$ und lässt sich numerisch beispielsweise durch das Lösen der Normalengleichung $DD^\top h = Dc$ finden.

Minimale mittlere quadratische Abweichung.

Ein weiterer Ansatz lautet: Minimiere die mittlere quadratische Abweichung von $D^\top h$ und c ,

$$\mathbf{E} \left[(D^\top h - c)^2 \right] := \sum_{j=1}^K P(\omega_j) \left((D^\top h)_j - c_j \right)^2,$$

über alle Handelsstrategien $h \in \mathbb{R}^N$. Die Idee besteht hier darin, eine Zahlung c_j , die in einem Szenario ω_j fällig wird, um so stärker zu berücksichtigen, je höher die Eintrittswahrscheinlichkeit für diesen Zustand ist.

Dieser Ansatz erfordert jedoch, dass das Marktmodell um die Modellierung der Wahrscheinlichkeiten ergänzt wird, mit denen die jeweiligen Zustände zum Zeitpunkt 1 eintreten werden. Bei der bisherigen Bewertungsstrategie spielten diese Wahrscheinlichkeiten keine Rolle.

Wir nehmen also für diesen Ansatz an, dass Wahrscheinlichkeiten $P(\omega_j) =: p_j$ für $1 \leq j \leq K$ vorgegeben sind, mit denen die zukünftigen Szenarien ω_j des betrachteten Finanzmarktes eintreten werden. Auf diese Weise wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf Ω definiert.

Der Ansatz, die mittlere quadratische Abweichung zu minimieren, kann auf den Projektionsansatz zurückgeführt werden. Dazu wird

$$A := \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{p_K} \end{pmatrix} D^\top = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} S_1^1(\omega_1) & \cdots & \sqrt{p_1} S_1^N(\omega_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \sqrt{p_K} S_1^1(\omega_K) & \cdots & \sqrt{p_K} S_1^N(\omega_K) \end{pmatrix}$$

jedem vorgegebenen Preis $w \in \mathbb{R}$ ein Portfolio $h_w \in \mathbb{R}^N$ gibt mit $D^\top h_w = c$ und $h_w \cdot b = w$, falls im zugrundeliegenden Marktmodell (b, D) nicht das *Law of One Price* gilt. In diesem Fall erhalten wir $v^* = -\infty$ und $v_* = \infty$. Ist das Marktmodell (b, D) aber sogar arbitragefrei, siehe Abschnitt 1.6, so folgt aus Lemma 1.51, dass v^* und v_* reellwertig sind und daß

$$v_* \leq v^*$$

gilt. Ist c selbst replizierbar, dann folgt $v_* = v^*$.

definiert. Mit

$$z := \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{p_K} \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} c_1 \\ \vdots \\ \sqrt{p_K} c_K \end{pmatrix}$$

gilt dann

$$\mathbf{E} \left[(D^\top h - c)^2 \right] = \|Ah - z\|^2,$$

und wir erhalten ein Problem vom Typ (1.9).

Erwartungswert-Ansatz

Sind Eintrittswahrscheinlichkeiten für jeden Zustand gegeben, so ist eine weitere mögliche Strategie für die Bewertung einer zustandsabhängigen Auszahlung $c \in \mathbb{R}^K$ gegeben durch

$$c_0 := d\mathbf{E}[c] = d \sum_{j=1}^K p_j c_j. \quad (1.10)$$

Der Preis c_0 wird in diesem Fall also definiert als diskontierter Erwartungswert der zukünftigen Auszahlung c .

Untersuchungen von Absicherungsstrategien in unvollständigen Märkten finden Sie in Föllmer/Schied [16] und in Pliska [45]. Wir werden uns in diesem Buch auf den Fall $c \in \text{Im } D^\top$ konzentrieren.

Die Replikation ist nicht eindeutig bestimmt

Wir betrachten nun den Fall, dass eine Auszahlung c zwar replizierbar ist, jedoch nicht auf eindeutig bestimmte Weise. Wir nehmen also an, dass es zwei Portfolios h und h' gibt mit $h \neq h'$ und mit $c = D^\top h = D^\top h'$. Dann gilt $h' = h + f$ für ein $f \in \ker D^\top$, und es gilt $h \cdot b \neq h' \cdot b$ genau dann, wenn $f \cdot b \neq 0$. Definieren wir für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ das Portfolio $h_\lambda := h + \lambda f$, so gilt $D^\top h_\lambda = c$ und $c_\lambda := h_\lambda \cdot b = h \cdot b + \lambda f \cdot b$. Durch geeignete Wahl von λ lässt sich im Falle von $f \cdot b \neq 0$ jeder beliebige Wert $c_\lambda \in \mathbb{R}$ realisieren und die Replikationsstrategie führt nicht zu einer sinnvollen Preisfindung.

Wenn jedoch $h \cdot b = h' \cdot b$ gilt, dann sind die beiden Portfolios h und h' ökonomisch gleichwertig; sie kosten dasselbe und liefern dieselbe Auszahlung. Satz 1.25 charakterisiert diese Situation. Im Beweis wird verwendet, dass

$$\ker D^\top \perp \text{Im } D \quad (1.11)$$

und

$$\mathbb{R}^N = \ker D^\top \oplus \text{Im } D \quad (1.12)$$

gilt³.

Aufgabe 1.1. Konstruieren Sie ein Beispiel eines Marktmodells mit zwei Finanzinstrumenten und zwei Zuständen, wobei das erste ein Vielfaches des zweiten ist. Machen Sie sich klar, dass hier für ein replizierbares Auszahlungsprofil unendlich viele replizierende Portfolios mit gleichem Anfangspreis existieren.

Im folgenden werden Skalarprodukte, bei denen über Finanzinstrumente summiert wird, wie bisher mit einem Punkt \cdot gekennzeichnet, während für Skalarprodukte, bei denen über Zustände summiert wird, die Klammer $\langle \cdot, \cdot \rangle$ verwendet wird.

Satz 1.25. (Law of One Price) Sei (b, D) ein Marktmodell. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Es gilt das „Law of One Price“: Sei $c = D^\top h \in \text{Im } D^\top$ ein beliebiges replizierbares Auszahlungsprofil. Dann ist der mit Hilfe einer Replikationsstrategie definierte Preis $c_0 = h \cdot b$ von c eindeutig bestimmt, also unabhängig vom replizierenden Portfolio h .
2. $b \perp \ker D^\top$.
3. $b \in \text{Im } D$, d.h. es gilt $b = D\psi$ für ein $\psi \in \mathbb{R}^K$.
4. Es gibt ein $\psi \in \mathbb{R}^K$, so dass für jede replizierbare Auszahlung $c = D^\top h \in \text{Im } D^\top$ gilt $h \cdot b = \langle \psi, c \rangle$.

Beweis. 1. \iff 2. Sei h eine spezielle Lösung von $c = D^\top h$. Die allgemeine Lösung lautet dann $h' = h + f$ für ein beliebiges $f \in \ker D^\top$. Nun gilt $h' \cdot b = h \cdot b$ genau dann, wenn $f \cdot b = 0$. Da f beliebig gewählt werden kann, ist dies gleichbedeutend mit $b \perp \ker D^\top$.

³ Seien $f \in \ker D^\top$ und $w \in \text{Im } D$ beliebig. Nach Definition gilt $w = Dv$ für ein $v \in \mathbb{R}^K$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} f \cdot w &= f \cdot (Dv) \\ &= \left\langle D^\top f, v \right\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

da $D^\top f = 0$. Also folgt $\ker D^\top \perp \text{Im } D$. Nach Definition ist $\ker D^\top \oplus \text{Im } D$ ein Untervektorraum des \mathbb{R}^N . Aus dem Dimensionssatz folgt weiter

$$N = \dim \ker D^\top + \dim \text{Im } D^\top.$$

Da bei Matrizen der Zeilenrang gleich dem Spaltenrang ist, gilt $\dim \text{Im } D^\top = \dim \text{Im } D$. Also erhalten wir

$$\dim (\ker D^\top \oplus \text{Im } D) = N,$$

woraus $\ker D^\top \oplus \text{Im } D = \mathbb{R}^N$ folgt.

2. \Longleftrightarrow 3. Diese Äquivalenz folgt unmittelbar aus (1.11) und (1.12).

3. \implies 4. Nach Voraussetzung existiert ein $\psi \in \mathbb{R}^K$ mit $b = D\psi$. Mit $c = D^\top h$ gilt $h \cdot b = h \cdot D\psi = \langle D^\top h, \psi \rangle = \langle c, \psi \rangle$.

4. \implies 3. Sei $h \in \mathbb{R}^N$ ein beliebiges Portfolio und sei $c := D^\top h$. Nach Voraussetzung gilt $h \cdot b = \langle c, \psi \rangle = \langle D^\top h, \psi \rangle = h \cdot D\psi$. Da h beliebig gewählt wurde, folgt $b = D\psi$. \square

Wenn D^\top injektiv ist, also wenn $\ker D^\top = \{0\}$, dann gilt nach Punkt 2. des letzten Satzes das *Law of One Price*.

Folgerung 1.26. *Sei (b, D) ein Marktmodell, in dem das Law of One Price nicht gilt. Dann ist D^\top nicht injektiv.* \square

Die Aussage 4. von Satz 1.32 besagt, dass es in Marktmodellen, in denen die Preise $c_0 = h \cdot b$ replizierbarer Auszahlungsprofile $c = D^\top h$ vom replizierenden Portfolio h unabhängig sind, möglich ist, diese Preise ohne Kenntnis von h durch

$$c_0 = \langle \psi, c \rangle \quad (1.13)$$

zu berechnen.

Folgerung 1.27. *Sei $(b, D) \cong (S_0, S_1)$ ein Marktmodell, in dem das Law of One Price gilt. Dann gibt es eine Lösung ψ der Gleichung $D\psi = b$, und für alle $i = 1, \dots, N$ gilt*

$$S_0^i = \langle \psi, S_1^i \rangle. \quad (1.14)$$

Beweis. Das Gleichungssystem $D\psi = b$ kann geschrieben werden als

$$S_0 = b = D\psi = \psi_1 S_1(\omega_1) + \dots + \psi_K S_1(\omega_K). \quad (1.15)$$

Mit $S_1^i := (S_1^i(\omega_1), \dots, S_1^i(\omega_K))$ lässt sich (1.15) schreiben als

$$S_0^i = \langle \psi, S_1^i \rangle$$

für $i = 1, \dots, N$. \square

Gleichung (1.15) lässt sich so formulieren, dass in einem Marktmodell das *Law of One Price* genau dann gilt, wenn die Preise S_0 zum Zeitpunkt 0 eine Linearkombination der Preisszenarien $S_1(\omega_j)$, $j = 1, \dots, K$, zum Zeitpunkt 1 sind. Wegen der Bilinearität des Skalarprodukts ist Gleichung (1.14) äquivalent zu

$$V_0(h) = \langle \psi, V_1(h) \rangle \quad (1.16)$$

für beliebige $h \in \mathbb{R}^N$, wobei $V_0(h) = h \cdot b$, $V_1(h) = D^\top h$ verwendet wurde.

Die Zusammenhänge (1.14) und (1.16) können als eine auf zustandsabhängige Auszahlungsprofile verallgemeinerte *Diskontierung* zukünftiger Zahlungsströme $c = V_1(h)$ auf den Zeitpunkt 0 interpretiert werden. Definieren wir $d := \psi_1 + \dots + \psi_K$, so folgt für replizierbare deterministische Auszahlungen, d.h., im Fall von $c(\omega) = c$ für alle $\omega \in \Omega$, die Darstellung

$$c_0 = \langle \psi, c \rangle = dc, \quad (1.17)$$

und wir erhalten die elementare deterministische Diskontierungsformel. Die Komponentensumme d von ψ ist offenbar der *Diskontfaktor* des zugrundeliegenden Marktmodells. Unter der Voraussetzung, dass im betrachteten Marktmodell das *Law of One Price* gilt, kann jedoch nicht geschlossen werden, dass der Diskontfaktor d positiv ist. Er könnte null oder sogar negativ sein. Wir werden aber später sehen, dass Diskontfaktoren in arbitragefreien Märkten stets positiv sind. Gleichung (1.14) besagt im Rahmen dieser Interpretation jedenfalls, dass der abdiskontierte Wert der zustandsabhängigen zukünftigen Auszahlung eines Finanzinstruments S_1^i gerade S_0^i beträgt.

Wenn konstante Auszahlungen $c(\omega) = c$ replizierbar sind, dann folgt aus Satz 1.25, dass $c_0 = dc$ unabhängig vom replizierenden Portfolio ist. Dies bedeutet auch, dass die Komponentensumme $d = \psi_1 + \dots + \psi_K$ nicht von der Auswahl einer Lösung von $D\psi = b$ abhängt. Es gilt also $\ker D \perp \mathbf{1}$, wobei $\mathbf{1} := (1, \dots, 1)$. Dies ist ein Spezialfall des nachfolgenden Satzes 1.28. Vorbereitend halten wir fest, dass für die lineare Abbildung $D : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^N$ analog zu (1.11) und (1.12) gilt

$$\ker D \perp \operatorname{Im} D^\top \quad (1.18)$$

und

$$\mathbb{R}^K = \ker D \oplus \operatorname{Im} D^\top. \quad (1.19)$$

Satz 1.28. *Sei (b, D) ein Marktmodell, in dem das „Law of One Price“ gilt, und sei $c \in \mathbb{R}^K$ ein Auszahlungsprofil. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. c ist replizierbar.
2. $c \in \operatorname{Im} D^\top$.
3. $c \perp \ker D$.
4. Für jede Lösung ψ von $D\psi = b$ besitzt $\langle \psi, c \rangle$ denselben Wert.

Beweis. 1. \iff 2. Dies ist gerade die Definition von Replizierbarkeit.

2. \iff 3. Die Äquivalenz folgt unmittelbar aus (1.18) und (1.19).

3. \iff 4. Nach Satz 1.25 existiert wenigstens eine Lösung ψ von $D\psi = b$. Für jede weitere Lösung ψ' von $D\psi' = b$ gilt $\psi' = \psi + f$ für ein $f \in \ker D$. Dann folgt $\langle \psi', c \rangle = \langle \psi, c \rangle$ genau dann, wenn $c \perp f$. Da f beliebig gewählt werden kann, ist dies gleichbedeutend mit $c \perp \ker D$. \square

Satz 1.29. *Sei (b, D) ein Marktmodell, in dem das „Law of One Price“ gilt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. Das Marktmodell (b, D) ist vollständig.
2. $\operatorname{Im} D^\top = \mathbb{R}^K$.
3. $\ker D = \{0\}$.
4. Die Lösung ψ von $D\psi = b$ ist eindeutig bestimmt.

Beweis. 1. \iff 2. Dies gilt nach Definition.

2. \iff 3. Dies folgt unmittelbar aus (1.18) und (1.19).

3. \iff 4. Da im betrachteten Marktmodell das „Law of One Price“ gilt, existieren nach Satz 1.25 Lösungen ψ von $D\psi = b$. Daraus folgt die Äquivalenz von 3. und 4. unmittelbar. \square

Beispiel 1.30. Sei (b, D) ein Marktmodell, in dem das „Law of One Price“ gilt, und sei ψ eine Lösung von $D\psi = b$. Sei weiter $S := S^j$, $1 \leq j \leq N$, ein Finanzinstrument des Modells. Ein Forward-Kontrakt auf S mit Forward-Preis F besitzt die Auszahlung $c = S_1 - F$. Sind konstante Auszahlungen replizierbar, so besitzt $\langle \psi, F \rangle = dF$ nach Satz 1.28 für jede Lösung ψ von $D\psi = b$ denselben Wert. Damit gilt für den Preis c_0 des Forward-Kontrakts

$$c_0 = \langle \psi, c \rangle = \langle \psi, S_1 \rangle - \langle \psi, F \rangle = S_0 - dF.$$

\triangle

1.6 Arbitrage

Wir betrachten nun ein Marktmodell (b, D) , in dem das Law of One Price nicht gilt. Dies ist nach Satz 1.25 gleichbedeutend mit $b \notin \ker D^\top$. In diesem Fall existieren $f \in \ker D^\top$ mit $f \cdot b < 0$. Dies bedeutet aber, dass der Erwerb von f zum Zeitpunkt 0 mit einer *Kapitaleinnahme* von $-f \cdot b > 0$ verbunden ist. Die Einnahme beinhaltet keinerlei Risiko, denn das Portfolio ist zum Zeitpunkt 1 wertlos, $D^\top f = 0$, insbesondere bestehen zu diesem Zeitpunkt keine Zahlungsverpflichtungen. Eine Möglichkeit, risikolose Gewinne ohne eigenen Kapitaleinsatz erzielen zu können, wird *Arbitragegelegenheit* genannt.

