

## Formelsammlung Höhere Mathematik

von  
Wilhelm Göhler, Barbara Ralle

17., bearb. Aufl.

[Formelsammlung Höhere Mathematik – Göhler / Ralle](#)

schnell und portofrei erhältlich bei [beck-shop.de](#) DIE FACHBUCHHANDLUNG

Thematische Gliederung:

[Mathematik Allgemein](#)

Harri Deutsch 2011

Verlag C.H. Beck im Internet:

[www.beck.de](#)

ISBN 978 3 8171 1881 6

W. Göhler

# Formelsammlung

## Höhere Mathematik

Zusammengestellt von Wilhelm Göhler  
Bearbeitet von Dipl.-Math. Barbara Ralle  
17. Auflage



Verlag  
Harri  
Deutsch

Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH  
Gräfstraße 47  
60486 Frankfurt am Main  
[verlag@harri-deutsch.de](mailto:verlag@harri-deutsch.de)  
[www.harri-deutsch.de](http://www.harri-deutsch.de)

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

**ISBN 978-3-8171-1881-6**

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches – oder von Teilen daraus – sind vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet werden. Zu widerhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler keine Haftung.

17. Auflage, 2011

© Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2011

Satz: Satzherstellung Dr. Naake, Brand-Erbisdorf <[www.naake-satz.de](http://www.naake-satz.de)>

Druck: freiburger graphische betriebe <[www.fgb.de](http://www.fgb.de)>

Printed in Germany

# Vorwort

Die Notwendigkeit und der Zweck von Wissensspeichern in einer Zeit der sprunghaften Entwicklung und Erweiterung der Wissenschaft bedürfen keiner besonderen Begründung. Mit dem vorliegenden kleinen Wissensspeicher »Höhere Mathematik – Formeln und Hinweise« soll nun den bereits vorhandenen Formelsammlungen nicht eine weitere, sondern eine anders geartete hinzugefügt werden. Aufbauend auf den Kenntnissen der Elementarmathematik, an deren wichtigste Formeln und Sätze aus Geometrie, Arithmetik und Goniometrie erinnert wird, wurden in den einzelnen Gebieten der höheren Mathematik nur die wesentlichen Formeln aufgenommen, die im Rahmen der Grundvorlesungen an den Hoch- und Fachschulen behandelt werden. Das gleiche gilt für die Auswahl der Integrationsmethoden und Typen von Differentialgleichungen, deren Lösungswege jeweils angedeutet werden.

Zum leichteren Aufsuchen der Formeln und Beziehungen wurde – obwohl eine Formelsammlung kein Lehrbuch sein kann und soll – dem Wissensspeicher die Systematik eines Lehrbuches bzw. einer Vorlesung zugrunde gelegt, und zwar sowohl im einzelnen als auch insgesamt, ohne daß allerdings Überschneidungen und Verlagerungen gänzlich vermieden werden konnten. Die kurzgefaßten Definitionen und Erläuterungen am Anfang jedes Gebietes stellen Erinnerungshilfen für die nachfolgenden Formeln dar. Neben der Vermittlung von mathematischem Wissen und rechnerischen Fertigkeiten ist es die Hauptaufgabe einer Vorlesung und damit auch des Wissensspeichers, das mathematische, logische Denken zu entwickeln. Beides, Systematik und Logik, sollen in erster Linie auch den Weg weisen, auf dem man die jeweils gesuchte Formel finden kann. Wenn sich der Leser die Mühe gemacht hat, die Formelsammlung im Überblick zur Kenntnis zu nehmen, wird er das Gesuchte schneller finden, als es mit dem Sachwörterverzeichnis möglich ist. Auch werden bewußte Erfahrungen und steter Gebrauch das Auffinden beschleunigen.

Wenn an manchen Stellen auf die Literatur verwiesen oder gelegentlich ein Hinweis weggelassen wurde, so geschah das aus Platzgründen, da nicht zuletzt der Übersichtlichkeit wegen der Umfang des Wissensspeichers begrenzt werden mußte.

Es ist die Absicht des Verfassers, mit diesem kleinen Wissensspeicher allen Studierenden ein Arbeitsmittel in die Hand zu geben, das die Formulierung und den Ansatz mathematischer Aufgaben und damit deren Lösung erleichtert.

*W. Göhler*

# Vorwort zur 17. Auflage

Es ist schön zu sehen, dass die vor über 40 Jahren von meinem Vater erstmals veröffentlichte Formelsammlung immer mehr Studierenden das Eindringen in die Mathematik erleichtert. Mit dazu beigetragen hat natürlich die ständige Aktualisierung und Anpassung des Inhalts an die Bedürfnisse der Mathematikausbildung unserer Hochschulen.

Für die mir dabei erwiesene fachkundige Unterstützung von Mathematikern der TU Bergakademie Freiberg, insbesondere Herrn Dr. A. Bellmann, sowie Herrn Prof. Dr. Paditz von der Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden möchte ich mich an dieser Stelle herzlich bedanken.

Mein Dank gilt auch dem Verlag Harri Deutsch für die gute Zusammenarbeit.

Hinweise und Vorschläge zur Verbesserung des Inhalts oder der Gestaltung der nächsten Auflage nimmt der Verlag gern entgegen.

*B. Ralle*



# Inhaltsverzeichnis

1	<b>Komplexe Zahlen</b> . . . . .	1	⇒	1
2	<b>Geometrie</b> . . . . .	2	⇒	2
3	<b>Matrizen und Determinanten</b> . . . . .	5	⇒	3
4	<b>Lineare Optimierung</b> . . . . .	13	⇒	4
5	<b>Vektoren</b> . . . . .	23	⇒	5
6	<b>Analytische Geometrie</b> . . . . .	26	⇒	6
7	<b>Zahlenfolgen und Reihen mit konstanten Gliedern</b> . . . . .	32	⇒	7
8	<b>Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen</b> . . . . .	34	⇒	8
9	<b>Differenzial- und Integralrechnung</b> . . . . .	54	⇒	9
10	<b>Differenzial- und Integralrechnung von Funktionen mehrerer Variablen</b> .	66	⇒	10
11	<b>Vektoranalysis</b> . . . . .	75	⇒	11
12	<b>Differenzialgeometrie</b> . . . . .	78	⇒	12
13	<b>Gewöhnliche Differenzialgleichungen und Lösungsansatz</b> . . . . .	80	⇒	13
14	<b>Partielle Differenzialgleichungen</b> . . . . .	86	⇒	14
15	<b>Lineare Systeme von Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten</b>	88	⇒	15
16	<b>Fehlerrechnung, Näherungsformeln und -verfahren</b> . . . . .	89	⇒	16
17	<b>Kombinatorik</b> . . . . .	94	⇒	17
18	<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung</b> . . . . .	95	⇒	18
19	<b>Mathematische Statistik</b> . . . . .	102	⇒	19
20	<b>Tabellen zur Statistik</b> . . . . .	114	⇒	20
	<b>Sachwortverzeichnis</b> . . . . .	123	⇒	S

