Formelsammlung Höhere Mathematik

von
Wilhelm Göhler, Barbara Ralle

17., bearb. Aufl.

Thematische Gliederung:

Mathematik Allgemein

Harri Deutsch 2011

Verlag C.H. Beck im Internet:
www.beck.de
ISBN 978 3 8171 1881 6

W. Göhler

Formelsammlung Höhere Mathematik

Zusammengestellt von Wilhelm Göhler
Bearbeitet von Dipl.-Math. Barbara Ralle
17. Auflage

Verlag Harri Deutsch

Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH
Gräfstraße 47
60486 Frankfurt am Main
verlag@harri-deutsch.de
www.harri-deutsch.de

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN 978-3-8171-1881-6

17. Auflage, 2011

Satz: Satzherstellung Dr. Naake, Brand-Erbisdorf <www.naake-satz.de>
Druck: freiburger graphische betriebe <www.fgb.de>
Printed in Germany

Vorwort

Die Notwendigkeit und der Zweck von Wissensspeichern in einer Zeit der sprunghaften Entwicklung und Erweiterung der Wissenschaft bedürfen keiner besonderen Begründung. Mit dem vorliegenden kleinen Wissensspeicher »Höhere Mathematik – Formeln und Hinweise« soll nun den bereits vorhandenen Formelsammlungen nicht eine weitere, sondern eine anders geartete hinzugefügt werden. Aufbauend auf den Kenntnissen der Elementarmathematik, an deren wichtigste Formeln und Sätze aus Geometrie, Arithmetik und Goniometrie erinnert wird, wurden in den einzelnen Gebieten der höheren Mathematik nur die wesentlichen Formeln aufgenommen, die im Rahmen der Grundvorlesungen an den Hoch- und Fachschulen behandelt werden. Das gleiche gilt für die Auswahl der Integrationsmethoden und Typen von Differentialgleichungen, deren Lösungswege jeweils angedeutet werden.
Zum leichteren Aufsuchen der Formeln und Beziehungen wurde – obwohl eine Formelsammlung kein Lehrbuch sein kann und soll – dem Wissensspeicher die Systematik eines Lehrbuches bzw. einer Vorlesung zugrunde gelegt, und zwar sowohl im einzelnen als auch insgesamt, ohne daß allerdings Überschneidungen und Verlagerungen gänzlich vermieden werden konnten. Die kurzgefaßten Defnitionen und Erläuterungen am Anfang jedes Gebietes stellen Erinnerungshilfen für die nachfolgenden Formeln dar. Neben der Vermittlung von mathematischem Wissen und rechnerischen Fertigkeiten ist es die Hauptaufgabe einer Vorlesung und damit auch des Wissensspeichers, das mathematische, logische Denken zu entwickeln. Beides, Systematik und Logik, sollen in erster Linie auch den Weg weisen, auf dem man die jeweils gesuchte Formel finden kann. Wenn sich der Leser die Mühe gemacht hat, die Formelsammlung im Überblick zur Kenntnis zu nehmen, wird er das Gesuchte schneller finden, als es mit dem Sachwörterverzeichnis möglich ist. Auch werden bewußte Erfahrungen und steter Gebrauch das Auffinden beschleunigen.
Wenn an manchen Stellen auf die Literatur verwiesen oder gelegentlich ein Hinweis weggelassen wurde, so geschah das aus Platzgründen, da nicht zuletzt der Übersichtlichkeit wegen der Umfang des Wissensspeichers begrenzt werden mußte.
Es ist die Absicht des Verfassers, mit diesem kleinen Wissensspeicher allen Studierenden ein Arbeitsmittel in die Hand zu geben, das die Formulierung und den Ansatz mathematischer Aufgaben und damit deren Lösung erleichtert.

W. Göhler

Vorwort zur 17. Auflage

Es ist schön zu sehen, dass die vor über 40 Jahren von meinem Vater erstmals veröffentlichte Formelsammlung immer mehr Studierenden das Eindringen in die Mathematik erleichtert. Mit dazu beigetragen hat natürlich die ständige Aktualisierung und Anpassung des Inhalts an die Bedürfnisse der Mathematikausbildung unserer Hochschulen.
Für die mir dabei erwiesene fachkundige Unterstützung von Mathematikern der TU Bergakademie Freiberg, insbesondere Herrn Dr. A. Bellmann, sowie Herrn Prof. Dr. Paditz von der Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden möchte ich mich an dieser Stelle herzlich bedanken.
Mein Dank gilt auch dem Verlag Harri Deutsch für die gute Zusammenarbeit.
Hinweise und Vorschläge zur Verbesserung des Inhalts oder der Gestaltung der nächsten Auflage nimmt der Verlag gern entgegen.