Definition 1.31. Eine Handelsstrategie h heißt **Arbitragegelegenheit**, falls⁴

$$h \cdot b \leq 0 \text{ und } D^\top h > 0 \tag{1.20}$$

oder

$$h \cdot b < 0 \text{ und } D^\top h \geq 0. \tag{1.21}$$

Existieren in einem Marktmodell (b, D) keine Arbitragegelegenheiten, so heißt das Marktmodell **arbitragefrei**.

Gilt $V_0(h) = h \cdot b > 0$, so ist das der Betrag, der für den Kauf des Portfolios aufzuwenden ist. Ist $V_0(h) < 0$, so wird bei der Zusammenstellung des Portfolios h zum Zeitpunkt 0 das Kapital $-V_0(h) > 0$ entnommen.

⁴ Dabei bedeutet $D^\top h > 0$, dass $(D^\top h)_j \geq 0$ für alle $j = 1, \dots, K$ und dass $(D^\top h)_k > 0$ für wenigstens ein k . Für $x \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir allgemein $x > 0$, falls $x_i \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $x_k > 0$ für wenigstens ein k . Wir schreiben $x \gg 0$, falls x strikt positiv ist, d.h., falls $x_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Der Betrag $V_1(h)$ stellt den zustandsabhängigen Wert des Portfolios zum Zeitpunkt 1 dar. Gilt $V_1(h)(\omega_j) = h \cdot S_1(\omega_j) = (D^\top h)_j > 0$, so bezeichnet dies den Gewinn, der beim Verkauf des Portfolios erzielt wird, falls zum Zeitpunkt 1 der Zustand ω_j realisiert wird. Gilt $V_1(h)(\omega_j) < 0$, so bedeutet dies eine Zahlungsverpflichtung für den Besitzer des Portfolios im Zustand ω_j .

In (1.20) kostet das Portfolio also anfangs nichts oder es bringt sogar etwas ein, $V_0(h) \leq 0$. Zum Zeitpunkt 1 bestehen dagegen in keinem Zustand Zahlungsverpflichtungen, aber es gibt die Chance auf einen positiven Gewinn, $V_1(h) > 0$. In (1.21) wird sofort ein Gewinn realisiert, $V_0(h) < 0$, und später bestehen keinerlei Zahlungsverpflichtungen, eventuell kann sogar ein Gewinn realisiert werden, $V_1(h) \geq 0$.

Wir haben gesehen, dass in einem Marktmodell Arbitragegelegenheiten existieren, wenn das Law of One Price nicht gilt. Dies formulieren wir wie folgt:

Satz 1.32. *In einem arbitragefreien Marktmodell (b, D) gilt das „Law of One Price“. Der Preis jeder replizierbaren Auszahlung $c = D^\top h$ ist also eindeutig bestimmt durch $h \cdot b$ und es gilt*

$$b \perp \ker D^\top$$

oder äquivalent

$$b \in \text{Im } D.$$

□

Gilt umgekehrt das „Law of One Price“, so kann daraus nicht geschlossen werden, dass das Marktmodell (b, D) arbitragefrei ist, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1.33. Betrachten Sie das Marktmodell

$$(b, D) = \left(\begin{pmatrix} 0.99 \\ 7.0 \\ 2.1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.1 & 1.1 \\ 10 & 9 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \right).$$

Für $D^\top = \begin{pmatrix} 1.1 & 10 & 9 \\ 1.1 & 9 & 6 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gilt $\text{Rang } D^\top = 2$, das Modell ist also vollständig. Ferner gilt $\dim \ker D^\top = 1$ und $f := \begin{pmatrix} 19.091 \\ -3.0 \\ 1 \end{pmatrix}$ löst das Gleichungssystem $D^\top f = 0$. Damit ist $\ker D^\top = \{ \lambda f \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$. Wegen

$$f \cdot b = 0$$

gilt $\ker D^\top \perp b$. Mit Satz 1.25 folgt daraus, dass in (b, D) das „Law of One Price“ gilt. Dennoch ist sofort zu sehen, dass das Marktmodell nicht arbitragefrei ist, denn eine Verschuldung im ersten Finanzinstrument und eine Investition in das dritte führt in jedem Szenario zu einem positiven Gewinn. \triangle

Lemma 1.34. *In einem arbitragefreien Marktmodell (b, D) beinhaltet jede zum Zeitpunkt 0 getätigte kostenlose Investition in ein Portfolio h mit $D^\top h \neq 0$ ein Verlustrisiko.*

Beweis. Sei h eine kostenlose Investition mit $D^\top h \neq 0$. Dann gilt $D^\top h \not\geq 0$, denn sonst wäre h eine Arbitragegelegenheit. Wegen $D^\top h \neq 0$ muss daher wenigstens eine Komponente von $D^\top h$ negativ sein, und dies kennzeichnet einen Verlust. \square

Dass im vorangegangenen Lemma eine zum Zeitpunkt 0 *kostenlose* Investition h betrachtet wurde, ist wesentlich. Denn das risikolose Erzielen von Gewinnen ist mit einem positiven Kapitaleinsatz bei jeder festverzinslichen Geldanlage mit positivem Zinssatz möglich. Bei der Anlage eines Kapitalbetrags K , der sich bis zum Zeitpunkt t mit einem Zinssatz $r > 0$ verzinst, beträgt das Endkapital $K(1+r)$. Also wurde hier der Gewinn rK erzielt, der unabhängig vom Zustand ist, der zum Zeitpunkt t eintritt. Ist ein Marktmodell arbitragefrei und ist h ein replizierendes Portfolio für das Auszahlungsprofil c , so ist der Wert $h \cdot b$ mit $c = D^\top h$ nach Satz 1.32 eindeutig durch c bestimmt.

Sei (b, D) ein arbitragefreies Marktmodell. Den Wert $h \cdot b$ als Preis für das Auszahlungsprofil c zu interpretieren, wobei $c = D^\top h$ ein replizierendes Portfolio ist, ist nicht nur naheliegend, sondern zwingend. Jeder von $h \cdot b$ abweichende Preis ermöglicht eine Arbitragestrategie, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 1.35. *Sei $c = D^\top h$ ein replizierbares Auszahlungsprofil in einem arbitragefreien Marktmodell (b, D) . Dann ist $h \cdot b$ der einzig mögliche arbitragefreie Preis für c .*

Beweis. Wird etwa das Auszahlungsprofil c für einen Preis $s < h \cdot b$ angeboten, so kaufe c zum Preis von s und verkaufe das Portfolio h zum Preis von $h \cdot b$. Auf diese Weise wird zum Zeitpunkt 0 der Gewinn $h \cdot b - s > 0$ realisiert. Zum Zeitpunkt 1 münden die getätigten Transaktionen in das Auszahlungsprofil $D^\top h - c = 0$. Also bestehen zum Zeitpunkt 1 keine Zahlungsverpflichtungen, aber zum Zeitpunkt 0 wurde ein positiver Gewinn realisiert. Im Falle $s > h \cdot b$ kaufe das Portfolio h und verkaufe das Auszahlungsprofil zum Preis s . \square

Für die Bewertung von Auszahlungsprofilen wird die Arbitragefreiheit des zugrundeliegenden Marktmodells in der Praxis üblicherweise vorausgesetzt. Denn Händler und Computerprogramme suchen weltweit nach derartigen Profitmöglichkeiten und nutzen sie aus. Dies hat aber eine Verschiebung der Preise, und damit eine Änderung des Modells, zur Folge, bis die Arbitragegelegenheiten wieder verschwunden ist.

Äquivalent zu Definition 1.31 kann eine Arbitragegelegenheit auch als ein Portfolio $h \in \mathbb{R}^N$ definiert werden, für das gilt

$$(-h \cdot b, D^\top h) > 0. \quad (1.22)$$

Dabei werden das Negative des Anfangswertes $h \cdot b$ des Portfolios h und die zustandsabhängige Auszahlung $D^\top h$ des Portfolios zu einem Vektor $(-h \cdot b, D^\top h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^K \cong \mathbb{R}^{K+1}$ zusammengefasst.

Definition 1.36. *Die lineare Abbildung*

$$L : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^K \cong \mathbb{R}^{K+1},$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} L(h) &:= (-h \cdot b, D^\top h) \\ &= (-h \cdot S_0, h \cdot S_1), \end{aligned}$$

*wird **Entnahmeprozess** genannt. Dabei kennzeichnet*

$$L_0(h) := -h \cdot b = -h \cdot S_0 = -V_0(h) \quad (1.23)$$

die zum Erwerb des Portfolios h erforderliche Abbuchung des Betrags $h \cdot S_0$ vom Konto des Portfolioinhabers zum Zeitpunkt 0, und

$$L_1(h) := D^\top h = h \cdot S_1 = V_1(h) \quad (1.24)$$

ist der Wert des Portfolios bei $t = 1$. Dieser Betrag kann dem Portfolio durch Auflösung zum Zeitpunkt 1 entnommen werden.

Ein Portfolio h ist also genau dann eine Arbitragegelegenheit, wenn h niemals Kapital zugeführt werden muss und wenn dem Portfolio zum Zeitpunkt 0 oder zum Zeitpunkt 1 Kapital entnommen werden kann.

Satz 1.37. *Sei (b, D) ein Marktmodell. Angenommen, es gibt ein Portfolio θ mit $\theta \cdot b > 0$ und $D^\top \theta > 0$. Dann existieren genau dann Arbitragegelegenheiten, wenn es ein Portfolio h gibt mit $h \cdot b = 0$ und $D^\top h > 0$.*

Beweis. Jedes Portfolio h mit $h \cdot b = 0$ und $D^\top h > 0$ ist offenbar eine Arbitragegelegenheit. Sei h umgekehrt eine Arbitragegelegenheit. Dann gilt $(-h \cdot b, D^\top h) > 0$. Nach Voraussetzung besitzt das Portfolio θ in unserem Marktmodell die Eigenschaften $\theta \cdot b > 0$ und $D^\top \theta > 0$. Wir wählen nun $\lambda \geq 0$ so, dass $(h + \lambda\theta) \cdot b = 0$ gilt. Wegen $h \cdot b \leq 0$ folgt daraus $\lambda = -\frac{h \cdot b}{\theta \cdot b} \geq 0$.

Nun ist $\lambda = 0$ genau dann, wenn $h \cdot b = 0$. Dann aber folgt $D^\top h > 0$, da h nach Voraussetzung eine Arbitragegelegenheit ist.

Gilt dagegen $\lambda > 0$, so folgt $h \cdot b < 0$, also $D^\top h \geq 0$, und wir betrachten

$$D^\top (h + \lambda\theta) = D^\top h + \lambda D^\top \theta.$$

Wegen $D^\top h \geq 0$ und $\lambda D^\top \theta > 0$ folgt $D^\top (h + \lambda\theta) > 0$. In jedem Fall gilt daher

$$D^\top (h + \lambda\theta) > 0.$$

Ist also (b, D) nicht arbitragefrei, so gibt es insbesondere Arbitragegelegenheiten h mit $h \cdot b = 0$ und $D^\top h > 0$. \square

Folgerung 1.38. Sei (b, D) ein Marktmodell. Angenommen, es gibt ein Finanzinstrument S^i mit $S_0^i > 0$ und $S_1^i > 0$. Das Marktmodell beinhaltet genau dann Arbitragegelegenheiten, wenn es ein Portfolio h gibt, mit $h \cdot b = 0$ und $D^\top h > 0$.

Beweis. Das Portfolio $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top$ besitzt in unserem Marktmodell nach Voraussetzung die Eigenschaften $e_i \cdot b = b_i = S_0^i > 0$ und $D^\top e_i = e_i \cdot S_1 = S_1^i > 0$. Damit folgt die Behauptung aus Satz 1.37. \square

Die Voraussetzungen von Folgerung 1.38 sind beispielsweise dann erfüllt, wenn das betrachtete Marktmodell eine festverzinsliche Kapitalanlage S^i mit $S_0^i > 0$ und Zinssatz $r > -1$ enthält, denn in diesem Fall gilt $S_1^i = S_0^i(1+r) > 0$.

Folgerung 1.39. Sei (b, D) ein Marktmodell. Angenommen, es gibt ein Portfolio θ mit $\theta \cdot b > 0$ und $D^\top \theta > 0$. Dann ist (b, D) genau dann arbitragefrei, wenn jedes zum Zeitpunkt 0 kostenfreie Portfolio h mit $D^\top h \neq 0$ das Risiko eines Verlustes birgt, wenn also gilt

$$(D^\top h)_j < 0 \text{ für wenigstens ein } j.$$

Beweis. Sei (b, D) ein arbitragefreies Marktmodell. Aus Lemma 1.34 folgt, dass jedes zum Zeitpunkt 0 kostenfreie Portfolio h mit $D^\top h \neq 0$ in wenigstens einem Zustand einen negativen Wert besitzt.

Angenommen, es gilt für jedes Portfolio h mit $h \cdot b = 0$ und $D^\top h \neq 0$ die Eigenschaft $(D^\top h)_j < 0$ für wenigstens ein j . Dann gibt es kein Portfolio h mit $h \cdot b = 0$ und $D^\top h > 0$. Nach Satz 1.37 folgt daraus die Arbitragefreiheit des Marktmodells. \square

1.6.1 Der Fundamentalsatz der Preistheorie

Nach Satz 1.32 gilt in einem arbitragefreien Marktmodell (b, D) das Gesetz des eindeutig bestimmten Preises - das *Law of One Price*. In diesem Fall gibt es ein $\psi \in \mathbb{R}^K$ mit $D\psi = b$, und der Preis $c_0 = h \cdot b$ eines beliebigen replizierbaren Auszahlungsprofils $c = D^\top h$ ist eindeutig bestimmt und kann ohne Kenntnis des replizierenden Portfolios h durch $c_0 = \langle \psi, c \rangle$ berechnet werden.

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass ein Marktmodell (b, D) genau dann arbitragefrei ist, wenn es eine Lösung $\psi \in \mathbb{R}^K$ von $D\psi = b$ gibt mit $\psi \gg 0$.

Definition 1.40. Eine Lösung $\psi \in \mathbb{R}^K$ von $D\psi = b$ mit $\psi \gg 0$ heißt **Zustandsvektor**.

Satz 1.41. Gibt es in einem Marktmodell (b, D) einen Zustandsvektor, so folgt daraus die Arbitragefreiheit des Modells.