# Einige mathematische Zeichen

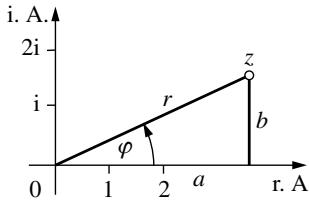
Zeichen	Erläuterung	Beispiel
<b>Analysis</b>		
Zahlbereiche		
$N$	Menge der <i>natürlichen</i> Zahlen	$2 \in N$
$Z$	Menge der <i>ganzen</i> Zahlen	$-2 \in Z$
$Q$	Menge der <i>rationalen</i> Zahlen	$1/3 \in Q$
$R$	Menge der <i>reellen</i> Zahlen	$\sqrt{2} \in R$
$C$	Menge der <i>komplexen</i> Zahlen	$1 + i \in C$
Intervalle		
$[a,b]$	<i>abgeschlossenes I.:</i> $\{x \mid x \in R, a \leqq x \leqq b\}$	$0 \in [0,1]$
$(a,b)$ oder $]a,b[$	<i>offenes I.:</i> $\{x \mid x \in R, a < x < b\}$	$0 \notin (0,1)$
$(a,b]$ oder $]a,b]$	<i>links offenes I.:</i> $\{x \mid x \in R, a < x \leqq b\}$	$(-\infty, c] = \{x \mid x \leqq c\}$
$[a,b)$ oder $[a,b[$	<i>rechts offenes I.:</i> $\{x \mid x \in R, a \leqq x < b\}$	$[d, \infty) = \{x \mid x \geqq d\}$
<b>Logik</b>		
$\neg$	<i>Negation</i> , »nicht«	
$\vee$	<i>Alternative</i> , »oder«	
$\wedge$	<i>Konjunktion</i> , »und«	
$\rightarrow$	<i>Implikation</i> , »wenn..., so«	
$\leftrightarrow$	<i>Äquivalenz</i> , »genau dann, wenn...«	
<b>Mengenlehre</b>		
$\{\}$	<i>endliche</i> Menge <i>unendliche</i> Menge	$\{1,2,3\}$ $\{1,3,5, \dots\}$
$\{x \mid E(x)\}$	Menge aller Elemente $x$ , die die Eigenschaft $E(x)$ haben	$\{x \mid x > 1\} = (1, \infty)$
$\in$	Element von	$a \in \{a,b,c\}$
$\notin$	nicht Element von	$d \notin \{a,b,c\}$
$=$	<i>Gleichheit</i> zweier Mengen $M_1 = M_2 : M_1$ und $M_2$ haben die gleichen Elemente	
$\subset$	<i>Teilmenge</i> von; enthalten in $M_1 \subset M_2 : M_1$ und $M_2$ haben die gleichen Elemente	$\{2,4\} \subset \{2,3,4\}$
$\cup$	<i>Vereinigung</i> von 2 Mengen $M_1 \cup M_2 = \{x \mid x \in M_1 \vee x \in M_2\}$	$\{1,2\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$
$\bigcup_{i=1}^n$	<i>Vereinigung</i> von $n$ Mengen $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$ $= \{x \mid x \in M_1 \vee x \in M_2 \vee \dots \vee x \in M_n\}$	
$\cap$	<i>Durchschnitt</i> von 2 Mengen $M_1 \cap M_2 = \{x \mid x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$	$\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$
$\bigcap_{i=1}^n$	<i>Durchschnitt</i> von $n$ Mengen $M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$ $= \{x \mid x \in M_1 \wedge x \in M_2 \wedge \dots \wedge x \in M_n\}$	
$\setminus$	<i>Differenz</i> von 2 Mengen $M_1 \setminus M_2 = \{x \mid x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}$	$\{1,2,3\} \setminus \{2,3\} = \{1\}$
$\emptyset$	<i>leere Menge</i> enthält überhaupt keine Elemente	
$\times$	<i>Produktmenge</i> $M_1 \times M_2 = \{(x,y) \mid x \in M_1 \text{ und } y \in M_2\}$	$\{2,5\} \times \{8\} = \{(2,8), (5,8)\}$

# 1 Komplexe Zahlen

**Imaginäre Einheit**  $i^2 = -1$     **Imaginäre Zahl**  $\sqrt{-a} = i \cdot \sqrt{a}$     ( $a > 0$ )  
**Potenzen**  $i^{4n} = 1$      $i^{4n+1} = i$      $i^{4n+2} = -1$      $i^{4n+3} = -i$      $i^{-n} = (-i)^n$     ( $n = 0, 1, \dots$ )

## Darstellungsformen

$$z = a + bi = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) = r \cdot e^{i\varphi}$$



$a$  Realteil von  $z$   
 $b$  Imaginärteil von  $z$   
 $r$  Betrag von  $z$   
 $\varphi$  Argument von  $z$   
 $a, b, r$  reelle Zahlen,  
 $r \geq 0, -\pi < \varphi \leq \pi$  (Hauptwert),  
 $\varphi$  bis auf ganzzahliges  
 Vielfaches von  $2\pi$  bestimmt

Umrechnungsformeln:

$$a = r \cdot \cos \varphi \quad b = r \cdot \sin \varphi$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \quad \tan \varphi = \frac{b}{a} \quad \varphi = \arctan \frac{b}{a} + \begin{cases} 0, & \text{falls } a > 0 \\ \pi, & \text{falls } a < 0, b \geq 0 \\ -\pi, & \text{falls } a < 0, b < 0 \end{cases}$$

**Euler'sche Formel**  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi \quad e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \cdot \sin \varphi$

## Addition und Subtraktion

$$z_1 \pm z_2 = (a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

## Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2) = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} \\ = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

## Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (r_2 \neq 0)$$

## Potenzieren (n ganzzahlig)

$$(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi) \quad (\text{Satz von Moivre})$$

$$z^n = [r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)]^n = r^n [\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)] = r^n e^{i(n\varphi)}$$

## Radizieren (n reell)

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left[ \cos \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} \right] = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}}$$

## Einheitswurzeln

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{k \cdot 2\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{k \cdot 2\pi}{n} = e^{i \frac{k \cdot 2\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

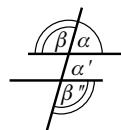
## Logarithmieren

$$\ln z = \ln(r e^{i\varphi}) = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

## 2 Geometrie

### Sätze, Strecken, Winkel, Punkte bei Dreieck und Kreis

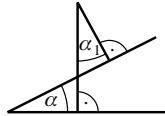
#### Winkel (an geschnittenen Parallelalen)



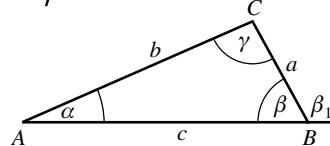
$$\alpha + \beta = 180^\circ \quad (\text{Nebenwinkel})$$

$$\alpha' = \alpha \quad (\text{Stufenwinkel})$$

$$\beta'' = \beta \quad (\text{Wechselwinkel})$$



$\alpha = \alpha_1$   
(da die Schenkel  
paarweise aufeinander  
senkrecht stehen)