B. Ralle

Inhaltsverzeichnis

Einige mathematische Zeichen

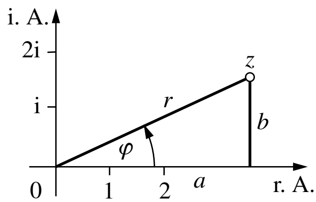
Zeichen	Erläuterung	Beispiel
Analysis		
Zahlbereiche		
N	Menge der *natürlichen* Zahlen	$2 \in N$
Z	Menge der *ganzen* Zahlen	$-2 \in Z$
Q	Menge der *rationalen* Zahlen	$1/3 \in Q$
R	Menge der *reellen* Zahlen	$\sqrt{2} \in R$
C	Menge der *komplexen* Zahlen	$1 + \mathrm{i} \in C$
Intervalle		
$[a,b]$	*abgeschlossenes* I.: $\{x \mid x \in R,\ a \leqq x \leqq b\}$	$0 \in [0,1]$
(a,b) oder $]a,b[$	*offenes* I.: $\{x \mid x \in R,\ a < x < b\}$	$0 \notin (0,1)$
$(a,b]$ oder $]a,b]$	*links offenes* I.: $\{x \mid x \in R,\ a < x \leqq b\}$	$(-\infty,c] = \{x \mid x \leqq c\}$
$[a,b)$ oder $[a,b[$	*rechts offenes* I.: $\{x \mid x \in R,\ a \leqq x < b\}$	$[d,\infty) = \{x \mid x \geqq d\}$
Logik		
$\neg$	*Negation*, »nicht«	
$\vee$	*Alternative*, »oder«	
$\wedge$	*Konjunktion*, »und«	
$\rightarrow$	*Implikation*, »wenn…, so«	
$\leftrightarrow$	*Äquivalenz*, »genau dann, wenn…«	
Mengenlehre		
$\{\ \}$	*endliche* Menge *unendliche* Menge	$\{1,2,3\}$ $\{1,3,5,\ldots\}$
$\{x \mid E(x)\}$	Menge aller Elemente x, die die Eigenschaft $E(x)$ haben	$\{x \mid x > 1\} = (1,\infty)$
$\in$	Element von	$a \in \{a,b,c\}$
$\notin$	nicht Element von	$d \notin \{a,b,c\}$
$=$	*Gleichheit* zweier Mengen $M_1 = M_2$: M_1 und M_2 haben die gleichen Elemente	
$\subset$	*Teilmenge* von; enthalten in $M_1 \subset M_2$: jedes Element von M_1 ist auch Element von M_2	$\{2,4\} \subset \{2,3,4\}$
$\cup$	*Vereinigung* von 2 Mengen $M_1 \cup M_2 = \{x \mid x \in M_1 \vee x \in M_2\}$	$\{1,2\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$
$\bigcup\limits_{i=1}^{n}$	*Vereinigung* von n Mengen $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$ $= \{x \mid x \in M_1 \vee x \in M_2 \vee \ldots \vee x \in M_n\}$	
$\cap$	*Durchschnitt* von 2 Mengen $M_1 \cap M_2 = \{x \mid x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$	$\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$
$\bigcap\limits_{i=1}^{n}$	*Durchschnitt* von n Mengen $M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n$ $= \{x \mid x \in M_1 \wedge x \in M_2 \wedge \ldots \wedge x \in M_n\}$	
$\setminus$	*Differenz* von 2 Mengen $M_1 \setminus M_2 = \{x \mid x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}$	$\{1,2,3\} \setminus \{2,3\} = \{1\}$
$\emptyset$	*leere* Menge enthält überhaupt keine Elemente	
$\times$	*Produktmenge* $M_1 \times M_2 = \{(x,y) \mid x \in M_1$ und $y \in M_2\}$	$\{2,5\} \times \{8\} = \{(2,8),(5,8)\}$

1 Komplexe Zahlen

Imaginäre Einheit $\mathrm{i}^2 = -1$ **Imaginäre Zahl** $\sqrt{-a} = \mathrm{i} \cdot \sqrt{a}$ $(a > 0)$
Potenzen $\mathrm{i}^{4n} = 1$ $\mathrm{i}^{4n+1} = \mathrm{i}$ $\mathrm{i}^{4n+2} = -1$ $\mathrm{i}^{4n+3} = -\mathrm{i}$ $\mathrm{i}^{-n} = (-\mathrm{i})^n$ $(n = 0,1,\ldots)$

Darstellungsformen

$$z = a + b\,\mathrm{i} = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi) = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$



a Realteil von z
b Imaginärteil von z
r Betrag von z
φ Argument von z
a,b,r reelle Zahlen,
$r \geqq 0$, $-\pi < \varphi \leqq \pi$ (Hauptwert),
φ bis auf ganzzahliges Vielfaches von 2π bestimmt

Umrechnungsformeln:

$$a = r\cdot\cos\varphi \qquad b = r\cdot\sin\varphi$$

$$r = \sqrt{a^2+b^2} = |z| \qquad \tan\varphi = \frac{b}{a} \qquad \varphi = \arctan\frac{b}{a} + \begin{cases} 0, \text{ falls } a > 0 \\ \pi, \text{ falls } a < 0, b \geqq 0 \\ -\pi, \text{ falls } a < 0, b < 0 \end{cases}$$

