6 Übungsaufgaben zur Theorie der Unternehmung

Aufgabe 6-1

Welcher Zusammenhang wird durch die Produktionsfunktion dargestellt und worin unterscheiden sich langfristige und kurzfristige Produktionsfunktionen?

Aufgabe 6-2

Welcher Sachverhalt wird durch die Isoquante dargestellt und welche Beziehung besteht zwischen der Steigung der Isoquanten und der Grenzproduktivität der eingesetzten Produktionsfaktoren?

Aufgabe 6-3

Wie muss eine Ertragsfunktion verlaufen, wenn der Grenzertrag immer niedriger ist als der Durchschnittsertrag bzw. wenn Grenz- und Durchschnittsertrag gleich hoch sind?

Aufgabe 6-4

Ist ein Produktionsprozess mit konstanten Skalenerträgen vereinbar mit abnehmenden Grenzerträgen des Faktors Arbeit?

Aufgabe 6-5

Sie sind Leiter einer Fertigungsabteilung mit 40 Arbeitskräften. Die Durchschnittsproduktivität dieser Arbeitskräfte beträgt 120 Teile je Arbeitnehmer und Tag. Aufgrund steigender Bedarfsanforderungen kann die Produktion ausgeweitet werden.

a) Von welcher Größe sollten Sie sich bei ihrer Entscheidung über den Arbeitseinsatz leiten lassen, von der Durchschnittsproduktivität oder der Grenzproduktivität? Begründen Sie ihre Entscheidung.

b) Sie stellen fünf zusätzliche Arbeitskräfte ein und stellen nach der Einarbeitung fest, dass der durchschnittliche Produktionsausstoß auf 115 Teile je Tag und Beschäftigten gefallen ist. Welche Schlüsse ziehen Sie daraus für das Grenzprodukt der zuletzt eingesetzten Arbeitskräfte?

Aufgabe 6-6

Beantworten Sie folgende Fragen:

a) Was sind substitutionale, was limitationale Produktionsfunktionen?

b) Was versteht man unter einer linear-homogenen Produktionsfunktion? Ist eine Produktionsfunktion mit konstanten Skalenerträgen auch gleichzeitig linear-homogen?

c) Zwei wichtige volkswirtschaftliche Produktionsfunktionen sind die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion sowie die Leontief-Produktionsfunktion. Geben Sie jeweils die Gleichung dieser Produktionsfunktionen an (kurze Erklärung der verwendeten Symbole) und beantworten Sie für jede Funktion folgende Fragen:
   - Ist die Funktion linear-homogen?
   - Handelt es sich um eine substitutionale oder eine limitationale Produktionsfunktion?

Aufgabe 6-7

Ein Getreideerzeuger bringt auf gleich großen Ackerflächen unterschiedliche Mengen eines Düngers aus. Für den Düngereinsatz von 30 bis 90 kg je ha hat er folgende Hektarerträge erzielt:

Dünger in kg	30	40	50	60	70	80	90
Ertrag in dz	36	42	46	48	50	51	48

a) Bestimmen Sie den Durchschnitts- und Grenzertrag des Düngereinsatzes.

b) Was lässt sich über den Verlauf der Grenzerträge des Düngereinsatzes sagen?

c) Worin unterscheiden sich abnehmende Grenzerträge des Faktoreinsatzes von abnehmenden Gesamterträgen des Faktoreinsatzes und wie lassen sich beide Phänomene begründen?

Aufgabe 6-8

Gegeben ist eine Funktion: $x = 1{,}5 \cdot v_1^2 \cdot v_2^2 - 0{,}1 \cdot v_1^3 \cdot v_2^3$

x = Produktionsergebnis
v_1 = Produktionsfaktor 1
v_2 = Produktionsfaktor 2

a) Welchen Typ von Produktionsfunktion ergibt der obige Zusammenhang?

b) Bestimmen Sie das Maximum des Grenz-, Durchschnitts- und Gesamtertrags für $\overline{v}_2 = 1$.

c) Wie groß ist die Grenzproduktivität des Faktors v_2?

Aufgabe 6-9

Die Produktionsfunktion für die Produktion von Möbel laute $x = 10 \cdot K^{0,6} \cdot A^{0,4}$ mit x = Anzahl der pro Tag gefertigten Möbel, A = Arbeitseinsatz, K = Kapitaleinsatz.

a) Wie lautet die Grenzertrags- und Durchschnittsertragsfunktion des Arbeitseinsatzes?

b) Wie lautet die Produktionselastizität des Faktoreinsatzes?

c) Wie lautet die Isoquante für ein Outputniveau von 1000 Möbelteilen?

d) Wie hoch sind der Kapitaleinsatz und die Grenzrate der technischen Substitution bei einem Arbeitseinsatz von 100 Einheiten?

e) Weist der Produktionsprozess zunehmende, abnehmende oder konstante Skalenerträge auf?