Beweis. Aus $D\psi = b$ folgt $h \cdot b = h \cdot D\psi = \langle D^\top h, \psi \rangle$. Ist nun $D^\top h > 0$, so folgt $h \cdot b > 0$ wegen $\psi \gg 0$. Ist dagegen $D^\top h \geq 0$, so folgt entsprechend $h \cdot b \geq 0$. Damit ist h aber keine Arbitragegelegenheit. Da h beliebig war, folgt die Behauptung. \square

Beispiel 1.42. Wir betrachten das Marktmodell

$$(b, D) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.02 & 1.02 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \right)$$

des Beispiels 1.1 und untersuchen das Gleichungssystem $D\psi = b$, also

$$\begin{pmatrix} 1.02 & 1.02 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Es besitzt die eindeutig bestimmte Lösung

$$\psi = \begin{pmatrix} 0.392 \\ 0.588 \end{pmatrix}.$$

Da $\psi \gg 0$, ist das Marktmodell (b, D) arbitragefrei. \triangle

Satz 1.43. *Sei (b, D) ein arbitragefreies und vollständiges Marktmodell. Dann gibt es in (b, D) einen Zustandsvektor.*

Beweis. Sei $\psi \in \mathbb{R}^K$ mit $D\psi = b$ und sei $e_i \in \mathbb{R}^K$ der i -te Standardbasisvektor. Aufgrund der Vollständigkeit des Marktmodells gibt es ein $h_i \in \mathbb{R}^N$ mit $e_i = D^\top h_i$. Damit gilt

$$\psi_i = \langle \psi, e_i \rangle = h_i \cdot b.$$

Wäre $\psi_i = h_i \cdot b \leq 0$, so wäre h_i wegen $D^\top h_i = e_i > 0$ eine Arbitragegelegenheit. Da das Marktmodell (b, D) aber nach Voraussetzung arbitragefrei ist, folgt $\psi_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, K$. \square

Im folgenden wird gezeigt, wie aus der Arbitragefreiheit eines Marktmodells ganz allgemein, also ohne die Voraussetzung der Vollständigkeit, die Existenz eines Zustandsvektors abgeleitet werden kann. Dazu werden zunächst zwei *Trennungssätze* bewiesen.

Satz 1.44 (Erster Trennungssatz). *Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene, konvexe Menge, die den Ursprung nicht enthält. Dann gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und ein $\alpha > 0$, so dass*

$$\langle x_0, x \rangle \geq \alpha \text{ für alle } x \in C.$$

Insbesondere schneidet C nicht die Hyperebene $\langle x_0, x \rangle = 0$.

Beweis. Sei $\lambda > 0$ so gewählt, dass $A := C \cap \overline{B_\lambda(0)} \neq \emptyset$, wobei $\overline{B_\lambda(0)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \lambda\}$ die abgeschlossene Kugel um 0 vom Radius λ ist. Sei $x_0 \in C$ der Punkt, an dem die stetige Abbildung $x \mapsto \|x\|$ auf der kompakten Menge A ihr Minimum annimmt. Dann folgt sofort

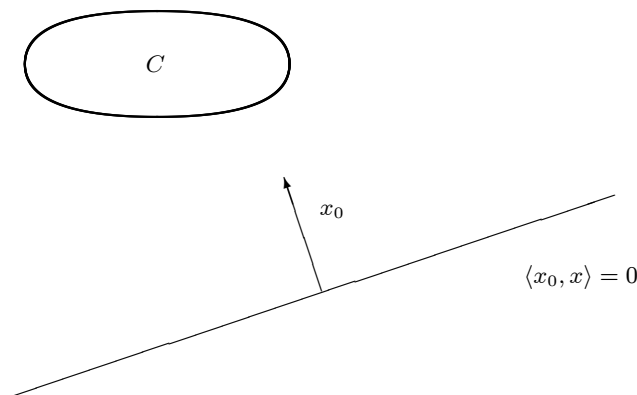


Abb. 1.5. Erster Trennungssatz

$$\|x\| \geq \|x_0\| \text{ für alle } x \in C.$$

Für beliebiges $x \in C$ gilt für alle $t \in [0, 1]$

$$x_0 + t(x - x_0) \in C,$$

da C konvex ist. Definieren wir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(t) := \|x_0 + t(x - x_0)\|^2 = \|x_0\|^2 + 2t\langle x_0, x - x_0 \rangle + t^2\|x - x_0\|^2,$$

so ist f differenzierbar und es gilt $\|x_0\|^2 = f(0) \leq f(t)$ für alle $t \in [0, 1]$. Daher ist $f'(0) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} \geq 0$. Wegen $f'(0) = 2\langle x_0, x - x_0 \rangle = 2(\langle x_0, x \rangle - \|x_0\|^2)$ folgt $\langle x_0, x \rangle \geq \|x_0\|^2 > 0$ für jedes $x \in C$. Mit $\alpha := \|x_0\|^2$ folgt die Behauptung. \square

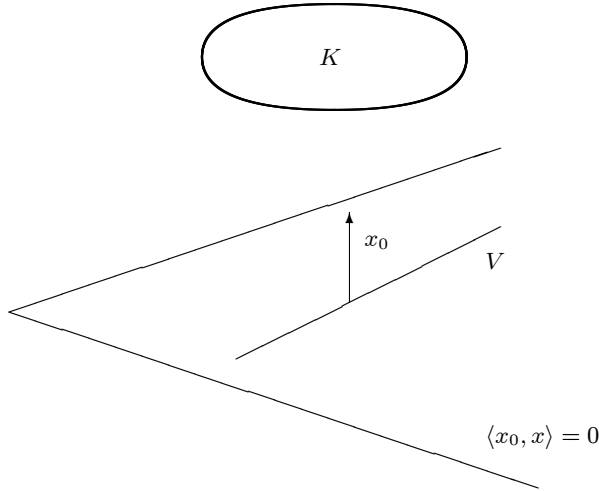
Aufgabe 1.2. Machen Sie sich klar, dass die Schnittmenge $C \cap \overline{B_\lambda(0)}$ im Beweis von Satz 1.44 gebildet wurde, um die Tatsache zu verwenden, dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen ein Minimum annehmen.

Wegen $0 < \langle x_0, x \rangle = \|x_0\| \|x\| \cos \angle(x_0, x)$ besitzen alle $x \in C$ in Satz 1.44 einen spitzen Winkel mit x_0 . Dies bedeutet, dass C in einer Hälfte des durch die Hyperebene $x_0^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x_0, x \rangle = 0\}$ getrennten Raumes liegt.

Satz 1.45 (Zweiter Trennungssatz). Sei K eine kompakte und konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^n und sei V ein Untervektorraum des \mathbb{R}^n . Wenn V und K disjunkt sind, so gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\langle x_0, x \rangle > 0$ für alle $x \in K$.
2. $\langle x_0, x \rangle = 0$ für alle $x \in V$.

Daher ist der Unterraum V in einer Hyperebene enthalten, die K nicht schneidet.

**Abb. 1.6.** Zweiter Trennungssatz

Beweis. Die Menge

$$C = K - V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists (k, v) \in K \times V, x = k - v\}$$

ist konvex, da V als Untervektorraum und K nach Voraussetzung konvex sind. Ferner ist C abgeschlossen, da V abgeschlossen und da K kompakt ist. Weiter enthält C nicht den Ursprung, da K und V disjunkt sind. Auf Grund des letzten Satzes existieren ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und ein $\alpha > 0$ mit

$$\langle x_0, x \rangle > \alpha \text{ für alle } x \in C.$$

Daher gilt für alle $k \in K$ und für alle $v \in V$

$$\langle x_0, k \rangle - \langle x_0, v \rangle \geq \alpha.$$

Für festes $k \in K$ gilt daher für jedes $v \in V$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\lambda \langle x_0, v \rangle \leq \langle x_0, k \rangle - \alpha.$$

Dies ist aber nur möglich, wenn $\langle x_0, v \rangle = 0$. Wir erhalten also

$$\langle x_0, v \rangle = 0 \text{ für alle } v \in V.$$

Daraus folgt dann

$$\langle x_0, k \rangle \geq \alpha > 0 \text{ für alle } k \in K.$$

□

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf den vorangegangenen Satz und seinen Beweis.

Aufgabe 1.3. Weisen Sie die Konvexität von C nach.

Aufgabe 1.4. Zeigen Sie, dass Untervektorräume des \mathbb{R}^n abgeschlossen sind.

Aufgabe 1.5. Zeigen Sie, dass C abgeschlossen ist.

Satz 1.46 (Fundamentalsatz der Preistheorie). *In einem Marktmodell (b, D) sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. (b, D) ist arbitragefrei.
2. Es gibt ein $\phi \in \mathbb{R}^{K+1}$, $\phi \gg 0$, mit

$$\langle \phi, L(h) \rangle = 0$$

für alle $h \in \mathbb{R}^N$.

3. Es gibt einen Zustandsvektor $\psi \in \mathbb{R}^K$, $\psi \gg 0$, mit

$$D\psi = b.$$

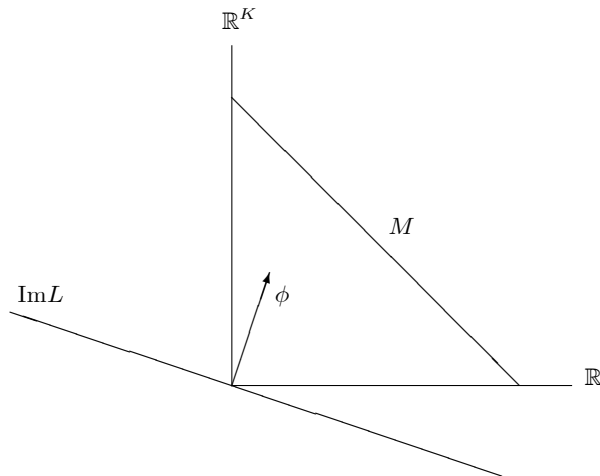


Abb. 1.7. Der Fundamentalsatz der Preistheorie

Beweis. 1. \implies 2. Sei (b, D) ein arbitragefreies Marktmodell. Dann gibt es nach (1.22) kein $h \in \mathbb{R}^N$ mit

$$L(h) = (-h \cdot b, D^\top h) > 0.$$

Ferner ist $L : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{K+1}$ linear, so dass $\text{Im } L$ ein Untervektorraum des \mathbb{R}^{K+1} ist, der den positiven Quadranten $\{x \in \mathbb{R}^{K+1} \mid x > 0\}$ nicht schneidet. Insbesondere schneidet $\text{Im } L$ nicht die kompakte und konvexe Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^{K+1} \mid x > 0, x_0 + \dots + x_K = 1\}$, siehe Abb. 1.7. Also folgt aus Satz 1.45 die Existenz eines $\phi \in \mathbb{R}^{K+1}$ mit $\langle \phi, x \rangle = 0$ für alle $x \in \text{Im } L$ und $\langle \phi, x \rangle > 0$ für alle $x \in M$.

Aus $\langle x, \phi \rangle > 0$ für alle $x \in M$ folgt $\phi \gg 0$, wie für $j = 0, \dots, K$ die Wahl $x = e_j$ zeigt, wobei e_j den j -ten Standardbasisvektor bezeichnet.

2. \implies 3. Sei $\phi \in \mathbb{R}^{K+1}$, $\phi \gg 0$, mit $\langle \phi, L(h) \rangle = 0$. Wir schreiben $\phi = (\phi_0, \phi_1)$ mit $\phi_0 \in \mathbb{R}$ und $\phi_1 \in \mathbb{R}^K$. Wegen $\phi \gg 0$ folgt $\phi_0 > 0$ und $\phi_1 \gg 0$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \phi, L(h) \rangle \\ &= \langle (\phi_0, \phi_1), (-h \cdot b, D^\top h) \rangle \\ &= -\phi_0 (h \cdot b) + \langle \phi_1, D^\top h \rangle, \end{aligned}$$

also

$$h \cdot b = \left\langle \frac{\phi_1}{\phi_0}, D^\top h \right\rangle.$$

Mit der Definition $\psi := \frac{\phi_1}{\phi_0}$ gilt $\psi \in \mathbb{R}^K$, $\psi \gg 0$ und

$$h \cdot b = D\psi \cdot h$$

für alle $h \in \mathbb{R}^N$. Daraus folgt aber $b = D\psi$.

3. \implies 1. Dies ist gerade die Aussage von Satz 1.41. □

Aufgabe 1.6. Begründen Sie im Detail, warum die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R}^{K+1} \mid x > 0, x_0 + \dots + x_K = 1\}$$

aus dem vorangehenden Beweis kompakt und konvex ist.

Definition 1.47. Ein Tupel $\phi = (\phi_0, \phi_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^K$, $\phi \gg 0$, mit $\langle \phi, L(h) \rangle = 0$ für alle $h \in \mathbb{R}^N$ wird **Zustandsprozess** genannt.

Anmerkung 1.48. Ein Zustandsprozess ϕ ist niemals eindeutig bestimmt. Jedes positive Vielfache $\lambda\phi$, $\lambda > 0$, definiert ebenfalls einen Zustandsprozess. Jedoch gilt

$$\frac{1}{\lambda\phi_0}(\lambda\phi_1, \dots, \lambda\phi_K)^\top = \frac{1}{\phi_0}(\phi_1, \dots, \phi_K)^\top$$

für jedes $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Satz 1.49. *Sei (b, D) ein arbitragefreies Marktmodell. Ist $\phi = (\phi_0, \phi_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^K$ ein Zustandsprozess, so definiert*

$$\psi := \frac{\phi_1}{\phi_0} \in \mathbb{R}^K$$

einen Zustandsvektor. Ist umgekehrt $\psi \in \mathbb{R}^K$ ein Zustandsvektor, so definiert

$$\phi := (1, \psi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^K$$

einen Zustandsprozess.

Beweis. Ist $\phi = (\phi_0, \phi_1)$ ein Zustandsprozess, so folgt aus dem Beweisteil 2. \implies 3. des Satzes 1.46, dass $\psi := \frac{\phi_1}{\phi_0}$ ein Zustandsvektor ist.

Ist umgekehrt $\psi \in \mathbb{R}^K$, $\psi \gg 0$, ein Zustandsvektor, so folgt aus $b = D\psi$ der Zusammenhang

$$\begin{aligned} 0 &= -h \cdot b + \langle \psi, D^\top h \rangle \\ &= \langle (1, \psi), (-h \cdot b, D^\top h) \rangle \\ &= \langle \phi, L(h) \rangle \end{aligned}$$

mit $\phi := (1, \psi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^K$. Wegen $\phi \gg 0$ ist ϕ ein Zustandsprozess. □

Ist (b, D) ein arbitragefreies Marktmodell und ist ψ ein Zustandsvektor, so gilt das *Law of One Price*, und nach (1.13) lässt sich der Preis c_0 jedes replizierbaren Auszahlungsprofils c ohne Kenntnis eines replizierenden Portfolios durch die verallgemeinerte Diskontierung $c_0 = \langle \psi, c \rangle$ berechnen.

Der Fundamentalsatz 1.46 besagt, dass ein Marktmodell genau dann arbitragefrei ist, wenn eine strikt positive Lösung ψ von $D\psi = b$ existiert. Er sagt *nicht*, dass in arbitragefreien Märkten *jede* Lösung von $D\psi = b$ strikt positiv ist. Wenn $\ker D \neq \{0\}$, so gibt es ein $f \in \ker D$ mit $f \neq 0$. Ist ψ ein Zustandsvektor, so kann durch geeignete Wahl von $\lambda \in \mathbb{R}$ stets erreicht werden, dass $\psi' := \psi + \lambda f \not\gg 0$ gilt. Aber es gilt natürlich $D\psi' = b$.

Definition 1.50. *Eine lineare Abbildung*

$$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

*wird **Linearform** genannt. A wird als **positiv** bezeichnet, wenn gilt*

$$A(c) > 0$$

für $c > 0$.

Lemma 1.51. *Sei (b, D) ein arbitragefreies Marktmodell, und sei ψ ein Zustandsvektor. Die Zuordnung*

$$c \mapsto \langle \psi, c \rangle, \quad c \in \mathbb{R}^N,$$

definiert eine positive Linearform. Angenommen, für zwei zustandsabhängige Auszahlungen $c, c' \in \mathbb{R}^K$ gilt $c > c'$ im Sinne von $c - c' > 0$. Dann ist

$$\langle \psi, c \rangle > \langle \psi, c' \rangle.$$

Ist also eine replizierbare Auszahlung c zum Zeitpunkt 1 in jedem Zustand mindestens so viel wert wie eine replizierbare Auszahlung c' und sei weiter angenommen, dass $c_k > c'_k$ für wenigstens einen Zustand k , so ist der Preis von c zum Zeitpunkt 0 höher als der von c' .