Euler'sche Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi$ $\qquad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi - \mathrm{i}\cdot\sin\varphi$

Addition und Subtraktion

$$z_1 \pm z_2 = (a + b\,\mathrm{i}) \pm (c + d\,\mathrm{i}) = (a \pm c) + (b \pm d)\,\mathrm{i}$$

Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi_2) = r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\cdot r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$$
$$= r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2)] \qquad = r_1 r_2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \mathrm{i}\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)] = \frac{r_1}{r_2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)} \qquad (r_2 \neq 0)$$

Potenzieren (n ganzzahlig)

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + \mathrm{i}\cdot\sin(n\varphi) \quad \text{(Satz von Moivre)}$$
$$z^n = [r(\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi)]^n = r^n[\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\cdot\sin(n\varphi)] = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\varphi)}$$

Radizieren (n reell)

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}\right] = \sqrt[n]{r}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi+k\cdot 2\pi}{n}}$$

Einheitswurzeln

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{k\cdot 2\pi}{n} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{k\cdot 2\pi}{n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\cdot 2\pi}{n}} \qquad (n = 2,3,\ldots) \quad (k = 0,1,2,\ldots,n-1)$$

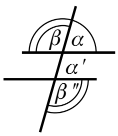
Logarithmieren

$$\ln z = \ln(r\,\mathrm{e}^{i\varphi}) = \ln r + \mathrm{i}(\varphi + 2k\pi) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

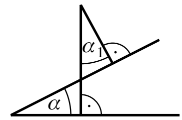
2 Geometrie

Sätze, Strecken, Winkel, Punkte bei Dreieck und Kreis

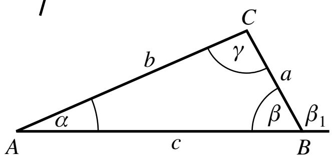
Winkel (an geschnittenen Parallelen)



$\alpha+\beta = 180°$ (Nebenwinkel)
$\alpha' = \alpha$ (Stufenwinkel)
$\beta'' = \beta$ (Wechselwinkel)



$\alpha = \alpha_1$
(da die Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen)



$\alpha + \beta + \gamma = 180°$ $\quad \alpha + \beta < 180°$
$\beta_1 = \alpha + \gamma$ (Außenwinkel)
$a < b \Leftrightarrow \alpha < \beta$ $\quad a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta$ $\quad a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta$
$a + b > c$ $\quad a - b < c$
(weitere Formeln durch zyklische Vertauschung)

Schnittpunkt der
- **Höhen**
- **Seitenhalbierenden** = Schwerpunkt
- **Winkelhalbierenden** = Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises
- **Mittelsenkrechten** = Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises

Flächen- und Streckenbeziehungen

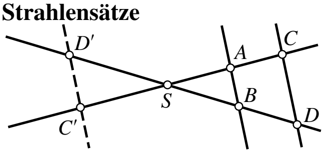
Kongruenzsätze: Kongruenz von Dreiecken (≅) bei Übereinstimmung in

1. zwei Seiten und eingeschlossenem Winkel (*sws*)
2. einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln (*wsw*; *sww*)
3. drei Seiten (*sss*)
4. zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel (*SsW*)

Ähnlichkeitssätze: Ähnlichkeit von Dreiecken (∼) bei Übereinstimmung im (in)

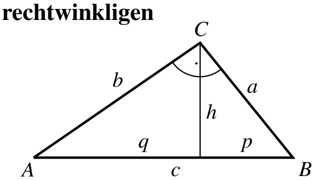
1. Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel
2. zwei Winkeln
3. Verhältnis der drei Seiten
4. Verhältnis zweier Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel

Strahlensätze



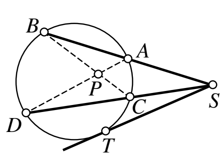
$$\overline{SA} : \overline{SC} = \overline{SB} : \overline{SD}$$
$$\overline{SA} : \overline{SC'} = \overline{SB} : \overline{SD'}$$
$$\overline{AB} : \overline{CD} = \overline{SA} : \overline{SC} = \overline{SB} : \overline{SD}$$
$$\overline{AB} : \overline{C'D'} = \overline{SA} : \overline{SC'} = \overline{SB} : \overline{SD'}$$

Sätze am rechtwinkligen Dreieck

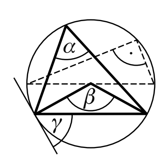


Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$
Höhensatz: $h^2 = pq$
Kathetensatz: $b^2 = cq, \quad a^2 = cp$

Kreis

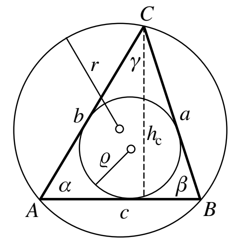


Sehnensatz $\overline{PB} \cdot \overline{PC} = \overline{PA} \cdot \overline{PD}$
Sekantensatz $\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{SC} \cdot \overline{SD}$
Tangentensatz $\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{ST}^2$