Aufgabe 6-10

Ein Unternehmen fertige chemische Grundstoffe gemäß $x = 10 \cdot K^{0,8} \cdot A^{0,5}$ mit x = Menge der pro Tag gefertigten Tonnen an Grundstoffen. Unterstellen Sie einen Arbeitseinsatz von 50. Beantworten Sie die Fragen der vorhergehenden Aufgabe für diese Produktionsfunktion.

a) Wie lautet die Grenzertrags- und Durchschnittsertragsfunktion des Arbeitseinsatzes?

b) Wie lautet die Produktionselastizität des Faktoreinsatzes?

c) Wie lautet die Isoquante für ein Outputniveau von 1000 Tonnen?

d) Wie hoch sind der Kapitaleinsatz und die Grenzrate der technischen Substitution bei einem Arbeitseinsatz von 50 Einheiten?

e) Weist der Produktionsprozess zunehmende, abnehmende oder konstante Skalenerträge auf?

Aufgabe 6-11

Beantworten Sie kurz folgende Fragen:

a) Erläutern Sie den Unterschied zwischen partieller und totaler Faktorvariation.

b) Wie entwickelt sich der Produktionsertrag bei totaler Faktorvariation für den Fall einer

c) Unterscheiden Sie zwischen abnehmenden Grenzerträgen und abnehmenden Skalenerträgen.

d) Sind zunehmende Skalenerträge und abnehmende Grenzerträge vereinbar?

e) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Skalenelastizität und dem Abstand der Isoquanten?

Aufgabe 6-12

Welcher inhaltliche Zusammenhang wird mit der Isokostengeraden zum Ausdruck gebracht?

Aufgabe 6-13

Beantworten Sie folgende Fragen:

a) Wie verlaufen die durchschnittlichen variablen Kosten, wenn die Grenzkosten der Produktion höher als die durchschnittlichen variablen Kosten sind?

b) Ein rasch wachsendes Unternehmen operiert zunächst im Bereich zunehmende Skalenerträge, ab einem bestimmten Produktionsniveau mit konstanten Skalenerträgen. Welche Rückschlüsse ergeben sich daraus für den Verlauf der langfristigen Durchschnittskostenkurve?

c) Wie verlaufen die langfristige Kostenfunktion und der Expansionspfad für den Fall einer linear-homogenen Produktionsfunktion?

d) Wie lautet die Bedingung für die Minimalkostenkombination und welche Steigung hat die Isoquante in diesem Minimum?

e) Erläutern Sie den Unterschied zwischen den Expansionspfad und der Faktornachfragekurve.

Aufgabe 6-14

Ein Unternehmen produziere mit den Produktionsfaktoren Arbeit und Kapital gemäß der Produktionsfunktion $x = 10 \cdot v_A^{0,8} \cdot v_K^{0,5}$. Der Kapitaleinsatz sei fix und betrage 100 Einheiten. Die Arbeitskosten beliefen sich auf 25 € je Stunde, die Kapitalkosten seien 10 € je Einheit.

a) Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge und leiten Sie die Grenz- und Durchschnittskosten ab.

b) Bei welcher Ausbringungsmenge sind Grenzkosten und Stückkosten gleich hoch?

Aufgabe 6-15

Eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion sei durch folgende Gleichung dargestellt:

$$K = 0{,}5x^3 - 2x^2 + 4x + 100$$

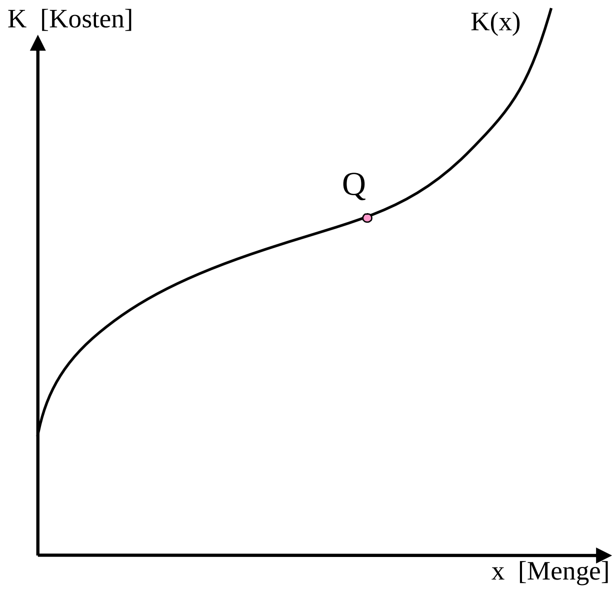
a) Wie lautet die Funktion

- der variablen Kosten,
- der durchschnittlichen Gesamtkosten,
- der durchschnittlichen variablen Kosten,
- der Grenzkosten?

b) Wie hoch sind die minimalen durchschnittlichen variablen Kosten?

Aufgabe 6-16

Gegeben sei folgende Kostenfunktion:



a) Erläutern Sie anhand dieser Zeichnung am Beispiel des Punktes Q die Begriffe

- Gesamtkosten,
- variablen Kosten,
- fixe Kosten.

b) Wie ermittelt man geometrisch die für den Punkt Q geltenden

- Grenzkosten,
- durchschnittlichen variablen Kosten,
- durchschnittlichen Gesamtkosten?

c) Was lässt sich über den Verlauf der Kurven in b) bei einem linearen Verlauf der Gesamtkostenkurve sagen?