Beweis. Dies folgt sofort aus $\psi \gg 0$. □

1.6.2 Der Nachweis der Arbitragefreiheit

Der Fundamentalsatz bietet einen Ansatz, um ein beliebiges Marktmodell (b, D) auf Arbitragefreiheit zu überprüfen. Es ist dazu das Gleichungssystem

$$D\psi = b, \quad \psi \gg 0, \tag{1.25}$$

auf Lösbarkeit mit einem strikt positiven Vektor $\psi \in \mathbb{R}^K$ zu untersuchen. Existiert ein solcher Vektor, so ist das Marktmodell arbitragefrei. Besitzt das Gleichungssystem (1.25) dagegen keine Lösung oder nur Lösungen, bei denen die Bedingung $\psi \gg 0$ nicht zutrifft, so existieren Arbitragegelegenheiten.

Wenn $D : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^N$ injektiv ist, dann existiert höchstens eine Lösung des Gleichungssystems (1.25), und das Marktmodell (b, D) kann in diesem Fall etwa mit Hilfe des Gauß-Algorithmus auf Arbitragefreiheit untersucht werden. Ist D dagegen nicht injektiv, so besitzt (1.25) entweder keine Lösung oder aber die unendlich vielen Lösungen

$$\psi + f, \quad f \in \ker D,$$

wobei ψ eine beliebige spezielle Lösung von $b = D\psi$ ist. Wenn keine Lösung existiert, dann kann dies wieder mit Hilfe des Gauß-Algorithmus nachgewiesen werden. Existieren aber unendlich viele Lösungen, so ist eine beliebige spezielle Lösung ψ nicht notwendigerweise strikt positiv. Im allgemeinen ist nun aber die Beantwortung der Frage, ob es ein $f \in \ker D$ gibt mit $\psi + f \gg 0$ schwierig.

Zur Lösung von (1.25) kann die Aufgabenstellung in diesem Fall jedoch als *Lineares Optimierungsproblem* umformuliert werden. Dazu setzen wir $\theta := 0 \in \mathbb{R}^K$ und betrachten die Optimierungsaufgabe

$$\max \langle \theta, \psi \rangle \tag{1.26}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} D\psi &= b \\ \psi &\gg 0. \end{aligned}$$

Die Zielfunktion $\max \langle \theta, \psi \rangle$ besitzt für jedes ψ stets den Wert 0. Entscheidend ist daher nicht die Optimierung der Zielfunktion, sondern die Erfüllung der Nebenbedingungen. Der Standard-Simplex-Algorithmus löst das Lineare Optimierungsproblem genau dann, wenn das Gleichungssystem (1.25) strikt positive Lösungen besitzt.

1.6.3 Replizierbarkeit und Vollständigkeit

Die beiden folgenden Ergebnisse übertragen die Aussagen der Sätze 1.28 und 1.29 auf arbitragefreie Marktmodelle.

Satz 1.52. *Sei (b, D) ein arbitragefreies Marktmodell und sei $c \in \mathbb{R}^K$ ein Auszahlungsprofil. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. c ist replizierbar.
2. $c \in \text{Im } D^\top$.
3. $c \perp \ker D$.
4. Für jeden Zustandsvektor ψ besitzt $\langle \psi, c \rangle$ denselben Wert.

Beweis. Die Äquivalenzen 1. \iff 2. \iff 3. stimmen mit denen aus Satz 1.28 überein.

3. \implies 4. Zum Beweis der zweiten Behauptung sei ψ ein Zustandsvektor, also eine strikt positive Lösung von $D\psi = b$. Diese existiert nach dem Fundamentalsatz 1.46. Ist ψ' ein weiterer Zustandsvektor, so folgt $\psi' = \psi + f$ für ein $f \in \ker D$. Nach Voraussetzung ist $\ker D \perp c$. Daher gilt $\langle \psi', c \rangle = \langle \psi, c \rangle$, und $\langle \psi, c \rangle$ ist unabhängig von der Auswahl des Zustandsvektors.

4. \implies 3. Sei umgekehrt angenommen, dass $\langle \psi, c \rangle$ für jeden Zustandsvektor denselben Wert besitzt, und sei $f \in \ker D$ beliebig. Für $\psi_0 := \min \{\psi_i \mid i = 1, \dots, K\}$ gilt $\psi_0 > 0$. Mit

$$\lambda := \frac{\psi_0}{1 + |f_1| + \dots + |f_K|}$$

folgt $\lambda > 0$, und wir erhalten für alle $j = 1, \dots, K$ die Abschätzung

$$\psi_j + \lambda f_j \geq \psi_0 \frac{1 + |f_1| + \dots + (|f_j| + f_j) + \dots + |f_K|}{1 + |f_1| + \dots + |f_K|} > 0,$$

so dass $\psi + \lambda f \gg 0$. Damit ist aber $\psi + \lambda f$ ein Zustandsvektor. Nach Voraussetzung gilt nun $\langle \psi, c \rangle = \langle \psi + \lambda f, c \rangle$, woraus $\langle f, c \rangle = 0$ folgt. Da f beliebig war, erhalten wir $\ker D \perp c$. \square

Satz 1.53. *In einem arbitragefreien Marktmodell (b, D) sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. Das Marktmodell (b, D) ist vollständig.
2. $\text{Im } D^\top = \mathbb{R}^K$.

3. $\ker D = \{0\}$.

4. Der Zustandsvektor ψ ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Die Äquivalenzen 1. \iff 2. \iff 3. stimmen mit denen aus Satz 1.29 überein.

3. \implies 4. Da das Marktmodell arbitragefrei ist, existiert ein Zustandsvektor ψ , also eine strikt positive Lösung der Gleichung $D\psi = b$. Gilt $\ker D = \{0\}$, so ist diese Lösung, und damit der Zustandsvektor, eindeutig bestimmt.

4. \implies 3. Es sei ψ ein Zustandsvektor in (b, D) . Angenommen, $\ker D \neq \{0\}$. Dann existiert ein $f \in \ker D$ mit $f \neq 0$, und der Beweis von Satz 1.52 zeigt, dass es ein $\lambda > 0$ gibt, so dass $\psi + \lambda f$ ebenfalls ein Zustandsvektor ist. Damit ist aber der Zustandsvektor nicht eindeutig bestimmt. \square

Folgerung 1.54. Sei (b, D) ein Marktmodell. Dann ist die Vollständigkeit des Modells äquivalent zu $\text{Im } D^\top = \mathbb{R}^K$. Aus $N = \dim \ker D^\top + \dim \text{Im } D^\top$ folgt damit die Beziehung $N \geq K$. Daher muss in einem vollständigen Marktmodell die Zahl der im Modell spezifizierten Finanzinstrumente stets größer oder gleich der Anzahl der Zustände sein.

Folgerung 1.55. Liegt in einem vollständigen, arbitragefreien Modell speziell die Situation $K = N$ vor, existieren also genau so viele Zustände, wie es Finanzinstrumente im Marktmodell gibt, so ist $D^\top : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^K$ ein Isomorphismus.

1.6.4 Interpretation von ψ und $d = \psi_1 + \dots + \psi_K$

Für den Fall, dass es Portfolios θ_j mit der Eigenschaft $D^\top \theta_j = \theta_j \cdot S_1 = e_j$ gibt, gilt

$$\theta_j \cdot S_0 = \langle \psi, D^\top \theta_j \rangle = \langle \psi, e_j \rangle = \psi_j.$$

Daraus erklärt sich der alternative Name *Zustandspreisvektor* für ψ , denn ψ_j sind die Kosten für ein Portfolio, das im Zustand ω_j den Wert 1 auszahlt und in allen anderen Zuständen den Wert 0. ψ_j wird daher auch als *Zustandspreis* des j -ten Zustands bezeichnet.

Der Preis eines Portfolios h ,

$$h \cdot S_0 = \langle \psi, h \cdot S_1 \rangle = \langle \psi, D^\top h \rangle = \sum_{j=1}^K (D^\top h)_j \psi_j, \quad (1.27)$$

kann weiter als Summe der Auszahlungen des Portfolios in den verschiedenen Zuständen $(D^\top h)_j$, gewichtet mit den Zustandspreisen ψ_j , interpretiert werden.

Insbesondere aber kann (1.27) als verallgemeinerte Diskontierung der zustandsabhängigen zukünftigen Auszahlung $h \cdot S_1$ auf den Zeitpunkt 0 interpretiert werden, wie in Folgerung 1.27 und der anschließenden Bemerkung bereits ausgeführt wurde. Insbesondere wurde dort dargestellt, dass sich die Komponentensumme eines Zustandsvektors als Diskontfaktor interpretieren lässt.

Lemma 1.56. *Sei $(S_0, S_1) \cong (b, D)$ ein arbitragefreies Marktmodell, und sei $\theta \in \mathbb{R}^N$ ein Portfolio mit der Eigenschaft*

$$D^\top \theta = \theta \cdot S_1 = \mathbf{1},$$

d.h. $\mathbf{1} := (1, \dots, 1) \in \text{Im } D^\top$. Wir definieren

$$d := \theta \cdot S_0.$$

Dann gilt

$$d = \psi_1 + \dots + \psi_K.$$

Die Summe $\psi_1 + \dots + \psi_K$ ist genau dann von der Auswahl eines Zustandsvektors ψ unabhängig, wenn $\mathbf{1} \in \text{Im } D^\top$.

Beweis. Für das Portfolio θ gilt offenbar

$$d = \langle \psi, \mathbf{1} \rangle = \langle \psi, D^\top \theta \rangle = D\psi \cdot \theta = \theta \cdot S_0.$$

Seien ψ und ψ' Zustandsvektoren. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^K \psi'_j = \langle \psi', \mathbf{1} \rangle = \langle \psi, \mathbf{1} \rangle = d$$

nach Satz 1.52 genau dann, wenn $\mathbf{1} \in \text{Im } D^\top$. □

In Lemma 1.56 ist $d = \theta \cdot S_0$ der Preis des Portfolios θ zum Zeitpunkt 0. Es gilt $d > 0$, denn andernfalls wäre θ eine Arbitragegelegenheit. Die Eigenschaft $d > 0$ folgt auch aus $d = \psi_1 + \dots + \psi_K$ und $\psi \gg 0$. Wir wissen bereits, dass d als Diskontfaktor interpretiert werden kann, da zum Zeitpunkt 0 gerade d investiert werden muss, um zum Zeitpunkt 1 in jedem Zustand die Auszahlung 1 zu erzielen. Das Portfolio θ ist festverzinslich mit Zinssatz

$$r = \frac{1}{d} - 1, \tag{1.28}$$

denn der Wert d von θ zum Zeitpunkt 0 hat zum Zeitpunkt 1 in jedem Zustand den Wert

$$d(1+r) = 1.$$

Daraus folgt die vertraute Darstellung

$$d = \frac{1}{1+r}$$

für den Diskontfaktor d . Der mit Hilfe von (1.28) definierte Zinssatz $r := \frac{1}{d} - 1$ wird auch **risikoloser Zinssatz** oder **risikolose Rendite** genannt. Die Bezeichnung *risikolos* bedeutet in diesem Zusammenhang, dass zum Zeitpunkt 0 keine Unsicherheiten über die Rendite zum Zeitpunkt 1 bestehen.

Folgerung 1.57. Sei $(S_0, S_1) \cong (b, D)$ ein arbitragefreies und vollständiges Marktmodell. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Zustandsvektor ψ , die konstante Auszahlung $(1, \dots, 1)$ ist replizierbar und $d = \sum_{j=1}^K \psi_j$ ist daher der eindeutig bestimmte Diskontfaktor des Modells.

Lemma 1.58. Angenommen, eines der Finanzinstrumente, etwa S^1 , ist selbst festverzinslich, d.h. es gibt ein $r > -1$ mit der Eigenschaft $S_0^1 = 1$ und $S_1^1(\omega_j) = 1 + r$ für alle $j = 1, \dots, K$. Dann gilt

$$d = \frac{1}{1+r}.$$

Beweis. Wird in Lemma 1.56 $\theta = (\frac{1}{1+r}, 0, \dots, 0)$ gewählt, so gilt $D^\top \theta = \theta \cdot S_1 = \frac{1}{1+r}(S_1^1(\omega_1), \dots, S_1^1(\omega_K)) = (1, \dots, 1)$. Schließlich folgt $d = \theta \cdot S_0 = \frac{1}{1+r}$, und das Lemma ist bewiesen. \square

1.6.5 Preise als diskontierte Erwartungswerte

Die Wahrscheinlichkeitstheorie spielt in der modernen Finanzmathematik eine überragende Rolle. Dennoch wurde in diesem Kapitel bislang kein Wahrscheinlichkeitsmaß verwendet. Insbesondere ist es für die hier vorgestellte Bewertungsstrategie unerheblich, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Zustand $\omega \in \Omega$ zum Zeitpunkt 1 eintritt.

Wir werden jedoch gleich sehen, dass sich die Preise beliebiger replizierbarer Auszahlungsprofile $c \in \mathbb{R}^K$ bis auf einen Faktor als Erwartungswerte formulieren lassen. Allerdings wird der Erwartungswert bezüglich eines aus dem Zustandsvektor konstruierten formalen Wahrscheinlichkeitsmaßes Q gebildet – und **nicht** mit Hilfe eines **subjektiven** Wahrscheinlichkeitsmaßes P , das das Eintreten der Szenarien $\omega \in \Omega$ bewertet.

Definition 1.59. Sei Ω eine endliche Menge und sei $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω , also die Menge aller Teilmengen von Ω . Ein **endlicher Wahrscheinlichkeitsraum** ist ein Tupel (Ω, P) , wobei

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$$

Wahrscheinlichkeitsmaß genannt wird und folgende Eigenschaften erfüllt:

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= 1, \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B), \text{ falls } A \cap B = \emptyset. \end{aligned}$$

Endliche Wahrscheinlichkeitsräume werden häufig auch einfach Wahrscheinlichkeitsräume genannt.

Aus der Definition folgt $P(\emptyset) = 0$, denn es gilt $\Omega \cup \emptyset = \Omega$ und $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$, also $P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$.

Die angegebene Definition eines Wahrscheinlichkeitsmaßes lässt zu, dass es Zustände $\omega \in \Omega$ geben kann, mit $P(\omega) = 0$. Da dies bedeutet, dass ω unter keinen Umständen eintreten wird, werden Ereignisse mit Eintrittswahrscheinlichkeit Null in der Praxis in die Modellierung, also in die Menge Ω , garnicht erst aufgenommen. Wir werden bei endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen daher stets voraussetzen, dass $P(\omega) > 0$ gilt für alle $\omega \in \Omega$.⁵

Sei $Q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $Q(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$ und mit $\sum_{j=1}^K Q(\omega_j) = 1$. Dann induziert Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf Ω durch die Definition $Q(A) := \sum_{\omega \in A} Q(\omega)$ für alle $A \subset \Omega$. Mit Hilfe eines Zustandsvektors ψ lässt sich auf diese Weise ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω wie folgt definieren.

Definition 1.60. Setzen wir $d := \psi_1 + \dots + \psi_K > 0$, so induziert

$$Q(\omega_j) := \frac{\psi_j}{d}$$

für $j = 1, \dots, K$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf Ω . Q wird **risikoloses Wahrscheinlichkeitsmaß** oder auch **Preismaß** genannt.

Der Name *risikoloses Wahrscheinlichkeitsmaß* wird später begründet. Wie bereits angemerkt haben die Wahrscheinlichkeiten $Q(\omega_j)$ nichts mit den Wahrscheinlichkeiten zu tun, mit denen die Zustände ω_j im Ein-Perioden-Modell eintreten werden, sondern sie werden abstrakt aus den Komponenten eines Zustandsvektors ψ gewonnen. Wir erinnern daran, dass der Diskontfaktor $d = \psi_1 + \dots + \psi_K$ nach Satz 1.52 genau dann unabhängig von der Auswahl eines Zustandsvektors ψ ist, wenn konstante Auszahlungen replizierbar sind.