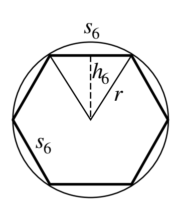


Mittelpunkts- und Peripheriewinkel $\beta = 2\alpha$
Thales-Satz: Umfangswinkel über Durchmesser ein Rechter
Sehnentangentenwinkel $\gamma = \alpha$

Flächeninhalt (A) Umfang (U) Längen

	A	U	(r Umkreisradius; ϱ Inkreisradius)
Dreieck	h Höhe $2s = a + b + c$; weitere Formeln durch zyklische Vertauschung		
	$A_3 = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma = \varrho s = \frac{abc}{4r}$ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $= a^2 \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{2\sin\alpha} = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$	$s = 4r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ $r = \frac{abc}{4A_3} = \frac{a}{2\sin\alpha}$ $\varrho = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$	
gleichseitiges ($b = c = a$)	$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$		$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ $r = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ $\varrho = \frac{\sqrt{3}}{6}a$
gleichschenklig ($a = b \neq c$)	$\frac{1}{2}a^2\sin\gamma = c^2\frac{\sin^2\alpha}{2\sin\gamma} = \frac{c^2}{4}\tan\alpha$		$h_c = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - c^2}$
Viereck	e,f Diagon; $\varphi = \measuredangle(e,f)$; $\varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$ oder $\frac{1}{2}(\beta+\delta)$; $2s = a+b+c+d$		
allgemein	$A_4 = e \cdot f \cdot \sin\varphi = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\ \cos^2\varepsilon}$		
Quadrat	a^2	$4a$	$e = \sqrt{2}a$ $r = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ $\varrho = \frac{1}{2}a$
Parallelogramm	$ah_a = bh_b$	$2(a+b)$	$e = \sqrt{a^2+b^2}$ für Rechteck
Trapez	$\frac{1}{2}(a+c)h = mh$	$a+b+c+d$	$a \| c$ h Höhe m Mittelparallele
Kreis	$\pi r^2 = \frac{\pi}{4}d^2$	$2\pi\, r = \pi\, d$	r Radius d Durchmesser
Sektor	$\frac{1}{2}br$	$b = \frac{\pi\, r}{180^\circ}\alpha^\circ$	b Bogenlänge über α
Segment	$\frac{1}{2}[br - s(r-h)]$		s Segmentsehne h Bogenhöhe
Ellipse	$\pi\, a\, b$	$\approx \pi\left[\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab}\right]$	a, b Halbachsen
Parabel-abschnitt	$\frac{4}{3}x_1y_1$ (Sehne durch Parabelpunkt (x_1, y_1) senkrecht zur Achse der Parabel $y^2 = \pm 2px$)		

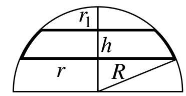
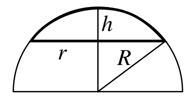
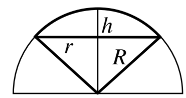
Einbeschriebenes regelmäßiges Vieleck (n Anzahl der Ecken)



$$A_n = \frac{n}{2}r^2\sin\frac{360^\circ}{n} \qquad s_n = 2r\sin\frac{180^\circ}{n} \qquad h_n = r\cos\frac{180^\circ}{n}$$

Inhalt von Oberflächen (O) und Mantelflächen (M), Rauminhalte (V)

(G Grundfläche h Höhe r,R Radius s Mantellinie)

	O	M	V	
Kugel	$4\pi R^2$		$\frac{4}{3}\pi R^3$	
Kugelzone bzw. -schicht		$2\pi hR$	$\frac{\pi h}{6}(3r^2+3r_1^2+h^2)$	
Kugelabschnitt (-segment)	$\pi h(4R-h)$	$2\pi hR$ $=(r^2+h^2)\pi$	$\frac{\pi h}{6}(3r^2+h^2)$ $=\frac{\pi h^2}{3}(3R-h)$	
Kugelausschnitt (-sektor)	$\pi R(2h+r)$		$\frac{2}{3}\pi hR^2$	
Prisma	$2G+M$		$G\cdot h$	
Zylinder			$G\cdot h$	
gerader Kreiszylinder	$2\pi r(h+r)$	$2\pi rh$	$\pi r^2 h$	
Pyramide			$\frac{1}{3}G\cdot h$	
Pyramidenstumpf	G_1+G_2+M		$\frac{h}{3}(G_1+\sqrt{G_1G_2}+G_2)\approx\frac{G_1+G_2}{2}h$	
Kegel			$\frac{1}{3}G\cdot h$	
gerader Kreiskegel	$\pi r(r+s)$	πrs	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$s=\sqrt{r^2+h^2}$
gerader Kreiskegelstumpf	$\pi[r_1^2+r_2^2$ $+s(r_1+r_2)]$	$\pi s(r_1+r_2)$	$\frac{\pi h}{3}(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)\approx$	$\frac{\pi h}{2}(r_1^2+r_2^2)$ $\frac{\pi h}{4}(r_1+r_2)^2$
Ellipsoid			$\frac{4}{3}\pi\, abc$	a,b,c Halbachsen
Rotationsellipsoid		(Rotation um a)	$\frac{4}{3}\pi\, ab^2$	
Rotationsparaboloid			πph^2	($y^2=2px$ rotiert um x-Achse; $h=x$)