Aufgabe 6-17

Eine Gesamtkostenfunktion habe folgende Gleichung: $K = 1000 + 80x - 2x^2 + 0{,}02x^3$

a) Wie lautet die Grenzkostenfunktion?

b) Wie lautet die Funktion der durchschnittlichen variablen Kosten?

c) Wie lautet die Funktion der durchschnittlichen totalen Kosten?

d) Wie lautet die Funktion der durchschnittlichen fixen Kosten?

e) Skizzieren Sie die Funktionen a) bis d) in einem geeigneten Koordinatensystem.

Aufgabe 6-18

Eine Unternehmung, die nur ein Produkt herstellt, produziert im Bereich abnehmender Grenzerträge.

Prüfen Sie in diesem Bereich jeweils für die Grenzkosten, die variablen Durchschnittskosten und die totalen Durchschnittskosten, ob diese Kosten fallen oder steigen können beziehungsweise fallen oder steigen müssen.

Aufgabe 6-19

Ein Unternehmen produziere mit der Produktionsfunktion $x = 50 \cdot v_A^{0,8} \cdot v_K^{0,5}$. Die Faktorpreise seien $r_A = 10$ € und $r_K = 5$ €. Es soll eine Menge von 2000 Einheiten produziert werden.

a) Bestimmen Sie die Minimalkostenkombination.

b) Wie hoch sind die Produktionskosten?

c) Wie ändern sich die Minimalkostenkombination und die Produktionskosten, wenn der Faktorpreis r_A auf 15 € steigt.

Aus den beiden Gleichungen ergeben sich die optimalen Inputmengen:

Aufgabe 6-20

Eine Unternehmung, die ihren Gewinn maximiert, produziere gemäß der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion $x = 20 v_A^{0,75} v_K^{0,25}$. Die Grenzproduktivität der Arbeit lautet:

$\frac{\partial x}{\partial v_A} = 0{,}75 \cdot 20 \cdot v_A^{0,75-1} v_K^{0,25}$. Der Preis für den Faktor Arbeit r_A Euro pro Stunde. Die Kapitalkosten betragen r_K Euro pro Maschinestunde. Bestimmen Sie für $v_K = 256$ die partielle Arbeitsnachfragefunktion des Unternehmens?

Lösungen

Aufgabe 6-1

Die Produktionsfunktion beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Produktionsertrag und den eingesetzt Produktionsfaktoren. Sie ordnet jeder Kombination von möglichen Faktoreinsatzmengen die bei dem gegebenen Stand des technischen Wissens maximal produzierbare Menge zu. Damit beinhaltet die Produktionsfunktion sämtliche technisch effizienten Beziehungen zwischen Input und Output.

Langfristige Produktionsfunktionen enthalten nur variable Produktionsfaktoren, weil ein Unternehmen langfristig alle Inputs variieren kann. Kurzfristige Produktionsfunktionen enthalten sowohl variable Produktionsfaktoren als auch einen oder mehrere fixe Faktoren, weil kurzfristig der Einsatz bestimmter Faktoren nicht verändert worden kann.

Aufgabe 6-2

Die Isoquante ist der geometrische Ort aller Mengenkombination der Produktionsfaktoren 1 und 2, die zu einem gleich hohen Produktionsertrag führen. Die Isoquantenfunktion bringt zum Ausdruck, mit welchen Faktorkombinationen eine gegebene Produktionsmenge technisch effizient hergestellt werden kann. Die Steigung der Isoquanten misst die Grenzrate der technischen Substitution:

$$\mathrm{GRTS} = -\frac{dv_1}{dv_2}\ .$$

Es lässt sich zeigen, dass die Grenzrate der technischen Substitution dem umgekehrten Verhältnis der Grenzproduktivitäten der eingesetzten Faktoren spricht:

$$\mathrm{GRTS} = -\frac{dv_1}{dv_2} = \frac{\partial x/\partial v_2}{\partial x/\partial v_1}\,.$$

Weist der Produktionsprozess abnehmende Grenzerträge der eingesetzten Faktoren auf, ist auch das Gesetz von der abnehmenden Grenzrate der technischen Substitution erfüllt.

Aufgabe 6-3

Bei einer Ertragsfunktion mit abnehmenden Ertragszuwächsen ist die Grenzproduktivität immer niedriger als die Durchschnittsproduktivität des variablen Faktors.

Aufgabe 6-4

Ja. Ein Beispiel dafür ist die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion. Für $\alpha + \beta = 1$ weist sie konstante Skalenerträge auf, aber für den Fall der partiellen Faktorvariation ergeben sich abnehmende Grenzerträge der eingesetzten Faktoren Kapital beziehungsweise Arbei

Aufgabe 6-5

a) Die Durchschnittsproduktivität informiert Sie über die durchschnittliche Leistungsfähigkeit aller ihrer Mitarbeiter. Dagegen liefert die Grenzproduktivität Informationen über die Tendenz der Produktionsentwicklung. Ob Sie bei einer weiteren Ausdehnung der Beschäftigung von einer steigenden oder fallenden Arbeitsproduktivität ausgehen können, hängt von der Entwicklung der Effizienz der zuletzt eingesetzten Arbeitskräfte ab. Sie sollten sich also bei Entscheidungen über den Arbeitseinsatz von der Grenzproduktivität leiten lassen.

b) Um eine Aussage über die Grenzproduktivität zu bekommen, können Sie einen Vorher-Nachher-Vergleich anstellen:

	vorher	nachher	Veränderung
Produktivität	120	115	- 5
Beschäftigung	40	45	+ 5
Produktion	4800	5175	+ 375

Die Grenzproduktivität der zuletzt eingesetzten Arbeitskräfte beträgt 75 Teile pro Beschäftigten und Tag. Weil die Durchschnittsproduktivität zurückgegangen ist, ist die Effizienz der zuletzt eingesetzten Arbeitskräfte niedriger als die der bisher eingesetzten.