Definition 1.61. Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Funktion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Zufallsvariable** auf (Ω, P) .

Häufig spricht man auch von einer Zufallsvariablen X auf Ω .

Definition 1.62. Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) . Dann ist der **Erwartungswert** $\mathbf{E}^P[X]$ von X bezüglich P definiert durch

$$\mathbf{E}^P[X] := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega).$$

Der Erwartungswert von X ist also die Summe der mit den Wahrscheinlichkeiten $P(\omega)$ gewichteten Ausprägungen $X(\omega)$ von X .

⁵ Bei unendlichen Wahrscheinlichkeitsräumen kann dies anders sein. So ist beispielsweise das Lebesgue-Maß λ auf den Borelmengen des Intervalls $[0, 1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit der Eigenschaft $\lambda(\omega) = 0$ für alle $\omega \in [0, 1]$, siehe Bauer [5].

Lemma 1.63. *Sei (b, D) ein arbitragefreies Marktmodell und sei ψ ein Zustandsvektor. Dann gilt für den Preis c_0 jedes replizierbaren Auszahlungsprofils $c \in \text{Im } D^\top$*

$$c_0 = d\mathbf{E}^Q[c], \quad (1.29)$$

wobei $d = \psi_1 + \dots + \psi_K$ und

$$Q(\omega_j) = \frac{\psi_j}{d}$$

für $j = 1, \dots, K$.

Beweis. Sei $c \in \text{Im } D^\top$. Dann gilt $c_0 = \langle \psi, c \rangle$ und daher

$$\begin{aligned} c_0 &= \langle \psi, c \rangle \\ &= d \left\langle \frac{\psi}{d}, c \right\rangle \\ &= d \sum_{j=1}^K c_j Q(\omega_j) \\ &= d\mathbf{E}^Q[c], \end{aligned}$$

wobei der Erwartungswert \mathbf{E}^Q mit Hilfe des Preismaßes Q gebildet wird. \square

Angenommen, im Marktmodell (b, D) sind konstante Auszahlungen replizierbar. Dann ist d nach Lemma 1.56 der eindeutig bestimmte Diskontfaktor des Modells, so dass der Preis $c_0 = d\mathbf{E}^Q[c]$ eines replizierbaren Auszahlungsprofils $c \in \text{Im } D^\top$ als abdiskontierter Erwartungswert von c unter dem Preismaß Q interpretiert werden kann.

Die Darstellung $c_0 = d\mathbf{E}^Q[c]$ für den Wert einer replizierbaren Auszahlung c zum Zeitpunkt 0 kann andererseits auch als Schreibweise interpretiert werden, bei der die Analogie zur Diskontierung deterministischer Zahlungen gegenüber dem Ausdruck $c_0 = \langle \psi, c \rangle$ noch deutlicher wird. Ist insbesondere c selbst deterministisch, gilt also $c = c \cdot \mathbf{1}$, so erhalten wir

$$c_0 = dc\mathbf{E}^Q[\mathbf{1}] = dc,$$

und $c_0 = dc$ ist gerade der diskontierte Wert der zukünftigen deterministischen Zahlung $c \in \mathbb{R}$. In diesem Sinne wird der Ausdruck $d\mathbf{E}^Q[c]$ als verallgemeinerte Diskontierung der Auszahlung $c \in \mathbb{R}^K$ interpretiert, und die Komponenten $Q(\omega_j)$ werden als Gewichte der Zustände, nicht aber als Wahrscheinlichkeiten aufgefasst.

Sei h ein Portfolio, das c repliziert. Dann gilt $c = D^\top h = h \cdot S_1$, und (1.29) lautet mit (1.24) und (1.16)

$$\begin{aligned} V_0(h) &= d\mathbf{E}^Q[V_1(h)] \\ &= d\mathbf{E}^Q[L_1(h)]. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Der Wert $V_0(h)$ von h zum Zeitpunkt 0 ist also gerade der auf den Zeitpunkt 0 abdiskontierte Wert $V_1(h)$ oder die auf den Zeitpunkt 0 abdiskontierte Entnahme $L_1(h)$ von h zum Zeitpunkt 1.

Interpretation von Q als Martingalmaß

Wir betrachten nun die speziellen Portfolios e_i , $i = 1, \dots, N$, wobei e_i den i -ten Standardbasisvektor bezeichnet. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 S_0^i &= e_i \cdot S_0 = D\psi \cdot e_i = \langle \psi, D^\top e_i \rangle \\
 &= \left\langle \psi, \begin{pmatrix} S_1^i(\omega_1) \\ \vdots \\ S_1^i(\omega_K) \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &= d\mathbf{E}^Q \left[\begin{pmatrix} S_1^i(\omega_1) \\ \vdots \\ S_1^i(\omega_K) \end{pmatrix} \right] \\
 &= d\mathbf{E}^Q [S_1^i].
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Diese Rechnung zeigt, dass die bisherigen Überlegungen auch in dem Sinne konsistent sind, dass sich der Preis S_0^i des i -ten Wertpapiers zum Zeitpunkt 0 als abdiskontierter Erwartungswert der zustandsabhängigen Preise S_1^i zum Zeitpunkt 1 bezüglich des Maßes Q darstellen lässt.

Damit bildet der *diskontierte Preisprozess* (S_0, dS_1) ein *Martingal* unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß Q . Aus diesem Grunde wird Q auch *Martingalmaß* genannt. Der Begriff des Martingals spielt im Zusammenhang mit den Mehr-Perioden-Modellen und im Rahmen der stochastischen Finanzmathematik eine wichtige Rolle und wird später ausführlich erläutert.

Aus (1.31) folgt mit $d = \frac{1}{1+r}$ weiter

$$\mathbf{E}^Q \left[\frac{S_1^i - S_0^i}{S_0^i} \right] = r.$$

Die Größe $\frac{S_1^i - S_0^i}{S_0^i}$ wird als Rendite von S^i bezeichnet, und wir erhalten das Ergebnis, dass unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß Q die erwartete Rendite jedes Finanzinstruments im Marktmodell mit der risikolosen Rendite r übereinstimmt. Dies begründet den Namen *risikoloses Wahrscheinlichkeitsmaß* für Q .

Satz 1.64. *Bildet der diskontierte Preisprozess (S_0, dS_1) in einem arbitrage-freien Marktmodell (b, D) ein Martingal bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes Q , gilt also $S_0^i = d\mathbf{E}^Q [S_1^i]$ für alle $i = 1, \dots, N$, so gilt für jedes Portfolio $h \in \mathbb{R}^N$*

$$h \cdot S_0 = d\mathbf{E}^Q [h \cdot S_1].$$

Beweis. Zum Beweis rechnen wir nach:

$$\begin{aligned}
h \cdot S_0 &= \sum_{i=1}^N h_i S_0^i \\
&= d \sum_{i=1}^N h_i \mathbf{E}^Q [S_1^i] \\
&= d \mathbf{E}^Q [h \cdot S_1].
\end{aligned}$$

□

Satz 1.65. *Ein Marktmodell (b, D) ist genau dann arbitragefrei, wenn es ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q mit $Q(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$ und eine Zahl $d > 0$ gibt, so dass*

$$S_0 = d \mathbf{E}^Q [S_1]. \quad (1.32)$$

Beweis. Ist (b, D) arbitragefrei, so gibt es einen Zustandsvektor $\psi \gg 0$. Dann folgt (1.32) aus (1.31) mit $d := \psi_1 + \dots + \psi_K$ und $Q(\omega_j) := \frac{\psi_j}{d}$ für $j = 1, \dots, K$.

Für die Umkehrung definiere $\psi \gg 0$ durch $\psi_j := dQ(\omega_j)$ für $j = 1, \dots, K$. Dann folgt aus Satz 1.64 $h \cdot S_0 = d \mathbf{E}^Q [h \cdot S_1] = d \mathbf{E}^Q [D^\top h] = \langle \psi, D^\top h \rangle = D\psi \cdot h$. Da die letzte Gleichung für beliebiges h gilt, folgt $D\psi = b$. ψ ist also ein Zustandsvektor, und das Marktmodell ist somit arbitragefrei.

Erwartungswert versus Diskontierung

Sollte die Darstellung (1.29) zur Bestimmung des Preises einer Auszahlung c , also $c_0 = d \mathbf{E}^Q [c]$, eher

- wahrscheinlichkeits-theoretisch als abdiskontierter Erwartungswert in einer „risikoneutralen Welt“
- oder als verallgemeinerte Diskontierung zukünftiger Zahlungsströme

interpretiert werden?

Wir wissen, dass die grundlegende Idee, zustandsabhängige Auszahlungsprofile $c \in \mathbb{R}^K$ in einem Marktmodell (b, D) zu bewerten, darin besteht, diese durch Portfolios $h \in \mathbb{R}^N$ nachzubilden, d.h. h so zu wählen, dass $c = D^\top h$ gilt. Der Preis $c_0 = h \cdot b$ von h zum Zeitpunkt 0 wird dann als Preis von c definiert. Dies ist ein algebraischer und kein wahrscheinlichkeitstheoretischer Ansatz.

Ist (b, D) arbitragefrei, so existiert ein Zustandsvektor $\psi \gg 0$ mit $b = D\psi$. Wegen $h \cdot b = h \cdot D\psi = \langle D^\top h, \psi \rangle = \langle c, \psi \rangle$ gilt dann auch $c_0 = \langle \psi, c \rangle$, so dass der Preis c_0 von c mit Hilfe von ψ ohne Kenntnis des replizierenden Portfolios h berechnet werden kann. Jede zum Zeitpunkt 1 erfolgende zustandsabhängige replizierbare Auszahlung $c \in \mathbb{R}^K$ wird also durch $\langle \psi, c \rangle$ in einen äquivalenten Wert zum Zeitpunkt 0 transformiert, und dies entspricht einer Diskontierung von c auf den Zeitpunkt 0.

Mit $d := \sum_{j=1}^K \psi_j$ sowie mit $Q := \frac{\psi}{d}$ gilt $c_0 = \langle \psi, c \rangle = d\mathbf{E}^Q[c]$, und für den Fall, dass c selbst deterministisch ist, d.h. dass $c(\omega) = c$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt, erhalten wir $c_0 = d\mathbf{E}^Q[c] = dc$, also die klassische Formel für die Diskontierung eines in der Zukunft fließenden Kapitalbetrags. Daher erinnert die Darstellung $c_0 = d\mathbf{E}^Q[c]$ noch eher an die Diskontierung deterministischer Auszahlungen als die Darstellung $c_0 = \langle \psi, c \rangle$.

Es erscheint naheliegend, die $Q(\omega)$ als Gewichte zu interpretieren, mit denen die einzelnen Zustände in die Bewertung eingehen, nicht aber als Wahrscheinlichkeiten. Denn die Replikationsstrategie besitzt die Eigenschaft, dass jede in einem Zustand ω benötigte Auszahlung $c(\omega)$ durch das replizierende Portfolio h exakt nachgebildet wird, dass also $c(\omega) = h \cdot S_1(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt. Es ist daher unerheblich, welcher Zustand ω realisiert wird oder mit welcher Wahrscheinlichkeit er eintritt. Es gibt keine vorteilhaften oder unvorteilhaften Zustände, und die Auszahlung c wird nicht nur im Mittel bei vielen Transaktionen realisiert, sondern $c(\omega)$ wird in jedem Zustand $\omega \in \Omega$ bei jedem Erwerb eines Replikationsportfolios erzielt. Insofern besitzt die Replikationsstrategie deterministische Züge. Wie sollte also eine Preisformel für c von – wie auch immer konstruierten – Wahrscheinlichkeiten $Q(\omega)$ für die eintretenden Zustände abhängen?

Andererseits ist eine wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation der Darstellung (1.29) aufgrund folgender Analogie verführerisch. Die hier vorgestellte Replikationsstrategie ist nämlich zunächst nicht die einzig naheliegende Idee zur Bewertung von Auszahlungsprofilen. Angenommen, es gibt K Szenarien $\omega_1, \dots, \omega_K$ für den Zeitpunkt 1 und angenommen, diese Szenarien treten mit den Wahrscheinlichkeiten $P(\omega_1), \dots, P(\omega_K)$ ein. Welchen Wert besitzt dann eine vom Zustand abhängige Auszahlung $c = (c(\omega_1), \dots, c(\omega_K))$? Naheliegend ist der Ansatz, hierfür den Erwartungswert der verschiedenen Zahlungen $c(\omega_1)P(\omega_1) + \dots + c(\omega_K)P(\omega_K) = \mathbf{E}^P[c]$ anzusetzen. Wird dieser zukünftige Wert $\mathbf{E}^P[c]$ nun auf den Zeitpunkt 0 abdiskontiert, so erhalten wir

$$c_0 = d\mathbf{E}^P[c]. \quad (1.33)$$

Wird der Betrag c_0 in (1.33) risikolos angelegt, so erhalten wir zum Zeitpunkt 1 einen Wert, der im Mittel mit der gewünschten Auszahlung $c(\omega)$ übereinstimmt. In diesem Fall gibt es Zustände, die vorteilhaft und solche, die unvorteilhaft sind. Gleichung (1.33) stimmt nun mit (1.29) überein, wenn das Maß P durch das Preismaß Q ersetzt wird. Da bezüglich Q die erwartete Rendite jedes Finanzinstruments gleich der risikolosen Rendite $r = \frac{1}{d} - 1$ ist, wird (1.29) auch als „abdiskontierter Erwartungswert in einer risikoneutralen Welt“ bezeichnet. Trotz ihrer formalen Ähnlichkeit sind die beiden Bewertungsstrategien (1.29) und (1.33) inhaltlich vollkommen verschieden.

Beachten Sie schließlich, dass für replizierbare Auszahlungsprofile c der ökonomisch richtige Preis interpretationsunabhängig durch $c_0 = \langle \psi, c \rangle = d\mathbf{E}^Q[c]$ gegeben ist, weil jeder andere Wert eine Arbitragegelegenheit bietet.

Damit ist die Bewertung von c durch $d\mathbf{E}^P[c]$ – von zufälligen Übereinstimmungen abgesehen – nicht nur keine Alternative, sondern falsch.

Wird aber ein Marktmodell (b, D) um ein subjektives Wahrscheinlichkeitsmaß P erweitert, so sollte sich diese Zusatzinformation nutzen lassen. Wie dies geschehen könnte, wird in Abschnitt 1.8 vorgestellt.

Den Ansatz, die Replikationsstrategie als verallgemeinerte Diskontierung zu interpretieren, werden wir in Kapitel 3 aufgreifen und auf Mehr-Perioden-Modelle ausdehnen.

Das Auffinden von Arbitragegelegenheiten

Ein Portfolio $h \in \mathbb{R}^N$ ist nach Definition genau dann eine Arbitragegelegenheit, wenn

$$L(h) = (-b \cdot h, D^\top h) > 0.$$

Definieren wir die erweiterte Payoffmatrix D_b durch

$$D_b := (-b|D) := \begin{pmatrix} -b_1 & D_{11} & \cdots & D_{1K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b_N & D_{N1} & \cdots & D_{NK} \end{pmatrix},$$

so gilt

$$L(h) = D_b^\top h.$$

Zum Auffinden von Arbitragegelegenheiten betrachten wir das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min & b \cdot h \\ & D_b^\top h > 0. \end{aligned}$$

Auf diese Weise wird eine Lösung gesucht, für die die Entnahme $-b \cdot h$ bei der Zusammenstellung von h zum Zeitpunkt 0 möglichst groß ist.

Der Fundamentalsatz der Preistheorie, Satz 1.46, bietet alternative Möglichkeiten, um ein Marktmodell (b, D) auf Arbitragefreiheit zu prüfen. Dazu ist das Gleichungssystem

$$b = D\psi$$

auf strikt positive Lösungen $\psi \gg 0$ zu untersuchen. Nach (1.26) kann auch diese Aufgabe auf die Lösung eines linearen Optimierungsproblems zurückgeführt werden.

