

Formelsammlungen

Formelsammlung Höhere Mathematik

von
Wilhelm Göhler, Barbara Ralle

17., bearb. Aufl.

Formelsammlung Höhere Mathematik – Göhler / Ralle

schnell und portofrei erhältlich bei beck-shop.de DIE FACHBUCHHANDLUNG

Thematische Gliederung:

[Mathematik Allgemein](#)

Harri Deutsch 2011

Verlag C.H. Beck im Internet:

www.beck.de

ISBN 978 3 8171 1881 6

W. Göhler

Formelsammlung Höhere Mathematik

Zusammengestellt von Wilhelm Göhler
Bearbeitet von Dipl.-Math. Barbara Ralle
17. Auflage



Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH
Gräfrstraße 47
60486 Frankfurt am Main
verlag@harri-deutsch.de
www.harri-deutsch.de

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-8171-1881-6

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches – oder von Teilen daraus – sind vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet werden. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Der Inhalt des Werkes wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren und Verlag für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler keine Haftung.

17. Auflage, 2011

© Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2011

Satz: Satzherstellung Dr. Naake, Brand-Erbisdorf <www.naake-satz.de>

Druck: freiburger graphische betriebe <www.fgb.de>

Printed in Germany

Vorwort

Die Notwendigkeit und der Zweck von Wissensspeichern in einer Zeit der sprunghaften Entwicklung und Erweiterung der Wissenschaft bedürfen keiner besonderen Begründung. Mit dem vorliegenden kleinen Wissensspeicher »Höhere Mathematik – Formeln und Hinweise« soll nun den bereits vorhandenen Formelsammlungen nicht eine weitere, sondern eine anders geartete hinzugefügt werden. Aufbauend auf den Kenntnissen der Elementarmathematik, an deren wichtigste Formeln und Sätze aus Geometrie, Arithmetik und Goniometrie erinnert wird, wurden in den einzelnen Gebieten der höheren Mathematik nur die wesentlichen Formeln aufgenommen, die im Rahmen der Grundvorlesungen an den Hoch- und Fachschulen behandelt werden. Das gleiche gilt für die Auswahl der Integrationsmethoden und Typen von Differentialgleichungen, deren Lösungswege jeweils angedeutet werden.

Zum leichteren Aufsuchen der Formeln und Beziehungen wurde – obwohl eine Formelsammlung kein Lehrbuch sein kann und soll – dem Wissensspeicher die Systematik eines Lehrbuches bzw. einer Vorlesung zugrunde gelegt, und zwar sowohl im einzelnen als auch insgesamt, ohne daß allerdings Überschneidungen und Verlagerungen gänzlich vermieden werden konnten. Die kurzgefaßten Definitionen und Erläuterungen am Anfang jedes Gebietes stellen Erinnerungshilfen für die nachfolgenden Formeln dar. Neben der Vermittlung von mathematischem Wissen und rechnerischen Fertigkeiten ist es die Hauptaufgabe einer Vorlesung und damit auch des Wissensspeichers, das mathematische, logische Denken zu entwickeln. Beides, Systematik und Logik, sollen in erster Linie auch den Weg weisen, auf dem man die jeweils gesuchte Formel finden kann. Wenn sich der Leser die Mühe gemacht hat, die Formelsammlung im Überblick zur Kenntnis zu nehmen, wird er das Gesuchte schneller finden, als es mit dem Sachwörterverzeichnis möglich ist. Auch werden bewußte Erfahrungen und steter Gebrauch das Auffinden beschleunigen.

Wenn an manchen Stellen auf die Literatur verwiesen oder gelegentlich ein Hinweis weggelassen wurde, so geschah das aus Platzgründen, da nicht zuletzt der Übersichtlichkeit wegen der Umfang des Wissensspeichers begrenzt werden mußte.

Es ist die Absicht des Verfassers, mit diesem kleinen Wissensspeicher allen Studierenden ein Arbeitsmittel in die Hand zu geben, das die Formulierung und den Ansatz mathematischer Aufgaben und damit deren Lösung erleichtert.

W. Göhler

Vorwort zur 17. Auflage

Es ist schön zu sehen, dass die vor über 40 Jahren von meinem Vater erstmals veröffentlichte Formelsammlung immer mehr Studierenden das Eindringen in die Mathematik erleichtert. Mit dazu beigetragen hat natürlich die ständige Aktualisierung und Anpassung des Inhalts an die Bedürfnisse der Mathematikausbildung unserer Hochschulen.

Für die mir dabei erwiesene fachkundige Unterstützung von Mathematikern der TU Bergakademie Freiberg, insbesondere Herrn Dr. A. Bellmann, sowie Herrn Prof. Dr. Paditz von der Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden möchte ich mich an dieser Stelle herzlich bedanken.

Mein Dank gilt auch dem Verlag Harri Deutsch für die gute Zusammenarbeit.

Hinweise und Vorschläge zur Verbesserung des Inhalts oder der Gestaltung der nächsten Auflage nimmt der Verlag gern entgegen.

B. Ralle

Inhaltsverzeichnis

1	Komplexe Zahlen	1	⇒
2	Geometrie	2	⇒
3	Matrizen und Determinanten	5	⇒
4	Lineare Optimierung	13	⇒
5	Vektoren	23	⇒
6	Analytische Geometrie	26	⇒
7	Zahlenfolgen und Reihen mit konstanten Gliedern	32	⇒
8	Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen	34	⇒
9	Differenzial- und Integralrechnung	54	⇒
10	Differenzial- und Integralrechnung von Funktionen mehrerer Variabler	66	⇒
11	Vektoranalysis	75	⇒
12	Differenzialgeometrie	78	⇒
13	Gewöhnliche Differenzialgleichungen und Lösungsansatz	80	⇒
14	Partielle Differenzialgleichungen	86	⇒
15	Lineare Systeme von Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	88	⇒
16	Fehlerrechnung, Näherungsformeln und -verfahren	89	⇒
17	Kombinatorik	94	⇒
18	Wahrscheinlichkeitsrechnung	95	⇒
19	Mathematische Statistik	102	⇒
20	Tabellen zur Statistik	114	⇒
	Sachwortverzeichnis	123	⇒