Aufgabe 6-6

a) Substitutional: Produktionsfaktoren können sich gegenseitig ersetzen. Der Output steigt auch bei Vermehrung nur eines Faktors (partielle Ertragsfunktion).

Limitational: Produktionsfaktoren können nur in einem technisch fest vorgegebenen Zahlenverhältnis eingesetzt waren. Der Output steigt nur, wenn beide Faktoren erhöht werden.

b) Linear-homogen heißt konstante Skalenerträge beziehungsweise die Skalenelastizität ist eins. Dies bedeutet, dass sich der Output proportional zum Inputbündel erhöht.

c) Cobb-Douglas-Produktionsfunktion: $x = a\, v_1^{\alpha}\, v_2^{\beta}$

a = Produktionskonstante, α, β = Produktionselastizitäten,

v_1, v_2 = Produktionsfaktoren, x = Output. Die Funktion ist linear-homogen für $\alpha + \beta = 1$ und substitutional.

Leontief-Produktionsfunktion: $x = \min\left[\frac{v_1}{a_1}; \frac{v_2}{a_2}\right]$

a_1, a_2 = Inputkoeffizienten, v_1, v_2 = Produktionsfaktoren, x = Output.

Die Funktion ist linear-homogen beziehungsweise linear-limitational.

Aufgabe 6-7

a) Durchschnitts- und Grenzertrag des Düngereinsatzes.

Dünger in kg	30	40	50	60	70	80	90
Ertrag in dz	36	42	46	48	50	51	48
Durchschnittsertrag (dz je kg)	1,20	1,05	0,92	0,80	0,71	0,64	0,53
Grenzertrag (dz je kg Dünger)		0,60	0,40	0,30	0,20	0,10	-0,30

b) Der Düngereinsatz weist abnehmende Grenzerträge auf.

c) Abnehmende Grenzerträge des Faktoreinsatzes lassen sich damit erklären, dass die effizientesten Produktionsfaktoren zuerst eingesetzt werden. Wird der Faktoreinsatz weiter ausgedehnt, müssen zunehmend weniger effiziente beziehungsweise leistungsschwächere Faktoren zum Einsatz kommen, so dass die Ertragszuwächse bei einer weiteren Ausdehnung des Faktoreinsatzes abnehmen.

Beim Düngereinsatz könnte man sich etwa vorstellen, dass die Pflanzen mit Beginn der Düngung vergleichsweise viel Dünger aufnehmen und die Ertragszuwächse entsprechend hoch sind. Wird der Düngereinsatz weiter ausgedehnt, resorbieren die Pflanzen von den zusätzlichen Düngergaben immer weniger und die Ertragszuwächse nehmen entsprechend ab.

Abnehmende Gesamterträge lassen sich damit erklären, dass sich zum Beispiel bei einer weiteren Ausdehnung des Arbeitseinsatzes die Arbeitskräfte gegenseitig behindern und der Arbeitseinsatz sich ins Gegenteil verkehrt mit der Folge, dass das Produktionsergebnis sinkt. Im Fall des Düngereinsatzes könnte man sich vorstellen, dass ab einem bestimmten Punkt zusätzliche Düngergaben für die Pflanzen schädlich sind und der Ernteertrag absolut zurückgeht.

Aufgabe 6-8

a) Produktionsfunktion mit ertragsgesetzlichem Verlauf

b) Die partielle Ertragsfunktion lautet: $x = 1{,}5v_1^2 \cdot \overline{v}_2^2 - 0{,}1v_1^3 \cdot \overline{v}_2^3$

Berechnung des Maximums:

$$\frac{dx}{dv_1} = 2 \cdot 1{,}5 \cdot v_1 \cdot \overline{v}_2^2 - 3 \cdot 0{,}1 \cdot v_1^2 \cdot \overline{v}_2^3 = 0$$

$$v_1(3 \cdot \overline{v}_2^2 - 0{,}3 \cdot v_1 \cdot \overline{v}_2^3) = 0$$

$$v_{11} = 0$$

$$v_{12} = \frac{3 \cdot \overline{v}_2^2}{0{,}3 \cdot \overline{v}_2^3} = \frac{10}{v_2}\text{. Für } \overline{v}_2 = 1 \text{ folgt } v_1 = 10$$

Die Durchschnittsproduktivität von v_1 lautet:

$$\frac{x}{v_1} = 1{,}5 \cdot v_1 \cdot \overline{v}_2^2 - 0{,}1 \cdot v_1^2 \cdot \overline{v}_2^3$$