Lemma 1.66. *Sei (b, D) ein Marktmodell mit der Eigenschaft*

$$b \notin \text{Im } D.$$

Dann ist

$$h := -b_k$$

eine Arbitragegelegenheit, wobei b_k die Projektion von b auf $\ker D^\top$ bezeichnet.

Beweis. Sei

$$b = b_k + b_i \in \ker D^\top \oplus \operatorname{Im} D.$$

Wegen $b \notin \operatorname{Im} D$ folgt $b_k \neq 0$. Damit gilt

$$h \cdot b = -b_k \cdot b_k < 0$$

und

$$D^\top h = -D^\top b_k = 0,$$

da $b_k \in \ker D^\top$ nach Voraussetzung. \square

Folgerung 1.67. *Ist also insbesondere $b \in \ker D^\top$ mit $b \neq 0$, so ist $h := -b$ eine Arbitragegelegenheit.*

Lemma 1.68. *Sei (b, D) ein **vollständiges** Marktmodell mit der Eigenschaft*

$$b \in \operatorname{Im} D.$$

Sei $\psi \in \mathbb{R}^K$ die eindeutig bestimmte Lösung von $b = D\psi$. Angenommen, es gilt

$$\psi \not\geq 0.$$

Definiere eine Auszahlung $c \in \mathbb{R}^K$ durch

$$c_j := \begin{cases} 0 & \text{falls } \psi_j > 0 \\ 1 & \text{falls } \psi_j \leq 0 \end{cases} \quad . \quad (1.34)$$

Dann gilt $c > 0$. Da (b, D) vollständig ist, existiert ein Portfolio $h \in \mathbb{R}^N$ mit

$$c = D^\top h.$$

Dann ist h eine Arbitragegelegenheit.

Beweis. Wegen $b \in \operatorname{Im} D$ existiert ein $\psi \in \mathbb{R}^K$ mit $b = D\psi$. Da (b, D) nach Voraussetzung vollständig ist, ist $D^\top : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^K$ surjektiv. Aus der Zerlegung $\mathbb{R}^K = \ker D \oplus \operatorname{Im} D^\top$ folgt $\ker D = \{0\}$, also ist D injektiv, und ψ ist eindeutig bestimmt.

Nach Voraussetzung ist $\psi \not\geq 0$. Also gilt $\psi_j \leq 0$ für wenigstens ein $j \in \{0, \dots, K\}$. Daraus folgt aber nach (1.34) $c > 0$. Sei $h \in \mathbb{R}^N$ ein Portfolio, das c repliziert. Dann gilt

$$b \cdot h = \langle \psi, c \rangle \leq 0$$

und

$$D^\top h = c > 0.$$

Also ist h eine Arbitragegelegenheit. \square

Wird (b, D) in Lemma 1.68 nicht als vollständig vorausgesetzt, dann existieren zwar Auszahlungsprofile $c > 0$ mit $\langle \psi, c \rangle \leq 0$, jedoch ist über die Replizierbarkeit derartiger c , also über die Eigenschaft $c \in \operatorname{Im} D^\top$, zunächst nichts bekannt.

Anmerkung 1.69. Sei (b, D) ein Marktmodell mit $N = K$ und sei D^\top ein Isomorphismus. Dann enthält (b, D) genau dann Arbitragegelegenheiten, wenn für die eindeutig bestimmte Lösung $\psi \in \mathbb{R}^K$ von $b = D\psi$ gilt

$$\psi \not\gg 0.$$

1.7 Das Ein-Perioden-Zwei-Zustands-Modell

Wir betrachten nun das allgemeine Ein-Perioden-Zwei-Zustands-Modell und werden sehen, dass die Frage der Arbitragefreiheit des zugehörigen Marktmodells mit Hilfe der Begriffsbildung des Zustandsvektors leicht und übersichtlich beantwortet werden kann.

Beispiel 1.70. Sei B eine Währungseinheit, also etwa 1 Euro, oder ein beliebiges anderes Anfangskapital zum Zeitpunkt 0, und sei S eine Aktie. Wir betrachten ein Ein-Perioden-Zwei-Zustands-Modell

$$b = \begin{pmatrix} B \\ S_0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} B(1+r) & B(1+r) \\ S_1(\omega_1) & S_1(\omega_2) \end{pmatrix}$$

und untersuchen dies auf Arbitragefreiheit. Dazu betrachten wir das Gleichungssystem $b = D\psi$, also

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B \\ S_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B(1+r) & B(1+r) \\ S_1(\omega_1) & S_1(\omega_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B(1+r)\psi_1 + B(1+r)\psi_2 \\ S_1(\omega_1)\psi_1 + S_1(\omega_2)\psi_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Daraus folgen mit $s_1 := S_1(\omega_1)$ und $s_2 := S_1(\omega_2)$ die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} s_1 - (1+r)S_0 &= (1+r)(s_1 - s_2)\psi_2 \\ (1+r)S_0 - s_2 &= (1+r)(s_1 - s_2)\psi_1. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Wir nehmen nun folgende Fallunterscheidung vor:

1. Angenommen, es gilt $s_1 = s_2 =: s > 0$, dann ist das Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn

$$s = (1+r)S_0$$

gilt. In diesem Fall hat die Auszahlungsmatrix D die Gestalt

$$D = (1+r) \begin{pmatrix} B & B \\ S_0 & S_0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist der Rang von D gleich 1 und wir können ein $\psi \gg 0$ mit $D\psi = b$ beispielsweise wählen als

$$\psi = \frac{1}{2(1+r)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ferner gilt

$$\ker D = \left\{ \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Damit ist die Menge aller Lösungen ψ' von $D\psi' = b$ gegeben durch

$$\psi' = \frac{1}{2(1+r)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Sei nun $c = D^\top h$ ein replizierbares Auszahlungsprofil, so gilt

$$\begin{aligned} c &= (1+r) \begin{pmatrix} B & S_0 \\ B & S_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ &= (1+r) \begin{pmatrix} Bh_1 + S_0 h_2 \\ Bh_1 + S_0 h_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

und daher $c \perp \ker D$. Ein Auszahlungsprofil c ist genau dann nicht replizierbar, wenn $c = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ mit $\mu_1 \neq \mu_2$. In diesem Fall gilt offenbar

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mu_1 - \mu_2 \neq 0.$$

Das Marktmodell ist also arbitragefrei, aber nicht vollständig. Offenbar gilt

$$\begin{aligned} \text{Im } D^\top &= \left\{ (1+r) \begin{pmatrix} B & S_0 \\ B & S_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \mid h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Sei $c = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein replizierbares Auszahlungsprofil. Dann ist der Preis c_0 von c zum Zeitpunkt 0 gegeben durch

$$c_0 = \langle \psi, c \rangle = \frac{\lambda}{1+r}.$$

Damit ist c_0 gerade der auf den Zeitpunkt 0 abdiskontierte Wert von λ .

2. Angenommen, es gilt $s_1 - s_2 > 0$. Dann ist

$$\psi_1 = \frac{1}{1+r} \frac{(1+r)S_0 - s_2}{s_1 - s_2} \quad (1.37)$$

und

$$\psi_2 = \frac{1}{1+r} \frac{s_1 - (1+r)S_0}{s_1 - s_2} \quad (1.38)$$

also

$$\begin{aligned}\psi_1 > 0 &\iff (1+r)S_0 > s_2 \\ \psi_2 > 0 &\iff s_1 > (1+r)S_0.\end{aligned}$$

Das Marktmodell ist also im Falle $s_1 - s_2 > 0$ genau dann arbitragefrei, wenn

$$s_1 > (1+r)S_0 > s_2.$$

Analog folgt, dass das Marktmodell im Falle $s_1 < s_2$ genau dann arbitragefrei ist, wenn

$$s_1 < (1+r)S_0 < s_2.$$

In jedem Fall folgt aus $s_1 \neq s_2$ die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems $D\psi = b$. Also ist D dann injektiv und damit ein Isomorphismus. Dies ist aber gleichbedeutend mit der Vollständigkeit des Marktmodells. \triangle

Beispiel 1.71. Wir betrachten erneut das Beispiel 1.70, definieren aber hier zwei Konstanten u und d mit $u > d > 0$, so dass

$$S_1(\omega_1) := uS_0$$

und

$$S_2(\omega_2) := dS_0.$$

Dann lautet das Gleichungssystem (1.35)

$$\begin{pmatrix} B \\ S_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(1+r) & B(1+r) \\ uS_0 & dS_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

und ist nach Division durch B bzw. durch S_0 identisch mit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+r & 1+r \\ u & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}1 &= (1+r)(\psi_1 + \psi_2) \\ 1 &= u\psi_1 + d\psi_2\end{aligned}$$

mit den Lösungen

$$\psi_1 = \frac{1}{1+r} \frac{(1+r) - d}{u - d} \quad (1.40)$$

und

$$\psi_2 = \frac{1}{1+r} \frac{u - (1+r)}{u - d}. \quad (1.41)$$

Wir sehen also, dass die Komponenten des Zustandsvektors ψ nun nicht mehr von den Anfangskursen B und S_0 , sondern nur noch von den Renditefaktoren u , d und $1+r$ abhängen. Diese Tatsache wird bei der Erweiterung des Binomial-Modells auf mehrere Perioden verwendet werden.

Offenbar ist das Marktmodell genau dann arbitragefrei, wenn

$$u > 1 + r > d. \quad (1.42)$$

Der Zustandsvektor ψ kann auch geschrieben werden als

$$\psi = \frac{1}{1+r} \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = dQ,$$

wobei $q := \frac{(1+r)S_0 - s_2}{s_1 - s_2}$ und $d := \frac{1}{1+r}$. Hier ist $Q = \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$ das Martingalmaß aus Abschnitt 1.6.5. Der Wert c_0 einer Auszahlung $c \in \mathbb{R}^2$ zum Zeitpunkt 0 kann mit Hilfe von Q als diskontierter Erwartungswert geschrieben werden,

$$c_0 = \langle \psi, c \rangle = d\mathbf{E}^Q[c] = d(qc_1 + (1-q)c_2).$$

△

Beispiel 1.72. Wir betrachten erneut das Marktmodell aus Beispiel 1.42,

$$(b, D) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.02 & 1.02 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \right).$$

Hier gilt

$$u = \frac{12}{10} > 1.02 = 1 + r > \frac{9}{10} = d,$$

woraus die Arbitragefreiheit von (b, D) folgt. Der Zustandsvektor ergibt sich entweder als eindeutig bestimmte Lösung des Gleichungssystems $D\psi = b$ oder durch Einsetzen von u und d in (1.40) und (1.41) zu

$$\psi = \begin{pmatrix} 0.392 \\ 0.588 \end{pmatrix}.$$

Nun betrachten wir eine Call-Option auf S^2 mit Basispreis 10. Die zustandsabhängige Auszahlung c dieser Option lautet

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und daraus erhalten wir das replizierende Portfolio h als Lösung des Gleichungssystems $D^\top h = c$ mit

$$h = \begin{pmatrix} -2.941 \\ 0.333 \end{pmatrix}.$$

Der Wert c_0 von c ergibt sich nun als Wert $h \cdot S_0$ des Portfolios h zum Zeitpunkt 0 zu

$$c_0 = h \cdot S_0 = 0.392.$$

Mit Hilfe des Zustandsvektors ψ erhalten wir diesen Wert für c_0 unmittelbar als

$$c_0 = \langle \psi, c \rangle = 0.392.$$

Betrachten wir nun eine Put-Option auf S^2 mit Basispreis 10.5, so lautet das zugehörige Auszahlungsprofil

$$c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.5 \end{pmatrix},$$

und der Preis c_0 von c ergibt sich als

$$c_0 = \langle \psi, c \rangle = 0.882.$$

△

Sind die Bedingungen $d < 1 + r < u$ in (1.42) verletzt, so ist die Bedingung $\psi \gg 0$ nicht erfüllt. Dies bedeutet aber, dass das Marktmodell nicht arbitragefrei sein kann. Nehmen wir beispielsweise an, dass $1 + r \leq d < u$ gilt, so ist die Rendite bei Investition in die Aktie in jedem Zustand größer als die Rendite r einer festverzinslichen Kapitalanlage. Damit liegt eine Arbitragestrategie auf der Hand: Leihe Kapital zum risikolosen Zinssatz und investiere dies in die Aktie. Da die Aktie in jedem Fall nicht weniger Rendite erzielt als die festverzinsliche Kapitalanlage, kann die entstehende Schuld in jedem Fall vollständig zurückgezahlt werden. Formalisiert wird dies durch eine Handelsstrategie $h = (h_1, h_2) = \left(-1, \frac{1}{S_0}\right)$. Wir leihen 1 Geldeinheit und kaufen für diese $\frac{1}{S_0}$ Anteile der Aktie. Die Gesamtinvestition entspricht dem Portfoliowert zum Zeitpunkt 0 und beträgt $h \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ S_0 \end{pmatrix} = 0$. Für die Auszahlung zum Zeitpunkt 1 gilt

$$\begin{aligned} D^\top h &= \begin{pmatrix} 1 + r & uS_0 \\ 1 + r & dS_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{S_0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u - (1 + r) \\ d - (1 + r) \end{pmatrix} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Also ist diese Handelsstrategie tatsächlich eine Arbitragegelegenheit.

1.8 Partial-Hedging

Wir betrachten ein arbitragefreies Ein-Perioden-Marktmodell $(S_0, S_1, P) \cong (b, D, P)$. Sei $c \in \mathbb{R}^K$ eine erreichbare Auszahlung, beispielsweise die einer Call- oder Put-Option. Wir fragen uns, wie subjektive Wahrscheinlichkeiten

$P(\omega)$ für die modellierten Zustände ω genutzt werden können, um die Absicherungskosten für c zu reduzieren.

Dazu versuchen wir, eine andere Auszahlung $c' \in \mathbb{R}^K$ anstelle von c zu replizieren, so dass aber die Verlustrisiken kontrolliert werden.

Der erwartete Verlust bei Absicherung von c' beträgt zum Zeitpunkt 1

$$\mathbf{E}^P [c - c'] = \mathbf{E}^P [\Delta],$$

wobei $\Delta := c - c'$. Wird dieser Betrag auf den Zeitpunkt 0 abdiskontiert, so erhalten wir

$$d\mathbf{E}^P [\Delta].$$

Die Einsparung, die zum Zeitpunkt 0 durch Absicherung von c' anstelle von c erzielt werden kann, beträgt

$$d\mathbf{E}^Q [c] - d\mathbf{E}^Q [c'] = d\mathbf{E}^Q [\Delta].$$

Die teilweise Absicherung von c durch c' , die wir **Partial-Hedging** nennen, lohnt sich nach den hier vorgestellten Überlegungen im Mittel dann, wenn die durch die Absicherung von c' erzielte Einsparung $d\mathbf{E}^Q [\Delta]$ den erwarteten Verlust $d\mathbf{E}^P [\Delta]$ übersteigt. Wir erhalten so die Bedingungen

$$d\mathbf{E}^Q [\Delta] > d\mathbf{E}^P [\Delta] \geq 0.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\langle P, \Delta \rangle \geq 0 \text{ und } \langle Q - P, \Delta \rangle > 0.$$

Für einen vorgegebenen mittleren Verlust $\mathbf{E}^P [\Delta] = \rho \geq 0$ erhalten wir so das Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} a &:= \max_{\substack{c' \\ \langle P, c - c' \rangle = \rho}} \langle Q - P, c - c' \rangle \\ &= (\langle Q, c \rangle - \rho) - \min_{\substack{c' \\ \langle P, c' \rangle = \langle P, c \rangle - \rho}} \langle Q, c' \rangle \end{aligned}$$

Falls a positiv ist, so existieren im betrachteten Marktmodell (b, D, P) für die gegebene Auszahlung c aussichtsreiche Partial-Hedging-Strategien.