13 Gewöhnliche Differenzialgleichungen und Lösungsansatz

(Auswahl)

$$\boxed{F(x,y,y')=0} \qquad \textbf{1. Ordnung}$$

$$\boxed{y' = g(x)\cdot h(y)}$$

Trennung der Variablen: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(x)\,\mathrm{d}x \qquad H(y) = G(x) + C$

$$\boxed{y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad \textbf{Ähnlichkeitsdifferenzialgl.}}$$

Subst.: $z = \dfrac{y}{x} \qquad y' = xz' + z \qquad \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}z}{\varphi(z) - z} = \ln|x| + C$

Lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung

Allgemeine Hinweise für lineare Differenzialgleichungen beliebiger Ordnung

Homogene lineare Differenzialgleichungen

Eine homogene lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung hat genau n linear unabhängige Lösungen, deren Linearkombination die allgemeine Lösung $y_H(x)$ der homogenen Differenzialgleichung ist.

Inhomogene lineare Differenzialgleichungen

Die allgemeine Lösung $y_I(x)$ einer inhomogenen linearen Differenzialgleichung gewinnt man aus der allgemeinen Lösung $y_H(x)$ der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung durch Addition einer beliebigen partikulären Lösung $y_S(x)$ der inhomogenen Differenzialgleichung:

$y_I(x) = y_H(x) + y_S(x)$

$y_S(x)$ erhält man u. a. durch das Verfahren der Variation der Konstanten: allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung mit Funktionen von x anstelle der Integrationskonstanten als Ansatz für die Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung verwenden.

$a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x)$	**Allgem. Form der lin. Dgl. 1. Ordn.**
$y' + p(x)y = q(x)$	**Normalform**

$p(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}$; $q(x) = \dfrac{r(x)}{a_1(x)}$

a) **Lagrange**
homogene Differenzialgleichung $y' + p(x)y = 0$: **Trennung der Variablen**
$y_H = C\,\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$
inhomogene Differenzialgleichung: **Variation der Konstanten**

$y = C(x)\psi(x) \qquad \left(\psi(x) = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\right)$

$C'(x)\psi(x) + q(x) = 0; \quad C(x) = C_1 + \displaystyle\int q(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$

b) **Bernoulli (Produktansatz)** (nur für lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung)
$y = u\cdot v; \qquad y' = u'v + uv';$ in Differenzialgleichung einsetzen
u oder v ausklammern; Klammerausdruck null setzen

$$\boxed{\boldsymbol{y' + p(x)y + q(x)y^n = 0} \quad \textbf{Bernoulli'sche Dgl.}}$$

Division durch $(-y^n)$; Subst.: $z = \dfrac{1}{y^{n-1}}$; $z' = -(n-1)\dfrac{y'}{y^n}$ führt auf lin. Dgl. in z und x

spez.: $\boldsymbol{y' + p(x)y + q(x)y^2 = 0}$; $z = \dfrac{1}{y}$; $z' = -\dfrac{y'}{y^2}$

$$\boxed{\boldsymbol{y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x)} \quad \textbf{Ricatti'sche Dgl.}}$$

mit (geg. oder erratener) part. Lösung $y = y_1(x)$ lösbar; Ansatz: $\boldsymbol{y = y_1(x) + v(x)}$
führt auf Bernoulli'sche Differenzialgleichung ($n = 2$) für $v(x)$

$$\boxed{\boldsymbol{y = x \cdot g(y') + h(y')} \quad \textbf{d'Alembert'sche Dgl.}}$$

$\boldsymbol{y' = p(x)}$ in differenzierte Ausgangsgleichung einsetzen, $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ ausklammern; führt auf lineare Differenzialgleichung: $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + h(p)x + k(p) = 0$

Lösung in Parameterdarstellung: $\boldsymbol{x = x(p,C); \quad y = y(p,C)}$

spez.: $$\boxed{\boldsymbol{y = xy' + h(y')} \quad \textbf{Clairaut'sche Dgl.}}$$

$\boldsymbol{y' = p(x)}$; weiter wie oben ergibt Dgl.: $[x + h'(p)]\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$

$\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0,\ p = C$; allgem. Lösung: $\boldsymbol{y = Cx + h(C)}$

$[x + h'(p)] = 0$; singuläre Lösung in Parameterdarstellung: $\boldsymbol{x = -h'(p)}$
$\boldsymbol{y = -ph'(p) + h(p)}$

13

$$\boxed{\boldsymbol{M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0}}$$

1. **Exakte (vollst., totale) Dgl.** $\boldsymbol{M_y = N_x}$ (Integrabilitätsbedingung)