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\beta_1 = \alpha + \gamma \quad (\text{Außenwinkel})$$

$$a < b \Leftrightarrow \alpha < \beta \quad a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta \quad a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta$$

$$a + b > c \quad a - b < c$$

(weitere Formeln durch zyklische Vertauschung)

Schnittpunkt der  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Höhen} \\ \text{Seitenhalbierenden} \\ \text{Winkelhalbierenden} \\ \text{Mittelsenkrechten} \end{array} \right\}$  = Schwerpunkt  
= Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises  
= Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises

#### Flächen- und Streckenbeziehungen

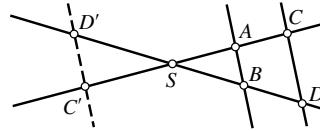
**Kongruenzsätze:** Kongruenz von Dreiecken ( $\cong$ ) bei Übereinstimmung in

1. zwei Seiten und eingeschlossenem Winkel (sws)
2. einer Seite und zwei gleichliegenden Winkel (wsW; swW)
3. drei Seiten (sss)
4. zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel (SsW)

**Ähnlichkeitssätze:** Ähnlichkeit von Dreiecken ( $\sim$ ) bei Übereinstimmung im (in)

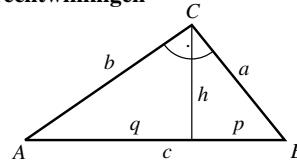
1. Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel
2. zwei Winkel
3. Verhältnis der drei Seiten
4. Verhältnis zweier Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel

#### Strahlensätze



$$\begin{aligned} \overline{SA} : \overline{SC} &= \overline{SB} : \overline{SD} \\ \overline{SA} : \overline{SC'} &= \overline{SB} : \overline{SD'} \\ \overline{AB} : \overline{CD} &= \overline{SA} : \overline{SC} = \overline{SB} : \overline{SD} \\ \overline{AB} : \overline{C'D'} &= \overline{SA} : \overline{SC'} = \overline{SB} : \overline{SD'} \end{aligned}$$

#### Sätze am rechtwinkligen Dreieck

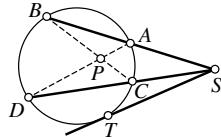


$$\text{Pythagoras: } a^2 + b^2 = c^2$$

$$\text{Höhensatz: } h^2 = pq$$

$$\text{Kathetensatz: } b^2 = cq, \quad a^2 = cp$$

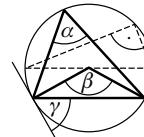
#### Kreis



$$\text{Sehnensatz} \quad \overline{PB} \cdot \overline{PC} = \overline{PA} \cdot \overline{PD}$$

$$\text{Sekantensatz} \quad \overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{SC} \cdot \overline{SD}$$

$$\text{Tangentensatz} \quad \overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{ST}^2$$



**Mittelpunkts- und Peripheriewinkel**  $\beta = 2\alpha$

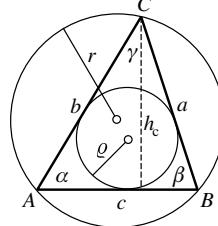
**Thales-Satz:** Umfangswinkel über Durchmesser  
ein Rechter

**Sehnentangentenwinkel**  $\gamma = \alpha$

## Flächeninhalt (A)

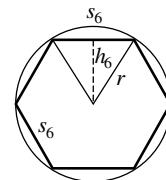
## Umfang (U)

## Längen

	A	U	(r Umkreisradius; $\varrho$ Inkreisradius)
<b>Dreieck</b>	$h$ Höhe $2s = a + b + c$ ;      weitere Formeln durch zyklische Vertauschung		
	$A_3 = \frac{1}{2} ch_c = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma = \varrho s = \frac{abc}{4r}$ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $= a^2 \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin \alpha} = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ $s = 4r \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$ $r = \frac{abc}{4A_3} = \frac{a}{2 \sin \alpha}$ $\varrho = 4r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$		
<b>gleichseitiges</b> ( $b = c = a$ )	$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$		$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ $r = \frac{\sqrt{3}}{3} a$ $\varrho = \frac{\sqrt{3}}{6} a$
<b>gleichschenklig</b> ( $a = b \neq c$ )	$\frac{1}{2} a^2 \sin \gamma = c^2 \frac{\sin^2 \alpha}{2 \sin \gamma} = \frac{c^2}{4} \tan \alpha$		$h_c = \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 - c^2}$
<b>Viereck</b>	$e, f$ Diagonen; $\varphi = \angle(e, f)$ ; $\varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$ oder $\frac{1}{2}(\beta + \delta)$ ; $2s = a + b + c + d$		
<b>allgemein</b>			$A_4 = e \cdot f \cdot \sin \varphi = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \varepsilon}$
<b>Quadrat</b>	$a^2$	$4a$	$e = \sqrt{2}a$ $r = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ $\varrho = \frac{1}{2}a$
<b>Parallelogramm</b>	$ah_a = bh_b$	$2(a+b)$	$e = \sqrt{a^2 + b^2}$ für Rechteck
<b>Trapez</b>	$\frac{1}{2}(a+c)h = mh$	$a + b + c + d$	$a \parallel c$ $\frac{h}{m}$ Höhe Mittelparallele
<b>Kreis</b>	$\pi r^2 = \frac{\pi}{4} d^2$	$2\pi r = \pi d$	$r$ Radius
<b>Sektor</b>	$\frac{1}{2} br$	$b = \frac{\pi r}{180^\circ} \alpha^\circ$	$d$ Durchmesser $b$ Bogenlänge über $\alpha$
<b>Segment</b>	$\frac{1}{2}[br - s(r-h)]$		$s$ Segmentsehne $h$ Bogenhöhe
<b>Ellipse</b>	$\pi ab$	$\approx \pi \left[ \frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab} \right]$	$a, b$ Halbachsen
<b>Parabel- abschnitt</b>	$\frac{4}{3}x_1y_1$	(Sehne durch Parabelpunkt $(x_1, y_1)$ senkrecht zur Achse der Parabel $y^2 = \pm 2px$ )	

## Einbeschriebenes regelmäßiges Vieleck      (n Anzahl der Ecken)

$$A_n = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{360^\circ}{n} \quad s_n = 2r \sin \frac{180^\circ}{n} \quad h_n = r \cos \frac{180^\circ}{n}$$



## Inhalt von Oberflächen ( $O$ ) und Mantelflächen ( $M$ ), Rauminhalte ( $V$ )

( $G$  Grundfläche  $h$  Höhe  $r, R$  Radius  $s$  Mantellinie)