Beispiel 1.73. Betrachten Sie das Marktmodell

$$(b, D, P) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.1 & 1.1 & 1.1 \\ 2 & 4 & 7 \\ 15 & 9 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.6 \\ 0.3 \end{pmatrix} \right)$$

Das Marktmodell ist arbitragefrei mit

$$\psi = \begin{pmatrix} 0.124 \\ 0.248 \\ 0.537 \end{pmatrix},$$

$$d = 0.909 \text{ und}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0.136 \\ 0.273 \\ 0.591 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten eine Call-Option c auf S^3 mit Ausübungspreis $K = 10$. Dann gilt

$$c = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Wert der Option zum Zeitpunkt 0 beträgt

$$c_0 = d\mathbf{E}^Q[c] = 1.157.$$

Der Zustand ω_1 wurde mit $P(\omega_1) = 0.1$ als relativ unwahrscheinlich modelliert. Daher wird nur das Auszahlungsprofil

$$c' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

abgesichert. Der erwartete Verlust beträgt mit $\Delta := c - c' = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{E}^P[\Delta] = 0.3.$$

Andererseits gilt

$$\mathbf{E}^Q[\Delta] = 0.409.$$

Damit erhalten wir $\mathbf{E}^Q[\Delta] > \mathbf{E}^P[\Delta]$, und es lohnt sich im Mittel, anstelle von c die Auszahlung c' abzusichern mit

$$c'_0 = d\mathbf{E}^Q[c'] = 0.785.$$

Der unter Berücksichtigung der Verluste erwartete Gewinn beträgt

$$d\mathbf{E}^Q[\Delta] - d\mathbf{E}^Q[\Delta] = 0.065.$$

Eine Alternative besteht darin, Kapital zur Absicherung festverzinslich anzulegen. In diesem Fall wählen wir

$$c'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$\Delta = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der mittlere erwartete Verlust $\mathbf{E}^P[\Delta] = -0.2$ ist in diesem Fall sogar ein Gewinn, denn der Zustand ω_2 tritt mit der vergleichsweise hohen Wahrscheinlichkeit von 60% ein. Zusätzlich ist die Einsparung $\mathbf{E}^Q[\Delta] = 0.273$ zum Zeitpunkt 1 positiv.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, keine Absicherung zu betreiben, also $c''' = 0$ zu wählen. In diesem Fall gilt jedoch $\mathbf{E}^P[c - c'''] = \mathbf{E}^P[c] = 0.8$ und $\mathbf{E}^Q[c - c'''] = \mathbf{E}^Q[c] = 1.273$, so dass diese Strategie im Sinne obiger Überlegungen als zu riskant erscheint.

Für den erfolgreichen Einsatz dieser Strategie in der Praxis ist es natürlich wesentlich, dass sich nicht nur die modellierten Szenarien des Marktmodells, sondern auch die subjektiven Wahrscheinlichkeiten $P(\omega)$ als realistisch herausstellen. \triangle

1.9 Wertgrenzen für Call- und Put-Optionen

Es ist sowohl von theoretischem als auch von praktischem Interesse, einfach berechenbare obere und untere Schranken für Optionspreise angeben zu können. Dazu betrachten wir ein arbitragefreies Marktmodell (b, D) , das eine Aktie S enthält mit $S_0 > 0$ und $S_1 > 0$. Wir betrachten die Auszahlung einer Call-Option

$$c^C := (S_1 - K)^+$$

und die einer Put-Option

$$c^P := (K - S_1)^+$$

mit Basispreis $K \geq 0$. Offenbar gilt

$$0 \leq c^C$$

und

$$S_1 - K \leq c^C \leq S_1.$$

Daraus folgen wegen (1.14) und $\psi \gg 0$ die Eigenschaften

$$0 \leq \langle \psi, c^C \rangle =: c_0^C$$

und

$$S_0 - dK = \langle \psi, S_1 \rangle - \langle \psi, K \rangle \leq \langle \psi, c^C \rangle =: c_0^C \leq \langle \psi, S_1 \rangle = S_0,$$

also

$$(S_0 - dK)^+ \leq c_0^C \leq S_0. \quad (1.43)$$

Für nicht-negative Zinsen, also für $d \leq 1$, gilt $S_0 - K \leq S_0 - dK$, und wir erhalten auch die folgende, etwas schwächere, aber einprägsamere Abschätzung

$$S_0 - K \leq c_0^C \leq S_0.$$

Beispiel 1.74. Wir betrachten eine Call-Option auf eine Aktie S mit Basispreis $K = 27$ Euro. Sei $S_0 = 29$ Euro, und der risikolose Zinssatz betrage 2.7%. Dann gilt $d = \frac{1}{1+r} = 0.974$. Für den Wert c_0^C der Call-Option gilt dann

$$2.702 = 29 - 0.974 \cdot 27 \leq c_0^C \leq 29.$$

△

Analog gilt

$$0 \leq c^P \leq K,$$

woraus

$$0 \leq \langle \psi, c^P \rangle =: c_0^P \leq \langle \psi, K \rangle = dK \quad (1.44)$$

folgt. Für $d \leq 1$ erhalten wir aus (1.44) die etwas schwächere Abschätzung

$$0 \leq c_0^P \leq K.$$

Beispiel 1.75. Wir betrachten eine Put-Option auf eine Aktie S mit Basispreis $K = 32$ Euro. Sei $S_0 = 30$ Euro, und der risikolose Zinssatz betrage 2.7%. Für den Wert c_0^P der Call-Option gilt dann mit $d = 0.974$

$$0 \leq c_0^P \leq 0.974 \cdot 32 = 31.168.$$

△

Wir betrachten nun die Identität

$$c^C - c^P = (S_1 - K)^+ - (K - S_1)^+ = S_1 - K.$$

Daraus folgt

$$c_0^C - c_0^P = \langle \psi, S_1 \rangle - \langle \psi, K \rangle = S_0 - dK. \quad (1.45)$$

Der Zusammenhang (1.45) wird **Put-Call-Parität** genannt und zeigt, wie Call- und Put-Preise mit identischem Ausübungspreis zusammenhängen. Nach der Put-Call-Parität besitzt eine Put-Option den gleichen Wert wie eine entsprechende Call-Option, falls $K = \frac{1}{d}S_0 = (1+r)S_0$ gilt.

1.10 Das diskontierte Marktmodell

In den letzten Abschnitten wurde der Wert c_0 eines replizierbaren Auszahlungsprofils $c \in \mathbb{R}^K$ als abdiskontierter Erwartungswert $c_0 = d\mathbf{E}^Q[c]$ dargestellt. Das Wahrscheinlichkeitsmaß Q wurde dabei durch Normierung des Zustandsvektors ψ gewonnen.

In diesem Abschnitt stellen wir eine alternative Vorgehensweise zur Bestimmung von c_0 vor, die unmittelbar auf die Erwartungswert-Darstellung führt. Dazu ist es jedoch notwendig, die Existenz eines strikt positiven Finanzinstruments im Marktmodell vorauszusetzen. Wir nehmen daher im folgenden an, dass

$$S_0^1 > 0 \text{ und } S_1^1(\omega_j) > 0 \text{ für alle } j = 1, \dots, K$$

gilt. Unter dieser Voraussetzung transformieren wir das Marktmodell (S_0, S_1) in ein neues Modell $(\tilde{S}_0, \tilde{S}_1)$. Dazu definieren wir

$$\begin{aligned} \tilde{S}_0^i &:= \frac{S_0^i}{S_0^1} \text{ für } i = 1, \dots, N \text{ und} \\ \tilde{S}_1^i(\omega_j) &:= \frac{S_1^i(\omega_j)}{S_1^1(\omega_j)} \text{ für } i = 1, \dots, N \text{ und } j = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

Das neue Marktmodell $(\tilde{S}_0, \tilde{S}_1)$ besitzt also die Eigenschaften $\tilde{S}_0^1 = \tilde{S}_1^1(\omega_1) = \dots = \tilde{S}_1^1(\omega_K) = 1$ und wird *diskontiertes Marktmodell* genannt. Es enthält alle Preise relativ zu den Preisen von S^1 . Dieses Finanzinstrument S^1 , relativ zu dem die Preise aller anderen Finanzinstrumente angegeben werden, wird auch *Numéraire* genannt. Die Bezeichnung diskontiertes Marktmodell für $(\tilde{S}_0, \tilde{S}_1)$ begründet sich dadurch, dass S^1 häufig die Eigenschaften $S_0^1 = 1$ und $S_1^1(\omega_j) = 1 + r$ für alle $j = 1, \dots, K$ besitzt. In diesem Fall gilt $\tilde{S}_0 = S_0$ und $\tilde{S}_1^i(\omega_j) = \frac{1}{1+r} S_1^i(\omega_j)$, also werden die Wertpapierpreise $S_1^i(\omega_j)$ mit dem Faktor $\frac{1}{1+r}$ abdiskontiert.

Satz 1.76. *Ein Marktmodell (S_0, S_1) ist genau dann arbitragefrei, wenn das diskontierte Marktmodell $(\tilde{S}_0, \tilde{S}_1)$ arbitragefrei ist.*

Beweis. Dies folgt sofort aus den Beziehungen

$$\begin{aligned} h \cdot \tilde{S}_0 &= \frac{1}{S_0^1} h \cdot S_0 \text{ und} \\ h \cdot \tilde{S}_1(\omega_j) &= \frac{1}{S_1^1(\omega_j)} h \cdot S_1(\omega_j) \end{aligned}$$

unter Beachtung von $S_1^1(\omega_1) > 0, \dots, S_1^1(\omega_K) > 0$ und $S_0^1 > 0$. □

Ist also das Marktmodell (S_0, S_1) arbitragefrei, so auch $(\tilde{S}_0, \tilde{S}_1)$, und es existiert ein Zustandsvektor $\tilde{\psi} \gg 0$ mit $\tilde{D}\tilde{\psi} = \tilde{b}$, wobei

$$\tilde{b} := \tilde{S}_0 = \frac{S_0}{S_0^1} = \frac{b}{b_1}$$

und

$$\tilde{D}_{ij} := \tilde{S}_1^i(\omega_j) = \frac{S_1^i(\omega_j)}{S_1^1(\omega_j)} = \frac{D_{ij}}{S_1^1(\omega_j)}.$$

Im diskontierten Modell ist das Portfolio $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ eine festverzinsliche Handelsstrategie zum Zinssatz $r = 0$, denn es gilt $\tilde{D}^\top e_1 = (\tilde{D}_{11}, \dots, \tilde{D}_{1K}) = (1, \dots, 1)$. Daher ist

$$\tilde{d} := \sum_{j=1}^K \tilde{\psi}_j = \langle \tilde{\psi}, (1, \dots, 1) \rangle = \langle \tilde{\psi}, \tilde{D}^\top e_1 \rangle = \tilde{D} \tilde{\psi} \cdot e_1 = \tilde{b} \cdot e_1 = \tilde{b}_1 = 1,$$

so dass die Komponenten des Zustandsvektors $\tilde{\psi}$ formal ein Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\tilde{Q} := \tilde{\psi} \quad (1.46)$$

bilden. Zur Erinnerung: Im ursprünglichen Modell bildet dagegen $Q = \frac{\psi}{d}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Ist $c \in \mathbb{R}^K$ ein in (S_0, S_1) replizierbares Auszahlungsprofil, so gibt es ein $h \in \mathbb{R}^N$ mit $c = D^\top h$. Dann gilt für $\tilde{c} \in \mathbb{R}^K$, definiert durch

$$\tilde{c}_j := \frac{c_j}{S_1^1(\omega_j)},$$

die Darstellung

$$\tilde{c}_j = \frac{c_j}{S_1^1(\omega_j)} = \frac{1}{S_1^1(\omega_j)} \sum_{i=1}^N (D^\top)_{ji} h_i = \sum_{i=1}^N (\tilde{D}^\top)_{ji} h_i = (\tilde{D}^\top h)_j.$$

Also ist \tilde{c} in $(\tilde{S}_0, \tilde{S}_1)$ replizierbar, und es gilt

$$\tilde{c}_0 := h \cdot \tilde{S}_0 = h \cdot \tilde{D} \tilde{\psi} = \langle \tilde{\psi}, \tilde{D}^\top h \rangle = \langle \tilde{\psi}, \tilde{c} \rangle = \mathbf{E}^{\tilde{Q}}[\tilde{c}].$$

Wegen

$$\tilde{c}_0 = h \cdot \tilde{S}_0 = \frac{1}{S_0^1} h \cdot S_0 = \frac{1}{S_0^1} c_0$$

folgt also

$$c_0 = S_0^1 \mathbf{E}^{\tilde{Q}}[\tilde{c}] = S_0^1 \mathbf{E}^{\tilde{Q}}\left[\frac{c}{S_1^1}\right]. \quad (1.47)$$

Wir betrachten nun den Zusammenhang zwischen den Zustandsvektoren in $(S_0, S_1) \cong (b, D)$ und denen im diskontierten Marktmodell $(\tilde{S}_0, \tilde{S}_1) \cong (\tilde{b}, \tilde{D})$. Sei ψ ein Zustandsvektor in (b, D) . Dann gilt wegen $b = D\psi$

$$\tilde{b}_i = \frac{b_i}{b_1} = \frac{1}{b_1} (D\psi)_i = \frac{1}{b_1} \sum_{j=1}^K D_{ij} \psi_j = \sum_{j=1}^K \tilde{D}_{ij} \left(\frac{D_{1j}}{b_1} \psi_j \right). \quad (1.48)$$

Bezeichnen wir andererseits den Zustandsvektor im diskontierten Marktmodell mit $\tilde{\psi}$, so gilt $\tilde{b} = \tilde{D} \tilde{\psi}$ und damit

$$\tilde{b}_i = \left(\tilde{D}\tilde{\psi} \right)_i = \sum_{j=1}^K \tilde{D}_{ij} \tilde{\psi}_j.$$

Durch Vergleich mit (1.48) folgt

$$\tilde{\psi}_j = \frac{D_{1j}}{b_1} \psi_j = \frac{S_1^1(\omega_j)}{S_0^1} \psi_j \text{ für } j = 1, \dots, K. \quad (1.49)$$

Den Zusammenhang (1.49) erhalten wir auch mit Hilfe von (1.47) durch

$$h \cdot b = \langle \psi, c \rangle = \left\langle \frac{D_1}{b_1} \psi, \frac{b_1}{D_1} c \right\rangle = b_1 \langle \tilde{\psi}, \tilde{c} \rangle,$$

wobei D_1 die erste Zeile von D bezeichnet und $\left(\frac{D_1}{b_1} \psi \right)_j := \frac{D_{1j}}{b_1} \psi_j$ gilt.

Mit (1.46) folgt aus (1.49)

$$\tilde{Q}_j = \tilde{\psi}_j = \frac{S_1^1(\omega_j)}{S_0^1} \psi_j = d \frac{S_1^1(\omega_j)}{S_0^1} Q_j. \quad (1.50)$$

Anmerkung 1.77. Angenommen das Finanzinstrument S^1 ist ein festverzinsliches Wertpapier mit $b_1 = S_0^1 = 1$ und mit $D_{1j} = S_1^1(\omega_j) = 1 + r$ für alle $j = 1, \dots, K$. Dann gilt für den Preis $c_0 = h \cdot b$ eines replizierbaren Auszahlungsprofils c mit $c = D^\top h$ der Zusammenhang

$$c_0 = h \cdot b = S_0^1 \mathbf{E}^{\tilde{Q}} \left[\frac{c}{S_1^1} \right] = \mathbf{E}^{\tilde{Q}} \left[\frac{c}{1+r} \right]. \quad (1.51)$$

In diesem wichtigen Spezialfall ist also der Wert eines Auszahlungsprofils gleich dem Erwartungswert $\mathbf{E}^{\tilde{Q}} \left[\frac{c}{1+r} \right]$ des mit dem Diskontfaktor $\frac{1}{1+r}$ abdiskontierten Auszahlungsprofils c . Dabei wird der Erwartungswert bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\tilde{Q} := \tilde{\psi}$ gebildet, das durch die Bedingungen $\tilde{b} = \tilde{D}\tilde{\psi}$, $\tilde{\psi} \gg 0$, definiert ist. Wegen (1.50) und wegen $d = \frac{1}{1+r}$ folgt ferner

$$\tilde{Q} = Q.$$

Existiert in einem arbitragefreien Marktmodell (S_0, S_1) also ein festverzinsliches Wertpapier und wird dieses als Numéraire verwendet, so stimmen die beiden Martingalmaße Q und \tilde{Q} im ursprünglichen und im diskontierten Modell überein.