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
S

Einige mathematische Zeichen

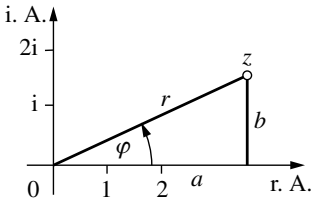
Zeichen	Erläuterung	Beispiel
Analysis		
Zahlbereiche		
N	Menge der <i>natürlichen</i> Zahlen	$2 \in N$
Z	Menge der <i>ganzen</i> Zahlen	$-2 \in Z$
Q	Menge der <i>rationalen</i> Zahlen	$1/3 \in Q$
R	Menge der <i>reellen</i> Zahlen	$\sqrt{2} \in R$
C	Menge der <i>komplexen</i> Zahlen	$1 + i \in C$
Intervalle		
$[a,b]$	<i>abgeschlossenes</i> I.: $\{x \mid x \in R, a \leq x \leq b\}$	$0 \in [0,1]$
(a,b) oder $]a,b[$	<i>offenes</i> I.: $\{x \mid x \in R, a < x < b\}$	$0 \notin (0,1)$
$[a,b)$ oder $]a,b]$	<i>links offenes</i> I.: $\{x \mid x \in R, a < x \leq b\}$	$(-\infty, c] = \{x \mid x \leq c\}$
$[a,b)$ oder $]a,b]$	<i>rechts offenes</i> I.: $\{x \mid x \in R, a \leq x < b\}$	$[d, \infty) = \{x \mid x \geq d\}$
Logik		
\neg	<i>Negation</i> , »nicht«	
\vee	<i>Alternative</i> , »oder«	
\wedge	<i>Konjunktion</i> , »und«	
\rightarrow	<i>Implikation</i> , »wenn... so«	
\leftrightarrow	<i>Äquivalenz</i> , »genau dann, wenn...«	
Mengenlehre		
$\{ \quad \}$	<i>endliche</i> Menge	$\{1,2,3\}$
$\{x \mid E(x)\}$	<i>unendliche</i> Menge Menge aller Elemente x , die die Eigenschaft $E(x)$ haben	$\{1,3,5,\dots\}$ $\{x \mid x > 1\} = (1,\infty)$
\in	Element von	$a \in \{a,b,c\}$
\notin	nicht Element von	$d \notin \{a,b,c\}$
$=$	<i>Gleichheit</i> zweier Mengen $M_1 = M_2$: M_1 und M_2 haben die gleichen Elemente	
\subset	<i>Teilmenge</i> von; enthalten in $M_1 \subset M_2$: jedes Element von M_1 ist auch Element von M_2	$\{2,4\} \subset \{2,3,4\}$
\cup	<i>Vereinigung</i> von 2 Mengen $M_1 \cup M_2 = \{x \mid x \in M_1 \vee x \in M_2\}$	$\{1,2\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$
$\bigcup_{i=1}^n$	<i>Vereinigung</i> von n Mengen $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$ $= \{x \mid x \in M_1 \vee x \in M_2 \vee \dots \vee x \in M_n\}$	
\cap	<i>Durchschnitt</i> von 2 Mengen $M_1 \cap M_2 = \{x \mid x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$	$\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$
$\bigcap_{i=1}^n$	<i>Durchschnitt</i> von n Mengen $M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$ $= \{x \mid x \in M_1 \wedge x \in M_2 \wedge \dots \wedge x \in M_n\}$	
\setminus	<i>Differenz</i> von 2 Mengen $M_1 \setminus M_2 = \{x \mid x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}$	$\{1,2,3\} \setminus \{2,3\} = \{1\}$
\emptyset	<i>leere</i> Menge enthält überhaupt keine Elemente	
\times	<i>Produktmenge</i> $M_1 \times M_2 = \{(x,y) \mid x \in M_1 \text{ und } y \in M_2\}$	$\{2,5\} \times \{8\} = \{(2,8),(5,8)\}$

1 Komplexe Zahlen

Imaginäre Einheit $i^2 = -1$ **Imaginäre Zahl** $\sqrt{-a} = i \cdot \sqrt{a} \quad (a > 0)$
Potenzen $i^{4n} = 1$ $i^{4n+1} = i$ $i^{4n+2} = -1$ $i^{4n+3} = -i$ $i^{-n} = (-i)^n \quad (n = 0, 1, \dots)$

Darstellungsformen

$$z = a + bi = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) = r \cdot e^{i\varphi}$$



a Realteil von z
 b Imaginärteil von z
 r Betrag von z
 φ Argument von z
 a, b, r reelle Zahlen,
 $r \geq 0, -\pi < \varphi \leq \pi$ (Hauptwert),
 φ bis auf ganzzahliges
 Vielfaches von 2π bestimmt

Umrechnungsformeln:

$$a = r \cdot \cos \varphi \quad b = r \cdot \sin \varphi$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \quad \tan \varphi = \frac{b}{a} \quad \varphi = \arctan \frac{b}{a} + \begin{cases} 0, & \text{falls } a > 0 \\ \pi, & \text{falls } a < 0, b \geq 0 \\ -\pi, & \text{falls } a < 0, b < 0 \end{cases}$$

Euler'sche Formel $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi \quad e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \cdot \sin \varphi$

Addition und Subtraktion

$$z_1 \pm z_2 = (a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

Multiplikation

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2) = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (r_2 \neq 0)$$

Potenzieren (n ganzzahlig)

$$(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi) \quad (\text{Satz von Moivre})$$

$$z^n = [r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)]^n = r^n [\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)] = r^n e^{i(n\varphi)}$$

Radizieren (n reell)

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left[\cos \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} \right] = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}}$$

Einheitswurzeln

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{k \cdot 2\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{k \cdot 2\pi}{n} = e^{i \frac{k \cdot 2\pi}{n}} \quad \begin{matrix} (n = 2, 3, \dots) \\ (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \end{matrix}$$

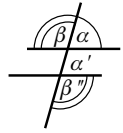
Logarithmieren

$$\ln z = \ln(r e^{i\varphi}) = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

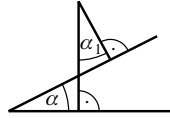
2 Geometrie

Sätze, Strecken, Winkel, Punkte bei Dreieck und Kreis

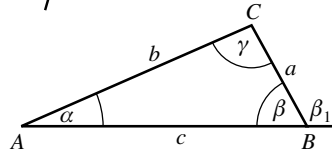
Winkel (an geschnittenen Parallelen)



$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 180^\circ & (\text{Nebenwinkel}) \\ \alpha' &= \alpha & (\text{Stufenwinkel}) \\ \beta'' &= \beta & (\text{Wechselwinkel})\end{aligned}$$



$\alpha = \alpha_1$
(da die Schenkel
paarweise aufeinander
senkrecht stehen)



$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma &= 180^\circ & \alpha + \beta < 180^\circ \\ \beta_1 &= \alpha + \gamma & (\text{Außenwinkel})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a < b &\Leftrightarrow \alpha < \beta & a = b &\Leftrightarrow \alpha = \beta & a > b &\Leftrightarrow \alpha > \beta \\ a + b &> c & a - b &< c\end{aligned}$$