   $M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\Phi(x,y)$ vollständiges Differenzial der Funktion $\Phi(x,y)$

   $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = M$; $\Phi = \displaystyle\int M\,\mathrm{d}x + G(y)$; $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = N$; allgemeine Lösung: $\Phi(x,y) = C$

2. **Integrierender Faktor**

   $\mu = \mu(x,y)$ so bestimmen, dass $\mu(x,y)M(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu(x,y)N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ exakte Differenzialgleichung

$$\frac{M_y - N_x}{N} = f(x) \qquad \Rightarrow \qquad \mu = \mu(x) = \mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\frac{M_y - N_x}{M} = f(y) \qquad \Rightarrow \qquad \mu = \mu(y) = \mathrm{e}^{-\int f(y)\,\mathrm{d}y}$$

$$\frac{M_y - N_x}{y \cdot N - x \cdot M} = f(z) \qquad z = x \cdot y \qquad \Rightarrow \qquad \mu = \mu(z) = \mathrm{e}^{\int f(z)\,\mathrm{d}z}$$

$$\frac{(M_y - N_x) \cdot x^2}{y \cdot N + x \cdot M} = f(z) \qquad z = \frac{y}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \mu = \mu(z) = \mathrm{e}^{-\int f(z)\,\mathrm{d}z}$$

$$\boxed{F(x,y,y',y'')=0} \qquad \textbf{2. Ordnung}$$

Bestimmte Glieder fehlen

$y''=f(x) \quad y^{(n)}=g(x)$	**unmittelbare Integration**
y kommt nicht vor	$y'=p(x) \quad y''=p'$
$F(x,y',y'')=0; \quad F(y',y'')=0$	$\rightarrow F(x,p,p')=0; \quad F(p,p')=0$
x kommt explizit nicht vor	$y'=q(y) \quad y''=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=q\cdot\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}$
$F(x,y',y'')=0$	$\rightarrow G\left(y,q,\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}\right)=0$
Spezialfall: $y''=f(y)$	auch: Multipl. m. $2y'$; $2y''y'=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y'^2$

Lineare Differenzialgleichungen 2. Ordnung

$$\boxed{a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0 \quad \text{Allgem. homog. lin. Dgl. 2. Ordn.}}$$

Allgem. Lsg.: $y_H(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ (y_1,y_2 partikuläre Lösungen)

Bestimmung der partikulären Lösungen für ausgewählte Fälle

1. $\boxed{a_2y''+a_1y'+a_0y=0 \quad \text{konst. Koeffizienten}}$

Ansatz: $y=\mathrm{e}^{\lambda x}$ Charakterist. Gleichung: $a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$

a) $\lambda_1\neq\lambda_2$ reell	$y_1=\mathrm{e}^{\lambda_1x}$	$y_2=\mathrm{e}^{\lambda_2x}$
b) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0$	$y_1=\mathrm{e}^{\lambda_0x}$	$y_2=x\,\mathrm{e}^{\lambda_0x}$
c) $\lambda_{1,2}=a\pm\mathrm{i}b$	$y_1=\cos(bx)\,\mathrm{e}^{ax}$	$y_2=\sin(bx)\,\mathrm{e}^{ax}$

2. $\boxed{a_2x^2y''+a_1xy'+a_0y=0 \quad \text{homog. Euler'sche Dgl.}}$

Ansatz: $y=x^\lambda$ Charakterist. Gleichung: $a_2\lambda(\lambda-1)+a_1\lambda+a_0=0$

a) $\lambda_1\neq\lambda_2$ reell	$y_1=x^{\lambda_1}$	$y_2=x^{\lambda_2}$
b) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0$	$y_1=x^{\lambda_0}$	$y_2=x^{\lambda_0}\ln x$
c) $\lambda_{1,2}=a\pm\mathrm{i}b$	$y_1=x^a\cos(b\ln x)$	$y_2=x^a\sin(b\ln x)$

3. $\boxed{x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0 \quad \text{Bessel'sche Dgl.}}$

ν nicht ganzzahlig: $y_1=J_\nu(x)$ $y_2=J_{-\nu}(x)$

$$J_\nu(x)=\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^\mu\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\mu+\nu}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu+\nu+1)} \qquad J_{-\nu}=\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^\mu\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\mu-\nu}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(-\nu+\mu+1)}$$

(Bessel'sche Funktionen 1. Art) (s. a. S. 51)

$\nu=n$ ganzzahlig $y_1=J_n(x)$ $y_2=N_n(x)$

$$N_n(x)=\lim_{\nu\to n}\frac{\cos\nu\pi\cdot J_\nu(x)-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

(Bessel'sche Funktionen 2. Art) (s. a. S. 51)

16 Fehlerrechnung, Näherungsformeln und -verfahren

Fehler: Näherungswert (Istwert)–*wahrer Wert* (Sollwert)

Näherungswert	wahrer Wert	absoluter Fehler	relativer Fehler
a	x	$\varepsilon = a - x$	$\left\lvert\frac{\varepsilon}{x}\right\rvert \mathrel{\widehat{=}} \left\lvert\frac{\varepsilon}{x}\right\rvert \cdot 100\ \%$