Beispiel 1.78. Wir betrachten das Beispiel 1.72 mit dem arbitragefreien Marktmodell

$$(b, D) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.02 & 1.02 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \right).$$

Der zugehörige eindeutig bestimmte Zustandsvektor lautet

$$\psi = \begin{pmatrix} 0.392 \\ 0.588 \end{pmatrix}.$$

Wählen wir S^1 als Numéraire, so lautet das zugehörige diskontierte Marktmodell

$$(\tilde{b}, \tilde{D}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 11.765 & 8.823 \end{pmatrix} \right).$$

Der zu diesem Marktmodell gehörende Zustandsvektor $\tilde{\psi}$ ergibt sich als Lösung des linearen Gleichungssystems $\tilde{D}\tilde{\psi} = \tilde{b}$ und lautet

$$\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} =: Q.$$

Erwartungsgemäß ist $\tilde{\psi} = Q$ formal ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Für die in Beispiel 1.72 betrachtete Call-Option mit Auszahlungsprofil $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ berechnen wir nun (1.51) und erhalten

$$c_0 = \mathbf{E}^Q \left[\frac{c}{1+r} \right] = \mathbf{E}^Q \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{1.02} \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{0.4}{1.02} = 0.392,$$

also den bereits bekannten Wert aus Beispiel 1.72. Entsprechend ergibt sich für die in Beispiel 1.72 betrachtete Put-Option mit $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.5 \end{pmatrix}$ der Wert

$$c_0 = \mathbf{E}^Q \left[\frac{c}{1+r} \right] = \mathbf{E}^Q \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1.5}{1.02} \end{pmatrix} \right] = \frac{0.9}{1.02} = 0.882.$$

△

1.11 Zusammenfassung

Eine zustandsabhängige Auszahlung $c \in \mathbb{R}^K$ heißt *replizierbar* in einem Marktmodell $(b, D) \in \mathbb{R}^N \times M_{N \times K}(\mathbb{R})$, wenn $c \in \text{Im } D^\top$. In diesem Fall gibt es ein Portfolio $h \in \mathbb{R}^N$ mit $c = D^\top h$. Ein Marktmodell heißt *vollständig*, wenn jedes Auszahlungsprofil replizierbar ist. Einer replizierbaren Auszahlung c lässt sich genau dann ein eindeutig bestimmter Preis c_0 zum Zeitpunkt 0 zuordnen, wenn $c_0 := h \cdot b$ für jedes replizierende Portfolio h denselben Wert besitzt. Dies ist gleichbedeutend mit der Eigenschaft $\ker D^\top \perp b$, oder äquivalent dazu mit $b \in \text{Im } D$, und im Marktmodell gilt dann das *Law of One Price*. Es gibt in diesem Fall also ein $\psi \in \mathbb{R}^K$ mit $b = D\psi$, und der

Tabelle 1.1. Übersicht Ein-Perioden-Modelle

Ein-Perioden-Modelle	
Marktmodell	$(S_0, S_1) \cong (b, D) \in \mathbb{R}^N \times M_{N \times K}(\mathbb{R}), S_0 = b, S_1 \cong D$
Replizierbarkeit	$c \in \mathbb{R}^K$ replizierbar $\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{R}^N$ mit $c = h \cdot S_1 = D^\top h$ $\Leftrightarrow c \in \text{Im } D^\top$ $\Leftrightarrow c \perp \ker D$ (da $\mathbb{R}^K = \text{Im } D^\top \oplus \ker D$)
Vollständigkeit	(b, D) vollständig $\Leftrightarrow \text{Im } D^\top = \mathbb{R}^K$ $\Leftrightarrow \ker D = \{0\}$ (da $\mathbb{R}^K = \text{Im } D^\top \oplus \ker D$) $\Leftrightarrow D\psi = b$ hat höchstens eine Lösung $\psi \in \mathbb{R}^K$
Law of One Price	Preis $c_0 := h \cdot b$ von $c = h \cdot S_1 = D^\top h$ unabhängig von h $\Leftrightarrow b \perp \ker D^\top$ $\Leftrightarrow b \in \text{Im } D$ (da $\mathbb{R}^N = \text{Im } D \oplus \ker D^\top$) $\Leftrightarrow D\psi = b$ hat mindestens eine Lösung $\psi \in \mathbb{R}^K$ $\Leftrightarrow \exists \psi \in \mathbb{R}^K$ mit $S_0 = b = D\psi = \langle \psi, S_1 \rangle$
(Diskontierung von $D^\top h$)	$\Leftrightarrow \exists \psi \in \mathbb{R}^K$ mit $h \cdot b = \langle \psi, D^\top h \rangle \quad \forall h \in \mathbb{R}^N$
Arbitragegelegenheit	Portfolio $h \in \mathbb{R}^N$, das Gewinnmöglichkeit ohne Kapitaleinsatz und ohne Zahlungsverpflichtung bietet $\Leftrightarrow L(h) > 0$ (Entnahmeprozess $L(h) := (-h \cdot S_0, h \cdot S_1)$)
Fundamentalsatz	(b, D) arbitragefrei $\Leftrightarrow \exists \phi \in \mathbb{R}^{K+1}$ mit $\phi \perp \text{Im } L$ und $\phi \gg 0$ $\Leftrightarrow \exists \psi \in \mathbb{R}^K$ mit $\psi \gg 0$ und $b = D\psi$ (ψ Zustandsvektor)
(Diskontierung von $D^\top h$)	$\Leftrightarrow \exists \psi \in \mathbb{R}^K$ mit $\psi \gg 0$ und $h \cdot b = \langle \psi, D^\top h \rangle \quad \forall h \in \mathbb{R}^N$ $\implies h \cdot b = dE^Q[D^\top h] \quad \left(d = \sum_{j=1}^K \psi_j, Q = \frac{\psi}{d}\right)$

Preis c_0 jeder replizierbaren Auszahlung $c = D^\top h \in \mathbb{R}^K$ lässt sich darstellen als $c_0 = h \cdot b = D\psi \cdot h = \langle \psi, D^\top h \rangle = \langle \psi, c \rangle$. Zur Berechnung von c_0 muss das replizierende Portfolio h somit nicht bekannt sein, und $c_0 = \langle \psi, c \rangle$

kann als *verallgemeinerte Diskontierung* des zukünftigen zustandsabhängigen Zahlungsstroms c auf den Zeitpunkt 0 interpretiert werden.

Im Rahmen eines Marktmodells (b, D) heißt ein Portfolio h *Arbitragegelegenheit*, falls $L(h) = (-h \cdot b, D^\top h) > 0$ gilt. In diesem Fall bietet die Investition in das Portfolio h eine risikolose Gewinnmöglichkeit ohne eigenen Kapitaleinsatz.

In der Regel wird vorausgesetzt, dass Arbitragegelegenheiten in effizienten Märkten nicht oder nur kurzzeitig auftreten, da Investoren jede dieser Gelegenheiten schnell erkennen und ausnutzen würden. Dies hätte eine Verschiebung der Preise der zugehörigen Finanzinstrumente zur Folge, so dass die Arbitragegelegenheiten nach kurzer Zeit wieder verschwunden wären.

In einem Marktmodell (b, D) gilt ein grundlegender Struktursatz, der *Fundamentalsatz der Preistheorie*. Er besagt, dass Arbitragefreiheit äquivalent ist zur Existenz eines *Zustandsvektors*. Dies ist eine strikt positive Lösung $\psi \gg 0$ des Gleichungssystems $D\psi = b$. In arbitragefreien Marktmodellen gilt also insbesondere das *Law of One Price*.

Ein Auszahlungsprofil c ist in einem arbitragefreien Marktmodell genau dann replizierbar, wenn $\langle \psi, c \rangle$ für jeden Zustandsvektor ψ denselben Wert besitzt. Ist also der Zustandsvektor in einem Marktmodell (b, D) eindeutig bestimmt, so ist jedes Auszahlungsprofil replizierbar, und in diesem Fall ist (b, D) daher vollständig.

Sei ψ ein Zustandsvektor in einem arbitragefreien Marktmodell. Wegen $\psi \gg 0$ lässt sich der Preis $\langle \psi, c \rangle$ jedes replizierbaren Auszahlungsprofils c formal als *diskontierter Erwartungswert der Auszahlung c* schreiben, denn es gilt $\langle \psi, c \rangle = d \langle \frac{\psi}{d}, c \rangle = d \mathbf{E}^Q[c]$, wobei $d := \sum_{j=0}^K \psi_j > 0$ und $Q := \frac{\psi}{d}$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß Q wird *Preismaß* genannt, oder, wegen $\mathbf{E}^Q[dS_1^i] = \langle \psi, S_1^i \rangle = \langle \psi, D^\top e_i \rangle = \langle D\psi, e_i \rangle = e_i \cdot S_0 = S_0^i$, auch *Martingalmaß*⁶. Die Darstellung $c_0 = d \mathbf{E}^Q[c]$ für den Wert einer replizierbaren Auszahlung c zum Zeitpunkt 0 spezialisiert sich für deterministische Auszahlungen unmittelbar auf den vertrauten Ausdruck dc . Denn ist c deterministisch, gilt also $c = c \cdot (1, \dots, 1)$, so gilt

$$c_0 = d c \mathbf{E}^Q[(1, \dots, 1)] = dc.$$

Die Zahl d lässt sich daher als *Diskontfaktor* interpretieren, falls im betrachteten Marktmodell festverzinsliche Kapitalanlagen realisierbar sind.

In Tabelle 1.1 finden Sie eine Zusammenstellung der wichtigsten Resultate dieses Kapitels.

1.12 Weitere Aufgaben

Aufgabe 1.7. Betrachten Sie das Marktmodell

⁶ Wegen $\mathbf{E}^Q[dS_1^i] = S_0^i$ definiert der diskontierte Preisprozess (S_0, dS_1) ein Martingal bezüglich Q und der Filtration $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$. Auf die Begriffe Filtration und Martingal wird in späteren Kapiteln noch ausführlich eingegangen.

$$(b, D) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.1 & 1.1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \right).$$

1. Untersuchen Sie (b, D) auf Vollständigkeit und auf Arbitragefreiheit.
2. Bestimmen Sie den Wert einer Call-Option auf S^2 mit Basispreis $K = 6$.
3. Berechnen Sie den Forward-Preis F eines Forward-Kontrakts auf S^2 .

Aufgabe 1.8. Betrachten Sie das Marktmodell

$$(b, D) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.1 & 1.1 & 1.1 \\ 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \right).$$

1. Untersuchen Sie (b, D) auf Vollständigkeit und auf Arbitragefreiheit.
2. Bestimmen Sie den Wert einer Call-Option auf S^2 mit Basispreis $K = 6$.
3. Berechnen Sie den Forward-Preis F eines Forward-Kontrakts auf S^2 .

Aufgabe 1.9. Betrachten Sie das Marktmodell

$$(b, D) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.1 & 1.1 & 1.1 \\ 7 & 4 & 6 \\ 12 & 9 & 9 \end{pmatrix} \right).$$

1. Zeigen Sie, dass (b, D) vollständig, aber nicht arbitragefrei ist.
2. Finden Sie eine Arbitragegelegenheit.

Aufgabe 1.10. Betrachten Sie das Marktmodell

$$(b, D) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.1 & 1.1 & 1.1 & 1.1 \\ 7 & 4 & 6 & 3 \\ 12 & 9 & 9 & 13 \end{pmatrix} \right).$$

1. Zeigen Sie, dass (b, D) nicht vollständig, dagegen aber arbitragefrei ist.
2. Geben Sie eine zustandsabhängige Auszahlung $c \in \mathbb{R}^4$ an, die nicht repliziert werden kann.
3. Bestimmen Sie die Menge aller replizierbaren Auszahlungen.

Aufgabe 1.11. Betrachten Sie das Marktmodell

$$(b, D) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.1 & 1.1 & 1.1 \\ 3 & 4 & 7 \\ 12 & 9 & 11 \end{pmatrix} \right).$$

1. Zeigen Sie, dass das Marktmodell arbitragefrei und vollständig ist.
2. Bestimmen Sie die Werte einer Call- und einer Put-Option auf S^3 mit Basispreis $K = 10$.

3. Verifizieren Sie die Put-Call-Parität mit Hilfe der Ergebnisse aus 2.
4. Bestimmen Sie die Werte aus 2. mit Hilfe des diskontierten Marktmodells, wobei S^1 als Numéraire gewählt werden soll.
5. Bestimmen Sie die Werte aus 2. mit Hilfe des diskontierten Marktmodells, wobei S^3 als Numéraire gewählt werden soll.

Aufgabe 1.12. Betrachten Sie das Marktmodell

$$(b, D) = \left(\begin{pmatrix} 56 \\ 8 \\ 33 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 60 & 59 & 57 \\ 11 & 7 & 10 \\ 32 & 36 & 41 \end{pmatrix} \right).$$

1. Zeigen Sie, dass (b, D) arbitragefrei und vollständig ist, und bestimmen Sie den eindeutig bestimmten Zustandsvektor ψ .
2. Finden Sie die eindeutig bestimmte festverzinsliche Anlage θ mit der Eigenschaft $\theta \cdot S_1(\omega) = 1$ für alle $\omega \in \Omega$.
3. Bestimmen Sie daraus den Diskontfaktor d und den risikolosen Zinssatz r .
4. Verifizieren Sie $d = \sum_{j=1}^3 \psi_j$.

Aufgabe 1.13. Sei (b, D) ein arbitragefreies Marktmodell mit Zustandsvektor ψ und seien C und C' zwei Investitionsalternativen, die zu den beiden zukünftigen zustandsabhängigen replizierbaren Auszahlungen $c \in \mathbb{R}^K$ und $c' \in \mathbb{R}^K$ führen. Wir möchten ein Kriterium einführen, nach dem derartige Investitionen bewertet werden können und nach dem insbesondere festgestellt werden kann, ob und wann C' gegenüber C zu bevorzugen ist. Dazu wird auf $\text{Im } D^\top \times \text{Im } D^\top$ eine Relation \succ definiert durch

$$c' \succ c \iff \langle \psi, c' \rangle \geq \langle \psi, c \rangle.$$

$c' \succ c$ bedeutet, dass c' wenigstens so gut ist wie c . Dies ist definitionsgemäß also genau dann der Fall, wenn der auf $t = 0$ transformierte Wert $\langle \psi, c' \rangle$ von c' größer gleich dem auf $t = 0$ transformierten Wert $\langle \psi, c \rangle$ von c ist.

1. Zeigen Sie, dass \succ eine reflexive und transitive Relation definiert.
2. Definiert \succ auch eine Ordnungsrelation?⁷

⁷ Eine Relation \succ auf einer Menge M heißt **Ordnungsrelation**, wenn gilt

$$\begin{aligned} a &\succ a \text{ für alle } a \in M \text{ (reflexiv)} \\ a &\succ b \text{ und } b \succ a \implies a = b \text{ (antisymmetrisch)} \\ a &\succ b, b \succ c \implies a \succ c \text{ (transitiv)} \end{aligned}$$

Portfoliotheorie, Risikomanagement und die Bewertung von
Derivaten

Kremer, J.

2011, XVI, 471 S., Softcover

ISBN: 978-3-642-20867-6