(weitere Formeln durch zyklische Vertauschung)

Schnittpunkt der $\left\{ \begin{array}{l} \text{Höhen} \\ \text{Seitenhalbierenden} \\ \text{Winkelhalbierenden} \\ \text{Mittelsenkrechten} \end{array} \right. = \begin{array}{l} \text{Schwerpunkt} \\ \text{Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises} \\ \text{Mittelpunkt des umschriebenen Kreises} \end{array}$

Flächen- und Streckenbeziehungen

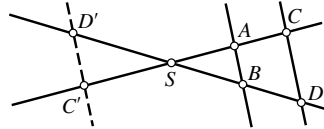
Kongruenzsätze: Kongruenz von Dreiecken (\cong) bei Übereinstimmung in

1. zwei Seiten und eingeschlossenem Winkel (sws)
2. einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln (wsww; swww)
3. drei Seiten (sss)
4. zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel (SsW)

Ähnlichkeitssätze: Ähnlichkeit von Dreiecken (\sim) bei Übereinstimmung im (in)

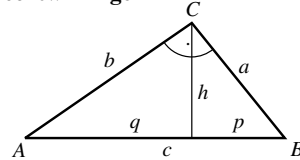
1. Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel
2. zwei Winkeln
3. Verhältnis der drei Seiten
4. Verhältnis zweier Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel

Strahlensätze



$$\begin{aligned}\frac{SA}{SC} &= \frac{SB}{SD} \\ \frac{SA}{SC'} &= \frac{SB}{SD'} \\ \frac{AB}{CD} &= \frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD} \\ \frac{AB}{C'D'} &= \frac{SA}{SC'} = \frac{SB}{SD'}\end{aligned}$$

Sätze am rechtwinkligen Dreieck

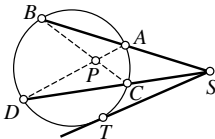


Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Höhensatz: $h^2 = pq$

Kathetensatz: $b^2 = cq, a^2 = cp$

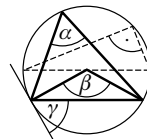
Kreis



Sehnensatz $\overline{PB} \cdot \overline{PC} = \overline{PA} \cdot \overline{PD}$

Sekantensatz $\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{SC} \cdot \overline{SD}$

Tangentensatz $\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{ST}^2$



Mittelpunkts- und Peripheriewinkel $\beta = 2\alpha$

Thales-Satz: Umfangswinkel über Durchmesser ein Rechter

Sehrentangentenwinkel $\gamma = \alpha$

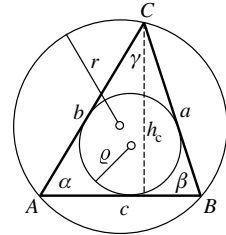
Flächeninhalt (A)

Umfang (U)

Längen

2

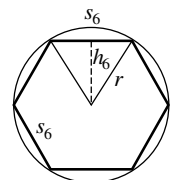
	A	U	(r Umkreisradius; ϱ Inkreisradius)
Dreieck	h Höhe $2s = a + b + c$; weitere Formeln durch zyklische Vertauschung $A_3 = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma = \varrho s = \frac{abc}{4r}$ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $= a^2 \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin \alpha} = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ $s = 4r \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$ $r = \frac{abc}{4A_3} = \frac{a}{2 \sin \alpha}$ $\varrho = 4r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$		
gleichseitiges ($b = c = a$)	$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$		$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ $r = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ $\varrho = \frac{\sqrt{3}}{6}a$
gleichschenkelig ($a = b \neq c$)	$\frac{1}{2}a^2 \sin \gamma = c^2 \frac{\sin^2 \alpha}{2 \sin \gamma} = \frac{c^2}{4} \tan \alpha$		$h_c = \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 - c^2}$
Viereck	e, f Diagon; $\varphi = \angle(e, f)$; $\varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$ oder $\frac{1}{2}(\beta + \delta)$; $2s = a + b + c + d$		
allgemein	$A_4 = e \cdot f \cdot \sin \varphi = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \varepsilon}$		
Quadrat	a^2	$4a$	$e = \sqrt{2}a$ $r = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ $\varrho = \frac{1}{2}a$
Parallelogramm	$ah_a = bh_b$	$2(a + b)$	$e = \sqrt{a^2 + b^2}$ für Rechteck
Trapez	$\frac{1}{2}(a + c)h = mh$	$a + b + c + d$	$a \parallel c$ h Höhe m Mittelparallele
Kreis	$\pi r^2 = \frac{\pi}{4}d^2$	$2\pi r = \pi d$	r Radius d Durchmesser
Sektor	$\frac{1}{2}br$	$b = \frac{\pi r}{180^\circ} \alpha^\circ$	b Bogenlänge über α
Segment	$\frac{1}{2}[br - s(r - h)]$		s Segmentschne h Bogenhöhe
Ellipse	$\pi a b$	$\approx \pi \left[\frac{3}{2}(a + b) - \sqrt{ab} \right]$	a, b Halbachsen
Parabelabschnitt	$\frac{4}{3}x_1 y_1$	(Sehne durch Parabelpunkt (x_1, y_1) senkrecht zur Achse der Parabel $y^2 = \pm 2px$)	



Einbeschriebenes regelmäßiges Vieleck

(n Anzahl der Ecken)

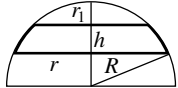
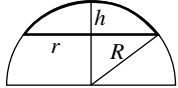
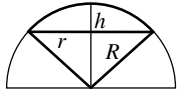
$$A_n = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{360^\circ}{n} \quad s_n = 2r \sin \frac{180^\circ}{n} \quad h_n = r \cos \frac{180^\circ}{n}$$



Inhalt von Oberflächen (O) und Mantelflächen (M), Rauminhalte (V)

(G Grundfläche h Höhe r, R Radius s Mantellinie)