Fehlerabschätzung beim Rechnen mit Näherungswerten (Methode der Fehlerschranken)

k (fehlerbehaftete) Variable:	$x_1,x_2,\ldots,x_k$	
zu berechnende Funktion:	$f(x_1,x_2,\ldots,x_k)$	
absoluter Fehler von f:	ε_f	
Näherungswerte für die x_i:	a_i	
absolute Fehler für die x_i	$\varepsilon_i = a_i - x_i$	$(i = 1,2,\ldots,k)$
Schranken für die ε_i	$\Delta a_i \quad (\Delta a_i \geqq \lvert\varepsilon_i\rvert)$	

Schranke für den absoluten Fehler (ε_f) von $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$:

$$\Delta f = \Delta a_1 \lvert f_{x_1}(a_1,\ldots,a_k)\rvert + \Delta a_2 \lvert f_{x_2}(a_1,\ldots,a_k)\rvert + \ldots + \Delta a_k \lvert f_{x_k}(a_1,\ldots,a_k)\rvert \qquad (\Delta f \geqq \varepsilon_f)$$

Anwendung auf elementare Rechenoperationen

x,y wahre Werte $\quad a,b$ Näherungswerte $\quad \Delta a,\Delta b$ Fehlerschranken

$f(x,y)$	Schranken für den absoluten Fehler Δf	Schranken für den relativen Fehler $\Delta f/\lvert f\rvert$
$x \pm y$	$\Delta a + \Delta b$	$(\Delta a + \Delta b)/\lvert a \pm b\rvert$
$x \cdot y$	$\Delta a \cdot \lvert b\rvert + \Delta b \cdot \lvert a\rvert$	$\Delta a/\lvert a\rvert + \Delta b/\lvert b\rvert$
x/y	$\dfrac{\Delta a \cdot \lvert b\rvert + \Delta b \cdot \lvert a\rvert}{b^2}$	$\dfrac{\Delta a}{\lvert a\rvert} + \dfrac{\Delta b}{\lvert b\rvert}$
$x^n\ (n \neq 0,1)$	$\Delta a \lvert n a^{n-1}\rvert$	$\lvert n\rvert \Delta a/\lvert a\rvert$

Messreihe $a_1,a_2,\ldots,a_n$ einer Größe x

Näherungswert für x: $\quad \overline{a} = \dfrac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \quad$ (arithmetisches Mittel)

durchschnittlicher Fehler: $\quad \overline{\Delta a} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lvert a_i - \overline{a}\rvert$

mittlerer Fehler: (Standardabweichung) $\quad \sigma = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(a_1 - \overline{a})^2} \quad$ (s. S. 100)

16

Methode der kleinsten Quadrate (Gauß)

Parameter $t_1,t_2,\ldots,t_k$ der Funktion $f(x,t_1,t_2,\ldots,t_k)$ (f stetig partiell differenzierbar) so bestimmen, dass die Funktion die Punkte $P_i(x_i,y_i)(i = 1,2,\ldots,n;\ n > k)$ möglichst genau annähert

Forderung:

$$Q(t_1,t_2,\ldots,t_k) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i,t_1,t_2,\ldots,t_k) - y_i]^2 \ \rightarrow\ \text{Min}$$

Normalengleichungen zur Berechnung der Parameter $t_1,t_2,\ldots,t_k$:

$$\frac{\partial Q(t_1,t_2,\ldots,t_k)}{\partial t_j} = 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,k)$$

Interpolation

Die Gleichung der Parabel n-ter Ordnung	Die ganze rationale Funktion n-ten Grades

$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad a_n \neq 0,$$

die durch $(n+1)$ vorgegebene Punkte $P_0(x_0,y_0), P_1(x_1,y_1), \ldots, P_n(x_n,y_n)$ hindurchgeht,	für die zu $(n+1)$ voneinander verschiedenen Werten $x_0,x_1,\ldots,x_n$ die $(n+1)$ Funktionswerte $y_0,y_1,\ldots,y_n$ vorgeschrieben sind,

kann durch folgenden **Ansatz** bestimmt werden:

$$\begin{aligned} y = c_0 &+ c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \ldots \\ &+ c_i(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1}) + \ldots \\ &+ c_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

nach Newton

Die Koeffizienten $c_0,c_1,\ldots,c_i,\ldots,c_n$ werden schrittweise dadurch berechnet, dass für $x = x_0,x_1,\ldots,x_n$ jeweils y die zugehörigen Werte $y_0,y_1,\ldots,y_n$ annimmt.