2

	$O$	$M$	$V$	
<b>Kugel</b>	$4\pi R^2$		$\frac{4}{3}\pi R^3$	
<b>Kugelzone bzw. -schicht</b>		$2\pi hR$	$\frac{\pi h}{6}(3r^2 + 3r_1^2 + h^2)$	
<b>Kugelabschnitt (-segment)</b>	$\pi h(4R - h)$	$2\pi hR = (r^2 + h^2)\pi$	$\frac{\pi h}{6}(3r^2 + h^2) = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$	
<b>Kugelausschnitt (-sektor)</b>	$\pi R(2h + r)$		$\frac{2}{3}\pi hR^2$	
<b>Prisma</b>	$2G + M$		$G \cdot h$	
<b>Zylinder</b>			$G \cdot h$	
<b>gerader Kreiszylinder</b>	$2\pi r(h + r)$	$2\pi r h$	$\pi r^2 h$	
<b>Pyramide</b>			$\frac{1}{3}G \cdot h$	
<b>Pyramidenstumpf</b>	$G_1 + G_2 + M$		$\frac{h}{3}(G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2) \approx \frac{G_1 + G_2}{2}h$	
<b>Kegel</b>			$\frac{1}{3}G \cdot h$	
<b>gerader Kreiskegel</b>	$\pi r(r + s)$	$\pi r s$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$s = \sqrt{r^2 + h^2}$
<b>gerader Kreiskegelstumpf</b>	$\pi[r_1^2 + r_2^2 + s(r_1 + r_2)]$	$\pi s(r_1 + r_2)$	$\frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \approx \frac{\pi h}{2}(r_1^2 + r_2^2)$ $\frac{\pi h}{4}(r_1 + r_2)^2$	
<b>Ellipsoid</b>			$\frac{4}{3}\pi abc$	
<b>Rotationsellipsoid</b>		(Rotation um $a$ )	$\frac{4}{3}\pi ab^2$	$a, b, c$ Halbachsen
<b>Rotationsparaboloid</b>			$\pi ph^2$	$(y^2 = 2px$ rotiert um $x$ -Achse; $h = x$ )

# 13 Gewöhnliche Differentialgleichungen und Lösungsansatz

(Auswahl)

$$F(x, y, y') = 0$$

1. Ordnung

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

Trennung der Variablen:  $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx \quad H(y) = G(x) + C$

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{Ähnlichkeitsdifferentialgl.}$$

Subst.:  $z = \frac{y}{x} \quad y' = xz' + z \quad \int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \ln|x| + C$

## Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

### Allgemeine Hinweise für lineare Differentialgleichungen beliebiger Ordnung

#### Homogene lineare Differentialgleichungen

Eine homogene lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung hat genau  $n$  linear unabhängige Lösungen, deren Linearkombination die allgemeine Lösung  $y_H(x)$  der homogenen Differentialgleichung ist.

#### Inhomogene lineare Differentialgleichungen

Die allgemeine Lösung  $y_I(x)$  einer inhomogenen linearen Differentialgleichung gewinnt man aus der allgemeinen Lösung  $y_H(x)$  der zugehörigen homogenen Differentialgleichung durch Addition einer beliebigen partikulären Lösung  $y_S(x)$  der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y_I(x) = y_H(x) + y_S(x)$$

$y_S(x)$  erhält man u. a. durch das Verfahren der Variation der Konstanten: allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung mit Funktionen von  $x$  anstelle der Integrationskonstanten als Ansatz für die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung verwenden.

$a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x)$	Allgem. Form der lin. Dgl. 1. Ordn.
$y' + p(x)y = q(x)$	Normalform

$$p(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}; \quad q(x) = \frac{r(x)}{a_1(x)}$$

#### a) Lagrange

homogene Differentialgleichung  $y' + p(x)y = 0$ : **Trennung der Variablen**

$$y_H = C e^{-\int p(x) dx}$$

inhomogene Differentialgleichung: **Variation der Konstanten**

$$y = C(x)\psi(x) \quad \left( \psi(x) = e^{-\int p(x) dx} \right)$$

$$C'(x)\psi(x) + q(x) = 0; \quad C(x) = C_1 + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx$$

#### b) Bernoulli (Produktansatz)

(nur für lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung)

$$y = u \cdot v; \quad y' = u'v + uv'; \quad \text{in Differentialgleichung einsetzen}$$

$u$  oder  $v$  ausklammern; Klammerausdruck null setzen

$$y' + p(x)y + q(x)y^n = 0 \quad \text{Bernoulli'sche Dgl.}$$

Division durch  $(-y^n)$ ; Subst.:  $z = \frac{1}{y^{n-1}}$ ;  $z' = -(n-1)\frac{y'}{y^n}$  führt auf lin. Dgl. in  $z$  und  $x$

spez.:  $y' + p(x)y + q(x)y^2 = 0$ ;  $z = \frac{1}{y}$ ;  $z' = -\frac{y'}{y^2}$

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x) \quad \text{Riccati'sche Dgl.}$$

mit (geg. oder erratener) part. Lösung  $y = y_1(x)$  lösbar; Ansatz:  $y = y_1(x) + v(x)$  führt auf Bernoulli'sche Differentialgleichung ( $n = 2$ ) für  $v(x)$

$$y = x \cdot g(y') + h(y') \quad \text{d'Alembert'sche Dgl.}$$

$y' = p(x)$  in differenzierte Ausgangsgleichung einsetzen,  $\frac{dp}{dx}$  ausklammern; führt auf lineare Differentialgleichung:  $\frac{dx}{dp} + h(p)x + k(p) = 0$

Lösung in Parameterdarstellung:  $x = x(p, C)$ ;  $y = y(p, C)$

$$\text{spez.: } y = xy' + h(y') \quad \text{Clairaut'sche Dgl.}$$

$y' = p(x)$ ; weiter wie oben ergibt Dgl.:  $[x + h'(p)] \frac{dp}{dx} = 0$

$\frac{dp}{dx} = 0$ ,  $p = C$ ; allgem. Lösung:  $y = Cx + h(C)$

$[x + h'(p)] = 0$ ; singuläre Lösung in Parameterdarstellung:  $x = -h'(p)$   
 $y = -ph'(p) + h(p)$

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

1. **Exakte (vollst., totale) Dgl.**  $M_y = N_x$  (Integrabilitätsbedingung)

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = d\Phi(x, y)$  vollständiges Differential der Funktion  $\Phi(x, y)$

$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = M$ ;  $\Phi = \int M dx + G(y)$ ;  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = N$ ; allgemeine Lösung:  $\Phi(x, y) = C$

2. **Integrierender Faktor**

$\mu = \mu(x, y)$  so bestimmen, dass  $\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$  exakte Differentialgleichung

$$\frac{M_y - N_x}{N} = f(x) \quad \Rightarrow \quad \mu = \mu(x) = e^{\int f(x) dx}$$

$$\frac{M_y - N_x}{M} = f(y) \quad \Rightarrow \quad \mu = \mu(y) = e^{-\int f(y) dy}$$

$$\frac{M_y - N_x}{y \cdot N - x \cdot M} = f(z) \quad z = x \cdot y \quad \Rightarrow \quad \mu = \mu(z) = e^{\int f(z) dz}$$

$$\frac{(M_y - N_x) \cdot x^2}{y \cdot N + x \cdot M} = f(z) \quad z = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \mu = \mu(z) = e^{-\int f(z) dz}$$