2

	O	M	V	
Kugel	$4\pi R^2$		$\frac{4}{3}\pi R^3$	
Kugelzone bzw. -schicht		$2\pi hR$	$\frac{\pi h}{6}(3r^2 + 3r_1^2 + h^2)$	
Kugelabschnitt (-segment)	$\pi h(4R - h)$	$2\pi hR = (r^2 + h^2)\pi$	$\frac{\pi h}{6}(3r^2 + h^2)$ $= \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$	
Kugelausschnitt (-sektor)	$\pi R(2h + r)$		$\frac{2}{3}\pi hR^2$	
Prisma	$2G + M$		$G \cdot h$	
Zylinder			$G \cdot h$	
gerader Kreiszyylinder	$2\pi r(h + r)$	$2\pi rh$	$\pi r^2 h$	
Pyramide			$\frac{1}{3}G \cdot h$	
Pyramiden- stumpf	$G_1 + G_2 + M$		$\frac{h}{3}(G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2) \approx \frac{G_1 + G_2}{2}h$	
Kegel			$\frac{1}{3}G \cdot h$	
gerader Kreiskegel	$\pi r(r + s)$	πrs	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$s = \sqrt{r^2 + h^2}$
gerader Kreiskegel- stumpf	$\pi[r_1^2 + r_2^2 + s(r_1 + r_2)]$	$\pi s(r_1 + r_2)$	$\frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \approx \frac{\pi h}{2}(r_1^2 + r_2^2)$ $\frac{\pi h}{4}(r_1 + r_2)^2$	
Ellipsoid			$\frac{4}{3}\pi abc$	a, b, c Halbachsen
Rotations- ellipsoid		(Rotation um a)	$\frac{4}{3}\pi ab^2$	
Rotations- paraboloid			$\pi p h^2$ ($y^2 = 2px$ rotiert um x -Achse; $h = x$)	

13 Gewöhnliche Differenzialgleichungen und Lösungsansatz

(Auswahl)

$$F(x, y, y') = 0$$

1. Ordnung

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

Trennung der Variablen: $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx \quad H(y) = G(x) + C$

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{Ähnlichkeitsdifferenzialgl.}$$

Subst.: $z = \frac{y}{x} \quad y' = xz' + z \quad \int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \ln|x| + C$

Lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung

Allgemeine Hinweise für lineare Differenzialgleichungen beliebiger Ordnung

Homogene lineare Differenzialgleichungen

Eine homogene lineare Differenzialgleichung n -ter Ordnung hat genau n linear unabhängige Lösungen, deren Linearkombination die allgemeine Lösung $y_H(x)$ der homogenen Differenzialgleichung ist.

Inhomogene lineare Differenzialgleichungen

Die allgemeine Lösung $y_I(x)$ einer inhomogenen linearen Differenzialgleichung gewinnt man aus der allgemeinen Lösung $y_H(x)$ der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung durch Addition einer beliebigen partikulären Lösung $y_S(x)$ der inhomogenen Differenzialgleichung:

$$y_I(x) = y_H(x) + y_S(x)$$

$y_S(x)$ erhält man u. a. durch das Verfahren der Variation der Konstanten: allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung mit Funktionen von x anstelle der Integrationskonstanten als Ansatz für die Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung verwenden.

$a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x)$	Allgem. Form der lin. Dgl. 1. Ordn.
$y' + p(x)y = q(x)$	Normalform

$$p(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}; \quad q(x) = \frac{r(x)}{a_1(x)}$$

a) Lagrange

homogene Differenzialgleichung $y' + p(x)y = 0$: **Trennung der Variablen**

$$y_H = C e^{-\int p(x) dx}$$

inhomogene Differenzialgleichung: **Variation der Konstanten**

$$y = C(x)\psi(x) \quad \left(\psi(x) = e^{-\int p(x) dx}\right)$$

$$C'(x)\psi(x) + q(x) = 0; \quad C(x) = C_1 + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx$$

b) Bernoulli (Produktansatz) (nur für lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung)

$$y = u \cdot v; \quad y' = u'v + uv'; \quad \text{in Differenzialgleichung einsetzen}$$

u oder v ausklammern; Klammerausdruck null setzen

$$y' + p(x)y + q(x)y^n = 0 \quad \text{Bernoulli'sche Dgl.}$$

Division durch $(-y^n)$; Subst.: $z = \frac{1}{y^{n-1}}$; $z' = -(n-1)\frac{y'}{y^n}$ führt auf lin. Dgl. in z und x

spez.: $y' + p(x)y + q(x)y^2 = 0$; $z = \frac{1}{y}$; $z' = -\frac{y'}{y^2}$

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x) \quad \text{Ricatti'sche Dgl.}$$

mit (geg. oder erratener) part. Lösung $y = y_1(x)$ lösbar; Ansatz: $y = y_1(x) + v(x)$
führt auf Bernoulli'sche Differenzialgleichung ($n = 2$) für $v(x)$

$$y = x \cdot g(y') + h(y') \quad \text{d'Alembert'sche Dgl.}$$

$y' = p(x)$ in differenzierte Ausgangsgleichung einsetzen, $\frac{dp}{dx}$ ausklammern; führt auf lineare Differenzialgleichung: $\frac{dx}{dp} + h(p)x + k(p) = 0$

Lösung in Parameterdarstellung: $x = x(p, C)$; $y = y(p, C)$

spez.: $y = xy' + h(y')$ Clairaut'sche Dgl.

$y' = p(x)$; weiter wie oben ergibt Dgl.: $[x + h'(p)] \frac{dp}{dx} = 0$

$\frac{dp}{dx} = 0$, $p = C$; allgem. Lösung: $y = Cx + h(C)$

$[x + h'(p)] = 0$; singuläre Lösung in Parameterdarstellung: $x = -h'(p)$
 $y = -ph'(p) + h(p)$

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

1. **Exakte (vollst., totale) Dgl.** $M_y = N_x$ (Integrabilitätsbedingung)

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = d\Phi(x, y)$ vollständiges Differenzial der Funktion $\Phi(x, y)$

$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = M$; $\Phi = \int M dx + G(y)$; $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = N$; allgemeine Lösung: $\Phi(x, y) = C$

2. **Integrierender Faktor**

$\mu = \mu(x, y)$ so bestimmen, dass $\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$ exakte Differenzialgleichung

$$\frac{M_y - N_x}{N} = f(x) \quad \Rightarrow \quad \mu = \mu(x) = e^{\int f(x) dx}$$

$$\frac{M_y - N_x}{M} = f(y) \quad \Rightarrow \quad \mu = \mu(y) = e^{-\int f(y) dy}$$

$$\frac{M_y - N_x}{y \cdot N - x \cdot M} = f(z) \quad z = x \cdot y \quad \Rightarrow \quad \mu = \mu(z) = e^{\int f(z) dz}$$

$$\frac{(M_y - N_x) \cdot x^2}{y \cdot N + x \cdot M} = f(z) \quad z = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \mu = \mu(z) = e^{-\int f(z) dz}$$

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

2. Ordnung

Bestimmte Glieder fehlen

$$y'' = f(x) \quad y^{(n)} = g(x)$$

unmittelbare Integration

y kommt nicht vor

$$y' = p(x) \quad y'' = p'$$

$$F(x, y', y'') = 0; \quad F(y', y'') = 0$$

$$\rightarrow F(x, p, p') = 0; \quad F(p, p') = 0$$

x kommt explizit nicht vor

$$y' = q(y) \quad y'' = \frac{dq}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = q \cdot \frac{dq}{dy}$$

$$F(x, y', y'') = 0$$

$$\rightarrow G\left(y, q, \frac{dq}{dy}\right) = 0$$

$$\text{Spezialfall: } y'' = f(y)$$

$$\text{auch: Multipl. m. } 2y'; \quad 2y''y' = \frac{d}{dx}y'^2$$

Lineare Differenzialgleichungen 2. Ordnung

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad \text{Allgem. homog. lin. Dgl. 2. Ordn.}$$