Berechnung des Maximums:

$$\frac{d(\frac{x}{v_1})}{dv_1} = 1{,}5 \cdot \overline{v}_2^2 - 0{,}2 \cdot v_1 \cdot \overline{v}_2^3 = 0$$

$$v_1 = \frac{1{,}5 \cdot \overline{v}_2^2}{0{,}2 \cdot \overline{v}_2^3} = \frac{7{,}5}{x_2}\text{. Für } \overline{v}_2 = 1 \text{ folgt } v_1 = 7{,}5$$

Die Grenzproduktivität von v_1 lautet:

$$\frac{dx}{dv_1} = 3 \cdot v_1 \cdot \overline{v}_2^2 - 0{,}3 \cdot v_1^2 \cdot \overline{v}_2^3$$

Berechnung des Maximums:

$$\frac{d_2 x}{d_2 v_1} = 3 \cdot \overline{v}_2^2 - 0{,}6 \cdot v_1 \cdot \overline{v}_2^3 = 0$$

$v_1 = \dfrac{3 \cdot \overline{v}_2^2}{0{,}6 \cdot \overline{v}_2^3} = \dfrac{5}{v_2}$. Für $\overline{v}_2 = 1$ folgt $v_1 = 5$

c) Grenzproduktivität des Faktors v_2:

$$\frac{dx}{dv_2} = 1{,}5 \cdot \overline{v}_1^2 \cdot 2 \cdot v_2 - 0{,}1 \cdot \overline{v}_1^3 \cdot 3 \cdot v_2^2 = 3 \cdot \overline{v}_1^2 \cdot v_2 - 0{,}3 \cdot \overline{v}_1^3 \cdot 3 \cdot v_2^2$$

Aufgabe 6-9

a) Grenzertrags- und Durchschnittsertragsfunktion des Arbeitseinsatzes:

$$\frac{x}{A} = \frac{10 \cdot K^{0,6} \cdot A^{0,4}}{A} = \frac{10K^{0,6}}{A^{0,6}} \qquad \frac{dx}{dA} = 10 \cdot K^{0,6} \cdot A^{0,4-1} = \frac{0{,}4x}{A}$$

b) Produktionselastizität des Faktoreinsatzes: $\varepsilon_{x/A} = 0{,}4$ und $\varepsilon_{x/K} = 0{,}6$

c) Isoquante für ein Outputniveau von 1000 Möbelteilen:

$$1000 = 10 \cdot K^{0,6} \cdot A^{0,4} \Rightarrow K^{0,6} = \frac{100}{A^{0,4}} \Rightarrow K = \left(\frac{100}{A^{0,4}}\right)^{\frac{1}{0,6}} = 100^{\frac{5}{3}} \cdot A^{-\frac{2}{3}}$$

d) Kapitaleinsatz und die Grenzrate der technischen Substitution bei einem Arbeitseinsatz von 100 Einheiten.

$$K = \left(\frac{100}{100^{0,4}}\right)^{\frac{1}{0,6}} = 100^{\frac{5}{3}} \cdot 100^{-\frac{2}{3}} = 100$$

$$\frac{dK}{dA} = -\frac{2}{3} \cdot 100^{\frac{5}{3}} \cdot A^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{3} \cdot 100^{\frac{5}{3}} \cdot A^{-\frac{5}{3}}$$

Für A = 100 lautet die GRTS = -0,667

e) Die Funktion ist linear-homogen, da $\alpha + \beta = 1$, d.h. konstante Skalenerträge.

Aufgabe 6-10

a) Grenzertrags- und Durchschnittsertragsfunktion des Arbeitseinsatzes.

$$\frac{x}{A} = \frac{5 \cdot K^{0,8} \cdot A^{0,5}}{A} = \frac{5 \cdot K^{0,8}}{A^{0,5}} \qquad \frac{dx}{dA} = 5 \cdot K^{0,8} \cdot A^{0,5-1} = \frac{0{,}5 \cdot x}{A}$$

b) Produktionselastizität des Faktoreinsatzes.

$\varepsilon_{x/A} = 0{,}5$ und $\varepsilon_{x/K} = 0{,}8$

c) Isoquante für ein Outputniveau von 1000 Tonnen?

$$1000 = 5 \cdot K^{0,8} \cdot A^{0,5} \;\Rightarrow\; K^{0,8} = \frac{200}{A^{0,5}} \;\Rightarrow\; K = \left(\frac{200}{A^{0,5}}\right)^{\frac{1}{0,8}} = 200^{\frac{5}{4}} \cdot A^{-\frac{5}{8}}$$

d) Kapitaleinsatz und die Grenzrate der technischen Substitution bei einem Arbeitseinsatz von 50 Einheiten:

$$K = \left(\frac{200}{50^{0,5}}\right)^{\frac{1}{0,8}} = 200^{\frac{5}{4}} \cdot 50^{-\frac{5}{8}} = 76,5$$

$$\frac{dK}{dA} = -\frac{2}{3} \cdot 100^{\frac{5}{3}} \cdot A^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{3} \cdot 100^{\frac{5}{3}} \cdot A^{-\frac{5}{3}}$$

Für K = 50 lautet die GRTS = -0,38.

e) Da $\alpha + \beta > 1$, d.h. zunehmende Skalenerträge.