13

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

## 2. Ordnung

### Bestimmte Glieder fehlen

$$y'' = f(x) \quad y^{(n)} = g(x)$$

#### unmittelbare Integration

**y kommt nicht vor**

$$y' = p(x) \quad y'' = p'$$

$$F(x, y', y'') = 0; \quad F(y', y'') = 0$$

$$\rightarrow F(x, p, p') = 0; \quad F(p, p') = 0$$

**x kommt explizit nicht vor**

$$y' = q(y) \quad y'' = \frac{dq}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = q \cdot \frac{dq}{dy}$$

$$F(x, y', y'') = 0$$

$$\rightarrow G\left(y, q, \frac{dq}{dy}\right) = 0$$

$$\text{Spezialfall: } y'' = f(y)$$

$$\text{auch: Multipl. m. } 2y'; \quad 2y''y' = \frac{d}{dx}y'^2$$

### Lineare Differenzialgleichungen 2. Ordnung

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Allgem. homog.} \\ \text{lin. Dgl. 2. Ordn.} \end{array}$$

Allgem. Lsg.:  $y_H(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$  (y<sub>1</sub>, y<sub>2</sub> partikuläre Lösungen)

### Bestimmung der partikulären Lösungen für ausgewählte Fälle

$$1. \quad a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0 \quad \text{konst. Koeffizienten}$$

Ansatz:  $y = e^{\lambda x}$  Charakterist. Gleichung:  $a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$

- a)  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  reell  $y_1 = e^{\lambda_1 x}$   $y_2 = e^{\lambda_2 x}$
- b)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$   $y_1 = e^{\lambda_0 x}$   $y_2 = x e^{\lambda_0 x}$
- c)  $\lambda_{1,2} = a \pm ib$   $y_1 = \cos(bx) e^{ax}$   $y_2 = \sin(bx) e^{ax}$

$$2. \quad a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0 \quad \text{homog. Euler'sche Dgl.}$$

Ansatz:  $y = x^\lambda$  Charakterist. Gleichung:  $a_2\lambda(\lambda - 1) + a_1\lambda + a_0 = 0$

- a)  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  reell  $y_1 = x^{\lambda_1}$   $y_2 = x^{\lambda_2}$
- b)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$   $y_1 = x^{\lambda_0}$   $y_2 = x^{\lambda_0} \ln x$
- c)  $\lambda_{1,2} = a \pm ib$   $y_1 = x^a \cos(b \ln x)$   $y_2 = x^a \sin(b \ln x)$

$$3. \quad x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0 \quad \text{Bessel'sche Dgl.}$$

$v$  nicht ganzzahlig:

$$J_v(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\mu+v}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu+v+1)} \quad J_{-v} = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\mu-v}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(-v+\mu+1)}$$

(Bessel'sche Funktionen 1. Art) (s. a. S. 51)

$v = n$  ganzzahlig

$$y_1 = J_n(x)$$

$$y_2 = N_n(x)$$

$$N_n(x) = \lim_{v \rightarrow n} \frac{\cos v\pi \cdot J_v(x) - J_{-v}(x)}{\sin v\pi} \quad (\text{Bessel'sche Funktionen 2. Art}) \quad (\text{s. a. S. 51})$$

# 16 Fehlerrechnung, Näherungsformeln und -verfahren

Fehler: Näherungswert (Istwert) – wahrer Wert (Sollwert)

Näherungswert	wahrer Wert	absoluter Fehler	relativer Fehler
$a$	$x$	$\varepsilon = a - x$	$\left  \frac{\varepsilon}{x} \right  \hat{=} \left  \frac{\varepsilon}{x} \right  \cdot 100 \%$

## Fehlerabschätzung beim Rechnen mit Näherungswerten (Methode der Fehlerschranken)

$k$ (fehlerbehaftete) Variable:	$x_1, x_2, \dots, x_k$
zu berechnende Funktion:	$f(x_1, x_2, \dots, x_k)$
absoluter Fehler von $f$ :	$\varepsilon_f$
Näherungswerte für die $x_i$ :	$a_i$
absolute Fehler für die $x_i$	$\varepsilon_i = a_i - x_i \quad (i = 1, 2, \dots, k)$
Schranken für die $\varepsilon_i$	$\Delta a_i \quad (\Delta a_i \geq  \varepsilon_i )$

Schranke für den absoluten Fehler ( $\varepsilon_f$ ) von  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ :

$$\Delta f = \Delta a_1 |f_{x_1}(a_1, \dots, a_k)| + \Delta a_2 |f_{x_2}(a_1, \dots, a_k)| + \dots + \Delta a_k |f_{x_k}(a_1, \dots, a_k)| \quad (\Delta f \geq \varepsilon_f)$$

Anwendung auf elementare Rechenoperationen

$x, y$  wahre Werte  $a, b$  Näherungswerte  $\Delta a, \Delta b$  Fehlerschranken

$f(x, y)$	Schranken für den absoluten Fehler $\Delta f$	Schranken für den relativen Fehler $\Delta f /  f $
$x \pm y$	$\Delta a + \Delta b$	$(\Delta a + \Delta b) /  a \pm b $
$x \cdot y$	$\Delta a \cdot  b  + \Delta b \cdot  a $	$\Delta a /  a  + \Delta b /  b $
$x/y$	$\frac{\Delta a \cdot  b  + \Delta b \cdot  a }{b^2}$	$\frac{\Delta a}{ a } + \frac{\Delta b}{ b }$
$x^n (n \neq 0, 1)$	$\Delta a  n a^{n-1} $	$ n  \Delta a /  a $

Messreihe  $a_1, a_2, \dots, a_n$  einer Größe  $x$

$$\text{Näherungswert für } x: \quad \bar{a} = \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \quad (\text{arithmetisches Mittel})$$

$$\text{durchschnittlicher Fehler:} \quad \overline{\Delta a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_i - \bar{a}|$$

$$\text{mittlerer Fehler:} \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2} \quad (\text{s. S. 100})$$

16

## Methode der kleinsten Quadrate (Gauß)

Parameter  $t_1, t_2, \dots, t_k$  der Funktion  $f(x, t_1, t_2, \dots, t_k)$  ( $f$  stetig partiell differenzierbar) so bestimmen, dass die Funktion die Punkte  $P_i(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $n > k$ ) möglichst genau annähert

Forderung:

$$Q(t_1, t_2, \dots, t_k) = \sum_{i=1}^n [f(x_i, t_1, t_2, \dots, t_k) - y_i]^2 \rightarrow \text{Min}$$

Normalengleichungen zur Berechnung der Parameter  $t_1, t_2, \dots, t_k$ :

$$\frac{\partial Q(t_1, t_2, \dots, t_k)}{\partial t_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

## Interpolation

Die Gleichung der Parabel  $n$ -ter Ordnung | Die ganze rationale Funktion  $n$ -ten Grades  
 $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad a_n \neq 0,$   
 die durch  $(n+1)$  vorgegebene Punkte | für die zu  $(n+1)$  voneinander verschiedenen  
 $P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1), \dots, P_n(x_n, y_n)$  hindurch- | Werten  $x_0, x_1, \dots, x_n$  die  $(n+1)$  Funktionswerte  
 geht, |  $y_0, y_1, \dots, y_n$  vorgeschrieben sind,  
 kann durch folgenden **Ansatz** bestimmt werden:

$$y = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + c_i(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1}) + \dots + c_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

### nach Newton

Die Koeffizienten  $c_0, c_1, \dots, c_i, \dots, c_n$  werden schrittweise dadurch berechnet, dass für  $x = x_0, x_1, \dots, x_n$  jeweils  $y$  die zugehörigen Werte  $y_0, y_1, \dots, y_n$  annimmt.