Allgem. Lsg.: $y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ (y_1, y_2 partikuläre Lösungen)

Bestimmung der partikulären Lösungen für ausgewählte Fälle

1. $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ konst. Koeffizienten

Ansatz: $y = e^{\lambda x}$ Charakterist. Gleichung: $a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$

a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reell	$y_1 = e^{\lambda_1 x}$	$y_2 = e^{\lambda_2 x}$
b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$	$y_1 = e^{\lambda_0 x}$	$y_2 = x e^{\lambda_0 x}$
c) $\lambda_{1,2} = a \pm ib$	$y_1 = \cos(bx) e^{ax}$	$y_2 = \sin(bx) e^{ax}$

2. $a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0$ homog. Euler'sche Dgl.

Ansatz: $y = x^\lambda$ Charakterist. Gleichung: $a_2 \lambda(\lambda - 1) + a_1 \lambda + a_0 = 0$

a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reell	$y_1 = x^{\lambda_1}$	$y_2 = x^{\lambda_2}$
b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$	$y_1 = x^{\lambda_0}$	$y_2 = x^{\lambda_0} \ln x$
c) $\lambda_{1,2} = a \pm ib$	$y_1 = x^a \cos(b \ln x)$	$y_2 = x^a \sin(b \ln x)$

3. $x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$ Bessel'sche Dgl.

ν nicht ganzzahlig:

$$y_1 = J_\nu(x) \quad y_2 = J_{-\nu}(x)$$

$$J_\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\mu+\nu}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu+\nu+1)} \quad J_{-\nu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\mu-\nu}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(-\nu+\mu+1)}$$

(Bessel'sche Funktionen 1. Art) (s. a. S. 51)

$\nu = n$ ganzzahlig

$$y_1 = J_n(x)$$

$$y_2 = N_n(x)$$

$$N_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\cos \nu \pi \cdot J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu \pi} \quad \text{(Bessel'sche Funktionen 2. Art) (s. a. S. 51)}$$

16 Fehlerrechnung, Näherungsformeln und -verfahren

Fehler: Näherungswert (Istwert) – wahrer Wert (Sollwert)

Näherungswert	wahrer Wert	absoluter Fehler	relativer Fehler
a	x	$\varepsilon = a - x$	$\left \frac{\varepsilon}{x} \right \hat{=} \left \frac{\varepsilon}{x} \right \cdot 100 \%$

Fehlerabschätzung beim Rechnen mit Näherungswerten (Methode der Fehlerschranken)

k (fehlerbehaftete) Variable: x_1, x_2, \dots, x_k

zu berechnende Funktion: $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$

absoluter Fehler von f : ε_f

Näherungswerte für die x_i : a_i

absolute Fehler für die x_i : $\varepsilon_i = a_i - x_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$)

Schranken für die ε_i : Δa_i ($\Delta a_i \geq |\varepsilon_i|$)

Schranke für den absoluten Fehler (ε_f) von $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\Delta f = \Delta a_1 |f_{x_1}(a_1, \dots, a_k)| + \Delta a_2 |f_{x_2}(a_1, \dots, a_k)| + \dots + \Delta a_k |f_{x_k}(a_1, \dots, a_k)| \quad (\Delta f \geq \varepsilon_f)$$

Anwendung auf elementare Rechenoperationen

x, y wahre Werte a, b Näherungswerte $\Delta a, \Delta b$ Fehlerschranken

$f(x, y)$	Schranken für den absoluten Fehler Δf	Schranken für den relativen Fehler $\Delta f/ f $
$x \pm y$	$\Delta a + \Delta b$	$(\Delta a + \Delta b)/ a \pm b $
$x \cdot y$	$\Delta a \cdot b + \Delta b \cdot a $	$\Delta a/ a + \Delta b/ b $
x/y	$\frac{\Delta a \cdot b + \Delta b \cdot a }{b^2}$	$\frac{\Delta a}{ a } + \frac{\Delta b}{ b }$
x^n ($n \neq 0, 1$)	$\Delta a n a^{n-1} $	$ n \Delta a / a $

Messreihe a_1, a_2, \dots, a_n einer Größe x

Näherungswert für x : $\bar{a} = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$ (arithmetisches Mittel)

durchschnittlicher Fehler: $\overline{\Delta a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_i - \bar{a}|$

mittlerer Fehler:
(Standardabweichung) $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2}$ (s. S. 100)

Methode der kleinsten Quadrate (Gauß)

Parameter t_1, t_2, \dots, t_k der Funktion $f(x, t_1, t_2, \dots, t_k)$ (f stetig partiell differenzierbar) so bestimmen, dass die Funktion die Punkte $P_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $n > k$) möglichst genau annähert

Forderung:

$$Q(t_1, t_2, \dots, t_k) = \sum_{i=1}^n [f(x_i, t_1, t_2, \dots, t_k) - y_i]^2 \rightarrow \text{Min}$$

Normalengleichungen zur Berechnung der Parameter t_1, t_2, \dots, t_k :

$$\frac{\partial Q(t_1, t_2, \dots, t_k)}{\partial t_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

Interpolation

Die Gleichung der Parabel n -ter Ordnung | Die ganze rationale Funktion n -ten Grades

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad a_n \neq 0,$$

die durch $(n+1)$ vorgegebene Punkte $P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1), \dots, P_n(x_n, y_n)$ hindurch-
geht, | für die zu $(n+1)$ voneinander verschiedenen
Werten x_0, x_1, \dots, x_n die $(n+1)$ Funktionswerte
 y_0, y_1, \dots, y_n vorgeschrieben sind,

kann durch folgenden **Ansatz** bestimmt werden:

$$\begin{aligned} y = & c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots \\ & + c_i(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1}) + \dots \\ & + c_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

nach Newton

Die Koeffizienten $c_0, c_1, \dots, c_i, \dots, c_n$ werden schrittweise dadurch berechnet, dass für $x = x_0, x_1, \dots, x_n$ jeweils y die zugehörigen Werte y_0, y_1, \dots, y_n annimmt.