Aufgabe 6-11

a) Bei partieller Faktorvariation werden ein oder mehrere Produktionsfaktoren konstant gehalten und nur die Einsatzmengen eines Faktors variiert. Die Produktionsfunktion beschreibt, wie sich der Output bei einer Veränderung des variablen Faktors bei Konstanz aller übrigen Faktoren verändert. Bei der totalen Faktorvariation werden beide Faktoren so variiert, dass das Einsatzverhältnis der beiden Faktoren, die Faktorintensität, konstant bleibt. Die Produktionsfunktion, die so genannte Niveauertragsfunktion, beschreibt, wie sich der Output entwickelt, wenn sich der Faktoreinsatz verdoppelt, verdreifacht und so weiter.

b) Im Falle einer linear-homogenen Produktionsfunktion steigt der Produktionsertrag proportional zu der Veränderung des Faktoreinsatzbündels.

c) Abnehmende Grenzerträge liegen vor, wenn im Falle einer partiellen Faktorvariation die Ertragszuwächse bei einer weiteren Ausdehnung des variablen Faktors fortlaufend abnehmen. Abnehmende Skalenerträge liegen vor, wenn bei einer totalen Faktorvariation der Gesamtertrag unterproportional zur Steigerung des Faktoreinsatzes zunimmt.

d) Ja. Nehmen Sie als Beispiel folgende Produktionsfunktion: $x = 5 \cdot K^{0,8} \cdot A^{0,5}$. Diese Produktionsfunktion hat wegen $\alpha + \beta > 1$ zunehmender Skalenerträge. Die Grenzproduktivität des Faktors Arbeit lautet $\frac{dx}{dA} = 5 \cdot K^{0,8} \cdot A^{0,5\text{-}1} = \frac{0,5 \cdot x}{A}$. Die zweite Ableitung ist kleiner null. Das heißt die Grenzerträge des Faktors Arbeit nehmen ab.

e) Bei einer Skalenelastizität größer 1 nehmen die Isoquantenabstände ab. Bei einer Skalenelastizität gleich 1 sind sie konstant und bei einer Skalenelastizität kleiner 1 nehmen sie zu.

Aufgabe 6-12

Auf der Isokostenlinie liegen alle Faktorkombinationen, die dem Unternehmen bei den gegebenen Faktorpreisen gleich hohe Kosten verursachen.

Aufgabe 6-13

a) Wenn die Grenzkosten der Produktion höher sind als die variablen Stückkosten, dann hat die variable Durchschnittskostenkurve einen ansteigenden Verlauf.

b) Zunehmende Skalenerträge bedeuten, dass die Ertragszuwächse bei einer weiteren Ausdehnung der Produktion zunehmen. Dies bedeutet aber dass die langfristigen Kosten je Produkteinheit sinken. Die langfristige Stückkostenkurve des Unternehmens wird also zunächst fallen und im Bereich konstanter Skalenerträge konstant bleiben.

c) Langfristige Kostenfunktion und Expansionspfad bei linear-homogenem Produktionsfunktionen verlaufen als Gerade.

d) Die Bedingung für die Minimalkostenkombination besagt, dass das Verhältnis der Grenzproduktivitäten der eingesetzten Faktoren im Minimum gleich dem Faktorpreisverhältnis ist. Somit entspricht die Steigung der Isoquanten in Kostenminimum dem umgekehrten Faktorpreisverhältnis.

e) Der Expansionspfad beschreibt die Ausdehnung des Faktoreinsatzes bei einer fortlaufenden Erhöhung der Produktion bei konstantem Faktoreinsatzverhältnis und konstantem Faktorpreisverhältnis.

Die Faktornachfrage beschreibt die Nachfrage nach einem Produktionsfaktor in Abhängigkeit von dessen Faktorpreis bei gegebener Produktionsmenge und gegebenen Faktorpreisen der übrigen Einsatzfaktoren.

Aufgabe 6-14

a) Die Ertragsfunktion lautet:

$$x = 10 \cdot v_A^{0,8} \cdot 100^{0,5} = 100 \cdot v_A^{0,8}$$

Um die Faktorverbrauchsfunktion zu erhalten, wird die Ertragsfunktion nach den Faktor Arbeit aufgelöst:

$$x^{\frac{1}{0,8}} = 100 \cdot v_A \qquad \Rightarrow \qquad v_A = \frac{1}{100} \cdot x^{1,25}$$

Die Kostengleichung lautet:

$$K = r_A \cdot v_A + r_K \cdot v_K = 25 \cdot \frac{1}{100} \cdot x^{1,25} + 10 \cdot 100 = 1000 + \frac{1}{4} \cdot x^{1,25}$$