### Steigungsschema

$x_i$	$y_i = S_i^0$	$S_i^1$	$S_i^2$	$S_i^3$	...	$k$ -te Steigung:
$x_0$	$y_0 = S_0^0$					$S_i^k = \frac{S_i^{k-1} - S_{k-1}^{k-1}}{x_i - x_{k-1}}$
$x_1$	$y_1$	$S_1^1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$				$k = 1, 2, \dots, n$
$x_2$	$y_2$	$S_2^1 = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$	$S_2^2 = \frac{S_2^1 - S_1^1}{x_2 - x_1}$			$i = k, k+1, \dots, n$
$x_3$	$y_3$	$S_3^1 = \frac{y_3 - y_0}{x_3 - x_0}$	$S_3^2 = \frac{S_3^1 - S_1^1}{x_3 - x_1}$	$S_3^3 = \frac{S_3^2 - S_2^2}{x_3 - x_2}$		$c_0 = y_0 = S_0^0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$c_i = S_i^i;$
						$i = 0, 1, \dots, n$

**Differenzschema bei äquidistanten Argumenten**  $(x_{i+1} - x_i = h)$

					$\Delta^n$ $n$ -te Differenzspalte
$x_0$	$y_0$				z. B. $\Delta^1 y_2 = y_3 - y_2$
$x_1$	$y_1$	$\Delta^1 y_0$	$\Delta^2 y_0$		$\Delta^2 y_1 = \Delta^1 y_2 - \Delta^1 y_1$
$x_2$	$y_2$	$\Delta^1 y_1$	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$	$c_0 = y_0 \quad c_1 = \frac{\Delta^1 y_0}{h}$
$x_3$	$y_3$	$\Delta^1 y_2$	$\vdots$	$\vdots$	$c_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
					$c_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$

### nach Lagrange

**Ansatz:**  $y = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + \dots + L_n(x)y_n$

mit  $L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$   
 (Das Glied mit dem Index  $i$  fehlt;  $i = 0, 1, \dots, n$ )

## Näherungslösung von Gleichungen mit einer Unbekannten

### Lineare Interpolation (Regula falsi – Sekantenverfahren)

$$f(x) = 0$$

$x_0$  gesuchte Lösung:  $f(x) \equiv 0$

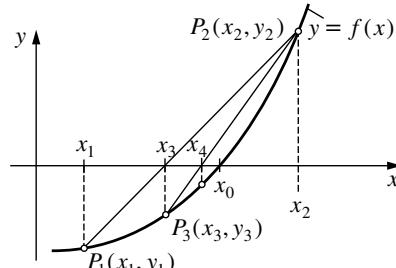
$y = f(x)$  zugehörige Funktion.

Man geht von Werten  $x_1$  und  $x_2$  aus, die so zu wählen sind, dass  $f(x_1)$  und  $f(x_2)$  verschiedene Vorzeichen haben.

Die Sekante  $P_1P_2$  schneidet die  $x$ -Achse in einem Punkt mit dem Näherungswert

$$x_3 = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \cdot y_1$$

Fortsetzung des Verfahrens mit  $x_3$  und  $x_2$ ; usw.



### Newton'sches Näherungsverfahren (Tangentenverfahren)

$$f(x) = 0$$

$x_0$  gesuchte Lösung:  $f(x_0) = 0$

$y = f(x)$  zugehörige Funktion.

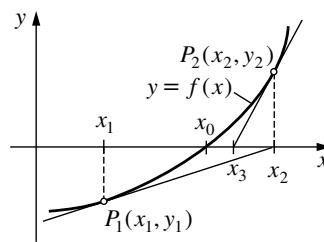
$x_1$  aus der Umgebung von  $x_0$  wählen oder grafisch bestimmen.

Die Tangente in  $P_1(x_1, y_1)$  an die Kurve  $y = f(x)$  schneidet die  $x$ -Achse in einem Punkt mit dem Näherungswert

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (f'(x_1) \neq 0)$$

Fortsetzung des Verfahrens mit  $P_2(x_2, y_2)$ , was den verbesserten Näherungswert  $x_3$  ergibt; usw.

$$\text{Allgemein: Näherungswert } x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (n = 2, 3, 4, \dots; f'(x_{n-1}) \neq 0)$$



## Näherungsweise Berechnung eines bestimmten Integrals

$n$  Anzahl der Teilintervalle der Länge  $x_{i+1} - x_i = h = \frac{b-a}{n}$ ,  $n$  geradzahlig;  $i = 0, 1, \dots, n-1$

$$u = y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1} \quad (\text{Ordinaten mit ungeradem Index}) \quad y_0 = y_a, y_n = y_b$$

$$g = y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2} \quad (\text{Ordinaten mit geradem Index})$$

### Sehnen-Trapez-Formel $(n \text{ bel.})$

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [y_a + y_b + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})] = \frac{h}{2}(y_a + y_b + 2u + 2g)$$

### Tangenten-Trapez-Formel

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx 2h [y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}] = h \cdot 2u$$

### Simpson'sche Regel

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [(y_a + y_b) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})] \\ = \frac{h}{3}(y_a + y_b + 4u + 2g)$$

# Sachwortverzeichnis

## A

- Ableitung
  - der Umkehrfunktion 57
  - , erste 54
  - , höhere 54
  - , logarithmische 57
  - , partielle 66
- Additionstheoreme 43
- Ähnlichkeitsdifferentialgleichung 80
- Ähnlichkeitsätze 2
- Alternativhypothese 103
- analytische Geometrie 26
- Annahmebereich 103
- Areafunktion 42
- Austauschverfahren 12
- Axiome von Kolmogoroff 95

## B

- Bartlett-Test 105
- Bayes'sche Formel 95
- Bereichsintegral
  - , ebenes 68
  - , ebenes; Transformation 69
  - , räumliches 69
  - , räumliches; Transformation 70
- Bernoulli-L'Hospital'sche Regel 54
- Bernoulli'sches Schema 95
- Bernoulli'sches Separationsverfahren 86
- Bessel'sche Funktion 51
  - 1. Art 82
  - 2. Art 82
- bestimmtes Riemann'sches Integral 55
- Binomialkoeffizient 94
- Binomialverteilung 97
- Binomische Formel 94
- Binomische Reihe 48
- Binomischer Satz 94
- Bogendifferenzial 79
- Bogenelement 75
- Bogenlänge
  - einer ebenen Kurve 79
  - einer räumlichen Kurve 79

## D

- Definitionsbereich 34
- Determinante 6
  - , Rechenregeln 7
  - , Vandermonde'sche 10
  - , Wronski'sche 10
- Differential 54
- , vollständiges 67