Steigungsschema

x_i	$y_i = S_i^0$	S_i^1	S_i^2	S_i^3	\dots
x_0	$y_0 = S_0^0$				
x_1	y_1	$S_1^1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$			
x_2	y_2	$S_2^1 = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$	$S_2^2 = \frac{S_2^1 - S_1^1}{x_2 - x_1}$		
x_3	y_3	$S_3^1 = \frac{y_3 - y_0}{x_3 - x_0}$	$S_3^2 = \frac{S_3^1 - S_1^1}{x_3 - x_1}$	$S_3^3 = \frac{S_3^2 - S_2^2}{x_3 - x_2}$	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

k -te Steigung:
 $S_i^k = \frac{S_i^{k-1} - S_{i-1}^{k-1}}{x_i - x_{i-1}}$
 $k = 1, 2, \dots, n$
 $i = k, k+1, \dots, n$
 $c_0 = y_0 = S_0^0$
 $c_i = S_i^i;$
 $i = 0, 1, \dots, n$

Differenzschema bei äquidistanten Argumenten $(x_{i+1} - x_i = h)$

x_0	y_0				
x_1	y_1	$\Delta^1 y_0$	$\Delta^2 y_0$		
x_2	y_2	$\Delta^1 y_1$	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$	
x_3	y_3	$\Delta^1 y_2$	\vdots	\vdots	
\vdots	\vdots	\vdots			

Δ^n n -te Differenzspalte
z. B. $\Delta^1 y_2 = y_3 - y_2$
 $\Delta^2 y_1 = \Delta^1 y_2 - \Delta^1 y_1$
 $c_0 = y_0 \quad c_1 = \frac{\Delta^1 y_0}{h}$
 $c_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$
 \vdots
 $c_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$

nach Lagrange

Ansatz: $y = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + \dots + L_n(x)y_n$

mit
$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

(Das Glied mit dem Index i fehlt; $i = 0, 1, \dots, n$)

Näherungslösung von Gleichungen mit einer Unbekannten

Lineare Interpolation (Regula falsi – Sekantenverfahren)

$$f(x) = 0$$

x_0 gesuchte Lösung: $f(x) \equiv 0$

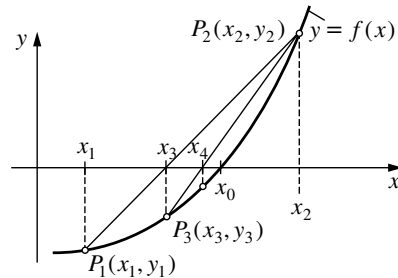
$y = f(x)$ zugehörige Funktion.

Man geht von Werten x_1 und x_2 aus, die so zu wählen sind, dass $f(x_1)$ und $f(x_2)$ verschiedene Vorzeichen haben.

Die Sekante $\overline{P_1 P_2}$ schneidet die x -Achse in einem Punkt mit dem Näherungswert

$$x_3 = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \cdot y_1$$

Fortsetzung des Verfahrens mit x_3 und x_2 ; usw.



Newton'sches Näherungsverfahren (Tangentenverfahren)

$$f(x) = 0$$

x_0 gesuchte Lösung: $f(x_0) = 0$

$y = f(x)$ zugehörige Funktion.

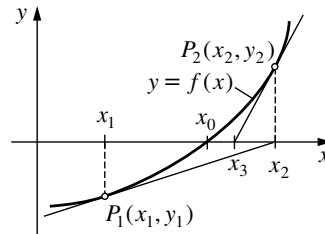
x_1 aus der Umgebung von x_0 wählen oder grafisch bestimmen.

Die Tangente in $P_1(x_1, y_1)$ an die Kurve $y = f(x)$ schneidet die x -Achse in einem Punkt mit dem Näherungswert

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (f'(x_1) \neq 0)$$

Fortsetzung des Verfahrens mit $P_2(x_2, y_2)$, was den verbesserten Näherungswert x_3 ergibt; usw.

$$\text{Allgemein: Näherungswert } x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (n = 2, 3, 4, \dots; f'(x_{n-1}) \neq 0)$$



Näherungsweise Berechnung eines bestimmten Integrals

n Anzahl der Teilintervalle der Länge $x_{i+1} - x_i = h = \frac{b-a}{n}$, n geradzahlig; $i = 0, 1, \dots, n-1$

$$u = y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1} \quad (\text{Ordinaten mit ungeradem Index}) \quad y_0 = y_a, y_n = y_b$$

$$g = y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2} \quad (\text{Ordinaten mit geradem Index})$$

Sehnen-Trapez-Formel (n bel.)

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [y_a + y_b + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})] = \frac{h}{2} (y_a + y_b + 2u + 2g)$$

Tangenten-Trapez-Formel

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx 2h [y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}] = h \cdot 2u$$

Simpson'sche Regel

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [y_a + y_b + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})] \\ &= \frac{h}{3} (y_a + y_b + 4u + 2g) \end{aligned}$$

Sachwortverzeichnis

A

- Ableitung
 - der Umkehrfunktion 57
 - , erste 54
 - , höhere 54
 - , logarithmische 57
 - , partielle 66
- Additionstheoreme 43
- Ähnlichkeitsdifferenzialgleichung 80
- Ähnlichkeitssätze 2
- Alternativhypothese 103
- analytische Geometrie 26
- Annahmebereich 103
- Areafunktion 42
- Austauschverfahren 12
- Axiome von Kolmogoroff 95

B

- Bartlett-Test 105
- Bayes'sche Formel 95
- Bereichsintegral
 - , ebenes 68
 - , ebenes; Transformation 69
 - , räumliches 69
 - , räumliches; Transformation 70
- Bernoulli-L'Hospital'sche Regel 54
- Bernoulli'sches Schema 95
- Bernoulli'sches Separationsverfahren 86
- Bessel'sche Funktion 51
 - 1. Art 82
 - 2. Art 82
- bestimmtes Riemann'sches Integral 55
- Binomialkoeffizient 94
- Binomialverteilung 97
- Binomische Formel 94
- Binomische Reihe 48
- Binomischer Satz 94
- Bogendifferenzial 79
- Bogenelement 75
- Bogenlänge
 - einer ebenen Kurve 79
 - einer räumlichen Kurve 79

D

- Definitionsbereich 34
- Determinante 6
 - , Rechenregeln 7
 - , Vandermonde'sche 10
 - , Wronski'sche 10
- Differenzial 54
 - , vollständiges 67