Steigungsschema

x_i	$y_i = S_i^0$	S_i^1	S_i^2	S_i^3	$\ldots$
x_0	$y_0 = S_0^0$				
x_1	y_1	$S_1^1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$			
x_2	y_2	$S_2^1 = \dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$	$S_2^2 = \dfrac{S_2^1 - S_1^1}{x_2 - x_1}$		
x_3	y_3	$S_3^1 = \dfrac{y_3 - y_0}{x_3 - x_0}$	$S_3^2 = \dfrac{S_3^1 - S_1^1}{x_3 - x_1}$	$S_3^3 = \dfrac{S_3^2 - S_2^2}{x_3 - x_2}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

k-te Steigung:

$$S_i^k = \frac{S_i^{k-1} - S_{k-1}^{k-1}}{x_i - x_{k-1}}$$

$k = 1,2,\ldots,n$

$i = k,k+1,\ldots,n$

$c_0 = y_0 = S_0^0$

$c_i = S_i^i;$

$i = 0,1,\ldots,n$

Differenzschema bei äquidistanten Argumenten $\quad (x_{i+1} - x_i = h)$

$$\begin{array}{c|ccccc} x_0 & \boxed{y_0} & & & \\ & & \boxed{\Delta^1 y_0} & & \\ x_1 & y_1 & & \boxed{\Delta^2 y_0} & \\ & & \Delta^1 y_1 & & \boxed{\Delta^3 y_0} \\ x_2 & y_2 & & \Delta^2 y_1 & \vdots \\ & & \Delta^1 y_2 & \vdots & \\ x_3 & y_3 & & & \\ & & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & & \end{array}$$

Δ^n n-te Differenzspalte

z. B. $\Delta^1 y_2 = y_3 - y_2$
$\Delta^2 y_1 = \Delta^1 y_2 - \Delta^1 y_1$

$c_0 = y_0 \qquad c_1 = \dfrac{\Delta^1 y_0}{h}$

$c_2 = \dfrac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$

$\vdots$

$c_n = \dfrac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$

nach Lagrange

Ansatz: $\quad y = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + \ldots + L_n(x)y_n$

mit $\quad L_i(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$

(Das Glied mit dem Index i fehlt; $\quad i = 0,1,\ldots,n$)

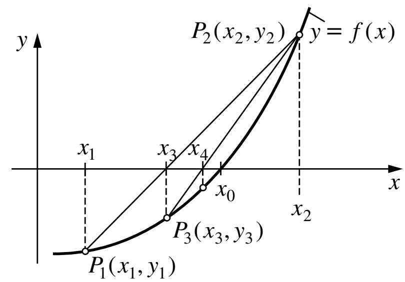
Näherungslösung von Gleichungen mit einer Unbekannten

Lineare Interpolation (Regula falsi – Sekantenverfahren)

$f(x) = 0$
x_0 gesuchte Lösung: $f(x) \equiv 0$
$y = f(x)$ zugehörige Funktion.
Man geht von Werten x_1 und x_2 aus, die so zu wählen sind, dass $f(x_1)$ und $f(x_2)$ verschiedene Vorzeichen haben.
Die Sekante $\overline{P_1P_2}$ schneidet die x-Achse in einem Punkt mit dem Näherungswert

$$x_3 = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \cdot y_1$$

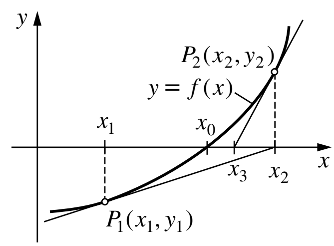
Fortsetzung des Verfahrens mit x_3 und x_2; usw.



Newton'sches Näherungsverfahren (Tangentenverfahren)

$f(x) = 0$
x_0 gesuchte Lösung: $f(x_0) = 0$
$y = f(x)$ zugehörige Funktion.
x_1 aus der Umgebung von x_0 wählen oder grafisch bestimmen.
Die Tangente in $P_1(x_1,y_1)$ an die Kurve $y = f(x)$ schneidet die x-Achse in einem Punkt mit dem Näherungswert

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad (f'(x_1) \neq 0)$$



Fortsetzung des Verfahrens mit $P_2(x_2,y_2)$, was den verbesserten Näherungswert x_3 ergibt; usw.

Allgemein: Näherungswert $\quad x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \qquad (n = 2,3,4,\ldots; f'(x_{n-1}) \neq 0)$

Näherungsweise Berechnung eines bestimmten Integrals

n Anzahl der Teilintervalle der Länge $x_{i+1} - x_i = h = \dfrac{b-a}{n}$, $\quad n$ geradzahlig; $\quad i = 0,1,\ldots,n-1$

$u = y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}$ (Ordinaten mit ungeradem Index) $\qquad y_0 = y_a,\ y_n = y_b$
$g = y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}$ (Ordinaten mit geradem Index)

Sehnen-Trapez-Formel $\quad$ (n bel.)

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\left[y_a + y_b + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})\right] = \frac{h}{2}(y_a + y_b + 2u + 2g)$$

Tangenten-Trapez-Formel

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx 2h\left[y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}\right] = h \cdot 2u$$

Simpson'sche Regel

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\left[(y_a + y_b) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})\right]$$
$$= \frac{h}{3}(y_a + y_b + 4u + 2g)$$

Sachwortverzeichnis

S

S

S