- Differentialgeometrie 78
- Differentialgleichung
  - , Bernoulli'sche 81
  - , Bessel'sche 82
  - , Clairaut'sche 81
  - , d'Alembert'sche 81
  - , Euler'sche, homogene 82
  - , Euler'sche,  $n$ -ter Ordnung 85
  - , exakte (vollständige, totale) 81
  - , gewöhnliche 80
  - , homogene lineare 80
  - , inhomogene Euler'sche 83
  - , inhomogene lineare 80
  - , integrierender Faktor 81
  - , lineare 1. Ordnung 80
  - , lineare 2. Ordnung 82
  - , lineare, mit konstanten Koeffizienten 84
  - , partielle 86
  - , Riccati'sche 81
- Differentialgleichungssystem 88
  - , lineares homogenes 88
  - , lineares inhomogenes 88
- Differentialoperator 76
- Differentialquotient 54
- Differentialrechnung
  - , Mittelwertsätze 54
  - von Funktionen mehrerer Variabler 66
- Differenziation
  - , implizite 67
  - von Parameterintegralen 68
- Differenzierungsformel 56
- Differenzierungsregeln 57
  - für Vektorfunktionen 75
- differenzierbar
  - , linksseitig 54
  - , rechtsseitig 54
- Differenzschema 90
- Divergenz 32
- Divergenz eines Vektorfeldes 76
- Dreieck 2
  - , schiefwinkliges 44
  - , sphärisches 46
- dualer Simplexalgorithmus 18

## E

- Ebene
  - im Raum, Gleichungsform 29
  - im Raum, Schnittwinkel 30
- ebene Kurve
  - , Anstieg 79
  - , Bogendifferenzial 79

–, Bogenlänge 79

–, Evolente 79

–, Evolute 79

–, Krümmung 79

Einheitswurzeln 1

Ellipse 3

Ellipsoid 4

Erwartungswert 96, 100

Euler'sche Formel 1

Euler'sche Konstante 53

Evolente 79

Evolute 79

Exponentialfunktionen 37

Extrempunkt 65

Extremum

–, lokales 67

–, lokales; unter Nebenbedingungen 67

Exzess 96

## F

Fakultät 51

Fehler

–, durchschnittlicher 89

–, mittlerer 89

Fehlerrechnung 89

Fehlerschranke 89

Feld

–, skalares 75

–, Vektor- 75

Fläche

– zweiter Ordnung 30

Fourier-Entwicklung 50

Fundamentalebereich 68 f.

Fundamentalsatz der Algebra 37

Funktion 34

–, Annäherung durch Polynome 92

–, Area- 42

–, Bessel'sche 51

– einer unabhängigen Veränderlichen 34

–, Gamma- 51

–, gebrochene rationale 38

–, gerade 34

–, Grenzwert 34

–, hyperbolische 41

–, inverse 34

–, Orthogonalsystem 53

–, rationale 37

–, Stetigkeit 34

–, trigonometrische 39

–, ungerade 34

–, zyklometrische 42

Funktionaldeterminante 10

Funktionenreihen 47

## G

Gamma-Funktion 51

Gauß'sche Fehlerfunktion 52

Gauß'scher Algorithmus 12

Gauß'scher Integralsatz 77

Gauß'sches Fehlerintegral 52

geometrische Reihe 33

Gerade

– im Raum 29

– im Raum, Schnittwinkel 29

– in der Ebene, Gleichungsform 26

–, Schnittwinkel 27

Geradengleichung 26

Gleichung

–, lineare homogene 86

–, quasilineare 86

Gleichungssystem 11

–, Lösung von linearen 11

Gradient des Skalarfeldes 76

Grenzwert 32, 34, 66

Grundintegral 56

Guldin'sche Regeln 65

## H

Halbseitenformeln 45

Halbwinkelformeln 45

Halbwinkelsatz 44

Häufigkeit

–, absolute 95, 102

–, relative 95, 102

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung 55

Höhensatz 2

Horizontalwendepunkt 65

Horner-Schema 38

Hyperboloid 30

Hypothese 103

## I

Inhalt 73

Integral

–, bestimmtes 55

– gebrochen rationaler Funktionen 64

–, unbestimmtes 55

–, uneigentliches 55

Integralexponentialfunktion 53

Integralkosinus 53

Integrallogarithmus 53

Integralrechnung

–, Mittelwertsatz 55

– von Funktionen mehrerer Variabler 68

Integralsinus 53

Integrand 55

Integration

– durch Substitution 61

–, partielle 61

– von Parameterintegralen 68

Integrationskonstante 55

Integrationsregeln 57

Integrationsvariable 55

integrierender Faktor 81

Interpolation 90

–, lineare 91

– nach Lagrange 90

– nach Newton 90

## K

Kathetensatz 2

Kegel 4, 30

Kegelschnitt

–, Diskussion 28

Kegelschnittsgleichung 27

–, Ellipse 27

–, Hyperbel 27

–, Kreis 27

–, Parabel 27

Kettenregel 57, 67

Koeffizient

–, konstanter 82

Kolmogorov-Test 105

Kombination 94

Kombinatorik 94

komplexe Zahlen 1

Konfidenzgrenze 103, 108

Konfidenzintervall 108

Kongruenzsätze 2

konstanter Koeffizient 82

Konvergenz 32

Konvergenzkriterien 33

Koordinaten

–, kartesische 34, 78

–, Polar- 34, 78

Korrelation 112

–, Bestimmtheitsmaß 112

–, Unbestimmtheitsmaß 112

Korrelationskoeffizient 101, 112

–, multipler linearer 112

–, partieller linearer 112

Kosinussatz 44

Kovarianz 100 f.

–, empirische 109

Kreis 2

Kreuzprodukt 24

kritischer Bereich 103 f.