- Differenzialgeometrie 78
- Differenzialgleichung
 - , Bernoulli'sche 81
 - , Bessel'sche 82
 - , Clairaut'sche 81
 - , d'Alembert'sche 81
 - , Euler'sche, homogene 82
 - , Euler'sche, n -ter Ordnung 85
 - , exakte (vollständige, totale) 81
 - , gewöhnliche 80
 - , homogene lineare 80
 - , inhomogene Euler'sche 83
 - , inhomogene lineare 80
 - , integrierender Faktor 81
 - , lineare 1. Ordnung 80
 - , lineare 2. Ordnung 82
 - , lineare, mit konstanten Koeffizienten 84
 - , partielle 86
 - , Ricatti'sche 81
- Differenzialgleichungssystem 88
 - , lineares homogenes 88
 - , lineares inhomogenes 88
- Differenzialoperator 76
- Differenzialquotient 54
- Differenzialrechnung
 - , Mittelwertsätze 54
 - von Funktionen mehrerer Variabler 66
- Differenziation
 - , implizite 67
 - von Parameterintegralen 68
- Differenziationsformel 56
- Differenziationsregeln 57
 - für Vektorfunktionen 75
- differenzierbar
 - , linksseitig 54
 - , rechtsseitig 54
- Differenzschema 90
- Divergenz 32
- Divergenz eines Vektorfeldes 76
- Dreieck 2
 - , schiefwinkliges 44
 - , sphärisches 46
- dualer Simplexalgorithmus 18

E

- Ebene
 - im Raum, Gleichungsform 29
 - im Raum, Schnittwinkel 30
- ebene Kurve
 - , Anstieg 79
 - , Bogendifferenzial 79

–, Bogenlänge 79
 –, Evolente 79
 –, Evolute 79
 –, Krümmung 79
 Einheitswurzeln 1
 Ellipse 3
 Ellipsoid 4
 Erwartungswert 96, 100
 Euler'sche Formel 1
 Euler'sche Konstante 53
 Evolente 79
 Evolute 79
 Exponentialfunktionen 37
 Extrempunkt 65
 Extremum
 –, lokales 67
 –, lokales; unter Nebenbedingungen 67
 Exzess 96

F

Fakultät 51
 Fehler
 –, durchschnittlicher 89
 –, mittlerer 89
 Fehlerrechnung 89
 Fehlerschranke 89
 Feld
 –, skalares 75
 –, Vektor- 75
 Fläche
 – zweiter Ordnung 30
 Fourier-Entwicklung 50
 Fundamentalbereich 68 f.
 Fundamentalsatz der Algebra 37
 Funktion 34
 –, Annäherung durch Polynome 92
 –, Area- 42
 –, Bessel'sche 51
 – einer unabhängigen Veränderlichen 34
 –, Gamma- 51
 –, gebrochene rationale 38
 –, gerade 34
 –, Grenzwert 34
 –, hyperbolische 41
 –, inverse 34
 –, Orthogonalsystem 53
 –, rationale 37
 –, Stetigkeit 34
 –, trigonometrische 39
 –, ungerade 34
 –, zyklometrische 42
 Funktionaldeterminante 10
 Funktionenreihen 47

G

Gamma-Funktion 51
 Gauß'sche Fehlerfunktion 52

Gauß'scher Algorithmus 12
 Gauß'scher Integralsatz 77
 Gauß'sches Fehlerintegral 52
 geometrische Reihe 33
 Gerade
 – im Raum 29
 – im Raum, Schnittwinkel 29
 – in der Ebene, Gleichungsform 26
 –, Schnittwinkel 27
 Geradengleichung 26
 Gleichung
 –, lineare homogene 86
 –, quasilineare 86
 Gleichungssystem 11
 –, Lösung von linearen 11
 Gradient des Skalarfeldes 76
 Grenzwert 32, 34, 66
 Grundintegral 56
 Guldin'sche Regeln 65

H

Halbseitenformeln 45
 Halbwinkelformeln 45
 Halbwinkelsatz 44
 Häufigkeit
 –, absolute 95, 102
 –, relative 95, 102
 Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung 55
 Höhensatz 2
 Horizontalwendepunkt 65
 Horner-Schema 38
 Hyperboloid 30
 Hypothese 103

I

Inhalt 73
 Integral
 –, bestimmtes 55
 – gebrochen rationaler Funktionen 64
 –, unbestimmtes 55
 –, uneigentliches 55
 Integralexponentialfunktion 53
 Integralkosinus 53
 Integrallogarithmus 53
 Integralrechnung
 –, Mittelwertsatz 55
 – von Funktionen mehrerer Variabler 68
 Integralsinus 53
 Integrand 55
 Integration
 – durch Substitution 61
 –, partielle 61
 – von Parameterintegralen 68
 Integrationskonstante 55
 Integrationsregeln 57
 Integrationsvariable 55

integrierender Faktor 81
Interpolation 90
–, lineare 91
– nach Lagrange 90
– nach Newton 90

K

Kathetensatz 2
Kegel 4, 30
Kegelschnitt
–, Diskussion 28
Kegelschnittsgleichung 27
–, Ellipse 27
–, Hyperbel 27
–, Kreis 27
–, Parabel 27
Kettenregel 57, 67
Koeffizient
–, konstanter 82
Kolmogorov-Test 105
Kombination 94
Kombinatorik 94
komplexe Zahlen 1
Konfidenzgrenze 103, 108
Konfidenzintervall 108
Kongruenzsätze 2
konstanter Koeffizient 82
Konvergenz 32
Konvergenzkriterien 33
Koordinaten
–, kartesische 34, 78
–, Polar- 34, 78
Korrelation 112
–, Bestimmtheitsmaß 112
–, Unbestimmtheitsmaß 112
Korrelationskoeffizient 101, 112
–, multipler linearer 112
–, partieller linearer 112
Kosinussatz 44
Kovarianz 100 f.
–, empirische 109
Kreis 2
Kreuzprodukt 24
kritischer Bereich 103 f.
Krümmung 65
– einer ebenen Kurve 79
Kugel 4, 30
Kugelkoordinaten 70
Kurvenintegral 71
–, 1. Art 71
–, 2. Art 71

L

Länge 73
Laplacegleichung 87
Laplace'scher Operator 76

Leibniz'sche Sektorformel 74
Likelihoodfunktion 107
Likelihoodprinzip 107
lineare homogene Gleichung 86
lineare Optimierung 13
lineare Optimierungsaufgabe 13
–, duale 18
–, Lösung 14
Linearfaktoren 37
Logarithmengesetze 36
Logarithmus 36
Logarithmusfunktionen 37
Longitudinalschwingungen eines Stabes 87

M

MacLaurin-Reihe 92
Mac-Laurin'sche Reihe 47
Mantelfläche 65
Masse 73
Massenschwerpunktskoordinaten 74
Matrix 5
–, Rechenoperationen 8
Maximum-Likelihood-Verfahren 107
Median 96, 102
Methode der kleinsten Quadrate 89
Mittelwertsatz der Integralrechnung 55
Mittelwertsätze der Differenzialrechnung 54
Modalwert 96, 102
Moment p -ter Ordnung 96, 102
Momentenmethode 107
Monotonie 32, 34
–, Funktion 34
–, Zahlenfolge 32