Durchschnittskosten:

$$\frac{K}{x} = \frac{1000}{x} + \frac{1}{4} \cdot x^{0,25}$$

Grenzkosten:

$$\frac{dK}{dx} = 1,25 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^{0,25}$$

b) Die Ausbringungsmenge kann auf zwei Arten bestimmt werden. Man ermittelt entweder das Minimum der Durchschnittskostenkurve. Da die Grenzkostenkurve durch das Minimum der Durchschnittskosten verläuft, kann man die Ausbringungsmenge auch ermittelt werden, indem man die Grenzkosten- und Stückkostenkurve gleichsetzt.

$$\frac{d(\frac{K}{x})}{x} = -1 \cdot \frac{1000}{x^2} + 0,25 \frac{1}{4} \cdot x^{0,25-1} = 0$$

$$1000 = \frac{0{,}25}{4} \cdot x^{0{,}25-1} \cdot x^2$$

$$x = \left(\frac{400}{0{,}25}\right)^{\frac{1}{1{,}25}} = 2308{,}32$$

alternativ:

$$\frac{1000}{x} + \frac{1}{4} \cdot x^{0{,}25} = \frac{1{,}25}{4} \cdot x^{0{,}25}$$

Aufgabe 6-15

a) Variablen Kosten: $K_v = 0{,}5x^3 - 2x^2 + 4x$

Durchschnittliche Gesamtkosten: $\frac{K}{x} = 0{,}5x^2 - 2x^1 + 4 + \frac{100}{x}$

Durchschnittliche variablen Kosten: $\frac{K_v}{x} = 0{,}5x^2 - 2x + 4$

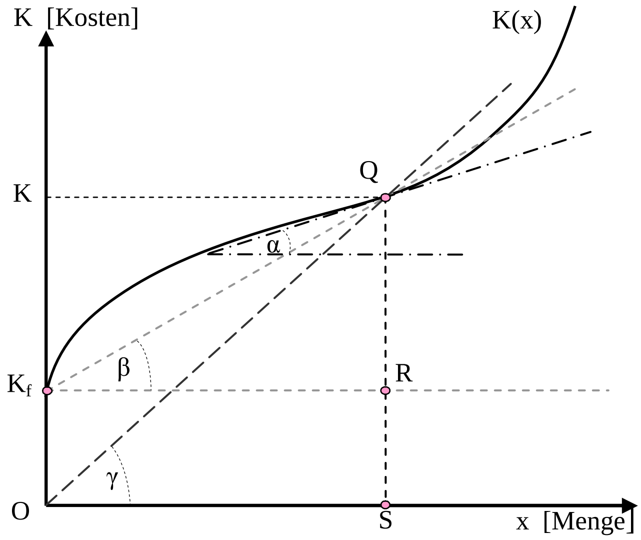
Grenzkosten: $\frac{dK}{dx} = 1{,}5x^2 - 4x + 4$

b) Minimum der durchschnittlichen variablen Kosten

$$\frac{d(\frac{K_v}{x})}{dx} = x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

$$\frac{K_v}{x} = 0{,}5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 4 = 2$$

Aufgabe 6-16



a) Gesamtkosten = $\overline{SQ}$, Variablen Kosten = $\overline{RQ}$, Fixe Kosten = $\overline{SR}$

b) Grenzkosten = Steigung der Tangente in Q = tg α

Durchschnittliche variable Kosten = Steigung des Fahrstrahls von K_f an Q = tg β

Durchschnittliche Gesamtkosten = Steigung des Fahrstrahls von O an Q = tg γ

c) Verlauf der Kurven in b) bei einem linearen Verlauf der Gesamtkostenkurve

Die Stückkostenkurve ist nimmt mit zunehmender Ausbringungsmenge ab. Das Minimum liegt an der Kapazitätsgrenze. Grenzkosten und variable Stückkosten sind unabhängig von der Ausbringungsmenge und konstant.

Aufgabe 6-17

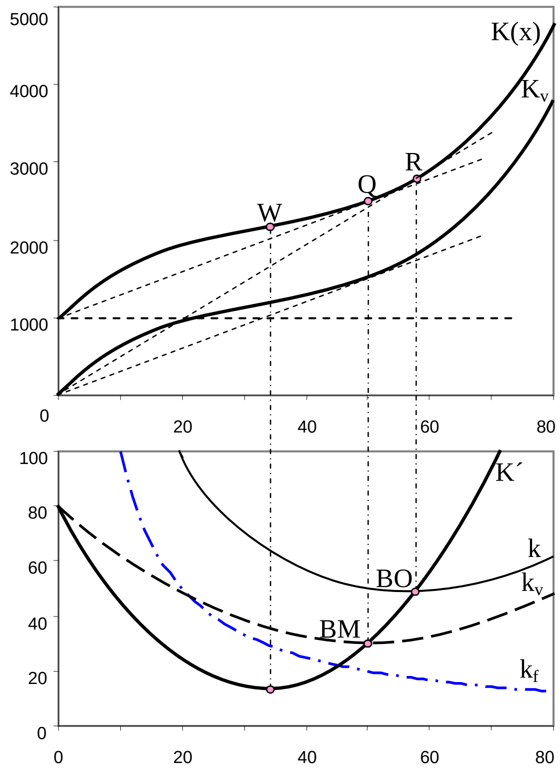
a) Grenzkostenfunktion: $\frac{dK}{dx} = 80 - 4x + 0{,}06x^2$

b) Funktion der durchschnittlichen variablen Kosten: $k_v = \frac{K_v}{x} = 80 - 2x + 0{,}02x^2$

c) Funktion der durchschnittlichen totalen Kosten: $k = \frac{K}{x} = \frac{1000}{x} + 80 - 2x + 0{,}02x^2$

d) Funktion der durchschnittlichen fixen Kosten: $k_f = \frac{K_f}{x} = \frac{1000}{x}$

d) Skizzieren Sie die Funktionen a) bis d) in einem geeigneten Koordinatensystem.