Krümmung 65

– einer ebenen Kurve 79

Kugel 4, 30

Kugelkoordinaten 70

Kurvenintegral 71

–, 1. Art 71

–, 2. Art 71

## L

Länge 73

Laplacegleichung 87

Laplace'scher Operator 76

Leibniz'sche Sektorformel 74

Likelihoodfunktion 107

Likelihoodprinzip 107

lineare homogene Gleichung 86

lineare Optimierung 13

lineare Optimierungsaufgabe 13

–, duale 18

–, Lösung 14

Linearfaktoren 37

Logarithmengesetze 36

Logarithmus 36

Logarithmusfunktionen 37

Longitudinalschwingungen eines Stabes 87

## M

MacLaurin-Reihe 92

Mac-Laurin'sche Reihe 47

Mantelfläche 65

Masse 73

Massenschwerpunktskoordinaten 74

Matrix 5

–, Rechenoperationen 8

Maximum-Likelihood-Verfahren 107

Median 96, 102

Methode der kleinsten Quadrate 89

Mittelwertsatz der Integralrechnung 55

Mittelwertsätze der Differenzialrechnung 54

Modalwert 96, 102

Moment  $p$ -ter Ordnung 96, 102

Momentenmethode 107

Monotonie 32, 34

–, Funktion 34

–, Zahlenfolge 32

## N

Nabla-Operator 76

Näherungswert 89

Neper'sche Analogien 45

Neper'sche Regel 46

Newton'sches Näherungsverfahren 91

Normale

– einer ebenen Kurve 78

Normalenabschnitt 78

Normalengleichung 89

Normalform 13

## O

Oberflächenintegral 72

–, 1. Art 72

–, 2. Art 72

Optimierung

–, lineare 13

Orthogonalsystem 53

## P

Paraboloid 30

Parameterdarstellung 34, 78

Parameterintegral 68  
 –, Differenziation 68  
 –, Integration 68  
 Partialbruchzerlegung 64  
 partielle Differenzialgleichung 86  
 Permutation 94  
 Polarkoordinaten 26  
 Potenz 35  
 Potenzfunktionen 35  
 Potenzgesetze 35  
 Potenzialfeld 76  
 Potenzreihe 47, 85  
 –, Konvergenz 47  
 –, Konvergenzintervall 47  
 –, Konvergenzradius 47  
 Prinzip des Cavalieri 73  
 Prisma 4  
 Produktansatz 80  
 Produktregel 57  
 Punktschätzung  
 –, effektiv 107  
 –, erwartungstreu 107  
 –, konsistent 107  
 Pyramide 4  
 Pythagoras 2

**Q**  
 Quantil  $p$ -ter Ordnung 96  
 quasilineare Gleichung 86  
 Quotientenregel 57

**R**  
 Rangkorrelation 113  
 räumliche Kurve  
 –, Bogenlänge 79  
 Regel von Bernoulli-L'Hospital 54  
 Regression 109  
 –, lineare 109  
 –, mehrfache lineare 111  
 Regressionsfunktion  
 –, nichtlineare 110  
 Regressionsgerade 110  
 Regressionskoeffizient 109  
 –, multipler 111  
 Regula falsi 91  
 Reihe  
 –, binomische 48  
 –, Funktionenreihe 47  
 –, geometrische 33  
 –, Konvergenzkriterien 33  
 – mit konstanten Gliedern 33  
 –, Taylor'sche 47  
 Reihenentwicklung 85  
 Rest  
 –,  $\chi^2$ -Anpassungs- 104  
 Richtungsableitung 66, 76

Rotation eines Vektorfeldes 77  
 Rotationskörper 65  
 –, Mantelfläche 65  
 –, Volumen 65

**S**  
 Schätzmethode 107  
 –, bei Exponentialtyp 107  
 –, Maximum-Likelihood-Verfahren 107  
 –, Momentenmethode 107  
 Schätzung 107  
 –, Bereichs- 108  
 –, effektiv 107  
 –, erwartungstreu 107  
 –, konsistent 107  
 –, Punkt- 107  
 Schiefe 96  
 Schnittwinkel 27  
 Schwerpunkt  
 –, geometrischer 74  
 Sehnen-Trapez-Formel 91  
 Seitenkosinussatz 45  
 Sekantenverfahren 91  
 Signifikanzniveau 103  
 Simplexalgorithmus 16  
 –, dualer 18  
 Simplexmethode 16  
 Simplextableau 14  
 Simpson'sche Regel 91  
 Sinussatz 44 f.  
 skalares Produkt 23  
 Spatprodukt 24  
 Stammfunktion 55  
 Standardabweichung 89, 102  
 Statistik 102  
 –, Tabellen 114–121  
 Steigungsschema 90  
 Stetigkeit 34, 66  
 Stichprobenmittel 102  
 Stichprobenstreuung 102  
 Stokes'scher Integralsatz 77  
 Störgliedansatz 83 f.  
 Strahlensätze 2  
 Strecke 26  
 Streuung 96  
 Subnormale 78  
 Subtangente 78

**T**  
 Tangenssatz 44  
 Tangente  
 – einer ebenen Kurve 78  
 Tangentenabschnitt 78  
 Tangenten-Trapez-Formel 91  
 Tangentenvektor 75  
 Tangentenverfahren 91

- Taylor-Reihe 85  
 Taylor'sche Formel  
 – für Funktionen einer Variablen 92  
 – für Funktionen zweier Variablen 93  
 – für Polynome 92  
 Taylor'sche Reihe 47  
 Test  
 –, Bartlett- 105  
 –,  $\chi^2$ - 104  
 –, Kolmogorov- 105  
 –, Vier-Felder- $\chi^2$ - 113  
 – von Verteilungen 104  
 – zum Signifikanzniveau 104  
 Testen 103  
 Testgröße 103  
 Testverfahren 103  
 Thales-Satz 2  
 Trägheitsmoment 73  
 Transversalschwingungen eines Stabes 87  
 Trennung der Variablen 80  
 Trigonometrie  
 –, ebene 44  
 –, sphärische 45  
 Tschebyschew'sche Ungleichung 96
- V**
- Vandermonde'sche Determinante 10  
 Varianz 96  
 Varianzanalyse 106  
 Variation 94  
 Variation der Konstanten 80, 83 f.  
 Variationsbreite 102  
 Variationskoeffizient 102  
 Vektor  
 –, Linearkombination 25  
 Vektoranalysis 75  
 Vektoren 23  
 Vektorfeld 75  
 –, Divergenz 76  
 –, quellenfreies 76  
 –, Rotation 77  
 –, wirbelfreies 77  
 Vektorfunktion 75  
 Vektorprodukt 24  
 Vektorraum 25  
 –, Basis 25  
 –, Dimension 25  
 –, euklidischer 25  
 Verteilung  
 –,  $\chi^2$ - 99  
 –, diskrete 97  
 –,  $F$ - 99  
 –, Gamma- 99  
 –, geometrische 97  
 –, Gleich- 98  
 –, hypergeometrische 97  
 –, mehrdimensionale 100  
 –, negative Binomial- 97  
 –, Normal- 98  
 –, Normal-, zweidimensionale 101  
 –, Poisson- 97  
 –, Rand- 100 f.  
 –, stetige 98  
 –, Testen 104  
 –,  $t$ -(Student-)- 99  
 –, Weibull- 99  
 Verteilungsdichte 96  
 Verteilungsfunktion 96, 100  
 –, empirische 102  
 Vertrauengrenze 103, 108  
 Vertrauensintervall 108 f., 111  
 Vertrauenswahrscheinlichkeit 108  
 Viereck 3  
 Vieta'scher Wurzelsatz 38  
 Volumen 65, 73
- W**
- Wahrscheinlichkeit 95  
 –, bedingte 95  
 –, totale 95  
 Wahrscheinlichkeitsrechnung 95  
 Wärmeleitungsgleichung 87  
 Wendepunkt 65  
 Wertebereich 34  
 Winkelkosinussatz 45  
 Wronski'sche Determinante 10  
 Wurzel 35  
 Wurzelfunktionen 36  
 Wurzelgesetze 36
- Z**
- Zahlenfolge 32  
 –, arithmetische 32  
 –, Divergenz 32  
 –, geometrische 32  
 –, Konvergenz 32  
 Zentralwert 102  
 Zufallsgröße 96  
 zyklotomische Funktion 42  
 Zylinder 4, 30  
 Zylinderkoordinaten 70