N

Nabla-Operator 76
Näherungswert 89
Neper'sche Analogien 45
Neper'sche Regel 46
Newton'sches Näherungsverfahren 91
Normale
– einer ebenen Kurve 78
Normalenabschnitt 78
Normalengleichung 89
Normalform 13

O

Oberflächenintegral 72
–, 1. Art 72
–, 2. Art 72
Optimierung
–, lineare 13
Orthogonalsystem 53

P

Paraboloid 30
Parameterdarstellung 34, 78

Parameterintegral 68
 –, Differenziation 68
 –, Integration 68
 Partialbruchzerlegung 64
 partielle Differenzialgleichung 86
 Permutation 94
 Polarkoordinaten 26
 Potenz 35
 Potenzfunktionen 35
 Potenzgesetze 35
 Potenzialfeld 76
 Potenzreihe 47, 85
 –, Konvergenz 47
 –, Konvergenzintervall 47
 –, Konvergenzradius 47
 Prinzip des Cavalieri 73
 Prisma 4
 Produktansatz 80
 Produktregel 57
 Punktschätzung
 –, effektiv 107
 –, erwartungstreu 107
 –, konsistent 107
 Pyramide 4
 Pythagoras 2

Q

Quantil p -ter Ordnung 96
 quasilineare Gleichung 86
 Quotientenregel 57

R

Rangkorrelation 113
 räumliche Kurve
 –, Bogenlänge 79
 Regel von Bernoulli-L'Hospital 54
 Regression 109
 –, lineare 109
 –, mehrfache lineare 111
 Regressionsfunktion
 –, nichtlineare 110
 Regressionsgerade 110
 Regressionskoeffizient 109
 –, multipler 111
 Regula falsi 91
 Reihe
 –, binomische 48
 –, Funktionenreihe 47
 –, geometrische 33
 –, Konvergenzkriterien 33
 – mit konstanten Gliedern 33
 –, Taylor'sche 47
 Reihenentwicklung 85
 Rest
 –, χ^2 -Anpassungs- 104
 Richtungsableitung 66, 76

Rotation eines Vektorfeldes 77
 Rotationskörper 65
 –, Mantelfläche 65
 –, Volumen 65

S

Schätzmethode 107
 –, bei Exponentialtyp 107
 –, Maximum-Likelihood-Verfahren 107
 –, Momentenmethode 107
 Schätzung 107
 –, Bereichs- 108
 –, effektiv 107
 –, erwartungstreu 107
 –, konsistent 107
 –, Punkt- 107
 Schiefe 96
 Schnittwinkel 27
 Schwerpunkt
 –, geometrischer 74
 Sehnen-Trapez-Formel 91
 Seitenkosinussatz 45
 Sekantenverfahren 91
 Signifikanzniveau 103
 Simplexalgorithmus 16
 –, dualer 18
 Simplexmethode 16
 Simplextableau 14
 Simpson'sche Regel 91
 Sinussatz 44 f.
 skalares Produkt 23
 Spatprodukt 24
 Stammfunktion 55
 Standardabweichung 89, 102
 Statistik 102
 –, Tabellen 114–121
 Steigungsschema 90
 Stetigkeit 34, 66
 Stichprobenmittel 102
 Stichprobenstreuung 102
 Stokes'scher Integralsatz 77
 Störgliedansatz 83 f.
 Strahlensätze 2
 Strecke 26
 Streuung 96
 Subnormale 78
 Subtangente 78

T

Tangenssatz 44
 Tangente
 – einer ebenen Kurve 78
 Tangentenabschnitt 78
 Tangenten-Trapez-Formel 91
 Tangentenvektor 75
 Tangentenverfahren 91

Taylor-Reihe 85
 Taylor'sche Formel
 – für Funktionen einer Variablen 92
 – für Funktionen zweier Variabler 93
 – für Polynome 92
 Taylor'sche Reihe 47
 Test
 –, Bartlett- 105
 –, χ^2 - 104
 –, Kolmogorov- 105
 –, Vier-Felder- χ^2 - 113
 – von Verteilungen 104
 – zum Signifikanzniveau 104
 Testen 103
 Testgröße 103
 Testverfahren 103
 Thales-Satz 2
 Trägheitsmoment 73
 Transversalschwingungen eines Stabes 87
 Trennung der Variablen 80
 Trigonometrie
 –, ebene 44
 –, sphärische 45
 Tschebyschew'sche Ungleichung 96

V

Vandermonde'sche Determinante 10
 Varianz 96
 Varianzanalyse 106
 Variation 94
 Variation der Konstanten 80, 83 f.
 Variationsbreite 102
 Variationskoeffizient 102
 Vektor
 –, Linearkombination 25
 Vektoranalysis 75
 Vektoren 23
 Vektorfeld 75
 –, Divergenz 76
 –, quellenfreies 76
 –, Rotation 77
 –, wirbelfreies 77
 Vektorfunktion 75
 Vektorprodukt 24
 Vektorraum 25
 –, Basis 25
 –, Dimension 25
 –, euklidischer 25
 Verteilung
 –, χ^2 - 99
 –, diskrete 97

 –, F - 99
 –, Gamma- 99
 –, geometrische 97
 –, Gleich- 98
 –, hypergeometrische 97
 –, mehrdimensionale 100
 –, negative Binomial- 97
 –, Normal- 98
 –, Normal-, zweidimensionale 101
 –, Poisson- 97
 –, Rand- 100 f.
 –, stetige 98
 –, Testen 104
 –, t -(Student-) 99
 –, Weibull- 99
 Verteilungsdichte 96
 Verteilungsfunktion 96, 100
 –, empirische 102
 Vertrauensgrenze 103, 108
 Vertrauensintervall 108 f., 111
 Vertrauenswahrscheinlichkeit 108
 Viereck 3
 Vieta'scher Wurzelsatz 38
 Volumen 65, 73

W

Wahrscheinlichkeit 95
 –, bedingte 95
 –, totale 95
 Wahrscheinlichkeitsrechnung 95
 Wärmeleitgleichung 87
 Wendepunkt 65
 Wertebereich 34
 Winkelsinussatz 45
 Wronski'sche Determinante 10
 Wurzel 35
 Wurzelfunktionen 36
 Wurzelgesetze 36

Z

Zahlenfolge 32
 –, arithmetische 32
 –, Divergenz 32
 –, geometrische 32
 –, Konvergenz 32
 Zentralwert 102
 Zufallsgröße 96
 zyklometrische Funktion 42
 Zylinder 4, 30
 Zylinderkoordinaten 70