Aufgabe 6-18

Die Wendepunkte der Ertrags- und Kostenfunktion liegen bei derselben Ausbringungsmenge. Der Bereich abnehmender Grenzerträge entspricht folglich dem Bereich zunehmender Grenzkosten. Die Grenzkosten müssen steigen.

Nach dem Minimum der Grenzkosten haben wir zunächst fallende variable Durchschnittskosten und ebenfalls abnehmende durchschnittliche Gesamtkosten. Ein rational handelndes Unternehmen wird jedoch erst anbieten, wenn der Preis mindestens die variablen Durchschnittskosten deckt. Daher müssen die variablen Stückkosten steigen.

Kurzfristig kann ein Unternehmen auch zwischen dem Minimum der variablen Durchschnittskosten und dem Minimum der durchschnittlichen Gesamtkosten anbieten. Die durchschnittlichen Gesamtkosten können daher steigen oder fallen. Langfristig werden auch die gesamten Durchschnittskosten gedeckt sein müssen, so dass langfristig erst ein Angebot ab dem Minimum der durchschnittlichen Gesamtkosten den zu Stande kommt. Die totalen Durchschnittskosten müssen ebenfalls steigen.

Aufgabe 6-19

a) Minimalkostenkombination:

Die Grenzproduktivitäten der Arbeit und des Kapitals lauten:

$$\frac{\partial x}{\partial v_A} = 0{,}8 \cdot 40 \cdot v_A^{0{,}8-1}\, v_K^{\beta} = \frac{0{,}8\,x}{v_A} \qquad \frac{\partial x}{\partial v_K} = 0{,}5 \cdot 40 \cdot v_A^{\alpha}\, v_K^{0{,}5-1} = \frac{0{,}5\,x}{x_K}$$

Die Bedingung für die Minimalkostenkombination besagt, dass das Verhältnis der Grenzproduktivitäten dem Faktorpreisverhältnis entsprechen muss. Wir ermitteln das Verhältnis der Grenzproduktivitäten:

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial v_A}}{\frac{\partial x}{\partial v_K}} = \frac{0{,}8\,x\,v_K}{0{,}5\,x\,v_A} = \frac{1{,}6\,v_K}{v_A}$$

Dies wird dem Verhältnis der Faktorpreise gleichgesetzt. Nach Einsetzen der Werte erhält man:

$$\frac{1{,}6\,v_K}{v_A} = \frac{10}{5} \quad \Rightarrow \quad v_K = 1{,}25 v_A$$

Die optimale Kombination der Faktoreinsatzmengen liegt auf der Isoquante für eine Produktionsmenge von 2000 Einheiten.

$$2000 = 50\,v_A^{0,8}\,v_K^{0,5} \quad \Rightarrow \quad v_K^{0,5} = \frac{40}{v_A^{0,8}} \quad \Rightarrow \quad v_K = \frac{1600}{v_A^{1,6}}$$

Aus den beiden Gleichungen ergeben sich die optimalen Inputmengen:

$$1{,}25 v_A = \frac{1600}{v_A^{1,6}} \quad \Rightarrow \quad v_A^{2,6} = \frac{1600}{1{,}25}$$

$$v_A^* = 15{,}67 \text{ Arbeitseinheiten, } v_K^* = 19{,}59 \text{ Maschineneinheiten}$$

b) Die Produktionskosten sind K = 10*15,67 + 5* 19,59 = 254,65

c) Minimalkostenkombination und die Produktionskosten, wenn der Faktorpreis r_A auf 15 € steigt.

Die Bedingung für die Minimalkostenkombination lautet nun:

$$\frac{1{,}6\,v_K}{v_A} = \frac{15}{5} \quad \Rightarrow \quad v_K = 1{,}875 v_A$$

Die optimale Kombination der Faktoreinsatzmengen liegt auf der Isoquante für eine Produktionsmenge von 2000 Einheiten.

$$2000 = 50\,v_A^{0,8}\,v_K^{0,5} \quad \Rightarrow \quad v_K^{0,5} = \frac{40}{v_A^{0,8}} \quad \Rightarrow \quad v_K = \frac{1600}{v_A^{1,6}}$$

Aus den beiden Gleichungen ergeben sich die optimalen Inputmengen:

$$1{,}875 v_A = \frac{1600}{v_A^{1,6}} \quad \Rightarrow \quad v_A^{2,6} = \frac{1600}{1{,}875}$$

$$v_A^* = 13{,}41 \text{ Arbeitseinheiten, } v_K^* = 25{,}14 \text{ Maschineneinheiten}$$

Die Produktionskosten sind K = 15*15,67 + 5* 19,59 = 326,81